



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA  
Y SOLITONES GRAVITACIONALES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**FÍSICO**

PRESENTA

**EVELIN HERRERA CASTAÑEDA**

ASESOR DE TESIS

**Dr. MÁXIMO AUGUSTO AGÜERO  
GRANADOS**



NOVIEMBRE DE 2018

A mis padres y hermana que han sido mi soporte  
y guías toda la vida.

### **Agradecimientos**

Agradezco a Dios por estar siempre conmigo, incluso cuando creí que me había abandonado. A mis padres Gilberto Herrera y Elvia Castañeda por jamás haberme dejado sola o sin un consejo, porque sin ellos no podría haber terminado esta carrera.

A mi hermana Mariel Herrera por ser como una segunda madre y haberme enseñado tanto.

A mi asesor Máximo Agüero Ganados por tenerme siempre tanta paciencia, por guiarme en todas las dudas que tuve para hacer este trabajo y por nunca perder su buen humor.

A mis amigos Dany, Jessi, Diego y, por supuesto, los *Cocos* por compartirme su buen humor, ayuda, consejos y regaños que alguna vez necesite. Por último, a aquellas personas que, aunque ya no están conmigo, han marcado mi vida para bien.

# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
1.1	Antecedentes del concepto "solitón" . . . . .	5
<b>2</b>	<b>LA TEORÍA DE GRAVITACIÓN SEGÚN EINSTEIN</b>	<b>8</b>
2.1	Antecedentes de la Teoría Especial de la Relatividad . . . . .	8
2.1.1	La Teoría Especial de la Relatividad (T.E.R) . . . . .	9
2.2	La Relatividad General . . . . .	10
2.3	La Ecuación de Gravitación de Einstein . . . . .	16
2.3.1	Tensor Métrico y Métrica de Minkowski . . . . .	17
2.3.2	Tensor de energía-momento . . . . .	20
2.3.3	Los tensores de curvatura:Tensor de Ricci y Tensor de Riemann . . . . .	21
<b>3</b>	<b>EL MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA</b>	<b>27</b>
3.1	Descripción del método y el problema de la dispersión inversa	27
3.1.1	Ley de conservación de KdV y transformación de Miura	28
3.1.2	EL problema inverso del formalismo de Lax . . . . .	33
3.1.3	Generalización ulterior del Método de Dispersión Inversa	36
3.1.4	La condición de consistencia propia en las ecuaciones de Kdv y en Sine-Gordon . . . . .	41
3.1.5	El uso del método en las Ecuaciones de Sine-Gordon .	46
<b>4</b>	<b>METODO DE DISPERSION INVERSA EN GRAVITACIÓN</b>	<b>53</b>
4.1	Solución de Fondo . . . . .	61
4.2	El Caso de la Relatividad General . . . . .	63
<b>5</b>	<b>ESQUEMA DE INTEGRACIÓN</b>	<b>68</b>
5.1	Soluciones de tipo Solitón . . . . .	77

5.2	Las componentes $g_{ab}$ y $f$ de la métrica . . . . .	87
5.3	Ejemplo: la solución para un solitón . . . . .	98
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>101</b>

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

La mayoría de los fenómenos que ocurren en la naturaleza tienen un carácter no lineal. Por ejemplo el movimiento de las olas en el mar, los sistemas meteorológicos, interacción de partículas elementales, propagación de ondas en medios continuos y discretos, en economía, procesos biológicos, etc. La dificultad para tratar con fenómenos no lineales radica en que no pueden ser analizados por “partes” sino que tienen que analizarse en su totalidad. Debido a la abundancia de estos problemas de carácter no lineal en la naturaleza, para los científicos se ha convertido de vital importancia poder resolverlos de la forma más exacta y sencilla que sea posible.

La ecuación de Einstein en gravitación es quizá la idea matemática de más impacto de todos los tiempos. La falta de constancia del tiempo que transcurre en un cuerpo que viaja a velocidades cercanas a la de la luz, la curvatura del espacio-tiempo causada por la masa y energía de los cuerpos que están en él, entre otras ideas, cambiaron radicalmente el curso de la física. Dichas ideas, teóricamente comprobables, necesitan de un sustento matemático. Las ecuaciones de Einstein totalmente no lineales cumplen con este requisito.

A diferencia de los fenómenos lineales, donde el método de Fourier es el más indicado, no existe un método de estudio único para los problemas no lineales. Lo que se propone en este trabajo es que a través del método llamado Método de Dispersión Inversa se pueda encontrar soluciones de tipo solitón a las ecuaciones de Einstein (que comúnmente se les denomina por *gravisolitones*). La obtención de soluciones exactas a estas ecuaciones es de

suma importancia para predecir y valorar la evolución de sistemas gravitacionales.

En términos generales, y a modo de introducción, este método se puede describir de la siguiente manera: se necesita encontrar un grupo de ecuaciones llamadas "espectrales" (ecuaciones diferenciales lineales) cuya condición de integrabilidad sea la misma ecuación no-lineal. Una vez encontradas estas ecuaciones, se necesita encontrar una clase de soluciones conocidas como soluciones de tipo solitónicas o, en específico, soluciones gravisolitónicas. Para estas soluciones será necesario considerar un conjunto de datos que surgen a partir de las condiciones iniciales o también llamados condiciones de Cauchy.

## 1.1 Antecedentes del concepto "solitón"

Las ondas lineales satisfacen el principio de superposición. Esto quiere decir que si dos ondas viajeras se están moviendo a través de un medio, la función de onda resultante en cualquier punto es la suma algebraica de las funciones de onda de forma individual. Cuando hay una interferencia en la onda, lo que sucede es que hay alguna perturbación que la altera de tal forma que deteriora o cambia su amplitud y su dirección. Todas estas propiedades difieren completamente para el caso de las ondas no lineales.

Quizá el antecedente más antiguo, o al menos el más antiguo registrado, de un solitón fue alrededor de 1834 cuando el ingeniero J. Scott Russel vio lo que él considero una onda solitaria en el Canal de la Unión que va de Hermiston de Edimburgo a Gbisgow. A Russel le pareció que se veía como una elevación solitaria que avanzaba sin ningún cambio visible en su forma, y por lo tanto mostraba una traslación "perfecta" (fig.1.1).

Después de varios experimentos con esta onda "solitaria", Russel pudo llegar a las siguientes conclusiones:

- Tiene una velocidad constante y mantiene su forma original.
- Debe existir una relación entre la velocidad de viaje, la profundidad del fluido y la propia altura de la onda.



Figura 1.1: La imagen muestra una ola de agua que no parece cambiar su forma a pesar de haber sufrido una perturbacion con la balsa, todo esto en el Canal de la Unión de Hermiston en Edimburgo a Gbisgow, justo donde J. Scott Russel vio lo mismo en 1834

- Si es suficientemente alta puede descomponerse en otras dos o más ondas solitarias pequeñas.

Fue hasta el año 1895 cuando D.J. Korteweg y G. De Vries lograron deducir una ecuación que fuera capaz de modelar ondas en una especie de canal con poca profundidad como la que fue vista en el canal de Edimburgo. La solución a esta ecuación era del tipo de onda viajera, que vista físicamente, mantenía su forma y era incapaz de deformarse al encontrarse con otra, completando la primera propiedad de Russel en el comportamiento de lo que 100 años más tarde Krustal y Zabusky identificaron como un “solitón”.

Alrededor de 1960 Norman Zabusky y Martin Kruskal experimentaron con dos ondas solitarias que al estar totalmente separadas en un principio, y con la de mayor amplitud y velocidad a la izquierda de la de menor amplitud, la primera rebasó a la segunda llegando al final del viaje en posiciones intercambiadas, es decir interactuando no-linealmente, y por lo tanto violando el principio de superposición. Notaron además, que estas ondas solitarias tenían el peculiar comportamiento de partículas como en la mecánica clásica tradicional. Estos dos científicos acuñaron el nombre de “soliton” por ser el más adecuado ya que la palabra podría referirse a una onda solitaria (“soli”) que se comportara como una partícula (trón).

De acuerdo a las deducciones de Russel, se infiere que contrario a una onda



lineal, una no lineal (como un solitón) al sufrir una colisión o trasposición con otra onda, no se destruye. Cuando esto ocurre la onda se comporta elásticamente. El que una onda sea elástica tiene que ver con la "integrabilidad" de la ecuación que la describe. Sin embargo, aunque exclusivas y raras, existen ondas elásticas descritas por ecuaciones no integrables, es decir que no cuentan con una solución exacta. Un ejemplo de ello es la ecuación de difusión no-lineal y la ecuación cubica-quinta de Schrödinger.

La conclusión que se puede decir hasta ahora acerca del concepto de "solitón", es que es una onda viajera y solitaria que cumple con las propiedades de una onda no lineal, y a su vez de una partícula.

## Capítulo 2

# LA TEORÍA DE GRAVITACIÓN SEGÚN EINSTEIN

### 2.1 Antecedentes de la Teoría Especial de la Relatividad

Uno de los sucesos más importantes que prepararon el terreno para una teoría relativista fue el intento de Michelson y Morley por demostrar de una vez la existencia del éter, usando rayos de luz proyectándolos en un cierto acomodo de espejos. Hasta entonces se creía que la Tierra, y cualquier cuerpo en general en el Universo, estaba sumergido en esta especie de medio que, aunque invisible, influía en el estado de movimiento de cualquier cuerpo, partícula u onda, incluida la luz. Así que, cuando el experimento falló, se mencionaron justificaciones entre las más populares estaba negar que la luz tenía una velocidad cte. respecto al éter. Ritz propuso que la velocidad de la luz dependía de la fuente de ésta. Por su parte, Fitzgerald e, independientemente, H.A, Lorentz, fueron los primeros en poder explicar los resultados de Michelson-Morley. Entre sus conclusiones resalta el siguiente enunciado:

*Cualquier cuerpo se contrae por un factor de  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , en la misma dirección de su movimiento a través del éter.*

Para justificar este enunciado, Lorentz desarrolló una teoría electromagnética y sobre la estructura de la materia de los cuerpos en movimiento a través del éter. Supuso que la estructura atómica de un cuerpo se altera tan solo por viajar a través del éter. Estos cambios alteran siempre las dimensiones del cuerpo impidiendo que se pueda detectar dicho movimiento a través de este medio. Por ejemplo, si se usará alguna varilla, u otro instrumento, para medir la contracción de longitud de otro objeto la misma varilla sufriría su propia contracción.

### 2.1.1 La Teoría Especial de la Relatividad (T.E.R)

Fue poco después de publicar Lorentz su trabajo cuando Albert Einstein mostró la Teoría Especial de la Relatividad en su trabajo: "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento". Sus resultados eran básicamente los mismos que Lorentz, sin embargo las bases eran totalmente distintas; mientras Lorentz desarrolló su trabajo con el fin de justificar los resultados del experimento de Michelson-Morley, Einstein siempre sostenía que no se podía seguir creyendo en la existencia del éter cuando no había prueba alguna que la demostrara. Así, bajo sus propias deducciones él llegó a postular los siguientes enunciados que formaron los pilares de su teoría relativista:

- Las leyes de la electrodinámica y la óptica, así como las de mecánica, son igual de válidas en todos los sistemas de referencia inerciales
- Ya que el éter no existe, entonces la luz debe viajar a través del vacío y con una velocidad definida " $c$ " respecto a cualquier sistema inercial de referencia, independientemente del estado de movimiento del cuerpo emisor

Mientras Lorentz daba por hecho la contracción de longitudes y la no constancia del tiempo, para Einstein éstos eran *resultados* de ideas como que el movimiento absoluto no es medible y que todo movimiento es relativo a otro, por lo que aceptar al éter como la única cosa firme y absoluta en el Universo era totalmente inconcebible. Además, la teoría de Einstein tiene la ventaja de no estar restringida a los fenómenos electromagnéticos, el mismo principio establece que los resultados de este trabajo son aplicables para todas las leyes de la física, y en cuanto a la constancia de la luz es una constante

universal aplicable a cualquier fenómeno físico.

La ecuación de Einstein en gravitación abarca conceptos como la curvatura del espacio-tiempo y los sistemas no-inerciales, mientras que en la Relatividad especial fue desarrollada exclusivamente para sistemas de referencia inerciales, es decir para sistemas que básicamente son generados por cuerpos en caída libre o, lo que es lo mismo, sujetos exclusivamente a un campo gravitatorio y propios de un espacio-tiempo plano o más conocido como espacio de Minkowski.

Por último, un tercer resultado bastante fuerte que se obtuvo de esta teoría fue establecer la equivalencia entre la masa y la energía bajo ciertas condiciones. Por esto se entiende que una puede llegar a transformarse en la otra, de tal manera que:

$$E = mc^2 \tag{2.1}$$

## 2.2 La Relatividad General

Cuando la T.E.R. salió a la luz, algunas interrogantes físicas fueron resueltas. Sin embargo esta teoría no podía ser considerada universal gracias a que se mantenía funcional sólo bajo ciertos márgenes y condiciones. Einstein sabía que su teoría relativista había sido construida bajo la idea de sistemas de referencia no acelerados, es decir inerciales, pero sus interrogantes surgieron al pensar en fenómenos o situaciones que se dieran en sistemas de referencia acelerados (no inerciales); en estos sistemas, ¿las leyes físicas se cumplen igual que como se cumplen en sistemas no acelerados? Además, y como se verá adelante, esta teoría relativista tenía un serio problema que resolver y era que, aparentemente, se contradecía frente a la teoría, hasta entonces aceptada y comprobada, de Gravitación de Newton. Así que, Einstein estaba consciente de que si bien su T.E.R. había sido satisfactoria en la teoría electromagnética y la óptica, parecía ser insatisfactoria en la gravitación. Así es como podrían resaltarse los siguientes puntos como 2 importantes razones

para buscar una teoría relativista más completa:

- La incompatibilidad entre la T.E.R. con la Teoría de la Gravitación de Newton.
- Considerar a los sistemas de referencia acelerados en una teoría relativista.

Respecto a la incompatibilidad de la T.E.R. con la teoría de la Gravitación, hay que entender el concepto de acción a distancia, explícitamente, la acción instantánea a distancia. Éste principio fue inicialmente pensado para la interacción entre partículas, sin embargo está implícito en la ley de la Gravitación Universal. La acción a distancia es una característica de las partículas que generan campos de fuerzas permitiendo que haya una interacción con otras partículas, se dice entonces que para cada instante de tiempo las fuerzas de otras partículas sobre una en concreto dependen de las posiciones de éstas justo en ese mismo instante. Este principio puede verse en la Teoría Gravitacional de Newton. Considerese a cada partícula como cualquier otro cuerpo con su propio sistema de referencia, la fuerza gravitacional que ejerce uno o varios cuerpos sobre uno en específico depende de la posición de uno con respecto a otro en un mismo instante dado, quiere decir que la fuerza de atracción gravitacional entre ambos cuerpos es causada por la posición de estos para un instante  $t_1$  igual para ambos sistemas de referencia, luego esta fuerza puede variar para la posición que estos cuerpos tomen en el instante  $t_2$ , y así sucesivamente.

El primer principio de la T.E.R. establece que toda ley física debe funcionar igual para cualquier sistema de referencia inercial, y para que esta invarianza en las leyes se cumpla éstas deben ajustarse de acuerdo a las transformaciones de Lorentz, este es un hecho comprobado. Ahora, si estas transformaciones tienen como uno de sus fundamentos el carácter relativo del tiempo, pensar que una ley física, como la ley de la Gravitación Universal, asume estrictamente al tiempo como algo absoluto y constante, en automático la hace una ley incapaz de someterse a tales transformaciones lo que la excluye del primer principio relativista. Así que la cuestión era ¿cómo puede una ley, aparentemente funcional, estar excluida y en contra de una teoría que busca formular a toda la física para asegurar su validez en

cualquier sistema inercial?

Para que la T.E.R sea una teoría más completa de sistemas no inerciales, existe un principio sumamente importante, éste es el *principio de equivalencia*. Básicamente este principio dicta lo siguiente:

Un campo gravitatorio (uniforme) es equivalente a un marco de referencia acelerado.

Para que Albert Einstein pudiera llegar a esta conclusión primero observo que al aplicar la segunda ley de Newton en el caso de la fuerza gravitacional se podía suponer que la masa inercial de la ley de Newton era equivalente a la masa gravitatoria de la ley gravitacional, es decir

$$ma = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (2.2)$$

entonces supuso que

$$m_i = m_g \quad (2.3)$$

Lo que quiere decir que no se puede distinguir entre una masa inercial y una masa gravitacional, esto implica entonces que no puede distinguirse entre los efectos en una masa, entiendase a ésta como cualquier cuerpo, provocados por un campo gravitacional uniforme y los efectos que sufriría de estar sujeta a un sistema o marco uniformemente acelerado.

Estas observaciones tuvieron implicaciones brutales en la Teoría Especial de la Relatividad. Si se sabe que los sistemas inerciales son definidos por un campo gravitacional y, de acuerdo al primer principio relativista, todas las leyes físicas deben aplicarse por igual en estos sistemas, ¿por qué las leyes físicas, como la ley de la inercia, funcionaban igual en un marco de referencia inercial que en uno no-inercial, es decir no acelerado como en la nave

que se alejaba de la Tierra?, hasta entonces esta Teoría dejaba fuera a todo marco o sistema de referencia acelerado. Einstein intuía que si la física se decía universal, esto incluye tanto a sistemas de referencia inerciales como no-inerciales, y prueba de ello es el ejemplo anterior; *no se puede distinguir entre un campo gravitacional uniforme y un marco uniformemente acelerado*. Así que Einstein propone que:

- Las leyes de la física deben ser iguales para cualquier sistema de referencia (inercial o no). La Teoría de la Relatividad Especial debe extenderse a una Teoría General Relativista en donde se incluya a los marcos de referencia acelerados.
- Si son indistinguibles un campo gravitatorio de un campo acelerado entonces, implícitamente, se puede decir que la gravedad y la aceleración son también indistinguibles.

### **Curvatura espacio-tiempo**

Ante sus observaciones en el principio de equivalencia, Albert Einstein dedujo que existe una relación directa entre la densidad de materia de un cuerpo y la geometría del espacio-tiempo que lo rodea. Él sabía que ni la posición ni el movimiento de un cuerpo en el espacio-tiempo podían estar determinados por la posición de otro respecto a éste en el mismo instante para ambos, afirmación sugerida por la ley de la Gravitación Universal <sup>1</sup>, para Einstein la posición y movimiento de un cuerpo están determinados por la geometría del espacio tiempo que lo rodea.

Con el desarrollo de esta idea, Einstein estableció la siguiente relación entre la masa y el espacio-tiempo

*La presencia de masa curva el espacio-tiempo*

Para aclarar la relación entre la masa y la curvatura espacio tiempo tómesese como ejemplo al sistema solar. Véase al sistema solar como una gran sábana en la que el Sol es representado por una pelota mucho más grande

---

<sup>1</sup>Recuerdese la contrariedad relativista para asignar objetivamente el mismo instante de tiempo para dos cuerpos en dos sistemas de referencia

que las pelotas usadas para representar a los 8 planetas del sistema planetario. Debido a su mayor tamaño, la pelota que representa al Sol curvará a la sabana haciendo que las pelotas más pequeñas, es decir los 8 planetas, tendieran a acercarse hacia la pelota con mayor densidad, es decir el Sol. En consecuencia, los planetas no parecen ser atraídos por una fuerza gravitacional proveniente del Sol, sino que tienden a ir hacia él porque el espacio en el que están los obliga a hacerlo (fig. 2.1). Para Einstein, la gravedad deja de ser una fuerza de atracción y se convierte en una señal de un espacio no estático, sino uno que llega a deformarse. Así pues, uno de los postulados pilares de la Teoría General de la Relatividad de Einstein queda resumido a:

*La gravedad ya no es más una fuerza convencional, ahora es una manifestación de una curvatura del espacio-tiempo*

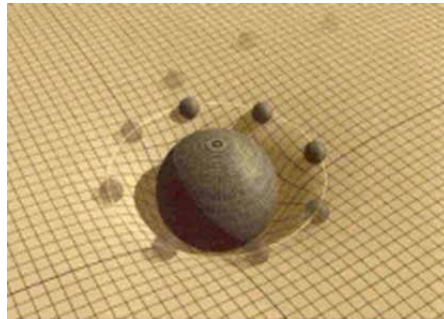


Figura 2.1: La figura muestra como por una pronunciada deformación en el espacio causada por un cuerpo significativamente más grande, uno mucho más pequeño es atraído hacia él trazando además algo parecido a una órbita

Antes de las deducciones de Einstein, matemáticos como Riemann y Lobashevski ya habían desarrollado la idea de la curvatura del espacio, sin embargo hasta antes de la Teoría General de la Relatividad no se le había dado gran importancia a esta idea. Cuando Einstein publicó su teoría en 1915, extendió los efectos gravitatorios sobre el espacio a la misma luz, él supuso que la equivalencia entre aceleración y gravedad se extiende a los fenómenos electromagnéticos, esto quiere decir que, de acuerdo a sus teorías, los rayos de luz también deberían curvarse en presencia de un campo gravitatorio. En 1919 los físicos Frank Dyson, Arthur Eddington y Charles Davidson lograron corroborar el trabajo de este científico alemán al fotografiar a difer-



entes estrellas cercanas al Sol durante un eclipse que duro más de 6 minutos con lo que corroboraron que el campo gravitacional del Sol dobla de tal forma al espacio, y a la luz de estas estrellas, que los rayos de luz que llegaron a la Tierra parecían dar una ubicación de estos astros distinta de la conocida hasta entonces a través de telescopios (fig 2.2)

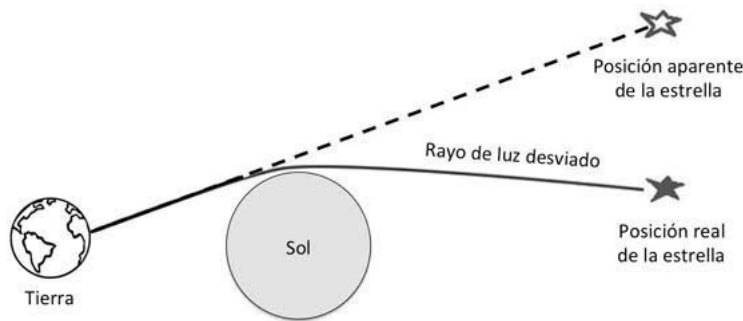


Figura 2.2: Rayo de luz desviado por el campo gravitacional del Sol. El experimento mostró una curvatura del rayo de luz de 1.74 segundos de arco desde la posición original de una estrella hasta su posición aparente

En la Teoría de la Relatividad General, toda masa genera en automático una deformación espacial, es de esperarse entonces que entre mayor sea la masa mayor será la deformación que cause. Aunque existe, no siempre es tan fácil detectar la deformación que cualquier cuerpo causa en el espacio-tiempo, por ejemplo, es más evidente la deformación que causa un hoyo negro a sus alrededores que la deformación que causa una estrella de las dimensiones del Sol, y aún más difícil es detectar la deformación que causa un planeta como la Tierra. En cuanto al tiempo, recuerdese que éste ya no es más una cte, ahora es una variable que cambia de acuerdo a ciertas condiciones; entre más grande sea la densidad de materia en un cuerpo mayor será su campo gravitatorio y entre más grande sea su campo gravitatorio mayor será la curvatura que cause en el espacio y, finalmente, entre más grande sea el pozo de potencial Gravitacional de un cuerpo, el tiempo para él pasará cada vez más lento.

Si se diera por hecho que, en general, el Universo es espacialmente curvo, podría dejar fuera de toda consideración a los sistemas inerciales. Sucede entonces que, dentro del gran espacio-tiempo curvo, se determinan espacios

locales en donde la curvatura es considerablemente pequeña y más difícil de detectar. en otras palabras, se considera que un espacio es plano cuando se puede dar por hecho que su campo gravitatorio es nulo (masa nula), o que al menos la masa existente es lo suficientemente pequeña para no causar un campo gravitatorio considerablemente grande (un campo débil) y es en estos espacios, localmente planos, donde se trabaja con sistemas de referencia inerciales.

Considerar a ciertos espacios como localmente planos, dentro de un espacio que, en general se curva, justifica por qué la Teoría General de la Relatividad tiene como un caso especial a la Teoría Especial de la Relatividad. El principio de equivalencia permite ver a la física de la Relatividad General localmente indistinguible de la Relatividad Especial, porque la segunda se limita a estudiar sistemas de referencia inerciales, pero estos sistemas son considerados partes locales de un Universo espacio-tiempo que se curva, espacios locales considerados localmente planos comparados al resto del espacio-tiempo en el Universo infinito.

## 2.3 La Ecuación de Gravitación de Einstein

Cuando se reformuló la teoría sobre la gravedad de Newton, la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional jugó un papel fundamental. En esta teoría la fuerza de gravedad  $\vec{f}$  sobre una partícula de masa gravitatoria  $m_G$  se representa como

$$\vec{f} = m_G \vec{g} \quad (2.4)$$

Donde  $\vec{g}$  es la aceleración provocada por un campo gravitatorio, campo que a su vez es causado por un potencial gravitatorio  $\Theta$ , pues este potencial  $\Theta$  puede ser determinado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 4\pi G \rho \quad (2.5)$$

Donde  $G$  es la cte. de la gravitación universal y  $\rho$  la densidad de materia. Ya que esta ecuación genera al campo gravitacional responsable de  $\bar{g}$ . La ecuación de Poisson es considerada como la ecuación de campo de la Teoría Newtoniana, la cual que es una variación de la ecuación de Laplace para el potencial gravitatorio (o potencial eléctrico) y que relaciona a este potencial con la distribución de masa (o carga eléctrica) y con la densidad de esta masa representada por  $\rho$ .

Las ecuaciones de campo de Einstein son el análogo a la ecuación de campo de Newton, solo que éstas consisten en un grupo de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que en lugar de relacionar a la materia con un pozo gravitacional describen la relación entre una densidad de materia y una curvatura del espacio tiempo. La ecuación de campo de Einstein se enuncia como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{c^4} \quad (2.6)$$

$R_{\mu\nu}$  es el Tensor de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  el Tensor métrico,  $R$  el escalar de Ricci,  $G$  la cte. de gravitación universal y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-impulso o tensor de energía-momento

Mas adelante se hará una básica y superficial descripción de las partes fundamentales de esta expresión.

### 2.3.1 Tensor Métrico y Métrica de Minkowski

La métrica es una expresión matemática que describe al espacio que hay entre dos puntos o eventos. Por ejemplo, una vez que se conoce la métrica en un determinado espacio-tiempo, se puede determinar si éste es plano como en la Teoría Especial de la Relatividad, o si es curvo como en la Teoría General de la Relatividad.

Pitágoras estableció que si se tenían dos puntos en un espacio de tres dimensiones y en coordenadas cartesianas rectangulares  $A(x_1, y_1, z_1)$  y  $C(x_2, y_2, z_2)$ , entonces es posible expresar el cuadrado de la distancia entre ambos con la expresión

$$\|AC\|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (2.7)$$

Esta expresión no es otra cosa que la extensión en tres dimensiones del teorema de Pitágoras. La forma de este vector dependerá de las coordenadas del espacio donde esten ubicados los puntos  $A$  y  $C$ . A este vector se le nombró elemento de línea, diferencial de longitud de arco o simplemente métrica, y se le reconoce por la notación  $ds^2$ . Esta métrica se puede extender a 4 dimensiones. Para los puntos  $A(x^1, x^2, x^3, x^4)$  y  $C(y^1, y^2, y^3, y^4)$ , usando coordenadas generalizadas, su métrica es

$$ds^2 = \|AC\|^2 = (y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + (y^3 - x^3)^2 + (y^4 - x^4)^2, \quad (2.8)$$

Ahora, usando el convenio de suma de Einstein y el símbolo de Kronecker (2.8) luce como

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, 4) \quad (2.9)$$

Esto es para el caso de un espacio de 4 dimensiones con un sistema de referencia con coordenadas cartesianas rectangulares. Si se quisiera pasar de un sistema de referencia a otro, esta métrica dejaría de describir la distancia entre los dos puntos o eventos. Para que la métrica se conserve cuando los puntos se vean desde sistemas de referencia distintos, y con coordenadas distintas, se necesita considerar al término  $g_{ij}$ , de tal forma que

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, 4) \quad (2.10)$$

Este nuevo término  $g_{ij}$  es una matriz cuadrada  $4 \times 4$  llamada tensor métrico. La principal función de este tensor es mantener la distancia de un marco de referencia a otro, por lo que la forma de sus entradas depende del espacio y de las coordenadas que se usen. Así, la expresión (2.10) representa a cualquier métrica siendo  $g_{ij}$  el único término cambiante de acuerdo al espacio y a las coordenadas que se estén usando. Por ejemplo, la métrica en coordenadas cartesianas (2.9) es básicamente (2.10) pero con  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

Para el caso de la Teoría Especial de la Relatividad, donde el espacio se considera plano, la distancia entre dos puntos o eventos se representa a través de la métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.11)$$

Esta métrica es comúnmente conocida como la métrica espacio-tiempo de Minkowski. Se considera al espacio de Minkowsky como un espacio de 4 dimensiones y curvatura nula que se usa en el marco de la T.E.R.

El tensor métrico  $g_{\nu\mu}$  tiene la propiedad de ser simétrico, quiere decir que aunque los índices  $\nu$  y  $\mu$  en los coeficientes permuten, sus propiedades no cambian. Los índices  $i, j$  fueron cambiados por los índices  $\nu, \mu$  tan solo por conveniencia para su uso futuro en este trabajo.

Así pues, la métrica para un espacio de Minkowski sería análoga a (2.10), pero ahora el tensor métrico que le corresponde deja de ser  $g_{ij}$  para ser la matriz  $g_{\nu\mu}$  por lo que (2.10), para el espacio de Minkowsky, sería

$$ds^2 = g_{\nu\mu}dx^\nu dx^\mu \quad (\nu, \mu = 1, \dots, 4) \quad (2.12)$$

Una importante propiedad del espacio-tiempo son las geodésicas, es decir las distancias cortas entre dos puntos en un espacio tiempo curvo.

### 2.3.2 Tensor de energía-momento

Ya que la masa determina la geometría del espacio-tiempo, y por (2.1) sabemos que la energía también puede curvarlo, sería bueno saber como definir la cantidad de materia y energía, y más aún, cómo el flujo de éstas afecta a la forma del espacio. Entonces, en la ecuación de la métrica se tiene que incluir al tensor  $T_{\nu\mu}$ . Este tensor es conocido como el tensor energía-tension, tensor de energía-impulso o tensor de energía-momentum.

En las ecuaciones de Maxwell se representa, en su forma tensorial, al campo electromagnético  $F$  en cualquier punto y se le relaciona con su fuente, ésta fuente es la densidad de corriente en ese punto y es representada por un cuadvectores  $j$ . Análogamente, las ecuaciones de campo de Einstein intentan relacionar la curvatura del espacio con su fuente, ésta fuente son la energía y el momento de la materia. Para que se logre este objetivo hay que lograr primero que la fuente (la energía y el momento de la materia) pueda expresarse de igual modo desde y para cualquier punto en el espacio, y la mejor forma para hacerlo es a través de un tensor ya que éstos son expresiones matemáticas que no cambian ante las transformaciones de Lorentz.

Este tensor es de rango 2 (visto como una matriz de 16 entradas) y depende de la densidad de materia o energía en el punto en cuestión del espacio. Cuando se ve a la materia o energía como un fluido medido por un observador inercial, este tensor se expresa

$$T_x = \rho_0(x)\mathbf{u}(x) \otimes \mathbf{u}(x) \tag{2.13}$$

$\rho_0(x)$  es la densidad del fluido medida sobre un eje  $x$  por el observador inercial del mismo sistema donde se mueve el fluido, es decir por el observador propio, y  $\mathbf{u}(x)$  es el cuadvectores para la velocidad del fluido.

En un sistema arbitrario de coordenadas  $x^\nu$ , en el cual el cuadvectores velocidad del elemento de fluido es  $u^\nu$ , las componentes covariantes de este tensor son

$$T_{\nu\mu} = \rho_0 u^\nu u^\mu \quad (2.14)$$

Cuando se estudia a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío; en un espacio lejos de una masa o en ausencia de cualquier energía radiante, el tensor de energía-momento toma la forma  $T_{\nu\mu} = 0$ , y (2.6) se ve como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.15)$$

### 2.3.3 Los tensores de curvatura: Tensor de Ricci y Tensor de Riemann

La descripción de la curvatura del espacio-tiempo se puede hacer gracias al Tensor de Riemann y el Tensor de Ricci. El tensor de Riemann se encarga de describir la curvatura de un espacio. Es capaz de medir la desviación que sufren dos geodésicas al desplazarse por una superficie curvada, este tensor tiene la siguiente forma

$$R_{\mu\nu c}^d \equiv \partial_\nu \Gamma_{\mu c}^d - \partial_c \Gamma_{\mu\nu}^d + \Gamma_{\mu c}^e \Gamma_{e\nu}^d - \Gamma_{\mu\nu}^e \Gamma_{ec}^d, \quad (2.16)$$

donde, los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^h$  se definen así <sup>2</sup>:

---

<sup>2</sup>Los índices  $i, j, h, k$  son usados como parte de la definición de estos símbolos, así pues deben ser cambiados por los índices de (2.18)

$$\Gamma_{ij}^h = (ij, k)g^{kh} = \frac{1}{2}g^{kh} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$$

$v_a$  viene de considerar un campo vectorial arbitrario cuyas componentes son precisamente  $v_\mu$ . Entonces, la derivada covariante de esta componente esta dada por

$$\nabla_\nu v_\mu = \partial_\nu v_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^d v_d$$

Usando dos veces esta derivada covariante se logra definir el tensor de Riemann

$$\nabla_c \nabla_\nu v_\mu - \nabla_\nu \nabla_c v_\mu = R_{\mu\nu c}^d v_d \quad (2.17)$$

donde  $R_{\mu\nu c}^d$  es el propio tensor de Riemann.

En pocas palabras, el tensor de Riemann es un tensor de rango 4 que describe la curvatura del espacio y que esta definido en términos de la primera y la segunda derivada del tensor métrico.

A la contracción del tensor de curvatura de rango 4 a uno de rango 2 se le conoce como tensor de Ricci. Esto es, una contracción del primer y último índice del tensor de Riemann es equivalente al tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu c}^c$$

Y la forma de este tensor  $R_{\mu\nu}$  es



$$R_{\mu\nu} = \partial_c \Gamma_{\mu\nu}^c - \partial_\nu \Gamma_{\mu c}^c + \Gamma_{\mu\nu}^c \Gamma_{\mu d}^c - \Gamma_{\nu c}^d \quad (2.18)$$

A su vez, el tensor de Ricci puede contraerse hasta llegar a lo que se conoce como el escalar de Ricci o escalar de curvatura  $R$ . Para contraer al tensor  $R_{\mu\nu}$  se necesita al tensor métrico, de tal forma que

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

Finalmente, se puede definir el tensor de Einstein como la combinación de los tensores anteriores

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.20)$$

Que en esencia no es otra cosa que la parte izquierda de la ecuación de Einstein (2.6). Para analizar la parte derecha de (2.6), recuerdese la necesidad de Einstein de relacionar la curvatura del espacio-tiempo con la energía y la materia, además de este postulado, Einstein propuso la siguiente relación

$$R_{\mu\nu} = 4\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.21)$$

El lado derecho es parte de la ecuación de Poisson; es decir  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$ . Sin embargo esta ecuación tenía un problema, y era que no era compatible con la ley de la conservación de la energía, ya que la derivada covariante del Tensor de energía-momento es cero.

$$\nabla_\nu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.22)$$

Lo que iba en contra de la universalidad de las leyes de la física, uno de sus postulados más importantes. Además, si se trabaja con ciertas idéntidades del Tensor de Bianchi se puede deducir que, por el contrario al tensor  $T_{\mu\nu}$ , la derivada covariante del tensor de Ricci es distinta de cero.

Si

$$\nabla_{\beta}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0 \quad (2.23)$$

entonces

$$\nabla_{\nu}R_{\mu\nu} \neq 0 \quad (2.24)$$

En este caso no podía existir ninguna relación de proporcionalidad entre el Tensor de Ricci y el Tensor de energía momento. Así que Einstein tuvo que modificarla.

Considerese una forma popular de la materia en el contexto de la Relatividad General; por ejemplo un fluido perfecto. Este fluido no presenta ni viscosidad o flujo de calor, entonces se especifica solo en términos de la energía en reposo. Podemos usar  $U^{\mu}$  para representar la cuarta velocidad de un elemento del fluido. Así, el Tensor de energía momento toma la forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_{\mu}U_{\nu} = Rg_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

Donde  $\rho$  y  $p$  son la densidad y la presión del fluido respectivamente y  $\Phi$  es el potencial gravitacional.

Si se eleva un índice y se usa la normalización  $g^{\mu\mu}U_\mu U_\nu = -1$  podemos obtener una versión aun más clara del Tensor  $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Este último, debe ser capaz de describir las leyes de la conservación de energía asumiendo que (2.22) se cumple. Para esta nueva situación, si la Identidad de Bianchi garantiza que la divergencia del Tensor  $G_{\mu\nu}$  también es nula, entonces podemos afirmar que la ecuación de Einstein de Gravitación garantiza también la conservación de la energía y el momento. Aún así, en Relatividad General no se puede hablar de una noción global de la conservación de la energía. Así que la ecuación (2.22) funciona de forma local. <sup>3</sup>.

Considere ahora la ecuación de Poisson que se mencionó antes. Para el Potencial Newtoniano

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.27)$$

Para la teoría relativista se puede permitir cambiar a  $\rho$  por  $T_{\mu\nu}$  en esta última ecuación,  $T_{\mu\nu}$  debe ser proporcional a un tensor de dos índices, que además sea de segundo orden y que actúe como un operador diferencial en el campo gravitatorio; es decir  $T_{\mu\nu}$  debe ser proporcional a la métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Ya que  $G_{\mu\nu}$  es el único tensor de dos índices de segundo orden en sus derivadas de la métrica, se puede ver que el tensor de Einstein cumple precisamente con las dos condiciones mencionadas arriba, y para los fines de este trabajo, ahora se puede relacionar tanto al tensor  $G_{\mu\nu}$  con la conservación de la energía momento con ayuda de la ecuación de Poisson, tal como lo hizo Einstein

---

<sup>3</sup>Es importante decir que la derivada covariante que aparece en (2.22) permite que esta ecuación de cuentas de la transferencia de energía de vuelta y vuelta entre la materia y el campo gravitatorio

en su famosa ecuación de Gavitación

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 2\nabla^2\Phi \quad (2.28)$$

donde

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.29)$$

Con esto queda definida la parte derecha de (2.6)

# Capítulo 3

## EL MÉTODO DE DISPERSIÓN INVERSA

### 3.1 Descripción del método y el problema de la dispersión inversa

El Método de Dispersión Inversa, en general, permite resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales pero que son totalmente integrables. A grandes rasgos, lo que se hace es encontrar o determinar un sistema de ecuaciones espectrales asociadas a la ecuación no lineal, y en base a una solución particular generar nuevas soluciones de tipo solitón. Estas ecuaciones espectrales no son otra cosa que ecuaciones diferenciales lineales, de las que se obtienen los conocidos pares de operadores de Lax, y que al ser integradas precisamente tienen como condición a la misma ecuación diferencial no lineal que se busca resolver.

Las ecuaciones no lineales diferenciales en las que se aplicó por primera vez este método fueron la ecuación de Korteweg-de Vries y las de Sine-Gordon, estas ecuaciones admiten soluciones de tipo onda viajera. También es posible aplicar el MDI para resolver ecuaciones de orden superior como en el caso de la ecuación de Einstein para Gravitación.

Siguiendo la tradición histórica, las ideas principales del método serán mostradas a través de un ejemplo con la ecuación de Korteweg-de Vries y la ecuación de Sine-Gordon.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

Sea ésta posiblemente la forma más común de representar la ecuación de KdV. Esta ecuación describe el movimiento de fluidos en medios de poca profundidad. Específicamente, KdV describe la evolución en la transferencia de calor a través de fluidos (convección). Cuando la dispersión de ondas de un flujo y la convección entran en un cierto equilibrio se forma una onda solitaria, las soluciones que admite esta ecuación son de este tipo.

### 3.1.1 Ley de conservación de KdV y transformación de Miura

Después de casi 70 años de su estudio, fue entre 1965 y 1967 que Gardner, Zabusky y Kruskal redescubrieron a la ecuación de KdV para probar que tenía soluciones con un comportamiento regular, un comportamiento tal como el que tienen las ondas solitarias. Se puede obtener cierta información de las propiedades de las ecuaciones de estas ondas no lineales a través del análisis de sus leyes de conservación, que son relaciones de la forma

$$P_t + Q_x = 0 \tag{3.2}$$

Aquí,  $P$  se llama densidad conservativa y  $Q$  su correspondiente flujo. El sentido físico de estas leyes de conservación, aplicadas en ondas, no es más que la conservación de la masa y el impulso. No es de extrañar que si las ondas solitarias (solitones) se caracterizan por mantener su forma después de una perturbación entonces, éstas deban regirse por ciertas leyes de conservación. La ecuación de KdV es una de estas leyes de conservación

$$u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0 \tag{3.3}$$

A mediados de 1960 se postuló que el número de leyes de conservación podría ser infinito Miura R. [15]. Esta hipótesis fue corroborada por Gardner quien introdujo la transformación

$$u = w + i\epsilon w_x + \epsilon^2 w^2, \tag{3.4}$$

con  $\epsilon$  como un parámetro arbitrario. Al reemplazar la ec. (3.4) en (3.1) se obtiene

$$w_t + 6(w + \epsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} = 0 \quad (3.5)$$

Para la función  $w$  se cumplen las condiciones de frontera nulas en el infinito, por tal motivo integrando la ecuación (3.5) por todo el eje  $x$  se obtiene la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} w dx = 0 \quad (3.6)$$

Si expresamos ahora a  $w$  a través de una serie de potencias de  $\epsilon$ :

$$w = w_0(u) + \epsilon w_1(u) + \epsilon^2 w_2(u) + \dots \quad (3.7)$$

Usando el álgebra, de aquí se puede ver que el sistema (3.5) posee infinitas integrales de movimiento

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} w_n dx \quad (3.8)$$

Así, las tres primeras leyes de conservación resultan verse como

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u dx, \quad (3.9)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx, \quad (3.10)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( u^3 - \frac{u_x^2}{2} \right) dx. \quad (3.11)$$

A (3.1) se le considera una ecuación de un sistema hamiltoniano integrable con infinitos grados de libertad. De mecánica clásica sabemos que si

el hamiltoniano de un sistema de  $N$  grados de libertad posee  $N$  integrales de movimiento independientes entonces, ese sistema es integrable y permite una solución exacta mediante nuevas variables canónicas llamadas acción y ángulo, significa también que existe la posibilidad de obtener las soluciones exactas analíticas de la ecuación (3.1) mediante un método desarrollado por Gardner, Green, Kruskal y Miura en 1967 llamado Método de Dispersión Inversa. Resolver a la ecuación no lineal de Korteweg-de Vries consiste en llegar a la forma de la función potencial  $u(x, t)$ .

### Aplicación del Método de Dispersion Inversa

Veamos ahora la siguiente transformación

$$w + \frac{1}{2\epsilon^2} = \frac{i\psi_x}{\epsilon\psi} \quad (3.12)$$

al aplicarla a la ecuación (3.1) ésta se transforma en

$$\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0 \quad (3.13)$$

con  $\lambda = \frac{1}{4\epsilon}$ . Esta ecuación es análoga a la ecuación de Schrodinger estacionaria de la mecánica cuántica con el potencial  $V = -u(x, t)$ , que precisamente es la incógnita de la ecuación (3.1), y con energía  $\lambda$ . Aquí,  $t$  entra como si fuese un parámetro más. Usando las ideas y el aparato matemático de la mecánica cuántica, los autores de [12] crearon un método de solución exacta de la ecuación de KdV que fue llamado "Inverse scattering transform". Para integrar a la ecuación no lineal de KdV, el problema espectral de valores propios que se le asocia es de la forma de la ecuación estacionaria y unidimensional de Schrodinger para la mecánica cuántica. Lo que sigue, según el MDI, es encontrar el valor de la incógnita  $V = -u(x, t)$  conociendo los datos de la dispersión del problema mecánico cuántico. La analogía con la mecánica cuántica es totalmente formal; tiene un carácter matemático mas no físico.



La ecuación (3.13) es parte del problema de autovalores y autofunciones para el operador  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x)$ . Este problema de autovalores y autofunciones, como se sabe, puede tener dos tipos de soluciones: cuando el espectro energético es discreto y cuando es continuo. Por ejemplo, y después del análisis, si el espectro es discreto:  $\lambda = \lambda_n$  se llega a la conclusión que la función  $\Psi_n$  de onda en el infinito  $x \rightarrow \infty$  se hace igual a

$$\psi_n \approx c_n(0)e^{8\kappa_n^3 t - \kappa_n x} \quad (3.14)$$

Lo que produce

$$c_n(t) = c_n(0)e^{8\kappa_n^3 t} \quad (3.15)$$

Cuando el espectro es continuo, es decir si  $\lambda = k^2 > 0$ . Cuando  $|x| \rightarrow \infty$  la solución de la ecuación de Schrodinger (3.13) es una combinación lineal de exponentes  $exp(\pm ikx)$ . Sea así que en las fronteras en  $x$  se cumplan las siguientes condiciones

$$\psi \sim e^{-ikx} + R(k, t)e^{ikx}, \quad x \rightarrow \infty \quad (3.16)$$

$$\psi \sim T(x, t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) significa que  $\psi$  se escoge como una función armónica que se acerca al potencial  $V = -u(x, t)$  desde  $x = \infty$ . Alguna parte de la onda pasa a través del potencial con el coeficiente de traspaso  $T$  (coeficiente de translación) y otra parte se refleja con un coeficiente  $R$  (coeficiente de reflexión). El coeficiente de traspaso se torna en una integral de movimiento y el coeficiente de reflexión es

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3 t} \quad (3.18)$$

El espectro continuo del espectro corresponde a la parte no solitónica de la ecuación, que son perturbaciones débiles no lineales también llamadas colas oscilantes. Entonces, la solución  $u(x, t)$  de la ecuación (3.1), con una condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ , se obtiene bajo el siguiente orden figura (3.1). Al principio se soluciona el problema de autovalores para la ecuación (3.13) con el potencial  $u_0(x)$  y se define un conjunto de magnitudes que en mecánica cuántica toman el nombre de *Datos de Dispersión*

$$S = \{\lambda_n, c_n, n = 1, \dots, N; R(k), k^2 > 0\} \quad (3.19)$$

Después, por (3.15) y (3.18) se obtienen los valores de  $c_n(t), R(k, t)$  en cualquier momento de tiempo. Ahora queda reconstruir el potencial de la ecuación de Schrodinger mediante los datos de la dispersión  $S(t)$ , es decir resolver el problema inverso. En la mecánica cuántica fue resuelto este problema y para ello solo hace falta la ecuación integral lineal

$$K(x, y; t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty B(y + z)K(x, z; t)dz = 0 \quad (3.20)$$

que toma por nombre la ecuación de Gelfand Levitan y Marchenko, donde

$$B(x; t) = \sum_{n=1}^N c_n(t)e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t)e^{ikx} dk \quad (3.21)$$

De la ecuación (3.20) se encuentra la función  $K(x, y; t)$  con la que, finalmente, se le da forma al potencial incógnita

$$u(x, t) = 2\frac{d}{dx}K(x, x; t) \quad (3.22)$$

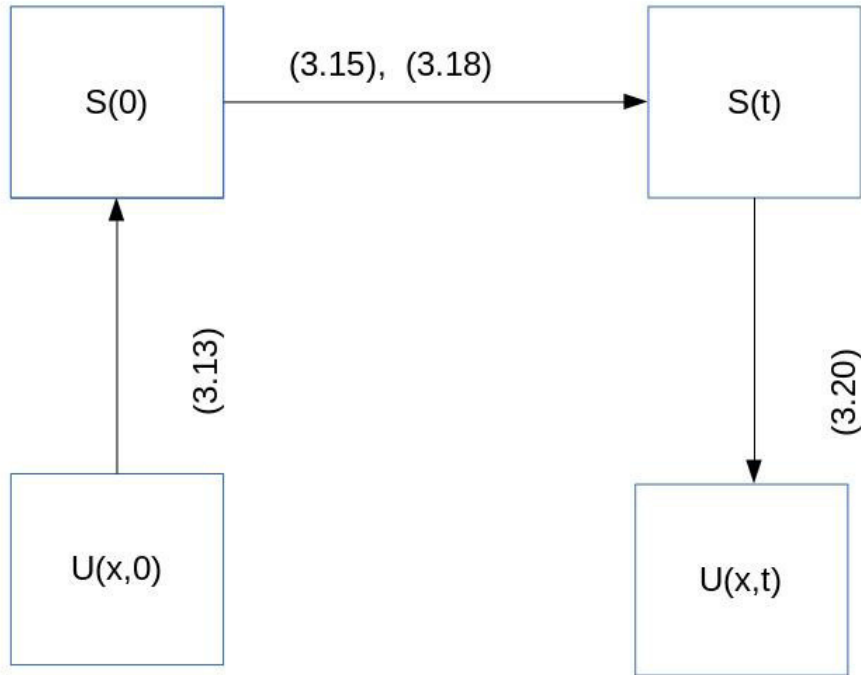


Figura 3.1: Esquema que describe los pasos para resolver la ecuación de evolución mediante el método de dispersión inversa, usando inicialmente  $U(x,0)$  y datos iniciales de dispersión para llegar a obtener al potencial  $U(x,t)$

### 3.1.2 EL problema inverso del formalismo de Lax

La generalización del método del problema inverso fue realizado por Lax [5]; con el uso de los operadores de Lax se simplificó significativamente todo el cálculo que involucraba al problema de dispersión inversa. Lo que sigue es mostrar la forma de éstos operadores y mostrar el problema espectral completo al que pertenece (3.13). Ya se había mencionado que la ecuación (3.13) era parte del problema espectral asociado a la ecuación de KdV para un operador también mencionado antes. Entonces, con la finalidad de representar a (3.1) en forma de una condición de compatibilidad para este problema,

vease a (3.13) escrita como la primera ecuación de este problema lineal

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi \quad (3.23)$$

$$\psi_t = \hat{A}\psi \quad (3.24)$$

He aqui, completo, el sistema de ecuaciones diferenciales lineales asociado a la ecuación no lineal (3.1) donde los operadores lineales  $\hat{L}$  y  $\hat{A}$  tienen la forma

$$\hat{L} = -(\hat{D}^2 + u(x, t)) \quad (3.25)$$

$$\hat{A} = -4\hat{D}^3 - 3u_x - 6u\hat{D} + C \quad (3.26)$$

y donde  $\hat{D} = \frac{\partial}{\partial x}$  y  $C = \text{const.}$  Vease que el operador  $\hat{L}$  es exactamente el mismo que se había mencionado antes para (3.13). Al diferenciar a la ecuación (3.23) por el tiempo, y usando (3.24), se obtiene que

$$\hat{L}_t\psi + \hat{L}\hat{A}\psi = \lambda\hat{A}\psi = \hat{A}\lambda\psi = \hat{A}\hat{L}\psi, \quad (3.27)$$

reordenando términos y factorizando a  $\Psi$

$$\hat{L}_t\Psi = (\hat{A}\hat{L} - \hat{L}\hat{A})\Psi,$$

finalmente

$$\hat{L}_t = [\hat{A}, \hat{L}] \quad (3.28)$$

donde  $[\hat{A}, \hat{L}] = \hat{A}\hat{L} - \hat{L}\hat{A}$  es el conmutador entre los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{L}$ . A esta ecuación se le denomina ecuación de Lax y  $\hat{A}, \hat{L}$  son los pares de operadores de Lax. Mas adelante se vera que esta ecuación de Lax no es más que la misma condición de compatibilidad, consistencia o integrabilidad del sistema (3.24) y (3.23).

Ahora, además de (3.26) ¿pueden haber otras formas de  $\hat{A}$  que también conserven el espectro del operador  $\hat{L}$ ? Un par de Lax no es único; dado un par de operadores de Lax como ahora  $\hat{A}$  y  $\hat{L}$  siempre se les puede construir una familia de pares de Lax. En tal caso, para cada uno de ellos, la ecuación (3.28) conllevaría a una ecuación de n-derivadas parciales que se integrarían por el MDI. Lax propuso un grupo de estos posibles operadores  $\hat{A}$  con sus n-derivadas

$$\hat{A}_n = -c_n \left( \hat{D}^{2n+1} + \sum_{j=1}^n (b_j \hat{D}^{2j-1} + \hat{D}^{2j-1} b_j) \right) + C, \quad (3.29)$$

donde  $b_j$  son funciones de  $u$  y sus derivadas por  $x$  que se escojen de tal manera que (3.28) no tenga al operador  $\hat{D}$ . Considerese por ahora a la cte. de integración  $C$  como una cte. de valor  $C = 0$ . En el caso más simple cuando  $n = 0$  la ecuación (3.26) se reduce a

$$\hat{A} = \hat{D} \quad (3.30)$$

Entonces, sustituyendo a (3.30) en (3.28), ésta termina siendo la ecuación lineal de transporte

$$u_t + u_x = 0 \quad (3.31)$$

y si se elije a  $n = 1$ ,  $b_1 = \frac{3u}{4}$  y  $c_1 = 4$  (3.28) se transforma en la ecuación de KdV (3.1). En este último caso se comprobaría que KdV es una ecuación no lineal a la que se le puede aplicar el MDI para hallar sus soluciones.

Es así que, en lo sucesivo, al ir escogiendo los operadores  $\hat{A}_n$  con números superiores en  $n$  se van a ir obteniendo ecuaciones de evolución que contengan

a las derivadas por  $x$ , por lo que al problema de autovalores (3.23) se le asocia un grupo de ecuaciones integrables llamadas ecuaciones de la gerarquía de KdV.

Así como se usó a los operadores  $\hat{A}$  y  $\hat{L}$ , de acuerdo a Lax, para representar a KdV en forma de (3.28) o viceversa para un problema de autovalores y autofunciones como el sistema (3.23) y (3.24), de forma similar se debería poder representar a cualquier otra ecuación diferencial parcial no lineal, a partir de un sistema de ecuaciones como éste, en forma de una condición de consistencia como la ecuación (3.28) para decir que la ecuación no lineal es totalmente integrable, y así volverse candidata para encontrar sus soluciones exactas por el MDI.

### 3.1.3 Generalización ulterior del Método de Dispersión Inversa

Aún después del trabajo de Lax sobre KdV, la solución a esta ecuación no fue considerada con mucha importancia hasta que llegó el trabajo de V.E. Zakharov y A.B. Shabat [[17]]. Antes de citar el trabajo de estos hombres piénsese en el problema espectral (3.23), la primera ecuación de este sistema también se puede escribir como:

$$\hat{L}\mathbf{V} = ik\mathbf{V} \quad (3.32)$$

donde  $\mathbf{V}$  es un vector con componentes  $(v_1, v_2)$ ,  $\lambda = k^2$ , y donde la forma del operador  $\hat{L}$  también matricial es

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D}, & u(x, t) \\ -1, & \hat{D} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

Cuando Zakharov y Shabat estudiaron el problema espectral, la forma matricial de este operador también podía ser

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D}, & u(x, t) \\ \pm u^*(x, t), & \hat{D} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

aquí  $u$  es una función compleja. En el trabajo de estos dos hombres, la otra parte del problema de autovalores (3.32) era similar a (3.24) así que le dieron una forma al operador  $\hat{A}$  viendo que la ecuación de consistencia (ecuación de Lax), análoga a (3.28), resultaba ser la ecuación no lineal de Schrodinger

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} \pm |u|^2u = 0 \quad (3.35)$$

Al convertirse en una condición de compatibilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales y lineales, estos investigadores concluyeron que la ecuación no lineal de Schrodinger era capaz de ser resuelta por el MDI.

Por otro lado, Ablowitz, Kaup, Newell y Segur [[1]] estudiaron una versión más general del operador  $\hat{L}$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} -\hat{D}, & q(x, t) \\ -r(x, t), & \hat{D} \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

donde  $q$  y  $r$  son funciones que, generalmente, no dependen unas de otras. Ellos reescribieron a (3.32) en la siguiente forma

$$\mathbf{V}_x = P\mathbf{V} \quad (3.37)$$

aquí,  $P$  es una matriz cuadrada que tiene la forma

$$P = \begin{pmatrix} -ik, & q(x, t) \\ r(x, t), & ik \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

como  $\lambda$ , aquí  $k$  es un nuevo parámetro espectral. Si bien la ecuación (3.37) describe una evolución de  $\mathbf{V}$  a través de un parámetro  $x$ , también se puede pensar en una ecuación que describa la evolución de éste a través del tiempo

$$\mathbf{V}_t = Q\mathbf{v}, \quad (3.39)$$

con la matriz  $Q$

$$Q = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & -a \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

con  $a$  y  $b$  como funciones que dependen a su vez de  $q$  y  $r$ , y sus derivadas en  $x$ . Si se consideran a las ecuaciones de evolución del vector  $\mathbf{V}$  (3.37) y (3.39) como un par de ecuaciones matriciales diferenciales lineales, entonces a estas se les puede asociar una ecuación de Lax o ecuación de consistencia. Empezando por una condición de igualdad de derivadas cruzadas  $\mathbf{V}_{xt} = \mathbf{V}_{tx}$ , con el parámetro  $k$  independiente del tiempo, se tiene que

$$P\mathbf{V}_t + \mathbf{V}P_t = Q\mathbf{V}_x + \mathbf{V}Q_x$$

ahora igualando a 0 y usando la ecuaciones (3.37) y (3.39) obtenemos

$$PQ\mathbf{V} - QP\mathbf{V} + \mathbf{V}P_t - \mathbf{V}Q_x = 0$$

seguidamente

$$\mathbf{V}[P, Q] + \mathbf{V}P_t - \mathbf{V}Q_x = 0$$

quedando solo

$$[P, Q] + P_t - Q_x = 0 \quad (3.41)$$



Si bien esta última ecuación es ya una ecuación de lax, ésta tiene que llegar a ser una ecuación totalmente integrable con relación a las funciones  $q$  y  $r$  para formalizar a las ecuaciones (3.37) y (3.41) como un problema de autovalores y autofunciones y su ecuación de consistencia propia asociada (ecuación de Lax), respectivamente [7].

Al sustituir a (3.38) y (3.40) en la primera parte de (3.41) nos queda que

$$[P, Q] = \begin{pmatrix} -aik + qc, & -bik - aq \\ ar + ikc, & br - aik \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

luego  $P_t - Q_x$

$$P_t - Q_x = \begin{pmatrix} -a_x, & q_t - b_x \\ r_t - c_x, & a_x \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

sustituyendo a (3.42) y (3.43) en (3.41) resultan las siguientes componentes

$$\begin{aligned} br - cq + a_x &= 0 \\ -2ikb - 2aq + q_t - b_x &= 0 \\ 2ikc + 2ar + r_t - c_x &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se puede desarrollar por series de potencia al parámetro  $k$ , es decir

$$a = \sum_{i=0}^n k^i a_i \quad (3.44)$$

considerese a partir del caso  $n = 2$ . Del sistema de 3 ecuaciones anterior se deduce que

$$b_1 = ia_2q, \quad b_2 = c_2 = 0, \quad c_1 = ia_2r,$$

$$b_0 = ia_1q - \frac{1}{2}a_2q_x, \quad c_0 = ia_1r + \frac{1}{2}a_2r_x,$$

$$(a_2)_x = (a_1)_x = 0, \quad (a_0)_x - \frac{a_2}{a}(qr)_x = 0,$$

asi que

$$q_t - 2a_0q - ia_1q_x + \frac{1}{2}a_2q_{xx} = 0$$

$$r_t + 2a_0r - ia_1r_x - \frac{1}{2}a_2r_{xx} = 0$$

al elegir a  $a_0 = \frac{igr}{2}$ ,  $a_1 = 0$  y  $a_2 = i$  resulta que

$$q_t - iq^2r + \frac{i}{2}q_{xx} = 0, \quad r_t + 2a_0r - ia_1r_x - \frac{1}{2}a_2r_{xx} = 0 \quad (3.45)$$

con

$$Q^{(n=2)} = ik^2 \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) - k \left( \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{i}{2} \left( \begin{pmatrix} -qr & q_x \\ -r_x & qr \end{pmatrix} \right) \quad (3.46)$$

Si se hace que  $r = \pm q^*$ , las ecuaciones (3.45) y (3.45) se pueden convertir en la ecuación no lineal de Schrodinger. Por analogía con (3.46) para  $n = 3$   $Q^{n=3}$  se ve como

$$Q^{(n=3)} = ik^3 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} 0, & q \\ r, & 0 \end{pmatrix} - \frac{ik}{2} \begin{pmatrix} -qr, & q_x \\ -r_x, & qr \end{pmatrix} + \tilde{Q} \quad (3.47)$$

Por último, si para cuadro  $n = 3$  se escoge que  $r = -1$  (3.47) termina viendose como la misma ecuación de KdV

### 3.1.4 La condicion de consistencia propia en la ecuaciones de Kdv y en Sine-Gordon

Para aplicar el MDI a esta ecuación lo que se necesita saber, por ahora, es que  $\lambda$  representa a un parámetro espectral anclado a los datos de dispersión y ya no representa solo a la energía del sistema, el problema asociado a la ecuación no lineal ya no tendrá como parte de é a una ecuación de Schrodinger, pero si a sistemas de tipo Schrodinger, y por último esta ecuación puede ser integrada si se ve como una condición de consistencia propia para ecuaciones matriciales como las siguientes.

$$\Psi_z = U^{(1)}\Psi, \quad \Psi_t = V^{(1)}\Psi$$

Y la condición de consistencia propia para estas expresiones sería

$$U^{(1)} V^{(1)} + U_t^{(1)} - V^{(1)} U^{(1)} - V_z^{(1)} = 0$$

La deducción de esta condición a partir de sus ecuaciones matriciales es bastante similar a lo que se hizo para llegar a (3.27), este procedimiento se volverá a hacer más adelante cuando se hable del MDI en la relatividad. Se sabe que,  $U^{(1)}$  y  $V^{(1)}$  dependen directamente de  $\lambda$  lo que trae por consecuencia que la condición deba ser satisfecha por todos los valores del espectro de  $\lambda$ . Como este requisito coincide explícitamente por completo con la ecuación o sistema que se desee integrar, el valor de las matrices será específico para cada caso. La bibliografía en la que se apoya este trabajo sugiere la siguiente forma de las matrices  $U$  y  $V$  para KdV

$$U^{(1)} = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix},$$

$$V^{(1)} = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} u & 0 \\ u_{,z} & -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_{,z} & 2u \\ 2u^2 - u_{,zz} & u_{,z} \end{pmatrix},$$

Por un lado se tiene que  $U_{,t}^{(1)}$  y  $V_{,z}^{(1)}$  son

$$U_{,t}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{,z}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2i\lambda u_{,z} - u_{,zz} & 2u_{,z} \\ 4\lambda^2 u_{,z} - 4uu_{,z} + u_{,zzz} - 2i\lambda u_{,zz} & -2i\lambda u_{,zz} + u_{,zzz} \end{pmatrix}$$

entonces  $U_{,t}^{(1)} - V_{,z}^{(1)}$  queda como

$$U_{,t}^{(1)} - V_{,z}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2i\lambda u_{,z} + u_{,zz} & -2u_{,z} \\ u_{,t} - 4\lambda^2 u_{,z} - 4uu_{,z} + u_{,zzz} - 2i\lambda u_{,zz} & 2i\lambda u_{,z} - u_{,zzz} \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

y para  $U^{(1)}V^{(1)}$  y  $V^{(1)}U^{(1)}$

$$U^{(1)}V^{(1)} = \begin{pmatrix} i\lambda u_{,z} + 2\lambda^2 u - 4\lambda^4 + 2u^2 - u_{,zzz} & u_{,z} \\ -u_{,z} u + i\lambda u_{,zz} + 2\lambda^2 u_{,z} & 2u\lambda^2 + 2u^2 - 4\lambda^4 - i\lambda u_{,z} \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

$$V^{(1)}U^{(1)} = \begin{pmatrix} -4\lambda^4 + 2\lambda^2 u - i\lambda u_{,z} + 2u^2 & -u_{,z} \\ -i\lambda u_{,zz} - 2\lambda^2 u_{,z} + u_{,z} u & 2u\lambda^2 + 2u^2 - u_{,zz} - 4\lambda^4 + i\lambda u_{,z} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

por lo que  $U^{(1)}V^{(1)} - V^{(1)}U^{(1)}$

$$U^{(1)}V^{(1)} - V^{(1)}U^{(1)} = \begin{pmatrix} -u_{,zz} + 2i\lambda u_{,z} & 2u_{,z} \\ 2i\lambda u_{,zz} + 4\lambda^2 u_{,z} - 2u_{,z} u & -2i\lambda u_{,z} + u_{,zz} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

De acuerdo a la condición de consistencia, sumando las matrices resultantes de (3.7) mas (3.10), facilmente se ve que la condición se reduce a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t - 6u_{,z} u + u_{,zzz} & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.52)$$

donde la entrada  $a_{21}$  de la matriz que sobrevive es bastante parecida a la ecuación no lineal de KdV. Por otro lado, para que la condición de consistencia propia se cumpla, la entrada  $a_{21}$  debería anularse, en otras palabras  $a_{21}$  debe cumplir una nueva y necesaria condición

$$u_t - 6u_{,z} u + u_{,zzz} = 0$$

De inmediato se puede ver que esta última condición no es otra cosa que la misma ecuación de KdV. De esta manera KdV cumple el requisito de verse reducida a la condición de consistencia para un cierto sistema de ecuaciones

matriciales que generaran a un problema espectral. La ecuación de KdV es por tanto apta para poder ser integrada con ayuda del MDI. Por supuesto, no se van a obtener las soluciones a KdV por el MDI en este trabajo porque ese no es el objetivo, de cualquier forma ya se mencionó la estructura que dichas soluciones pueden tener, y a las que se debería poder llegar si se usa este método adecuadamente.

Para terminar el análisis de KdV bajo las reglas del MDI se requiere que a un problema o ecuación no lineal de la forma de (3.1) se le pueda asociar un sistema lineal (pares de Lax) como (3.24) y (3.23), sistema que tiene como solución a una función  $\Psi$  que cumpla con lo que determina el problema de .

De acuerdo al MDI, la ecuación de tipo KdV es ahora el problema no-lineal. La solución  $\Psi$  al problema espectral o pares de Lax asociado a este problema es la función columna

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

Para determinar los pares de Lax de los que  $\Psi$  es solución, basta considerar a la primera ecuación matricial  $\Psi_{,z} = U^{(1)}\Psi$  y la forma de la matriz  $U^{(1)}$ , entonces

$$\Psi_{,z} = \begin{pmatrix} \Psi_{1,z} \\ \Psi_{2,z} \end{pmatrix} = U^{(1)}\Psi = \begin{pmatrix} i\lambda & 1 \\ u & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},$$

al resolver este producto queda que

$$\Psi_{,z} = \begin{pmatrix} \Psi_{1,z} \\ \Psi_{2,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda\Psi_1 + \Psi_2 \\ u\Psi_1 - i\lambda\Psi_2 \end{pmatrix},$$

el sistema de ecuaciones se reduce a

$$\Psi_{1,z} = i\lambda\Psi_1 + \Psi_2,$$

$$\Psi_{2,z} = u\Psi_1 - i\lambda\Psi_2$$

Este sistema tiene que ser equivalente a la ecuación de Schrodinger de los pares de Lax en (3.24) y (3.23). Para saber si ésto se cumple partase de la primera ecuación, despejese luego a  $\Psi_2$  y sustituyase en  $\Psi_{2,z}$ , quedando

$$\Psi_{1,zz} - i\lambda\Psi_{1,z} = -i\lambda\Psi_{1,z} - \lambda^2\Psi_1 + u\Psi_1,$$

simplificando términos resulta

$$-\Psi_{1,zz} + u\Psi_1 = \lambda^2\Psi_1.$$

Se puede identificar de hecho al operador  $L$  de (3.24), operador que debe ser el mismo que  $\hat{A}$  en (3.23) siempre y cuando se redefine para el parámetro espectral que  $\lambda^2 \rightarrow \lambda$

$$L\Psi = \lambda\Psi, \quad \text{si } \lambda^2 \rightarrow \lambda.$$

Lo que sigue es hechar mano de la función matriz  $\Psi$  para pasar de los datos de dispersión de la onda solitaria al valor de su potencial. Dicho de otra manera, resolver a la ecuación de KdV significa que se puede determinar el valor del potencial  $U(z, t)$  para cualquier tiempo  $t$ , siempre y cuando se conozcan los valores de dispersión, un potencial que se obtuvo antes en (3.22)

### 3.1.5 El uso del método en las Ecuaciones de Sine-Gordon

Un ejemplo distinto, pero muy común en el uso del MDI, son las ecuaciones de Sine-Gordon. Estas ecuaciones aparecieron por primera vez en la teoría de superficies de curvatura negativa dentro de la Geometría Diferencial en 1870. Años más tarde, se desarrolló el Teorema Fundamental de Superficies, con el que, aplicado a esta ecuación, es posible construir superficies de un solitón. En sus inicios, esta ecuación también fue utilizada para describir, usando un sistema de ecuaciones diferenciales, el ángulo de rotación de un péndulo en la posición  $x$  y el tiempo  $t$  con masa y longitud definidas. Estos múltiples péndulos se extienden a lo largo de un resorte y separados entre sí una cierta distancia, este uso permitió desarrollar lo que se conoce como las transformaciones de Backlund, que en cierto modo, no es otra cosa que un método para relacionar una EDP y su solución.

Sine-Gordon es una ecuación no lineal que se ha usado en la física del estado sólido, en el estudio de líneas de transmisión de superconductores como la fibra óptica, entre otras aplicaciones.

La forma más clásica de representar a la ecuación de Sine-Gordon es:

$$\mu_{zz} - \mu_{tt} = \sin \mu, \quad (3.53)$$

Aquí,  $\mu$  es una función escalar y  $(z, t) \in \mathbb{R}^2$ . Si esta última ecuación se iguala a cero resulta ser una de las formas que puede adoptar la ecuación de onda. Se puede decir que la ecuación de onda, en su forma no lineal, es precisamente la ecuación de Sine-Gordon. Aquí y en adelante  $\mu_{zz}$  y  $\mu_{tt}$  son derivadas parciales con respecto a la posición y al tiempo. Es posible llegar a Sine-Gordon si se adopta el par de coordenadas nulas

$$\xi = \frac{(z - t)}{2}, \quad \eta = \frac{(z + t)}{2}.$$

Haciendo este cambio de coordenadas, la ecuación de Sine-Gordon toma la forma



$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi \partial \eta} = \sin \mu \quad \text{o} \quad \mu_{\xi \eta} = \sin \mu \quad (3.54)$$

Existe un grupo de soluciones para esta ecuación que puede ser visto como

$$\mu_{(z,t)} = 4 \arctan \left[ C \exp \left( \frac{z - \lambda t}{(1 - \lambda^2)^{1/2}} \right) \right], \quad (3.55)$$

donde las constantes arbitrarias  $C$  y  $|\lambda|$  deben cumplir que  $C$  y  $|\lambda| < 1$ .

Para demostrar que en efecto esta ecuación es candidata a resolver por el MDI, es necesario seguir el mismo proceso que se hizo para KdV. Primero, la ecuación de Sine-Gordon es integrable por el MDI si es capaz de verse como una condición de consistencia propia para ciertas ecuaciones matriciales.

Para estas nuevas coordenadas, las ecuaciones matriciales serán

$$\Psi_{\xi} = U^{(2)} \Psi, \quad \Psi_{\eta} = V^{(2)} \Psi \quad (3.56)$$

De estas ecuaciones matriciales se obtiene una condición de consistencia propia

$$U^{(2)} V^{(2)} + U_{\eta}^{(2)} - V^{(2)} U^{(2)} - V_{\xi}^{(2)} = 0 \quad (3.57)$$

Para Sine-Gordon, sean propuestas las matrices  $U^{(2)}$  y  $V^{(2)}$  de la forma

$$U^{(2)} = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_{,\xi} \\ u_{,\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} \cos u & -i \sin u \\ i \sin u & -\cos u \end{pmatrix}$$

Siguiendo a la condición de consistencia se tiene que  $U_{,\eta}^{(2)}$  y  $V_{,\xi}^{(2)}$  son

$$U_{,\eta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}u_{,\xi\eta} \\ \frac{i}{2}u_{,\xi\eta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{,\xi}^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} -u_{,\xi} \sin u & -iu_{,\xi} \cos u \\ iu_{,\xi} \cos u & u_{,\xi} \sin u \end{pmatrix}$$

Al realizar la resta de ambas de acuerdo a  $U_{,\eta}^{(2)} - V_{,\xi}^{(2)}$

$$U_{,\eta}^{(2)} - V_{,\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{u_{,\xi} \sin u}{4i\lambda} & \frac{i}{2}u_{,\xi\eta} + \frac{iu_{,\xi} \cos u}{4i\lambda} \\ \frac{i}{2}u_{,\xi\eta} - \frac{iu_{,\xi} \cos u}{4i\lambda} & -\frac{u_{,\xi} \sin u}{4i\lambda} \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

lo que sigue es multiplicar  $U^{(2)}V^{(2)}$

$$U^{(2)}V^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} i\lambda \cos u + \frac{i^2}{2}u_{,\xi} \sin u & -i^2\lambda \sin u - \frac{i}{2}u_{,\xi} \cos u \\ \frac{i}{2}u_{,\xi} \cos u - i^2\lambda \sin u & \frac{i^2}{2}u_{,\xi} \sin u + i\lambda \cos u \end{pmatrix},$$

simplificando términos se tiene para  $U^{(2)}V^{(2)}$

$$U^{(2)}V^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} i\lambda \cos u - \frac{u, \xi \sin u}{2} & \lambda \sin u - \frac{i u, \xi \cos u}{2} \\ \frac{i u, \xi \cos u}{2} + \lambda \sin u & \frac{u, \xi \sin u}{2} + i\lambda \cos u \end{pmatrix}$$

Ahora, para la parte  $V^{(2)}U^{(2)}$

$$V^{(2)}U^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} i\lambda \cos u - \frac{i^2 u, \xi \sin u}{2} & \frac{i u, \xi \cos u}{2} + i^2 \lambda \sin u \\ i^2 \lambda \sin u - \frac{i u, \xi \cos u}{2} & \frac{i^2 u, \xi \sin u}{2} + i\lambda \cos u \end{pmatrix},$$

simplificando,  $V^{(2)}U^{(2)}$  es

$$V^{(2)}U^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} i\lambda \cos u + \frac{u, \xi \sin u}{2} & \frac{i u, \xi \cos u}{2} - \lambda \sin u \\ -\lambda \sin u - i \frac{u, \xi \cos u}{2} & \frac{-u, \xi \sin u}{2} + i\lambda \cos u \end{pmatrix}$$

Y restando  $U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)}$  resulta

$$U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)} = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} -\frac{2u, \xi \sin u}{2} & 2\lambda \sin u - \frac{2i u, \xi \cos u}{2} \\ 2\lambda \sin u + \frac{2i u, \xi \cos u}{2} & \frac{2u, \xi \sin u}{2} \end{pmatrix},$$

entonces

$$U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{-u_{,\xi} \sin u}{4i\lambda} & \frac{\sin u}{2i} - \frac{u_{,\xi} \cos u}{4\lambda} \\ \frac{\sin u}{2i} + \frac{u_{,\xi} \cos u}{4\lambda} & \frac{u_{,\xi} \sin u}{4i\lambda} \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Finalmente, y de acuerdo a la condición de consistencia propia (3.57), hay que sumar (3.58) y (3.59)

$$U_{,\eta}^{(2)} - V_{,\xi}^{(2)} + U^{(2)}V^{(2)} - V^{(2)}U^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i u_{,\xi\eta}}{2} + \frac{\sin u}{2i} \\ \frac{i u_{,\xi\eta}}{2} + \frac{\sin u}{2i} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

al factorizar el término  $\frac{i}{2}$  esta última matriz se ve como

$$\begin{pmatrix} 0 & u_{,\xi\eta} - \sin u \\ u_{,\xi\eta} - \sin u & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.60)$$

Las entradas  $a_{12}$  y  $a_{21}$  son los únicos términos que están de más para que (3.57) se cumpla. Bastante parecido al caso con la ecuación de KdV, para Sine Gordon  $a_{12}$  y  $a_{21}$  tendrían que cumplir una nueva y necesaria condición para que la condición de consistencia se cumpla, y considerando que  $a_{12} = a_{21}$ , la nueva condición se reduce a decir que

$$u_{,\xi\eta} - \sin u = 0$$

Condición que no es otra cosa más que la misma ecuación de Sine-Gordon, demostrando así que es una ecuación apta para ser resuelta por el MDI al

poderse ver reducida a una condición de consistencia propia como la dada en (3.57).

Para terminar de cumplir con los requisitos que el método exige, falta encontrar el sistema de ecuaciones espectrales al que debe estar relacionada la ecuación de Sine-Gordon. La función  $\Psi$  puede verse como una matriz columna igual a la que se usó para el problema de KdV

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},$$

Al expresar a esta matriz columna de acuerdo a la primera de las ecuaciones en (3.56), se ve para  $\Psi_\xi$  que

$$\Psi_{,\xi} = \begin{pmatrix} \Psi_{1,\xi} \\ \Psi_{2,\xi} \end{pmatrix} = U^{(2)}\Psi = \begin{pmatrix} i\lambda & \frac{iu,\xi}{2} \\ \frac{iu,\xi}{2} & -i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},$$

y al desarrollar la multiplicación de matrices resulta

$$\Psi_{,\xi} = \begin{pmatrix} \Psi_{1,\xi} \\ \Psi_{2,\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda\Psi_1 + \frac{iu,\xi}{2}\Psi_2 \\ \frac{iu,\xi}{2}\Psi_1 - i\lambda\Psi_2 \end{pmatrix},$$

y el sistema espectral se reduce a

$$\Psi_{1,\xi} = i\lambda\Psi_1 + \frac{iu,\xi}{2}\Psi_2$$

$$\Psi_{2,\xi} = \frac{iu,\xi}{2}\Psi_1 - i\lambda\Psi_2$$

Como paso con KdV, no se hará el desarrollo de cómo la función  $\Psi$  satisface a este problema espectral, o cómo es que esta función es capaz de pasar de los datos de dispersión de una onda a un cierto potencial  $\mu_\xi\eta$ , ya que se trata de complicadas ecuaciones integrables como las de Gelfand, Levitan y Marchenko. Basta demostrar que la ecuación es candidata a resolverse por este método y que su potencial o solución debe tener la forma de (3.55), lo que significa que se ha demostrado que puede ser vista como una cierta condición de consistencia propia. Respecto a las matrices  $U$  y  $V$ , éstas pueden tener un tamaño arbitrario al igual que la matriz columna  $\Psi$ , y por lo tanto también la dependencia de estas matrices con respecto a  $\lambda$  puede ir aumentando conforme vayan cambiando los valores de este parámetro.

## Capítulo 4

# METODO DE DISPERSION INVERSA EN GRAVITACIÓN

El Método de Dispersión Inversa puede llegar a aplicarse para más de una función-potencial  $u(z, t)$ , con un desarrollo del método que tiene cambios importantes solo en la notación algebraica. El parámetro  $\lambda$  ya no describirá a los datos de la partícula como su energía, ahora tiene que ser un valor espectral (un autovalor). Las ecuaciones (3.24) y (3.23), que fueron propuestas para iniciar el desarrollo del MDI, serán un sistema igual de ecuaciones espectrales, pero se hará en él una extensión del método.

Se considera que la ecuación de Einstein en gravitación es una ecuación bidimensional (considera una coordenada para las dimensiones del espacio y una coordenada para el tiempo), y para la extensión del método se ha visto que la mayor parte de las ecuaciones bidimensionales pueden ser integrables si se ven como condiciones de consistencia propias para dos ecuaciones matriciales de la siguiente forma

$$\Psi_z = U^{(1)}\Psi, \quad \Psi_t = V^{(1)}\Psi \quad (4.1)$$

Donde  $U^{(1)}$  y  $V^{(1)}$  son matrices que van a depender del parámetro espectral  $\lambda$ , que a su vez depende de las coordenadas espacio-temporales  $z$  y  $t$ . Además,

$\Psi$  es una matriz columna que va a ser una función también dependiente de las variables  $(\lambda, z, t)$ . Con el fin de deducir la condición de consistencia propia para (4.1), se puede decir que esta matriz columna  $\Psi$  debe ser diferenciable tanto en el espacio como en el tiempo, así que para llegar a la condición, lo primero que hay que hacer es diferenciar a  $\Psi_z$  con respecto a  $t$ , y a  $\Psi_t$  con respecto a  $z$ , igualando los resultados se tiene que:

$$\frac{d}{dt} (U^{(1)}\Psi) = \frac{d}{dz} (V^{(1)}\Psi)$$

es decir

$$U^{(1)} V^{(1)}\Psi + \Psi U_t^{(1)} = V^{(1)} U^{(1)}\Psi + \Psi V_z^{(1)}$$

Reordenando términos y factorizando a  $\Psi$  se obtiene la condición de consistencia propia <sup>1</sup>

$$U^{(1)} V^{(1)} + U_t^{(1)} - V^{(1)} U^{(1)} - V_z^{(1)} = 0 \quad (4.2)$$

La pregunta ahora es ¿qué forma deben tener las matrices  $U$  y  $V$ ? Vease el problema como un caso para ecuaciones de campo de segundo orden, y que son invariantes en el tiempo. Además del par de ecuaciones (4.1) recuerdese el par de coordenadas extras que se usarán para Sine-Gordon<sup>2</sup>

$$\xi = \frac{1}{2}(z + t), \quad \eta = \frac{1}{2}(z - t)$$

---

<sup>1</sup>Este es, básicamente, el método para llegar a la condición de consistencia con la que, además de la ecuación de Einstein, se probó que tanto KdV y Sine-Gordon son candidatas para ser integradas por el MDI

<sup>2</sup>Aunque a las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$ , se les considere como variables nulas, se seguirá suponiendo que las coordenadas  $z$  y  $t$  se refieren al espacio y al tiempo respectivamente



El problema dice que a los valores de  $\lambda_n$  se les conoce como los polos simples del coeficiente de transmisión, es decir son aquellos valores donde dicho coeficiente tiende a infinito, ahora se tiene solo los polos simples en los valores que sean finitos del parámetro espectral  $\lambda$ , esta afirmación hace que las matrices  $U$  y  $V$  sean matrices regulares en el plano de  $\lambda$ . De acuerdo a ésto, para el sistema de ecuaciones y su condición de consistencia (4.1) y (4.2), respectivamente, se consideran solo los casos más simples en los que las matrices tienen solo un polo cada una. Elijanse estos polos en los puntos donde  $\lambda = \lambda_0$  y  $\lambda = -\lambda_0$ , con  $\lambda_0$  como una cte. cualquiera. Se puede asignar entonces la siguiente forma a las matrices  $U^{(2)}$  y  $V^{(2)}$

$$U^{(2)} = \frac{K}{\lambda - \lambda_0}, \quad V^{(2)} = \frac{L}{\lambda + \lambda_0} \quad (4.3)$$

Las nuevas matrices  $K$  y  $L$  son ahora independientes de  $\lambda$ . Para saber la forma de estas dos nuevas matrices se pueden seguir ciertos pasos algebraicos, además de considerar dos condiciones importantes. Se puede seguir el desarrollo que se hizo con las matrices originales para obtener a (4.2), pero ahora para las nuevas matrices  $V^{(2)}$  y  $U^{(2)}$ .

Análogo a (4.1) con  $V^{(2)}$  y  $U^{(2)}$ , y su notación con las coordenadas de  $\xi$  y  $\eta$ , se pueden formar las siguientes ecuaciones matriciales

$$\Psi_\xi = U^{(2)}\Psi, \quad \Psi_\eta = V^{(2)}\Psi \quad (4.4)$$

Siguiendo lo que se hizo arriba, se va a diferenciar a  $\Psi_\xi$  con respecto a  $\eta$ , y a  $\Psi_\eta$  con respecto a  $\xi$ , después deberán igualarse ambas ecuaciones

$$U^{(2)} V^{(2)}\Psi + \Psi \frac{K_\eta}{(\lambda - \lambda_0)} = V^{(2)} U^{(2)}\Psi + \Psi \frac{L_\xi}{(\lambda + \lambda_0)},$$

dividiendo ambas partes entre  $\Psi$

$$U^{(2)} V^{(2)} + \frac{K_\eta}{(\lambda - \lambda_0)} - V^{(2)} U^{(2)} - \frac{L_\xi}{(\lambda + \lambda_0)} = 0$$

sustituyendo a  $V^{(2)}$  y  $U^{(2)}$ :

$$\frac{K}{(\lambda - \lambda_0)} \frac{L}{(\lambda + \lambda_0)} + \frac{K_\eta}{(\lambda - \lambda_0)} - \frac{L}{(\lambda + \lambda_0)} \frac{K}{(\lambda - \lambda_0)} - \frac{L_\xi}{(\lambda + \lambda_0)} = 0,$$

simplificando, se obtiene una ecuación análoga a (4.2)

$$\frac{KL}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} + \frac{K_\eta}{(\lambda - \lambda_0)} - \frac{LK}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} - \frac{L_\xi}{(\lambda + \lambda_0)} = 0 \quad (4.5)$$

Ahora que se tiene esta nueva versión de la condición de consistencia lo que sigue, y de acuerdo a los ejemplos con KdV y Sine Gordon, es ver si las matrices elegidas  $U^{(2)}$  y  $V^{(2)}$  (vistas como en (4.3)) satisfacen dicha ecuación, para ello podría parecer que es necesario conocer la forma de  $K$  y  $L$ , sin embargo se verá que aún sin saber su forma, el lado izquierdo de (4.5) en efecto se puede ver reducido a cero, para poder demostrarlo primero es necesario restar  $\frac{K_\eta}{\lambda + \lambda_0}$  y sumar  $\frac{L_\xi}{\lambda - \lambda_0}$  a ambos lados del signo de igualdad para poder igualar a cero, de tal forma que

$$\frac{KL}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} + \frac{K_\eta}{(\lambda - \lambda_0)} - \frac{LK}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} - \frac{K_\eta}{(\lambda + \lambda_0)} - \frac{L_\xi}{(\lambda + \lambda_0)} +$$

$$\frac{L_\xi}{(\lambda - \lambda_0)} + \frac{K_\eta}{(\lambda + \lambda_0)} - \frac{L_\xi}{(\lambda - \lambda_0)} = 0,$$

al sumar las fracciones resulta que

$$\begin{aligned} & \frac{K_\eta(\lambda + \lambda_0) - K_\eta(\lambda - \lambda_0)}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} + \frac{-L_\xi(\lambda - \lambda_0) + L_\xi(\lambda + \lambda_0)}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \\ & + \frac{KL}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} - \frac{LK}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} + \frac{K_\eta(\lambda - \lambda_0) - L_\xi\lambda + \lambda_0}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} = 0, \end{aligned}$$

al factorizar a  $\frac{1}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)}$ , y simplificando se tiene que

$$\frac{1}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} [K_\eta\lambda_0 + L_\xi\lambda_0 + K_\eta\lambda - L_\xi\lambda - LK + KL] = 0$$

Ahora, se multiplica por un 1 de la forma  $\frac{\lambda_0}{\lambda_0}$ , y se factoriza un  $\lambda_0$  en el numerador

$$\frac{\lambda_0}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \left( K_\eta + L_\xi + K_\eta \frac{\lambda}{\lambda_0} - L_\xi \frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{LK}{\lambda_0} + \frac{KL}{\lambda_0} \right) = 0$$

Esta última expresión sigue siendo la misma condición (4.25) solo que expresada bajo otra notación. Si esta última ecuación es lo mismo que (4.25) entonces se debe esperar que todo su lado izquierdo se anule para que, indirectamente, (4.25) se cumpla. Para que lo anterior pase, cualquiera de las dos expresiones dentro de los paréntesis se debe anular. Análogo a los casos de KdV en (3.52) y a Sine Gordon en (3.60) el coeficiente o término que deba anularse para que la condición se cumpla debe de ser de alguna forma

la misma ecuación diferencial no lineal que se esta tratando de resolver por el MDI, en este último caso dicho término debe verse reducido a las ecuaciones de campo de Einstein en gravitación. Asi pues, con el fin de hacer que esta condición se cumpla, veanse otras dos nuevas y muy importantes condiciones que permitirán que uno de los dos términos se anule

$$K_\eta - L_\xi = 0 \quad (4.6)$$

$$K_\eta + L_\xi + \frac{1}{\lambda_0}(KL - LK) = 0 \quad (4.7)$$

Aplicando la primera se tiene que

$$\frac{\lambda_0}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \left[ K_\eta + L_\xi + \frac{\lambda}{\lambda_0}(K_\eta - L_\xi) - \frac{LK}{\lambda_0} + \frac{KL}{\lambda_0} \right] = 0,$$

entonces

$$\frac{\lambda_0}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} \left( K_\eta + L_\xi - \frac{LK}{\lambda_0} + \frac{KL}{\lambda_0} \right) = 0$$

Si sobre esta última se aplica la segunda condición, resulta que efectivamente se cumple la condición (4.7):

$$\frac{\lambda_0}{(\lambda^2 - \lambda_0^2)} (0) = 0$$

Esta última ecuación implica que las matrices  $U^{(2)}$  y  $V^{(2)}$  en (4.3), que fueron pensadas para ecuaciones de campo de segundo orden (como las ecuaciones de campo para gravitación de Einstein), satisfacen a la condición de consistencia propia que el mismo sistema (4.4) generó. Demostrando que dichas ecuaciones bidimensionales y diferenciales no lineales de las que hablan  $U^{(2)}$  y  $V^{(2)}$  son aptas para resolverse por el MDI. Para dejar más claro cómo es que las ecuaciones de campo de Einstein, y por tanto también las matrices  $U^{(2)}$  y  $V^{(2)}$ , pueden verse reducidas a las condiciones propuestas en (4.6) y (4.7) será necesario deducir la forma de las recientes matrices  $K$  y  $L$ .

La condición (4.7) sugiere que se puede representar a  $K$  y  $L$  en términos de derivadas logarítmicas de alguna matriz  $g$  si se regresa a asociar a  $K$  la variable  $\xi$  y a  $L$  la variable  $\eta$ . Así, sea para  $K$  la derivada logarítmica de la matriz  $g$  con respecto a la variable  $\xi$ , y sea para  $L$  la derivada logarítmica de la matriz  $g$  con respecto a la variable  $\eta$ :

$$\frac{d \ln g}{d \xi} = g_{\xi} g^{-1}, \quad \frac{d \ln g}{d \eta} = g_{\eta} g^{-1}$$

$$K = -g_{\xi} g^{-1}, \quad L = g_{\eta} g^{-1} \quad (4.8)$$

Para terminar de definir a  $K$  y  $L$  a partir de (4.7), se puede separar a esta última en otras dos igualdades

$$KL - LK = -K_{\eta} \lambda_0 - L_{\xi} \lambda_0,$$

entonces

$$KL = -K_{\eta} \lambda_0 \quad - LK = -L_{\xi} \lambda_0,$$

sustituyendo a (4.8)

$$K = -g_\xi g^{-1} \lambda_0 \quad L = g_\eta g^{-1} \lambda_0 \quad (4.9)$$

Se puede concluir que estas matrices, vistas en términos de una tercera matriz  $g$ , tienen como una condición de integrabilidad a la misma ecuación (4.7). Por otra parte, y sin ir lejos, la condición (4.6) es llamada *la ecuación de campo* para algún modelo integrable relativista no variante, esto es

Determinadas  $K_\eta$  y  $L_\xi$

$$K_\eta = (-g_\xi g^{-1} \lambda_0)_\eta \quad L_\xi = (g_\eta g^{-1} \lambda_0)_\xi,$$

y sustituyéndolas en (4.6), se forma la ecuación de campo o ecuación matricial

$$(g_\xi g^{-1} \lambda_0)_\eta + (g_\eta g^{-1} \lambda_0)_\xi = 0 \quad (4.10)$$

A esta última ecuación se le ha asociado significativamente con el modelo del campo Quiral. Existe más de una descripción de la integrabilidad de este modelo, pero eso no es tan importante ahora. Lo que vale la pena recalcar es que las condiciones (4.6) y (4.7) fueron, por una parte, la herramienta para que a partir de las ecuaciones matriciales (4.4) se llegará a la condición de consistencia propia, hallazgo importante porque eso les permite a (4.4) ser integrable, y por otra fueron de utilidad para darle forma a las matrices  $k$  y  $L$ .

Recuérdese que al inicio de la descripción del MDI, se habló de poder encontrar soluciones de tipo solitón para resolver las ecuaciones espectrales que permitan llegar de los datos de dispersión  $S(\lambda, t)$  ( $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ ) con los cambios de coordenadas a el potencial  $U(z, t)$ . Se habló también de la matriz

función  $\Psi(z, t, \lambda)$ , ésta es la que debe satisfacer a los nombrados pares de L-A (ecuación (3.24) y (3.23)). Se nombró a una matriz  $g$  de la que dependían  $K$  y  $L$ , lo que lleva a preguntarse ¿qué relación existe entre la matriz  $g$  y  $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ ? Sucede que, a partir de cualquiera que sea la solución  $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$ , se puede obtener alguna solución para la ecuación de campo (4.10) para la matriz  $g$ . En otras palabras, del sistema de ecuaciones matriciales, donde  $\Psi$  es solución, se dedujo la ecuación de campo de la que una matriz  $g$  es solución, permitiendo ver que, para el valor del polo situado en  $\lambda = 0$ ,  $\Psi(\xi, \eta, \lambda) = g$ . Esto es, si se sustituye a (4.9) en (4.3) y a su vez (4.3) en (4.4), termina quedando que:

$$\Psi_\xi \Psi^{-1} = \frac{K}{\lambda - \lambda_0} = \frac{-\lambda_0 (g_\xi g^{-1})}{\lambda - \lambda_0} \rightarrow g_\xi g^{-1} \quad (4.11)$$

$$\Psi_\eta \Psi^{-1} = \frac{L}{\lambda + \lambda_0} = \frac{\lambda_0 (g_\eta g^{-1})}{\lambda + \lambda_0} \rightarrow g_\eta g^{-1} \quad (4.12)$$

En conclusión, para los puntos donde  $\lambda \rightarrow 0$ , la matriz de interés es igual a la eigenfunción  $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$

$$\Psi(\xi, \eta, 0) = g(\xi, \eta) \quad (4.13)$$

## 4.1 Solución de Fondo

Si ahora la solución  $g$  para (4.10) pasa a ser como lo que fue la solución  $\Psi$  para el sistema (4.4), entonces  $g$  debe poder resolver el problema general de para (4.10), y de acuerdo a lo que se ha seguido en el desarrollo del MDI, resulta conveniente buscar soluciones de tipo solitónicas. Todo lo que se necesita conocer es una solución particular para (4.10) y (4.4) respectivamente  $(g_0, \Psi_0)$  para cuando  $\eta, \xi = 0$ , y a la que se le conoce como solución de fondo junto con el número de soluciones solitónicas que desemos tener en

el "fondo" por cada polo que haya. Para las soluciones solitónicas, los polos de los coeficientes de transmisión determinan la simetría del problema y la amplitud de transmisión es una parte importante de las funciones  $\Psi(\xi, \eta, \lambda)$  y  $g$ . La función  $\Psi$  señala un problema que, como se dijo antes, aunque sea de un polo simple, puede llegar a ser muy grande pero que ahora este valor debe ser finito en el plano de  $\lambda$ . La función puede escribirse como

$$\Psi = X \Psi_0 \quad (4.14)$$

Donde la matriz  $X$  es llamada la matriz de apósiso, matriz que aún depende de  $\lambda$ , y que cuando  $|\lambda| \rightarrow \infty$  su normalización tiende a la matriz unidad  $I$ . Esta dependencia de la cte.  $\lambda$  para el caso solitónico se ve a través de

$$X = I + \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\lambda - \lambda_n} \quad (4.15)$$

Aquí,  $\lambda_n$  son ctes. arbitrarias y  $x_n$  son nuevas matrices pero ahora independientes de  $\lambda$ <sup>3</sup>. Para el número de polos de esta matriz de apósiso hay un número igual de soluciones solitónicas incluidas, recordando que a estas soluciones se les debe añadir la solución de fondo  $(g_0, \Psi_0)$ . Hasta aquí, y a pesar de no saber la forma de las matrices nuevas  $x_n$ , se ve que la solución  $\Psi$  tiene ya una forma, sin embargo la forma de la solución  $g$  sigue pendiente aunque se sabe por (4.13) que será análoga a (4.14) Se deben elegir un grupo arbitrario de valores  $\lambda_n$  y asociarle una solución de fondo  $(g_0, \Psi_0)$ , supongase que se determinan estos valores y se señalan las soluciones de fondo. Se debe sustituir (4.15) en (4.14) sin olvidar que  $\lambda; \neq 0$

$$\Psi = \left( I + \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\lambda - \lambda_n} \right) \Psi_0$$

---

<sup>3</sup>Se entiende que aunque  $x_n$  no depende de  $\lambda$ , si lo hace de las ctes. arbitrarias  $\lambda_n$  por lo que el conjunto de estos valores debe estar en el mismo espectro en el que estaba  $\lambda$  para (4.4)



$$\Psi = \Psi_0 - \left( \sum_{n=1}^N x_n \lambda_n^{-1} \right) \Psi_0 \quad (4.16)$$

Y, de acuerdo a (4.13), se obtiene la solución para  $g(\xi, \eta)$  en terminos de la solución de fondo  $g_0$

$$g = g_0 - \left( \sum_{n=1}^N x_n \lambda_n^{-1} \right) g_0 \quad (4.17)$$

La técnica con la que se encontraron las soluciones a los pares de LAX es conocida como técnica de vendaje y fue desarrollada por Zakharov y Shabat

## 4.2 El Caso de la Relatividad General

Debe entenderse que encontrar soluciones a la ecuación fundamental de la Relatividad General equivale a buscar el tensor de Ricci que está asociado con dichas soluciones. y es que este tensor es esencial para representar matemáticamente la idea de la gravedad como nada más que la evidencia de la curvatura en el espacio-tiempo causada por una masa significativa. Entonces, para aplicar una extensión del MDI de dos dimensiones a la ecuación de Einstein en el vacío, deben recordarse ciertos postulados, uno de ellos es que el tensor de Ricci en el vacío es cero

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.18)$$

Si este tensor es de orden dos entonces el tensor métrico también tiene que serlo, un segundo orden que corresponde a las dos variables en el espacio-tiempo. Para este capítulo se considerará a la coordenada para el tiempo en el espacio de Minkowski como  $t = x^0$ , y a la coordenada para el espacio  $z = x^3$  (abarcando ésta última a las coordenadas espaciales convencionales;

largo, ancho y alto). Además, a estas dos variables se les puede asociar dos campos vectoriales de Killing que no son otra cosa que vectores descritos en variedades de Reimann<sup>4</sup> o en otras palabras vectores trazados en un espacio-tiempo curvo. Resulta entonces obvia una similitud entre los espacios que generan el tensor de Ricci, y las posibles soluciones a la ecuación de Einstein, con los campos vectoriales de Killing.

Anteriormente se hizo un cambio de coordenadas en  $x^i$  para un cierto elemento de línea (2.12), ahora en todo el espacio-tiempo se usará la transformación de coordenadas  $x^\nu = x^\nu(x^\mu)$ , transformación que permite imponer las siguientes condiciones al tensor métrico

$$g_{00} = -g_{33}, \quad g_{03} = 0 \quad g_{0a} = 0, \quad (4.19)$$

donde  $a, b, c, \dots = 1, 2, \dots$ , y bajo estas condiciones, la diferencial de línea  $ds^2$  es de la forma

$$ds^2 = f(dz^2 - dt^2) + g_{ab}dx^a dx^b + 2g_{a3}dx^a dz$$

Considerese a (4.19) para decir que  $f = -g_{00} = g_{33}$  y que  $f = g_{00} = g_{33}$ , ajustandose al caso particular donde  $f = g_{a3} = 0$ . Esta última expresión debe verse más como una limitación física y no como una simple anulación de coeficientes métricos, y es que se indica la existencia de dos superficies otogónales, sin embargo los dos vectores de killing ya garantizan la presencia de dos superficies ortogónales. Entonces, la métrica queda de una forma más sencilla

$$ds^2 = f(t, z)(dz^2 - dt^2) + g_{ab}(t, z)dx^a dx^b \quad (4.20)$$

---

<sup>4</sup>Si bien el tensor de Ricci se usa para describir la curvatura de un espacio 4-dimensional, esté no es más que la contracción del tensor de Riemann de 4 componentes a uno de solo dos componentes.

Es necesario mencionar la importancia del uso del MDI para obtener soluciones a las ecuaciones de Einstein. Sucede que la métrica, vista como se ve en (4.20), primero fue considerada para una matriz diagonal  $g_{ab}$  cuando las ecuaciones de Einstein en realidad se reducen a una ecuación lineal en coordenadas cilíndricas. La inclusión de la componente  $g_{12}$  hace que deje de ser una simple matriz diagonal y convierte a la ecuación de Einstein en una ecuación no lineal. Sin embargo, la ecuación de Einstein puede ser tratada con éxito por medio de alguna generalización de la forma Zakharov-Shabat del MDI como se hizo antes. En adelante, se designará por  $g$  a la matriz simétrica, real y de dos dimensiones con elementos  $g_{ab}$ .

Sea entonces un bloque de dos dimensiones del tensor métrico que forma parte de (4.20)

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \det g = \alpha^2 \quad (4.21)$$

Donde  $\alpha \geq 0$  funciona casi siempre <sup>5</sup>.

Las componentes  $R_{3a}$  y  $R_{0a}$  son idénticamente cero y las ecuaciones en el vacío de Einstein, ilustradas por este tensor, se pueden dividir en dos grupos, el primero de ellos se puede deducir de cuando  $R_{ab} = 0$  y se puede escribir una ecuación análoga a la ecuación de campo o ecuación matricial (4.10) (recordando las coordenadas nulas  $\xi$  y  $\eta$ ).

$$\left(\alpha g_{\xi} g^{-1}\right)_{\eta} + \left(\alpha g_{\eta} g^{-1}\right)_{\xi} = 0 \quad (4.22)$$

El segundo grupo se deduce de las ecuaciones  $R_{00} + R_{33} = 0$  y  $R_{03} = 0$  y dan los coeficientes  $f(z, t) = g_{00} = -g_{33}$  de la métrica (4.20). Estos coeficientes están en términos de la matriz  $g$  a través de las siguientes relaciones

---

<sup>5</sup>Es conveniente que  $\alpha$  sea no negativo o cero ya que puede darse que  $\alpha = 0$ , lo que corresponde a singularidades físicas, y en tales casos la continuación de las soluciones a través de estos puntos no tiene sentido

$$(\ln f)_\xi (\ln \alpha)_\xi = (\ln \alpha)_{\xi\xi} + \frac{1}{4\alpha^2} \text{Tr} A^2 \quad (4.23)$$

$$(\ln f)_\eta (\ln \alpha)_\eta = (\ln \alpha)_{\eta\eta} + \frac{1}{4\alpha^2} \text{Tr} B^2 \quad (4.24)$$

Y análogas a las matrices  $K$  y  $L$ ,  $A$  y  $B$  tienen la forma

$$A = -\alpha g_\xi g^{-1}, \quad B = \alpha g_\eta g^{-1} \quad (4.25)$$

Si estas ecuaciones muestran una dependencia de los coeficientes de  $f(t, z)$  con respecto a una función matriz  $g$ , entonces sobra decir que su condición de integrabilidad con respecto a  $f$  se cumple si primero  $g$  satisface a la ecuación de campo (4.22).

La ecuación  $R_{00} - R_{33} = 0$  puede escribirse como

$$(\ln f)_{\xi\eta} = \frac{1}{4\alpha^2} \text{Tr} AB - (\ln \alpha)_{\xi\eta} \quad (4.26)$$

Como sucedió para la ecuación matricial (4.10), la matriz función  $g$  resolverá ahora a (4.22). El nuevo término  $\alpha = (\det g)^{1/2}$  puede o no puede ser una cte. La propuesta para que  $\alpha$  sea una cte. no será necesaria de analizar en este trabajo ya que, de ser así, se puede deducir que  $\text{Tr} A^2 = \text{Tr} B^2 = 0$ . Así, las ecuaciones (4.23) y (4.24) no son capaces de determinar la forma del coeficiente de  $f$ , provocando que se deba hechar mano de (4.25) (asumiendo que  $A = B = 0$ ) dándole una forma para  $f$  de  $f = \exp[f_1(\xi) + f_2(\eta)]$  y donde  $f_1$  y  $f_2$  serían funciones arbitrarias, conduciendo a un proceso más difícil, sin embargo considerando a este término extra como una no-constante, además de la transformación de  $\xi$  y  $\eta$ , el valor de  $f$  se reduce a una simple cte.

Aunque resulte confuso, aún cuando se considera una extensión del MDI, la idea general del desarrollo sigue siendo la misma. Lo que se pretende hacer

con este método es resolver la ecuación diferencial no-lineal de Einstein al buscar integrar a las ecuaciones diferenciales (pero totalmente integrables) que forman a los pares de Lax (L-A). La extensión del método consiste en deducir a estas ecuaciones diferenciales (L-A) y que se puedan asociar a (4.21) y (4.22)

# Capítulo 5

## ESQUEMA DE INTEGRACIÓN

Sea entonces el par de ecuaciones espectrales (4.21) y (4.22). El trazo sobre  $\xi$  y  $\eta$  de (4.22), considerando a la condición (4.21), resulta ser

$$\alpha_{,\xi\eta} = 0 \tag{5.1}$$

Este valor  $\alpha$ , es decir la raíz cuadrada del determinante de una matriz  $g$ , podía verse como la solución de una ecuación de onda tal que

$$\alpha = y(\xi) + c(\eta) \tag{5.2}$$

Donde  $y(\xi)$  y  $c(\eta)$  son, a fines de ilustración, funciones arbitrarias pero que siguen dependiendo de las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  de acuerdo a (4.22) y (5.1). Es necesario adelantar la forma de una solución alternativa e independiente a (5.2) escrita como

$$\beta = y(\xi) - c(\eta) \tag{5.3}$$

Se debe asumir que la métrica (4.20) admite, de forma arbitraria, una transformación de coordenadas  $z' = f_1(z+t) + f_2(z-t)$ ,  $t' = f_1(z+t) - f_2(z-t)$ , transformación aceptable siempre y cuando no cambie la forma plana de la parte:  $f(dz^2 - dt^2)$ . Recordando siempre la dependencia de  $\xi$  y  $\eta$  con respecto a  $z$  y  $t$ , si se eligen bien  $f_1$  y  $f_2$  se pueden escribir a las funciones de (5.2):  $y(\xi)$  y  $c(\eta)$

Por otro lado, si se regresa a la ecuación de campo (4.22) se puede ver que ésta es equivalente al sistema constituido por las matrices  $A$  y  $B$  en (4.25) y dos ecuaciones matriciales de primer orden, por lo tanto se puede sacar la primera ecuación obvia de esto como

$$A_{,\eta} - B_{,\xi} = 0 \quad (5.4)$$

Se habia dicho, que la condición de integrabilidad para (4.23) y (4.24) con respecto a  $f$  se satisface si a su vez  $g$  satisface como condición de integrabilidad a la ecuación de campo (4.22), bueno pues la segunda ecuación que se puede sacar de este sistema es precisamente la que resulta de derivar como a una condición de integrabilidad a (4.25), pero ahora con respecto a  $g$  obviamente <sup>1</sup>

$$A_{,\eta} + B_{,\xi} + \alpha^{-1}[A, B] - \alpha_{\eta}\alpha^{-1}A - \alpha_{\xi}\alpha^{-1}B = 0 \quad (5.5)$$

Aquí los corchetes denotan al conmutador de las matrices  $A$  y  $B$ .

Ahora, hay que buscar la manera de hacer compatibles dos cosas: la primera un problema de los nombrados valores propios junto con las funciones propias para algunos operadores diferenciales lineales, es decir un problema análogo a los desarrollados para KdV y Sein-Gordon, y por el otro lado un sistema sobredeterminado de ecuaciones más generales relacionadas con las

---

<sup>1</sup>Al decir que se le deriva como a una condición de integrabilidad, no quiere decir que sea la condición de integrabilidad que se iguala a la E.D.P. no lineal que hay que resolver siguiendo el MDI, es solo una condición más que no debe olvidarse a la hora de llevar a cabo la integración del sistema

matrices  $g$ ,  $A$  y  $B$ . Para que esta compatibilidad sea posible será necesario hechar mano de las ecuaciones (5.4) y (5.5). El sistema dependerá de ese parámetro espectral  $\lambda$ , y a su vez las soluciones de las ecuaciones originales para las matrices se determinarán gracias a la estructura de las funciones propias para estos valores  $\lambda$ .

Sean los siguientes operadores para el sistema espectral (4.21) y (4.22), éstos deben ser operadores diferenciales con dependencia en un cierto potencial, y cuyas derivadas sean ahora con respecto a las coordenadas espacio-temporales  $(\xi, \eta)$ .

$$D_1 = \partial_\xi - \frac{2\alpha_\xi \lambda}{\lambda - \alpha} \partial_\lambda, \quad D_2 = \partial_\eta + \frac{2\alpha_\eta \lambda}{\lambda + \alpha} \partial_\lambda \quad (5.6)$$

Para que las matrices  $D_1$  y  $D_2$  conmuten entre sí será necesario recordar que, considerando a (5.1),  $\alpha$  es solución de una ecuación de onda, permitiendo que al desarrollar la definición del conmutador para estas matrices éste se cumpla, es decir

$$\begin{aligned} [D_1 D_2] &= D_1 \cdot D_2 - D_2 \cdot D_1 \\ &= \partial_\xi \partial_\eta + \frac{2\alpha_{,\eta} \lambda \partial_\xi}{\lambda + \alpha} \partial_\lambda - \frac{2\alpha_{,\xi} \lambda \partial_\lambda}{\lambda - \alpha} \lambda_\eta - \frac{4\alpha_{,\xi} \alpha_{,\eta} \lambda^2}{(\lambda - \alpha)^2} (\partial_\lambda)^2 \\ &\quad - \partial_\eta \partial_\xi + \frac{2\alpha_{,\xi} \lambda \partial_\eta}{\lambda - \alpha} \partial_\lambda - \frac{2\alpha_{,\eta} \lambda \partial_\lambda}{\lambda + \alpha} \partial_\xi + \frac{4\alpha_{,\eta} \alpha_{,\xi} \lambda^2}{(\lambda - \alpha)^2} (\partial_\lambda)^2 \end{aligned}$$

Por lo que, de acuerdo a que  $\alpha_{,\xi\eta} = 0$  y al hecho de  $\partial_\xi \partial_\eta = \partial_\eta \partial_\xi$ , la reducción de términos cumple el conmutador para  $D_1$  y  $D_2$

$$[D_1 D_2] = D_1 \cdot D_2 - D_2 \cdot D_1 = 0 \quad (5.7)$$

Si se tienen ya a los operadores  $D_1$  y  $D_2$ , falta determinar a la matriz función compleja  $\Psi(\lambda, z, t)$ , matriz función que en un principio satisfacía a (3.24) y (3.23), pero ahora también sirve como una matriz de generación



$\Psi(\lambda, \xi, \eta)$ . Esta matriz considera a su vez al siguiente sistema de ecuaciones

$$D_1\Psi = \frac{A}{\lambda - \alpha}\Psi, \quad D_2\Psi = \frac{B}{\lambda + \alpha}\Psi \quad (5.8)$$

Se podría decir que estas nuevas dos ecuaciones actúan también como operadores sobre la matriz de generación  $\Psi$ . Además, estas matrices pueden ser comparadas a las matrices regulares en el plano de  $\lambda$  (4.3), tal es así que, para éstas últimas, las matrices  $K$  y  $L$  son independientes del parámetro  $\lambda$ , característica que también poseen las matrices  $A$  y  $B$ .

Si se requiere ver a (5.4) y (5.5) como condiciones de compatibilidad entre un problema de valor propio ( $\lambda$ ) con funciones propias ( $\Psi$ ) para algunos operadores diferenciales como (5.6) y (5.8), y un sistema de ecuaciones generales relacionadas con las matrices  $g$ ,  $A$  y  $B$ , entonces será necesario seguir los siguientes pasos.

Se necesita aplicar el operador  $D_2$  a  $D_1\Psi$  y aplicar  $D_1$  a  $D_2\Psi$ , después se restarían los resultados. A excepción de  $\Psi$ , el lado izquierdo quedaría expresado como el conmutador de estas matrices, expresión que se sabe resulta ser cero

$$D_1D_2\Psi - D_2D_1\Psi = [D_1, D_2]\Psi$$

Del lado derecho solo quedará una función racional de  $\lambda$  que también se hace cero solamente si las ecuaciones (5.4) y (5.5) se cumplen. Ésto facilita ver por qué las ecuaciones (5.4) y (5.5) son ciertas condiciones de compatibilidad

Es necesario seguir el proceso del esquema de integración tal y como se viene describiendo desde el inicio de esta sección. Si se recuerda en el apartado de Técnica de Dispersión Inversa, una vez que se tuvieron definidas las ecuaciones o matrices (4.3), se definió que éstas tenían que ser regulares en el plano de  $\lambda$ . En esa misma sección se habló precisamente de la matriz función  $\Psi(\lambda, \xi, \eta)$ , que se sabe es la matriz de generación, además de una matriz  $g$  de la que dependían en ese momento las matrices  $K$  y  $L$ . Se aclaró también que la relación entre  $g$  y la matriz de generación radicaba en que del sistema de ecuaciones matriciales donde  $\Psi$  era solución se dedujo la ecuación de campo

de la que la matriz  $g$  es solución, estas deducciones son exactamente iguales ahora; la matriz  $g(\xi, \eta)$ , de la que dependen  $A$  y  $B$ , debe satisfacer ahora no solo a (4.22), sino que al hacerlo automáticamente ya se ha satisfecho también a (4.21), y al haber una relación entre  $\Psi$  y  $g$  se puede decir que la segunda es el valor de la primera en el valor del polo  $\lambda = 0$ , dejando más clara la relación entre ambas

$$g(\xi, \eta) = \Psi(0, \xi, \eta) \quad (5.9)$$

Si  $\Psi$  es capaz, como solución a las ecuaciones espectrales, de resolver el problema de Cauchy, entonces no hay razón para pensar que la solución  $g$ , que no es otra cosa que una solución generada por  $\Psi$ , no pueda hacerlo. Ya que  $\Psi$  y  $g$  tienen esta propiedad, se puede decir que, de acuerdo al MDI, una parte del proceso en el esquema de integración consiste en poder determinar una sola solución particular  $g_0$  (solución de fondo) para (4.21) y (4.22) en el plano de  $\lambda$  y para el polo  $\lambda = 0$ . Considerense por ahora la solución particular  $g_0(\xi, \eta)$ , gracias a que ya se conoce esta solución, y de acuerdo a (4.25), se puede determinar la forma de las matrices  $A$  y  $B$  para el caso preciso de  $A_0(\xi, \eta)$  y  $B_0(\xi, \eta)$  (que más adelante servirán como límites de integración). Además, si se conoce a  $g_0$ , por la compatibilidad entre ellas, se debería poder encontrar al caso particular de  $\Psi$ :  $\Psi_0$ . Para obtener a esta ecuación inicial, vease a la matriz de generación como

$$\Psi = X\Psi_0 \quad (5.10)$$

Recuerde que  $X$  es una matriz de apósito que tomará forma más adelante. Encontrar a  $\Psi_0$  requiere integrar al sistema (5.8); primero debe sustituirse a (5.10) en (5.8)

$$D_1 X \Psi_0 = \frac{A}{\lambda - \alpha} (X \Psi_0) \quad D_2 X \Psi_0 = \frac{B}{\lambda + \alpha} (X \Psi_0),$$

Simplificando a  $\Psi_0$  en ambos lados y considerando a  $A(\xi, \eta)$  y  $B(\xi, \eta)$  como límites de la integral, se tiene que

$$D_1 X = \frac{1}{\lambda - \alpha} (X.A - X.A_0), \quad D_2 X = \frac{1}{\lambda + \alpha} (X.B - X.B_0) \quad (5.11)$$

Nuevas ecuaciones ahora para la matriz de apósite  $X(\lambda, \xi, \eta)$ . Tanto  $X$  como  $\Psi$  deberían cumplir dos condiciones para que la solución  $g$  sea real y simétrica. La primera condición es que ambas deben existir como reales en el plano complejo, lo que lleva a suponer que se cumple para ambas que <sup>2</sup>

$$\overline{X(\bar{\lambda})} = X(\lambda), \quad \overline{\Psi(\bar{\lambda})} = \Psi(\lambda) \quad (5.12)$$

Para la segunda condición, hay que considerar la propiedad de invariancia de las soluciones del nuevo sistema (5.11). Para ver esta propiedad imáginese a una matriz dada  $X(\lambda)$  que resuelva a (5.11). Ésto puede verse si a partir de (5.11) se sustituye a las matrices  $A, A_0$  y  $B, B_0$

$$D_1 X(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \alpha} \left( -X(\lambda)g_{,\xi}g^{-1} + X(\lambda)g_{0,\xi}g_0^{-1} \right)$$

$$D_2 X(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \alpha} \left( X(\lambda)g_{,\eta}g^{-1} - X(\lambda)g_{0,\eta}g_0^{-1} \right)$$

Viendo por ahora que del lado derecho queda cero si se considera que  $g = g_0$ . Ahora, si se aplican los operadores  $D_1$  y  $D_2$  sobre  $X(\lambda)$

$$D_1 X(\lambda) = \partial_\xi X(\lambda) - \frac{2\alpha_\xi \lambda \partial_\lambda X(\lambda)}{\lambda - \alpha},$$

---

<sup>2</sup>Las barras superiores indican la conjugación compleja, y el lado derecho la parte real

$$D_2X(\lambda) = \partial_\eta X(\lambda) + \frac{2\alpha_\xi \lambda \partial_\lambda X(\lambda)}{\lambda + \alpha}$$

Se puede ver que efectivamente es cero si se recuerda a (5.1). Ésto corrobora que  $X(\lambda)$  de hecho satisface al sistema (5.11). Si esto sucede con esta matriz de apósito, se puede cambiar el argumento de  $\lambda$  por  $\frac{\alpha^2}{\lambda}$  y ver que sucede prácticamente lo mismo, hecho que obedece a la propiedad de invarianza. Dicho esto, si se elige el segundo argumento se puede elegir una forma de  $X(\lambda)$  como

$$X'(\lambda) = gX^{-1}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda}\right)g_0^{-1} \quad (5.13)$$

La tilde denota la transposición de la matriz. No debe olvidarse que hasta ahora se ha dado por hecho que  $g$  tiene que ser simétrica, bajo estas restricciones se puede obtener por fin la segunda condición para la matriz de apósito, y es que la garantía de que  $g$  sea simétrica radica en suponer que  $X'(\lambda) = X(\lambda)$ , por lo que la condición resulta

$$g = X(\lambda)g_0\widetilde{X}\left(\frac{\alpha^2}{\lambda}\right) \quad (5.14)$$

Que no es más que un simple despeje de la matriz  $g$  de  $X'(\lambda)$ . Si bien esta matriz de apósito no es igual a su versión en (4.15), comparte con ella la exigencia que cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $X(\lambda)$  tiende a la matriz unidad

$$X(\infty) = I \quad (5.15)$$

Entonces, la forma de  $g$  en (5.14) cambiaría a ser solo

$$g = X(0)g_0 \tag{5.16}$$

Notese que esta forma de representar a  $g$  puede también verse reflejada como una consecuencia de la similitud entre  $g$  y  $\Psi$  con  $\lambda = 0$  (5.9), y de ver a la matriz de generación como (5.10), es decir

$$g(\xi, \eta) = \Psi(0, \xi, \eta)$$

Sustituyendo (5.10) en (5.9)

$$g(\xi, \eta) = X\Psi_0$$

Para terminar esta sección, lo que restaría hacer es determinar la forma de  $X$ , y es que haciendo esto se puede dar forma automáticamente a la solución de fondo  $g_0$ , pero se han dado condiciones que deben cumplir ambas matrices antes de ser de la forma que sean. Para la primera se debe cumplir con (5.12) y (5.15), y para la segunda se debe cumplir con lo que determina (4.21).

Algo que es importante mencionar es que si  $g$  debe cumplir con  $\det g = \alpha^2$ , entonces la solución de fondo también debe hacerlo, es decir que  $\det g_0 = \alpha^2$ , y la explicación de ello es que  $\alpha(\xi, \eta)$  es la misma para la solución de fondo y para la solución general. Al existir tal similitud entre el determinante de estas dos soluciones (se asume que  $\det g = \det g_0$ ), se debe exigir para  $X$  que  $\det X(0) = 1$ . Sin embargo, esta nueva restricción para  $X$  no debe influir aún en los cálculos ni de  $g$  ni de  $g_0$ .

La solución o soluciones  $g$  y  $g_0$  que sean correctas de acuerdo a las condiciones impuestas anteriormente serán llamadas "soluciones físicas". Hasta ahora no se ha hablado del por qué es necesario que, de acuerdo a (4.21), el determinante de la solución general  $g$  no sea distinto a  $\alpha^2$  y, respecto a esto, lo que se puede decir ahora es que al aceptar dicho valor, el trazo de (4.22) implica que el  $\det g$  ( $\alpha^2$ ) satisface la siguiente ecuación

$$(\alpha (\ln \det g)_{,\xi})_{,\eta} + (\alpha (\ln \det g)_{,\eta})_{,\xi} = 0 \quad (5.17)$$

Esta ecuación no es más que una manera distinta de escribir a la misma ecuación (4.22). De esta última expresión se puede obtener una forma de la solución física  $g^{(ph)}$  que  $g$  debe formar

$$g^{(ph)} = \alpha (\det g)^{-\frac{1}{2}} g \quad (5.18)$$

Resulta difícil determinar la diferencia entre  $g^{ph}$  y  $g$ . La solución o soluciones solitónicas a la ecuación no lineal de Einstein fue denotada desde el inicio de este trabajo como una métrica que tiene como parte de ella a una matriz función  $g$ , sobre esta solución se ha recalado que para que sea una "solución física" aceptable tiene que cumplir con dos condiciones, una de ellas, y quizá la más importante, es:  $\det g = \alpha^2$ . Determinar como  $\alpha^2$  el valor de la determinante de  $g$  implica poder determinar la forma de la solución física (5.18), ésta última satisface a (5.17) como lo tendría que hacer  $g$  a la ecuación de campo (5.21), se puede concluir entonces que si bien  $g$  es la solución buscada,  $g^{ph}$  es el "molde" que esta solución debe llenar, además de las condiciones para ser considerada completamente como una solución física.

Ahora, ¿qué sucede con las matrices  $A$  y  $B$ ?, matrices de las que en parte dependen la forma de los coeficientes  $f$  de la métrica. Básicamente,  $A$  y  $B$  deben ser definidas por las mismas expresiones que en (4.25)

$$A^{(ph)} = A - \alpha \left\{ \ln \left[ \alpha (\det g)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}_{,\xi} I, \quad (5.19)$$

$$B^{(ph)} = B + \alpha \left\{ \ln \left[ \alpha (\det g)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}_{,\eta} I, \quad (5.20)$$

En (4.25), estas matrices eran definidas en términos de  $g$ , ahora las nuevas matrices  $A^{(ph)}$  y  $B^{(ph)}$  están definidas en términos de  $g^{(ph)}$ .

## 5.1 Soluciones de tipo Solitón

La solución  $X$ , en principio, es la suma de una parte solitónica y una no solitónica, la parte que interesa ahora es la parte solitónica. Cuando se habla de soluciones solitónicas se da por sentado que existen ciertos valores de un parámetro espectral que aquí se bautizó como  $\lambda$ . A cada valor de  $\lambda$  se le debería poder asociar una solución solitónica para cuando existen polos en una función, es decir valores en los que la función racional tiende a  $\infty$ . La matriz función  $X$  debe ser una función racional de este parámetro y tiene un número finito de polos simples, polos donde  $\lambda$  solo tiene un único valor. Conforme este valor vaya creciendo hasta tender a infinito, entonces la matriz de apósito tenderá a la matriz unidad, ajustándose a la condición (5.15).

La otra condición que  $X$  debe cumplir es la marcada en (5.12), condición que se le aplicó por igual a la matriz función  $\Psi$  y le afecta igual a la matriz  $g$ , situación que no debe sorprender ya que  $g$  necesita tener valores reales para cumplir con ser una matriz simétrica, como se ha pedido sea desde el inicio. Por lo tanto, para  $\lambda$ , sus valores o el valor de los polos, o bien puede ser de la parte real de su propio plano complejo o bien en pares, es decir que por cada polo complejo  $\lambda = \nu$  habrá un polo complejo conjugado  $\lambda = \bar{\nu}$  que le corresponda.

De acuerdo a la condición de simetría, según la cual se puede reemplazar a  $\lambda$  por  $\frac{\alpha^2}{\lambda}$ , se puede decir que por cada polo  $\lambda = \nu$  hay un punto o polo donde  $\lambda = \frac{\alpha^2}{\nu}$  de la degeneración de la matriz  $X$ , y que por tanto el determinante de  $X$  se desvanece.

La forma de  $X$  no debe ser muy distinta a lo que se vió en (4.15). Entonces, al pensar que se cumplen estas propiedades de simetría, la condición (5.15) y el asumir que existe un polo donde  $\lambda = \nu$ ,  $X$  puede tener la siguiente forma

$$X = I + \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{\lambda - \nu_k} \quad (5.21)$$

Como  $X_n$ , ahora  $R_k$  son matrices independientes de  $\lambda$  pero dependientes de  $\nu_k$  (que tampoco dependen de ella).

La ecuación (5.16) marca que las soluciones  $g$  dependen directamente de  $X$ , y para poder seguir con ello es necesario aclarar que, al ser  $R_k$  depen-

entes de  $\nu_k$ , se puede decir que a cada término real  $\nu_k$  le correspondería una matriz real  $R_k$ , y también que de acuerdo a la suma, a cada término complejo  $\nu_k$  debería corresponderle otro  $\nu_{k+1} = \bar{\nu}_k$ , por lo tanto  $R_{k+1} = R_k$ . Aclarado esto, para determinar la forma de la solución  $g$  hay que considerar que, de acuerdo a (5.16), esta en términos de la solución de fondo  $g_0$ , indicando que el valor del polo sería  $\lambda = 0$ , entonces la forma de  $X(0)$  es sencillamente

$$X(0) = I - \sum_{k=1}^n R_k \nu_k^{-1}.$$

sustituyendo a  $X(0)$  en (5.16) simplemente queda

$$g = g(\xi, \eta) = \left( I - \sum_{k=1}^n \nu_k^{-1} R_k \right) g_0 \quad (5.22)$$

Hasta aquí, se ha encontrado la estructura de la solución a nuestros pares de LAX (4.21) y (4.22) como se hizo en (4.17), en ese momento esta solución solo se abordaba con fin ilustrativo del método, terminando ahí el desarrollo de la solución  $g$ , sin embargo ahora es necesario darle una forma explícita a las matrices  $R_k$ . Como esta nueva matriz perteneció al principio a la forma de la matriz de apósito, es necesario aplicar a ésta los operadores  $D_1$  y  $D_2$ . Para que el sistema de (5.11) se satisfaga hay que imponer que uno de los polos debe estar situado en una de las funciones numéricas  $\nu_k$ , esto es posible gracias a que, aunque estas funciones deberían ser independientes de  $\lambda$ , deben tener valores que esten dentro del espectro de ésta, por lo que se puede considerar que  $\lambda = \nu_k$ . Efectivamente para  $\lambda = \nu_k$ , del lado derecho de este sistema se ve que solo existe éste polo simple

$$D_1 X = \frac{1}{\nu_k - \alpha} \left( A + \sum_{k=1}^n \frac{AR_k}{\lambda - \nu_k} - A_0 - \sum_{k=1}^n \frac{A_0 R_k}{\lambda - \nu_k} \right) \quad \text{unico polo } \lambda = \nu_k, \quad (5.23)$$



$$D_2X = \frac{1}{\nu_k + \alpha} \left( B + \sum_{k=1}^n \frac{BR_k}{\lambda - \nu_k} - B_0 - \sum_{k=1}^n \frac{B_0R_k}{\lambda - \nu_k} \right) \quad \text{unico polo } \lambda = \nu_k, \quad (5.24)$$

Mientras que del lado izquierdo (aplicando los operadores en (5.6) a la matriz  $X$ ) existen polos de segundo orden. De ese mismo lado, si los coeficientes de las potencias  $(\lambda - \nu_k)^{-2}$  desaparecen, entonces se pueden determinar las siguientes ecuaciones que siguen las trayectorias de los polos de acuerdo a las coordenadas espaciales y temporales

$$\nu_{k,\eta} = \frac{2\alpha_\xi \nu_k}{\alpha - \nu_k}, \quad \nu_{k,\eta} = \frac{2\alpha_\eta \nu_k}{\alpha + \nu_k} \quad (5.25)$$

De acuerdo con la condición de simetría del parámetro  $\lambda$  que dice que  $\lambda = \frac{\alpha^2}{\nu}$ , y a que uno polo simple esta en  $\lambda = \nu_k$ , se puede considerar que si  $\nu_k$  fuera solución de las ecuaciones (5.25) también debería serlo  $\frac{\alpha^2}{\nu}$ . Si se pudiera ver a estas dos ecuaciones como la siguiente ecuación cuadrática

$$\nu_k^2 + 2(\beta - w_k) \nu_k + \alpha^2 = 0 \quad (5.26)$$

Entonces, las soluciones  $\nu_k$  y  $\frac{\alpha^2}{\nu}$  no serían otra cosa que las raíces de esta ecuación. El termino  $w_k$  representa a ctes. complejas arbitrarias. De acuerdo a la resolución del caso clásico de una ecuación cuadrática, basta con encontrar el valor de sus dos raíces siguiendo la formula general, sin embargo ahora hay que considerar además que por cada valor de  $w_k$  estarán estas dos raíces  $\nu_k$  y  $\frac{\alpha^2}{\nu}$ . Recuerdese que cuando se habló de la determinante de la matriz  $g$ , se aclaró que  $\alpha$  tenía que ser no negativo, pues ahora si se piensa en el valor de los módulos de las raíces sucede que  $|\nu_k|$  esta efectivamente en este intervalo, pero la raíz  $\frac{\alpha^2}{\nu}$  esta fuera de el. Esta situación permite usar la terminología "dentro y fuera" para cada raíz. Vease pues que al ser la raíz

$\nu_k$  un polo simple en la matriz de apóposito, y que al estar en el intervalo de  $\alpha$ , se puede decir que

$$|\nu_k| = \alpha$$

Todos los polos  $\nu_k^{in}$  para (5.21) obviamente estarán dentro de este "círculo" para la parte compleja del plano de  $\lambda$ , y también estan, para esta misma raíz, los polos  $\nu_k^{out}$  que por lo tanto no estan en este círculo. Ahora, para obtener la forma explícita de estas raíces a partir de (5.26) se necesita identificar  $a$ ,  $b$  y  $c$  y aplicar la formula general, pero con la variable en que los valores de las raíces no se diferenciarán solo por el signo;  $-\nu_k$  y  $\nu_k$ , sino que serán  $\nu_k^{in}$  y  $\nu_k^{out}$ , entonces se tiene que:

De acuerdo a la formula general,  $a = 1$ ,  $b = 2(\beta - w_k)$  y  $c = \alpha^2$ . Por lo que

$$\nu_k = \frac{-2(\beta - w_k) \pm \sqrt{(\beta - w_k)^2 - 4\alpha^2}}{2},$$

Reacomodando términos y factorizando un  $(2)^2$  en la parte de la raíz

$$\nu_k = (w_k - \beta) \pm \sqrt{(\beta - w_k)^2 - \alpha^2}$$

Asi que la forma de las raíces  $\nu_k$  de acuerdo a si estan dentro o fuera del círculo es

$$\nu_k^{in} = (w_k - \beta) - \sqrt{(\beta - w_k)^2 - \alpha^2}, \quad (5.27)$$

$$\nu_k^{out} = (w_k - \beta) + \sqrt{(\beta - w_k)^2 - \alpha^2}, \quad (5.28)$$

Por supuesto que tanto (5.27) y (5.28) deben ajustarse a las condiciones con respecto a  $\alpha$ :  $|\nu_k^{in}| < \alpha$  y  $|\nu_k^{out}| > \alpha$

No debe olvidarse que ésta es la parte del método en donde se requiere determinar a las matrices, independientes de  $\lambda$ ,  $R_k$ . Como parte de este proceso reescribese a (5.11) de la sig. forma

$$\frac{A}{\lambda - \alpha} = (D_{1X}) X^{-1} + X \frac{A_0}{\lambda - \alpha} X^{-1}, \quad (5.29)$$

$$\frac{B}{\lambda + \alpha} = (D_{2X}) X^{-1} + X \frac{B_0}{\lambda + \alpha} X^{-1}. \quad (5.30)$$

Vease que de acuerdo a las ecuaciones (5.23) y (5.24), el lado izquierdo de (5.11) muestra ecuaciones regulares en los polos  $\lambda = \nu^k$ . Dado que esto sucede del lado izquierdo, es necesario que los residuos de estos polos se desbancezcan (o sean igual a cero) en el lado derecho. Requisito que lleva a suponer que las matrices  $R_k$  tengan la forma

$$R_{k\xi} X^{-1}(\nu_k) + R_k \frac{A_0}{\nu_k - \alpha} X^{-1}(\nu_k) = 0, \quad (5.31)$$

$$R_{k\eta} X^{-1}(\nu_k) + R_k \frac{B_0}{\nu_k + \alpha} X^{-1}(\nu_k) = 0. \quad (5.32)$$

donde se hace uso de la sig relación <sup>3</sup>

$$R_k X^{-1}(\nu_k) = 0 \quad (5.33)$$

La condición (5.33) deja claro que  $R_k$  son matrices degeneradas o singulares, es decir que su determinante es cero, y lo mismo pasa con las matrices  $X^{-1}(\nu_k)$ . Las componentes de cada una de estas matrices son

---

<sup>3</sup>Esta relación surgió de saber que  $XX^{-1} = I$  en los polos  $\lambda = \nu_k$

$$(R_k)_{ab} = n_a^k m_b^k, \quad [X^{-1}(\nu_k)]_{ab} = d_a^{(k)} p_b^{(k)} \quad (5.34)$$

He aquí la forma de las matrices secundarias que se necesitaba conocer por ser parte de la matriz de apóposito  $X$  que a su vez forma parte tanto de las soluciones  $g$  y  $\Psi$ . Resta conocer la forma de los vectores  $m_a^{(k)}$  y  $n_a^k$ . De acuerdo a (5.33), cuando se multiplican las entradas o componentes de la matriz  $R_k$  por las de la matriz  $X^{-1}(\nu_k)$ , resulta que

$$m_a^{(k)} d_a^{(k)} = 0, \quad (5.35)$$

El término  $m_a^{(k)}$  indica vectores de solo dos componenttes. Estos índices repetidos se refieren al convenio de suma para los subíndices de los vectores y los tensores (teniendo en cuenta que, como se dijo para el vector  $m_a^{(k)}$ , los valores de los índices solo pueden ser de 1 y 2)

Para conocer la evolución de estos vectores  $m_a^{(k)}$ , será necesario sustituir a (5.34) en (5.27) y (5.32), de tal forma que solo quede

$$\left[ m_{a,\xi}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(A_0)_{ba}}{\nu_k - \alpha} \right] d_a^{(k)} = 0, \quad \left[ m_{a,\eta}^{(k)} + m_b^{(k)} \frac{(B_0)_{ba}}{\nu_k + \alpha} \right] d_a^{(k)} = 0 \quad (5.36)$$

La solución a estas ecuaciones podría verse como una solución particular del sistema original de ecuaciones de la función  $\Psi$ , es decir, del sistema (5.8). Esta solución particular podría ser  $\Psi_0^{-1}$ . Entonces, sea la nueva matriz

$$V_k = (\Psi_0^{-1})_{\lambda=\nu_k}$$

Esto para cuando aún se considera que, de acuerdo al polo simple,  $\lambda = \nu_k$ . Así, si antes se consideraba que  $\Psi(\lambda, \xi, \eta)$ , ahora será simplemente

$$V_k = (\Psi_0^{-1})_{\lambda=\nu_k} = \Psi_0^{-1}(\nu_k, \xi, \eta) \quad (5.37)$$

Así que  $V_k$  en realidad cumple con las expresiones de (5.36)

$$V_{k,\xi} + V_k \frac{A_0}{\nu_k - \alpha} = 0, \quad V_{k,\eta} + V_k \frac{B_0}{\nu_k + \alpha} = 0 \quad (5.38)$$

Finalmente, la solución  $m_a^{(k)}$  para (5.36) queda como

$$m_a^{(k)} = m_{0b}^{(k)} (V_k)_{ba} = m_{0b}^{(k)} [\Psi_0^{-1}(\nu_k, \xi, \eta)]_{ba} \quad (5.39)$$

El término  $m_{0b}^{(k)}$  representa a ctes. arbitrarias. La forma de  $n_a^k$  es la única que falta para poder expresar de manera explícita a las matrices  $R_k$ . Para establecer la forma de estos últimos vectores, se puede partir de la condición (5.14). En efecto, al sustituir a (5.21) en (5.14) y al recordar que los polos para esta matriz de apósiso (5.21) estarían ubicados en los puntos donde  $\lambda = \frac{\alpha^2}{\nu_k}$ , se puede ver que las matrices  $R_k$  satisfacen al siguiente sistema algebraico de  $n$ -ecuaciones matriciales

$$R_k g_0 \left[ I + \sum_{l=1}^n (\alpha^2 - \nu_k \nu_l)^{-1} \nu_k R_l \right] = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (5.40)$$

Por lo visto,  $k$  requiere que  $k = 1, \dots, n$ . Si se sustituye en esta última expresión de  $R_k$  a las componentes vistas en (5.34), entonces se tiene para los vectores  $n_a^{(k)}$  el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{kl} n_a^{(l)} = \nu_k^{-1} m_c^{(k)} (g_0)_{ca} \quad (5.41)$$

Aqui, el símbolo  $\Gamma_{kl}$  representa a una nueva matriz simétrica con elementos como el que sigue

$$\Gamma_{kl} = -m_c^{(k)} m_b^{(l)} (g_0)_{cb} (\alpha^2 - \nu_k \nu_l)^{-1} \quad (5.42)$$

Se necesita de una matriz simétrica inversa a  $\Gamma_{kl}$ , matriz que será  $\Pi_{kl}$ , de tal forma que

$$\sum_{m=1}^n \Pi_{km} \Gamma_{ml} = \delta_{kl} \quad (5.43)$$

Con  $\delta_{kl}$  como el símbolo de Kronecker. Ahora si, a partir del sistema de ecuaciones en (5.41), se puede "despejar" a los vectores  $n_a^l$ :

Si, de acuerdo a (5.43), la matriz  $\Pi_{ml}$  sirve de inversa a la matriz  $\Gamma_{kl}$ , entonces los vectores  $n_a^l$  en (5.41) quedan expresados como  $n_a^k$

$$n_a^k = \sum_{l=1}^n \Pi_{kl} \nu_l^{-1} m_c^{(l)} (g_0)_{ca} \quad (5.44)$$

Poco a poco se ha ido desglosando la manera en como se llega a la forma final de la solución general que se tenía para los pares de LAX, es decir la forma de  $g$  en (5.22), y es que hacía falta conocer la forma de las matrices  $R_k$ , lo que a su vez requería conocer a los vectores  $n_a^k$ . Entonces, si (5.44) da la forma de dichos vectores, y el término  $m_b^{(k)}$  quedó representado en (5.39),

entonces la matriz  $R_k$  sería

$$(R_k)_{ab} = n_a^{(k)} m_b^{(k)} = \sum_{l=1}^n \Pi_{kl} \nu_l^{-1} L_a^{(l)} \quad (5.45)$$

Con  $L_a^{(l)} = m_c^l (g_0)_{ca}$ . Por lo que al sustituir a (5.45) en la componente de la métrica, de la solución  $g$  (5.22),  $g_{ab}$  es

$$g_{ab} = \left[ I - \sum_{k=1}^n \nu_k^{-1} \left( \sum_{l=1}^n \nu_l^{-1} \Pi_{kl} m_c^{(l)} (g_0)_{ca} m_b^{(k)} \right) \right] g_0,$$

Reduciendo términos ( $g_{ab}$ ) termina siendo

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} - \sum_{k,l=1}^n \nu_k^{-1} \nu_l^{-1} \Pi_{kl} L_a^{(k)} L_b^{(l)} \quad (5.46)$$

donde

$$L_a^{(k)} = m_c^{(l)} (g_0)_{ca} \quad y \quad L_b^{(k)} = m_b^{(k)} (g_0)_{ca}$$

Siempre se ha dicho que la solución  $g$  debe ser simétrica, si se hace un análisis simple de cada uno de los componentes de las entradas  $g_{ab}$  para ver si ellos son a su vez simétricos o reales, esta condición terminaría por cumplirse. Para las funciones  $\nu_k(\xi, \eta)$ , se pidió desde un inicio que estuvieran en la parte real del plano complejo de  $\lambda$ . De (5.39) se ve que todas las ctes. arbitrarias  $m_{0b}^k$  son reales, por lo que los vectores  $m_a^k$  también son reales. De estas afirmaciones se puede deducir que todas las cantidades que forman a la matriz  $g$  son de hecho reales. Mientras se tomen a todas las funciones  $\nu_k(\xi, \eta)$ , las

componentes  $g_{ab}$  serán en automático reales siempre y cuando también se consideren a todas las ctes. arbitrarias reales que estan en la solución para ser real. Esto es por ejemplo, la condición (5.12) determina ya desde un inicio que la función  $\Psi(\lambda, \xi, \eta)$  debe existir como real en el plano complejo para que la solución  $g$  sea real. En consecuencia, también  $\Psi_0(\lambda)$  es real en el plano de  $\lambda$ , es decir en los puntos  $\lambda = \nu_k$ .

En cuanto a la elección de los polos, supongase que hay valores complejos entre las funcones  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ , entonces la misma condición (5.39) obligaría a que todos los polos complejos únicamente aparecieran como pares conjugados, es decir para cada polo complejo  $\lambda = \nu_k$  existe su complejo conjugado  $\lambda = \bar{\nu}_k$ . Asi, si existe un par de polos  $\lambda = \nu_k$  y  $\lambda = \nu_{k+1}$  sería o le correspondería que  $\nu_{k+1} = \bar{\nu}_k$ . Además, a estos polos les correspondería los vectores  $m_a^{(k)}$  y  $m_a^{(k+1)}$  igual que si no fueran polos complejos, que de acuerdo a (5.39) serían

para el par de polos  $\lambda = \nu_k$  y  $\lambda = \nu_{k+1}$

$$m_a^{(k)} = m_{0b}^{(k)} [\Psi_0^{-1}(\nu_k, \xi, \eta)]_{ba} \quad m_a^{(k+1)} = m_{0b}^{(k+1)} [\Psi_0^{-1}(\nu_{k+1}, \xi, \eta)]_{ba} \quad (5.47)$$

En este caso, la matriz  $g$  seguirá siendo real si para cada par de polos complejos conjugados las ctes. arbitrarias  $m_{0b}^{(k)}$  y  $m_{0b}^{(k+1)}$  se toman para ser conjugadas:  $m_{0b}^{(k+1)} = \bar{m}_{0b}^{(k)}$ . Los vectores  $m_a^{(k)}$  y  $m_a^{(k+1)}$  correspondientes a cada par de polos conjugados también son conjugados como:  $m_a^{(k+1)} = \bar{m}_a^{(k)}$ .

Finalmente, se puede calcular una regla para elegir las ctes., ya no tan arbitrarias, para (5.40). Si se quiere asegurar que la matriz  $g$  sea real, entonces se debe elegir a las constantes  $m_{0b}^{(k)}$  en (5.40), de modo que los vectores  $m_a^{(k)}$  correspondientes a los polos reales  $\lambda = \nu_k$  también sean reales, y los vectores  $m_a^{(k)}$  y  $m_a^{(k+1)}$  correspondientes a los pares de polos complejos conjugados  $\lambda = \nu_k$  y  $\lambda = \nu_{k+1} = \bar{\nu}_k$ , sean complejos conjugados en el orden que se mostró arriba; es decir conjugadas entre sí.



## 5.2 Las componentes $g_{ab}$ y $f$ de la métrica

Antes de abordar la forma de la o las soluciones de tipo solitón, se había dicho que estas soluciones podían ser propuestas como "soluciones físicas" si cumplían con dos condiciones básicas: la primera era que, como se intento interpretar aneriormente,  $g$  debe ser simétrica, es decir real. La segunda condición, que es la que toca analizar ahora, es que debe cumplir con lo impuesto en (4.21). Para que la segunda condición en efecto se cumpla tendría que obtenerse el determinante de la solución  $g$  vista al menos como se tiene en (5.46), sin embargo a simple vista parece muy complicado, así que si se pudiera reacomodar o ver de una manera más sencilla a (5.46) de forma tal que no se altere su significado sería de suma ayuda.

Lo que podría hacerse es solo tomar una interpretación distinta de la solución  $g$ , precisamente de  $g_{ab}$ . Se dice que el proceso que se hizo hasta ahora de partir de una solución de fondo  $g_0$  para generar n-soluciones solitónicas  $g$  es equivalente a ir introduciendo a los solitones uno a la vez, y a éstos ir sometendolos a la condición (4.21) también uno a la vez, en sucesión.

Si se van a ir introduciendo los solitones uno a la vez, entonces lo lógico sería empezar por pasar de la componente métrica de fondo  $g_0$  a la métrica  $g_1$  para un solo solitón que corresponde a un polo único en  $\lambda = \nu_1$ , i.e  $k = 1$ , polo que tiene presencia en la matriz de apósito  $X$ , ahora como  $X_1$ . Como todos los polos, al polo  $\nu_1$  le corresponde una trayectoria  $\nu_1(\xi, \eta)$  que bien puede ser de la forma de una función  $\nu_1^{in}$  ó bien de una  $\nu_1^{out}$  ((5.27) ó (?? respectivamente), contando de cualquier forma con su cte. arbitraria  $w_1$ . Además, ahora que se sabe que  $k = 1$  el vector  $m_a^k$  será  $m_a^1$  y de acuerdo a (5.39) sería

$$m_a^{(1)} = m_{0b}^{(1)}(V_1)_{ba} = m_{0b}^{(1)}[\Psi_0^{-1}(\nu_1, \xi, \eta)]_{ba}$$

Y para obtener a su respectivo vector  $n_a^k$  será necesario volver al considerar a las ecuaciones (5.41), (5.42) y (5.43) para que se pueda obtener una forma para  $n_a^1$  análoga a (5.44)

$$n_a^1 = \Pi_{11} \nu_1^{-1} m_c^1 (g_0)_{ca}$$

Por lo tanto, al considerar a la matriz  $(R_1)_{ab} = n_a^1 m_b^1$ , sustituida dentro de la matriz  $X_1$  en (5.21) queda que ésta última se ve como

$$X_1 = I + \nu_1^{-1} (\lambda - \nu_1)^{-1} (\nu_1^2 - \alpha^2) P_1 \quad (5.48)$$

donde

$$(P_1)_{ab} = \frac{m_c^{(1)}(g_0)_{ca} m_b^{(1)}}{m_d^{(1)}(g_0)_{df} m_f^{(1)}} \quad (5.49)$$

Gracias a saber la forma de la matriz  $X_1$ , y de acuerdo a la relación ya bien conocida  $g(0, \xi, \eta) = X(0)g_0$ , se tiene para el primer soliton correspondiente a la solución  $g_1$  que

$$g_1(0, \xi, \eta) = X(0)g_0 = \left[ I - \nu_1^{-2} (\nu_1^2 - \alpha^2) P_1 \right] g_0 \quad (5.50)$$

Para conocer el determinante de esta primera solución de un solitón para el primer polo considerado  $\lambda = \nu_1$ , será necesario considerar las propiedades que (5.49) facilita ver para  $P_1$ :

$$P_1^2 = P_1, \quad Tr P_1 = 1, \quad det P_1 = 0 \quad (5.51)$$

considerese además, una de las propiedades del determinante de matrices

$$\det(I + F) = I + \text{Tr}F + \det F. \quad (5.52)$$

para una determinante  $F$  arbitraria de  $2 \times 2$ . Así que, usando a (5.51) y (5.52) se puede deducir el determinante de  $g_1$

$$\det g_1 = \nu_1^{-2} \alpha^2 \det g_0 \quad (5.53)$$

La solución  $g_1$  puede ser tomada como una nueva solución de fondo y por lo tanto añadirle otro solitón a ésta, correspondiente ahora al polo  $\lambda = \nu_2$ . Para poder hacer este paso en la sucesión de soluciones, primero hay que calcular la inversa de la matriz de apósito  $X_1$  vista para la ahora solución de fondo  $g_1$ , es decir la inversa a la matriz (5.48). Entonces, hechando mano de la primera de las propiedades de (5.51), la forma de  $X_1^{-1}$  es

$$X_1^{-1} = I + \frac{\nu_1^2 - \alpha^2}{\alpha^2 - \lambda \nu_1} P_1 \quad (5.54)$$

Lo que sigue es encontrar su respectivo vector  $m_a^{(2)}$  para  $k = 2$ . Se requiere crear la nueva matriz generatriz de fondo  $\Psi_1 = X \Psi_0$ , lo que significa que considerando su inversa  $\Psi_1^{-1}$ , y con ayuda de  $X_1^{-1}$ , se llega a el vector  $m_a^{(2)}$

$$m_a^{(2)} = m_{0b}^{(2)} \left[ \Psi_1^{-1}(\nu_2, \xi, \eta) \right]_{ba}$$

análoga a (5.49), la matriz  $P_2$  queda con la forma

$$(P_2')_{ab} = \frac{m_c'^{(2)}(g_1)_{ca} m_b'^{(2)}}{m_d'^{(2)}(g_1)_{df} m_f'^{(2)}} \quad (5.55)$$

Como paso con  $P_1$ , para  $P_2'$  no existe ninguna restriccion para que no cumpla con las propiedades de (5.51), por lo que la forma de su respectiva matriz de apósito es bastante similar a  $X_1(\lambda)$ , entonces

$$X_2 = I + \nu_2^{-1}(\lambda - \nu_2)^{-1}(\nu_2^2 - \alpha^2)P_2' \quad (5.56)$$

Ahora, es fácil ver que la solución de dos solitones  $g_2$  se puede obtener de seguir que  $g_2 = X_2(0)g_1$ . Esto es, sustituyendo a (5.56) con  $\lambda = 0$  en la forma de  $g_2$

$$g_2 = X_2(0)g_1 = \left[ I - \nu_2^{-2}(\nu_2^2 - \alpha^2)P_2' \right] g_1$$

Para esta solución de dos solitones, la solución de fondo que se esta usando ya no es  $g_0$ , como lo fue para la solución de un solitón  $g_1$ , si no que ahora figura como ésta la solución de un solitón  $g_1$ . Entonces, resta sustituir en  $g_2$  a (5.50)

$$g_2 = X_2(0)g_1 = \left[ I - \nu_2^{-2}(\nu_2^2 - \alpha^2)P_2' \right] \left[ I - \nu_1^{-2}(\nu_1^2 - \alpha^2)P_1' \right] g_0 \quad (5.57)$$

Para seguir el sistema de sucesión de solitones para obtener el determinante de la solución general  $g$ , y correspondiendo a la condición (4.21), tendría que repetirse este proceso para n-soluciones solitónicas (5.46) en la forma

$$g = \left( \prod_{k=1}^n \left[ I - \nu_k^{-2}(\nu_k^2 - \alpha^2)P_K' \right] \right) g_0 \quad (5.58)$$

donde  $P'_1 \equiv P_1$  y, por supuesto, ésta y todas las matrices  $P'_k$  satisfacen las propiedades de (5.51), es decir

$$P_k'^2 = P'_k, \quad Tr P'_k = 1, \quad det P'_k = 0 \quad (5.59)$$

Sin embargo, si bien usar este método para ver de otra forma a las n-soluciones sólitónicas representadas en  $g$  de manera que pudiera obtenerse su determinante sin demasiados problemas, no facilita de igual modo a la forma de las matrices  $P'_k$ , lo cierto es que estas matrices cada vez se vuelven más complejas conforme avanza  $k$ . Dejando pasar de lado este hecho, y considerando que basta con haber mostrado la forma de las entradas de solo dos matrices  $P_1$  y  $P_2$  en (5.49) y (5.55) con fin ilustrativo, esta es la mejor manera de obtener el determinante de  $g$ . Siguiendo las propiedades (5.59) y aplicandolas en (5.58), el determinante de la solución sería

$$det g = \alpha^{2n} \left( \prod_{k=1}^n \nu_k^{-2} \right) det g_0 = \alpha^{2n+2} \prod_{k=1}^n \nu_k^{-2} \quad (5.60)$$

Ya se tiene la forma del determinante de la solución  $g$ , sucede ahora que esta solución debe ser capaz de ser una solución física  $g^{(ph)}$  tal como lo exige (5.18). Recuerdese que si se asume que la condición impuesta en (4.21) para  $g$  se cumple, entonces en automático la forma de la solución física se satisface, de tal suerte que si se sustituye en (5.18) a  $det g$  por  $\alpha^2$  resulta que la solución general se convierte en solución física ( $g^{(ph)} = g$ ). De acuerdo a esto, lo que sigue hacer es simplemente sustituir (5.60) en (5.18)

$$g^{(ph)} = \alpha \left( \alpha^{2n+2} \prod_{k=1}^n \nu_k^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} g = \alpha \left( \alpha^{-n-1} \prod_{k=1}^n \nu_k \right) g,$$

finalmente

$$g^{(ph)} = \alpha^{-n} \left( \prod_{k=1}^n \nu_k \right) g. \quad (5.61)$$

En principio, hasta aquí llegaría la determinación de las componentes  $g_{ab}$  que pertenecen a esa matriz real y simétrica, y que hasta ahora se ha identificado como  $g$ , de 2 dimensiones del tensor métrico (4.20). Por otro lado, cuando se determinó la forma que debía seguir la solución  $g$  para ser una solución física (5.18), se determinó también la transformación de las matrices  $A$  y  $B$  a sus correspondientes matrices físicas (5.19) y (5.20). Sin embargo, para llegar a estas matrices  $A^{(ph)}$  y  $B^{(ph)}$  se necesita de una expresión explícita de las matrices vistas en (4.25)  $A$  y  $B$ . Es fácil ver que a partir de (5.29) y (5.30), y conociendo a los operadores (5.6), se puede llegar a la forma explícita de las matrices  $A$  y  $B$ . Al sustituir a (5.6) y a la matriz  $X$  en (5.29) y (5.30) se tiene que

$$\frac{A}{\lambda - \alpha} = D_1 X(\alpha) X^{-1} + X \frac{A_0}{\lambda - \alpha} X^{-1}, \quad (5.62)$$

$$\frac{B}{\lambda + \alpha} = D_2 X(\alpha) X^{-1} + X \frac{B_0}{\lambda + \alpha} X^{-1}, \quad (5.63)$$

es fácil ver que a ambos lados del signo igual se presentan polos en los valores  $\lambda = \alpha$  y  $\lambda = -\alpha$ , por lo que al dejar estos polos fuera del cálculo de las matrices, pero sustituyendo  $\lambda$  por  $\alpha$  o por  $-\alpha$ , se sigue en la derivación que indican los operadores que  $D_1 X(\lambda)$  y  $D_2 X(-\lambda)$  se ven como

$$D_1 X(\alpha) = \partial_\xi X(\alpha) - 2\alpha_\xi \alpha \partial_\alpha X(\alpha) = 2\alpha_\xi \alpha \left[ \sum_{k=1}^n (\alpha - \nu_k)^{-2} R_k \right] \quad (5.64)$$

$$D_2X(-\alpha) = \partial_\eta X(-\alpha) - 2\alpha_\eta \alpha \partial_\alpha X(-\alpha) = -2\alpha\alpha_\eta \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{R_k}{(-\alpha - \nu_k)} \right],$$

factorizando un signo (-) en la fracci ón

$$D_2X(-\alpha) = 2\alpha\alpha_\eta \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{-R_k}{(\alpha + \nu_k)^2} \right) \right] = -2\alpha\alpha_\eta \sum_{k=1}^n R_k (\alpha + \nu_k)^{-2} \quad (5.65)$$

al sustituir a (5.64) y (5.65) en (5.62) y (5.63) respectivamente, las matrices  $A$  y  $B$  quedan como

$$A = 2\alpha\alpha_{,\xi} \left[ \sum_{k=1}^n (\alpha - \nu_k)^{-2} R_k \right] X^{-1}(\alpha) + X(\alpha) A_0 X^{-1}(\alpha), \quad (5.66)$$

$$B = -2\alpha\alpha_{,\eta} \left[ \sum_{k=1}^n (\alpha + \nu_k)^{-2} R_k \right] X^{-1}(-\alpha) + X(-\alpha) B_0 X^{-1}(-\alpha). \quad (5.67)$$

Para estas dos matrices ya se sabe la forma de  $R_k$  gracias a (5.34) (que a su vez requería de (5.39) y (5.44)). Ahora que se conoce a  $A$  y  $B$ , para obtener a  $A^{(ph)}$  y  $B^{(ph)}$  solo se necesitaría sustituir tanto a la determinante de  $g^{(ph)}$  como a (5.66) y (5.77) en la forma dada antes en (5.19) y (5.20), quedando

$$A^{(ph)} = 2\alpha\alpha_{,\xi} \left[ \sum_{k=1}^n (\alpha - \nu_k)^{-2} R_k \right] X^{-1}(\alpha) + X(\alpha)A_0X^{-1}(\alpha) -$$

$$\alpha \left[ \ln\alpha^{-n} \prod_{k=1}^n \nu_k \right]_{,\xi} I, \quad (5.68)$$

$$B^{(ph)} = -2\alpha\alpha_{,\eta} \left[ \sum_{k=1}^n (\alpha + \nu_k)^{-2} R_k \right] X^{-1}(-\alpha) + X(-\alpha)B_0X^{-1}(-\alpha) +$$

$$\alpha \left[ \ln\alpha^{-n} \prod_{k=1}^n \nu_k \right]_{,\eta} I. \quad (5.69)$$

Ahora que se llegó a la forma final de las componentes físicas  $g_{ab}$  de una solución general  $g$ , resta conocer la forma de la otra componente física  $f$  de la métrica (4.20) para que se pueda completar a la o las soluciones n-solitónicas para esta misma métrica usada para las ecuaciones de Einstein. Este coeficiente aparece por primera vez en (4.23) y (4.24) marcando una dependencia de  $f$  con respecto a la matriz  $g$  que acaba de ser encontrada a través de las matrices  $A$  y  $B$ . Para conocer la forma de la componente  $f$  se puede hacer un desarrollo dividido en dos etapas.

**Primer etapa.** Se va a sustituir en (4.23) y (4.24) la solución no física  $g$  que se tuvo en algún momento (5.46), solución que aún no cumplía con la condición (4.21). Siguiendo ciertas operaciones, ésto debería bastar para llegar a la forma general de  $f$ .

**Segunda etapa.** Lo que seguiría es encontrar el valor físico de  $f$  o sea  $f^{(ph)}$ . Como  $f$ , también se puede calcular a partir de (4.23) y (4.24), pero ahora se sustituiría en ellas a  $g^{(ph)}$  en lugar de  $g$ .



Como el coeficiente métrico  $f$  es parte de la solución n-solitónica, al igual que  $g$ , es necesario llegar primero a un coeficiente métrico  $f_1$  dependiente de una solución de fondo  $f_0$ , correspondiente a un solitón, y después ir de uno en uno, y con sus respectivas soluciones de fondo, hasta llegar a expresar una expresión general.

$$f_1 = C_1 f_0 (\nu_1^2 - \alpha^2)^{-1} \alpha \nu_1^2 \Gamma_{11} \quad (5.70)$$

con

$$\Gamma_{11} = -m_a^{(1)} m_b^{(1)} (g_0)_{ab} (\alpha^2 - \nu_1^2) \quad (5.71)$$

Con  $C_1$  como la cte. que sale de la integración,  $f_0$  es la solución de fondo para  $f_1$ , que correspondría a la solución de fondo  $g_0$ , y  $\Gamma_{11}$  es la componente de la matriz (5.42) con  $k = 1$  y  $l = 1$

Ahora que se tienen a las soluciones  $g_1$  y  $f_1$ , se debe seguir la secuencia en obtener al resto de las soluciones solitónicas, entonces estas primeras soluciones se volverán las soluciones particulares que sirvan para repertir la operaciones y llegar a  $f_2$ , correspondiente a la solución de dos solitones  $g_2$ . Estas dos soluciones corresponderían entonces a los polos  $\lambda = \nu_1$  y  $\lambda = \nu_2$

Para llegar a  $f_2$  solo se necesita hacer el salto de  $(f_1, g_1)$  (como la nueva solución de fondo) a  $f_2$  a base de simples cálculos y ya no de una integración, de hecho solo basta hacer una integración en el proceso y fue la que se hizo para llegar de la solución de fondo  $(g_0, f_0)$  a  $(g_1, f_1)$ . Básicamente la forma de  $f_2$  sería

$$f_2 = C_2 f_0 (\nu_1^2 - \alpha^2)^{-1} (\nu_2^2 - \alpha^2)^{-1} \alpha^2 \nu_1^2 \nu_2^2 (\Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12} \Gamma_{21}) \quad (5.72)$$

Notese que ahora se tienen 3 componentes independientes de la matriz  $\Gamma_{kl}$  desde que los subíndices tomaron los valores los valores de 1 y 2, por lo que se generan las componentes  $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{12}$ . Por otro lado  $C_2$  representa ahora a nuevas ctes. arbitrarias y  $f_0$  sigue siendo la solución de fondo como en (5.70). Si se siguiera este proceso para encontrar a  $f_3, f_4, etc$  hasta  $f_n$ , la forma general que tendría la componente métrica  $f$  sería algo como

$$f = C_n f_0 (\nu_1^2 - \alpha^2)^{-1} (\nu_2^2 - \alpha^2)^{-1} (\nu_3^2 - \alpha^2)^{-1} \dots (\nu_n^2 - \alpha^2)^{-1} \alpha^n \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 \dots \nu_n^2 \det \Gamma_{kl}$$

que es lo mismo a que solo se escriba que

$$f = C_n f_0 \left( \prod_{k=1}^n \nu_k^2 \right) \left[ \prod_{k=1}^n (\nu_k^2 - \alpha^2) \right]^{-1} \alpha^n \left( \prod_{k=1}^2 \right) \det \Gamma_{kl} \quad (5.73)$$

y donde los subíndices  $k$  y  $l$  pueden tener los valores desde 1, 2, 3... hasta  $n$ .  $C_n$  sigue representando a ctes. arbitrarias.

Una vez que se ha encontrado la forma de  $f$  se ha cumplido con el primero de los dos pasos mencionados antes para conocer a uno más de los coeficientes métricos de (4.20). El segundo paso consiste en determinar, como se hizo para  $g$ , al valor físico de  $f$ , es decir a  $f^{(ph)}$ , lo que significa que ahora se debe sustituir a la matriz física  $g^{(ph)}$  en lugar de de la matriz  $g$ , y a las matrices (5.68) y (5.69), en lugar de (5.66) y (5.67), en el mismo sistema (4.23) y (4.24). Entonces, de acuerdo a estas consideraciones, la fórmula que debe seguir  $f$  para que sea física es

$$f^{(ph)} = f \alpha^{1/2} F \quad (5.74)$$

aquí,  $f$  esta dado por la expresión (5.73), y  $F$  es una función dada por las siguientes expresiones

$$(\ln F)_{,\xi} = -\frac{\alpha}{8\alpha_{,xi}} \left[ (\ln \det g)_{,\xi} \right]^2 \quad (5.75)$$

$$(\ln F)_{,\eta} = -\frac{\alpha}{8\alpha_{,\eta a}} \left[ (\ln \det g)_{,\eta} \right]^2 \quad (5.76)$$

Para obtener el valor de  $F$  lo que sigue es integrar a estas diferenciales. Para esta integración es de gran ayuda considerar a las ecuaciones (5.25), además de considerar a (5.60). Así que la forma final de esta función  $F$  queda reducida a

$$F = C_3 \alpha^{-(n^2+2n+1)/2} \left( \prod_{k=1}^n \nu_k \right)^{n-1} \left[ \prod_{k=1}^n (\nu_k^2 - \alpha^2) \right] \left[ \prod_{k>l=1}^n (\nu_k - \nu_l)^{-2} \right] \quad (5.77)$$

Ahora  $C_3$  son nuevas ctes arbitrarias que salieron de la integración. Ahora que se conoce la forma de la función  $F$ , y la de  $f$ , solo queda sustituir a ambas en (5.74)

$$f^{(ph)} = C_4 f_0 \alpha^{n+1/2-(n^2+2n+1)/2} \left( \prod_{k=1}^n \nu_k^2 \right) \left( \prod_{k=1}^n \nu_k \right)^{n-1} \left[ \prod_{k=1}^n (\nu_k^2 - \alpha^2) \right]^{-1+1} \quad (5.78)$$

$$\left[ \prod_{k>l=1}^n (\nu_k - \nu_l)^{-2} \right] \det \Gamma_{kl}$$

reduciendo algunas potencias, finalmete se tiene que  $f^{(ph)}$  se ve como

Para terminar este apartado, la métrica (4.20) puede reescribirse ahora con sus coeficientes siendo valores reales y físicos. Sin embargo, en la métrica (4.20) no aparece explícitamente la matriz  $g$ , aparecen las componentes de esta misma, es decir  $g_{ab}$ , pero esto no representa ningún problema ya que desde un principio se tomo a la matriz  $g$  como una matriz simétrica, real y de dos dimensiones y que tuviera a estos mismos componentes  $g_{ab}$ , por ello si a esa matriíz  $g$  se le dio un valor físico (5.61), entonces se puede afirmar que sus componentes  $g_{ab}$  también pueden y tienen de hecho un valor físico. La forma final de la métrica sería

$$ds^2 = f^{(ph)}(dz^2 - dt^2) + g_{ab}^{(ph)} dx^a dx^b \quad (5.79)$$

### 5.3 Ejemplo: la solución para un solitón

La forma de la solución de un solo solitón vista en (5.50) determinaba la forma de la solución de un solitón, esta solución junto con la correspondiente a dos solitones, a la de tres y así sucesivamente formaban una solución general, que a su vez seguía una fórmula (5.61) para ser vista como una solución física. Se podría decir entonces, que cada una de las soluciones por ende debería poder ser expresada también en su forma física. Asi, el valor físico de las entradas  $g_{ab}$  de  $g_1$ , resulta de valuar a  $n = 1$  en la ecuación (5.61) y de sustituir a la matriz  $g$  por las componentes  $g_1(0, \xi, \eta)_{ab}$  vista en (5.50), es decir

$$g_{1ab}^{(ph)} = \alpha^{-1} \nu_1 g = \alpha^{-1} \nu_1 X_1(0) g_0, \quad (5.80)$$

$$= \alpha^{-1} \nu_1 \left[ I - \nu_1^{-2} (\nu_1^2 - \alpha^2) P_1 \right] (g_0)_{ab}, \quad (5.81)$$

sustituyendo a  $P_1$  de acuerdo a (5.49), entonces

$$g_{1ab}^{(ph)} = \alpha^{-1}\nu_1(g_0)_{ab} - \alpha^{-1}\nu_1\nu_1^{-2}(\nu_1^2 - \alpha^2)Q_{11}^{-1}m_c^{(1)}(g_0)_{ca}m_b^{(1)}(g_0)_{ab}, \quad (5.82)$$

donde  $Q_{11} = m_d^{(1)}(g_0)_{df}m_f^{(1)}$ . Finalmente

$$g_{1ab}^{(ph)} = \alpha^{-1}\nu_1(g_0)_{ab} - (\alpha\nu_1Q_{11})^{-1}(\nu_1^2 - \alpha^2)L_a^{(1)}L_b^{(1)} \quad (5.83)$$

Recuerdese que a parte del coeficiente métrico  $g$ , con sus entradas de valor físico  $g_{ab}$ , la otra parte de la métrica es el coeficiente con valor físico  $f^{(ph)}$ , coeficiente que, recuerdese, correspondía  $f_1$  para la solución de un solitón,  $f_2$  para la de dos solitones, etc. Entonces, al igual que con  $g$ , si al valor general del coeficiente  $f$ , se le formó con cada uno de los coeficientes particulares, pero no físicos,  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  lo que falta hacer es encontrar por mínimo el valor físico del coeficiente  $f_1$  correspondiente a un solitón. No es difícil llegar a la forma de  $f_1^{(ph)}$ . Conociendo ya la forma de  $f^{ph}$  (5.78), basta considerar que para un solitón  $n = 1$  y  $k, l = 1$ , por lo que

$$f^{(ph)} = C_4 f_0 \alpha^{-1/2} (\nu_1)^2 \left[ \prod_{k>l=1}^n (\nu_k - \nu_l)^{-2} \right] \det \Gamma_{kl} \quad (5.84)$$

para la parte del producto:

$$\prod_{k>l=1}^n (\nu_k - \nu_l)^{-2} \quad (5.85)$$

sería igual a 1 para  $n = 1$ , a  $(\nu_2 - \nu_1)^{-2}$  para  $n = 2$ , etc. Además considerando que  $k, l = 1$

$$\det\Gamma_{kl} = \Gamma_{11} = \frac{m_a^1 m_b^1 (g_0)_{ab}}{(\alpha^2 - \nu_1^2)} \quad (5.86)$$

sustituyendo a (5.84) y (5.85) en (5.83) resulta que  $f_1^{(ph)}$  se ve como

$$f_1^{(ph)} = \frac{C_4 f_0 m_a^{(1)} m_b^{(1)} (g_0)_{ab} \nu_1^2}{\alpha^{1/2} (\alpha^2 - \nu_1^2)} \quad (5.87)$$

No debe perderse de vista que aunque estos coeficientes pertenezcan a una solución de solo un solitón para el polo  $\nu_1$ , se tiene la oportunidad de elegir entre  $\nu_1^{in}$  y  $\nu_1^{out}$  como se ve en (5.27) y (5.28). Estrictamente hablando, se tienen dos soluciones de un solo solitón.

# Capítulo 6

## CONCLUSIONES

Los solitones se han convertido en el sostén de innumerables trabajos en física desde su descubrimiento en 1834. En la actualidad, el uso de estas ondas no-lineales va desde la hidrodinámica hasta la óptica no-lineal, pasando incluso por la física nuclear. Los solitones han sido involucrados incluso en áreas fuera de la física, por ejemplo sus propiedades han sido útiles en estudios de crecimiento y desarrollo de poblaciones. Revolucionaron distintivamente en la tecnología usada para mejorar la calidad de la fibra óptica cuando en 1973 Akira Hasegawa y Frederick Tappert (de los Laboratorios Bell) concluyeron que "teóricamente" podían transmitirse pulsos luminosos de corta duración y sin sufrir nada de dispersión (propiedad clara y única de un solitón), cosa que no había sido lograda, el trabajo matemático de Hasegawa y Tappert resultó en descubrir que las características y propagación de estos pulsos eran descritas por la ecuación no lineal de Schrodinger.

A pesar de todas las implicaciones en la ciencia y tecnología moderna, quizá la implicación más grande de los solitones sea en la astrofísica, explícitamente con los solitones gravitacionales.

Cuando, en el capítulo 2 de este trabajo se habló de las teorías de Einstein acerca de la gravedad como evidencia infalible de la curvatura del espacio tiempo, se dejó ver que la fuerza de gravedad ya no es más una fuerza capaz de ser analizada por la mecánica clásica de Newton y ahora es una fuerza que necesita de campos no-lineales para entenderla. Con estas teorías la gravedad ya no solo regía el movimiento de los cuerpos sino que, en estados sumamente tan extraños y complejos como los agujeros negros, se volvió una

herramienta para describir el nuevo espacio tiempo que Einstein propuso y que más tarde Frank Dyson, Arthur Eddington y Charles Davidson comprobaron en su experimento con los rayos solares.

En el capítulo 3 se muestra, de la manera mas clara posible, en qué consiste el Problema de Dispersión Inversa usado por Belinsky y Zakharov. Se entiende que la solución (solución física) a la ecuación no-lineal de interés tenía que ser una métrica que describiera el espacio tiempo de Einstein. En efecto, esta métrica fue encontrada en (5.79) con sus respectivos valores físicos de  $g^{(ph)}$  y  $f^{(ph)}$  al menos para un solitón.

Cabe mencionar que estas métricas corresponden a soluciones que pueden ser nombradas como soluciones cosmológicas y dentro de estas soluciones cosmológicas estan los fenómenos gravitatorios nombrados antes, es decir los agujeros negros. Los agujeros negros son considerados solitones gravitacionales, esto los hace candidatos para ser soluciones de ecuaciones de onda no-lineales como la de Einstein, por lo que matemáticamente los agujeros negros se convierten en soluciones físicas de tipo solitón para la ecuación de gravitación.

La solución más general de tipo agujero negro se llama solución solitón Kerr-Nutt, de ella se pueden obtener los agujeros negros como soluciones de tipo Schrodinger, que físicamente son agujeros negros estáticos, también se pueden obtener agujeros negros como soluciones de tipo Kerr, que físicamente son agujeros negros en rotación.

Se puede concluir que en este trabajo se expuso de manera concreta, el Método de Dispersión Inversa para resolver ecuaciones diferenciales no lineales en gravitación como las ecuaciones de campo de Einstein.



# Referencias

- [1] Ablowitz, M.J.; Kaup, D.J., Newell, A.D. y Segur, H.(1974) *The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems* Stud. Appl. Math. Vol. 53. P. 249-315.
- [2] Agüero, M.; Fujioka, J. y Ceciliano I. *La antisoledad de la onda solitaria*, Ciencia Ergo sum 9(2),197-201 (2002).
- [3] Arenas, G. (2006). *Algunas ecuaciones que presentan solución de tipo onda viajera*. Universidad Industrial de Santander, Tesis que se presenta para obtener el título de Licenciatura en Matemáticas.
- [4] Aktosun, T (2009). *Inverse scattering transform and the theory of solitons*, Encyclopedia of complexity and systems science, Cornell university library, 17 pp.
- [5] Lax P.D. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*. Comm. Pure Appl. Math. 1968, vol. 21, p. 467-490
- [6] Belinski, V. y Verdaguer, E. (2005). *Gravitational Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] N.M. Ryskin, D.I. Trubetskoi. (2000). *Nelinienie Volny. Sobremennaja teori kolebanij i voln*. Moscow, Nauka. Fizmatlit.
- [8] Bertschinger, E (1999). *Introduction to tensor calculus for general relativity*, ITM, notas de investigación presentadas al departamento de física, 427 pp.
- [9] Cervantes, J., M.A. Rodríguez Meza (2006). "La teoría de la relatividad: ayer y hoy". Ciencia ergo sum. Vol.13, Núm.3, noviembre 2006-febrero 2007. UAEM Toluca.

- [10] Dirac, P.A.M.(1975). *General theory of Relativity*. Florida State University, Florida.
- [11] Filippov, A.T. (2000). *The Versatile Soliton*. Birkhauser, U.S.A.
- [12] Gardner, C.S.; Green, J.M.; Kruskal, M.D.; Miura, R.M. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation* Phys. Rev. Lett. (1967). Vol. 19
- [13] Gino, B. (2014). *Inverse Scattering Transform for the focusing non-linear Schrödinger Equation with nonzero boundary conditions*. State University of New York at Buffalo, Gregor Kovačić, Kentselaer Polytechnic Institute, NY.
- [14] Misner, C.W.;K.S. Thorne y J.A. Wheeler (1971). *Gravitation*.W.H Freeman and Company, San Francisco.
- [15] Miura, R.M. (1968). *Korteweg-de Vries equation and remarkable explicit no linear transformation* J. Math. Phys. Vol. 9,8. P. 1202, 1204
- [16] Spiro Karigiannis-minor-Thesis (1998). *The inverse Scattering Transform and integrability of nonlinear evolution equations*.
- [17] Shabat, A.B. y Zakharov, V.E. *La teoría exacta del autodomínio bidimensional*
- [18] Sunichy Tanaka. *Non-linear Schrödinger Equation and Modified Korteweg- de Vries Equation. Construction of Solutions in Terms of Scattering Data*. RIMS, Kyoto Univ. 10 (1975), 329-357.
- [19] Tuncay Aktosun (2009). *Inverse Scattering Transform and the Theory of Solitons*. University of Texas at Arlington, Arlington, Texas, USA.
- [20] Tuncay Aktosun, Department of Mathematics University of Texas at Arlington, Arlington, TX 760/9-0408, USA.
- [21] Francesco Demontis and Cornelis van der Mee, Dipartimento di Matematica e Informatica università di Cagliari, Viale Merello 92; 09123 Cagliari, Italy. *Exact solution to the Sine-Gordon Equation* .
- [22] Wald, M.R.(1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago.

- [23] W. Eckhaus A. Van Hartin. *The inverse Scattering Transformation and the Theory of Solitons An Introduction*. Nort Holland, Mathematics Studies.