Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Existencia y multiplicidad de soluciones nodales y simétricas en ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

Doctor en Ciencias

PRESENTA:

Mat. Erik Mendoza De la luz

DIRECTORES DEL TRABAJO:
Dr. Alfredo Cano Rodríguez
Dr. Sergio Hernández Linares

Toluca, México, Julio de 2018

Índice general

Resumen de la Tesis

Consideremos la ecuación diferencial parcial cuasilineal, elíptica con singularidad y exponente crítico.

$$\begin{array}{rll} -\triangle_p u - \mu(x) \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = & f(x)\,|u|^{p-2}\,u + k(x)\,|u|^{p^*-2}\,u & x \in \Omega \\ & u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array}$$

donde Ω es un abierto, suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $\triangle_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ es el operador p-laplaciano, $p^* := \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\mu, f, k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.
El problema se estudiará mediante el método variacional el cual consiste en transformar el problema de resolver una ecuación diferencial parcial en un problema de hallar puntos críticos de cierta función obtenida al usar dicho método, el método variacional hace intervenir a los espacios de Sobolev los cuales son comunmente usados en este tipo de problemas, los espacios de Sobolev usados en dichos problemas son espacios de Hilbert los cuales son espacios lineales, completos y con producto interior. En la presente tesis se estudia el problema en espacios de Sobolev que resultan ser espacios de Banach los cuales son completos y no tienen producto interno. Estableceremos resultados de multiplicidad de soluciones simétricas positivas y soluciones que cambian de signo (nodales), para ello se aplicará la teoría de Lusternik-Schnirelmann por medio de la cual se establecerá una relación entre la topología del dominio y la multiplicidad de soluciones.

1

Introducción

1.1. Introducción y presentación del objeto de estudio

En la presente tesis se analizará una ecuación diferencial parcial del tipo elíptico, dicha ecuación será analizada con el llamado método variacional el cual es usado en este tipo de problemas. A continuación se enunciará el problema de investigación.

1.1.1. Objeto de estudio

Consideremos la ecuación diferencial parcial cuasilineal, elíptica con singularidad y exponente crítico.

$$(P_{\mu,f,k}) \quad \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un abierto, suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $2 \leq p < N$, $p^* := \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\mu, f, k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.
Supongamos además que Ω es invariante bajo la acción de un subgrupo cerrado Γ del grupo $O(N)$ de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$ y que las funciones μ, f y k son Γ-invariantes.

1.2. Revisión de bibliografía donde se desarrollan los fundamentos teóricos de la investigación y permite conocer el estado del arte y del conocimiento sobre el objeto de estudio

1.2.1. Antecedentes

En años recientes, el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales ha sido de vital importancia sobre todo al abordar problemas o fenomenos físicos tales como; el estudio de modelos no Newtonianos (ver [1] y [2]), modelos de difusión no lineal como filtración y algunos modelos de superconductividad (ver [4]), en dichos modelos el operador **p-laplaciano** juega un operador cuasilineal. A lo largo de los años se han estudiado ecuaciones diferenciales parciales que involucran el operador *p-laplaciano*. En 1983 Brezis y Nirenberg obtuvieron el siguiente resultado.

Teorema 1.1. *Si $N \geq 4$ y $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$ con λ_1 el primer valor propio del operador $-\triangle$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces*

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\triangle u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u & x \in \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio abierto, suave y acotado, tiene una solución positiva.

Cabe notar que obtenemos este problema a partir de $(P_{\mu,f,k})$ haciendo $p = 2$, $\mu(x) = 0$, $f(x) = -\lambda$ y $k(x) = 1$.
Posterior a este Teorema se han obtenido varios resultados de este problema o modificaciones del mismo, tales resultados han sido de existencia, multiplicidad y simetría de soluciones. A continuación enunciamos algunos resultados para el caso $p = 2$.
Considerando $f(x) = \lambda$, $\mu(x) = 0$ y $k(x) = 1$ el problema ha sido estudiado por varios autores como por ejemplo Lazzo [32] en 1992 probó que el problema (P_λ) tiene al menos $cat(\Omega)$ soluciones positivas (donde cat se refiere a la categoría de Lusternik-Schnirelmann). En 1986 Cerami-Solimini-Struwe [11] probaron que (P_λ) tiene un par $\pm u$ de soluciones 2-nodales con $N \geq 6$ y $\lambda \in (-\lambda_1, 0)$. Castro y Clapp [10] probaron que para λ suficientemente cercano a 0 hay un efecto de la topología del dominio en el número de soluciones 2-nodales del problema (P_λ). Cano y Clapp [7] probaron un resultado de multiplicidad para soluciones que cambian de signo, para $\mu(x) = 0$ y f, k funciones continuas. Guo y Niu [24] en 2008 probaron la existencia de una solución nodal y simétrica y una solución positiva para $f(x) = \lambda \in (0, \lambda_0)$ donde λ_0 es el primer valor propio del operador $-\triangle - \frac{\mu_0}{|x|^2}$ sobre Ω, con $\mu(x) = \mu_0$, Ω y k invariantes bajo un subgrupo cerrado de $O(N)$.
Cabe mencionar que los asesores de la presente tesis, Dr. Alfredo Cano, Dr. Sergio Hernández junto con el Dr. Eric Hernández [8] en 2010 probaron para $\mu(x) = \mu_0$, $f(x) = \lambda$ y $k(x)$ una función continua, que si Ω y k son invariantes bajo un subgrupo cerrado de $O(N)$ el problema tiene múltiples soluciones nodales y simétricas. Finalmente Cano y Hernández-Martínez [9] en 2012 establecieron un resultado de multiplicidad de soluciones positivas nodales y simétricas, además establecieron condiciones para obtener soluciones Γ-invariantes las cuales no son $\widetilde{\Gamma}$-invariantes donde $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma} \subset O(N)$.
Ahora mencionaremos algunos resultados para $p \in (2, N)$;
Marcelo Furtado [19] para $\mu(x) = 0$, $f(x) = \lambda$ y $k(x) = 1$ probó que si Ω es invariante bajo ina involución ortogonal no trivial entonces para λ suficientemente pequeña hay un efecto de la topología del dominio Ω en el número de soluciones que cambian de signo. Pigong Han [26] probó para $\mu(x) = \mu_0$, $f(x) = \lambda$ y $k(x)$ una función no negativa sobre $\overline{\Omega}$, la existencia de soluciones positivas. Guo, Niu y Wang [25] en 2009, para $\mu(x) = \mu_0$, $f(x) = \lambda$ y $k(x)$ una función continua sobre $\overline{\Omega}$ probaron la existencia de soluciones positivas y nodales.

En la presente tesis se establecerán resultados de multiplicidad de soluciones nodales y simétricas, esto dependerá de la topología del dominio, dichos resultados estarán basados principalmente en los articulos [7], [8] y [9].

1.3. Hipótesis y Objetivos

1.3.1. Objetivos de la tesis

El operador p-Laplaciano se escribe como

$$-\triangle_p u := div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 \leq p < \infty.$$

donde $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ y $|\cdot|$ representa la norma usual en $\mathbb{R}^N$
Este operador ha sido intensamente estudiado en años recientes y es un modelo para el estudio de operadores degenerados (si $p > 2$) y singulares (si $1 < p < 2$), es evidente que si $p = 2$, se trata del operador Laplaciano clásico. Este operador también sirve de modelo en el estudio de modelos no Newtonianos (ver [1] y [2]), además aparece también como aproximación de modelos de difusión no lineal como filtración, fluidos no newtonianos (antes mencionada) y algunos modelos de superconductividad (ver [4]).
El operador p-laplaciano interviene en el problema que se abordará en esta tesis y es el siguiente.
Consideremos la ecuación diferencial parcial cuasilineal, elíptica con singularidad y exponente crítico.

$$(P_{\mu,f,k}) \quad \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x) \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un abierto, suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $2 \leq p < N$, $p^* := \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\mu, f, k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.
Supongamos además que Ω es invariante bajo la acción de un subgrupo cerrado Γ del grupo $O(N)$ de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$ y que las funciones μ, f y k son Γ-invariantes. Recordemos que un subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ es Γ-invariante si $\gamma x \in X$ para toda $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$, y que una función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es Γ-invariante si $h(\gamma x) = h(x)$ para toda $x \in X$ y $\gamma \in \Gamma$.
El objetivo de esta tesis es investigar la existencia y el número de soluciones Γ-invariantes del problema $(P_{\mu,f,k})$, es decir, soluciones que satisfacen

$$u(\gamma x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega, \gamma \in \Gamma.$$

Obtendremos resultados de existencia y multiplicidad de soluciones Γ-invariantes positivas, así como soluciones Γ-invariantes que cambian de signo (nodales).

1.3.2. Hipótesis del problema

Sea G un subgrupo cerrado de $O(N)$. Consideremos el problema cuasilineal elíptico con exponente crítico

$$(P^G_{\mu,f,k}) \quad \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x) \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \\ u(gx) = u(x) & \forall x \in \Omega, g \in G \end{cases}$$

donde Ω es un dominio G-invariante suave y acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \geq p^2$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\mu, f, k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, con las siguientes hipótesis adicionales, $0 \leq \mu(x) \leq \widetilde{\mu} := \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$, $0 < f(x) \leq \lambda_p(\mu)$ donde

$$\lambda_p(\mu) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|}{|x|^p}\right) dx}{\int_\Omega |u|^p dx},$$

con $\mu_0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} \mu(x)$.
Recordemos que un subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ es G-invariante si $gx \in X$ para toda $x \in X, g \in G$, y una función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es G-invariante si $h(gx) = h(x)$ para toda $x \in X, g \in G$. Denotamos por $Gx := \{gx : g \in G\}$ a

la G-órbita de un punto $x \in \mathbb{R}^N$ y denotamos a su cardinalidad como $\#Gx$. Escribimos como $X/G := \{Gx : x \in X\}$ a su espacio de G-órbitas con la topología cociente.

Consideremos el conjunto

$$M = \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#Gy}{k\left(y\right)^{\frac{N-p}{p}}} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#Gx}{k\left(x\right)^{\frac{N-p}{p}}} \right\}.$$

Supondremos que μ, f, k satisfacen lo siguiente:

(K1) $k(x) > 0$ para toda $x \in \overline{\Omega}$ y $k(0) = 1$.

(K2) k es **localmente plana** para M; esto es, existen $r > 0$, $\nu > N$ y $A > 0$ tal que

$$\left|k\left(x\right) - k\left(y\right)\right| \leq A\left|x - y\right|^{v} \quad \text{if} \;\; y \in M \text{ and } \left|x - y\right| < r.$$

(M1) $0 < \mu\left(x\right) < \widetilde{\mu} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$ para toda $x \in \overline{\Omega}$, y denotemos $\mu_0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} \mu\left(x\right)$.

(F1) Si $f_0 = \max_{x \in \overline{\Omega}} f\left(x\right)$ se satisface $0 < f_0 < \lambda_p(\mu)$.

(F2) $f\left(x\right) > 0$ Para toda $x \in M$.

Para nuestro problema consideremos

$$[\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f} := \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu(x)\frac{|u|^p}{|x|^p} - f(x)|u|^p \right) dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Denotemos por $S_{0,p}$ conocida como la mejor constante de Sobolev para el encaje $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, esto es,

$$S_{0,p} = \inf_{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}}},$$

donde $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$ y definamos

$$\ell_k^G = \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#Gx}{k\left(x\right)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

Para nuestro resultado de multiplicidad necesitamos la siguiente condición de no existencia.
(NE) El problema

$$\left(P^G_{0,0,k}\right) \quad \begin{cases} -\triangle_p u = k\left(x\right)\left|u\right|^{p^*-2} u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(gx) = u(x) & \forall x \in \Omega, g \in G \end{cases}$$

no tiene solución positiva u que satisface $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq \ell_k^G$.

1.3.3. Multiplicidad de soluciones positivas

Nuestro siguiente resultado establece una relación entre la topología del dominio y la multiplicidad de soluciones positivas. Para $\delta > 0$ sean

$$M_\delta^- := \{y \in M : \mathrm{dist}(y, \partial\Omega) \geq \delta\}, B_\delta(M) := \{z \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(z, M) \leq \delta\}. \tag{1.1}$$

Teorema 1.2. *Sea $N \geq p^2$. Supongamos que se cumplen **K1), K2), M1), F1), F2), (NE)** y $\ell_k^G \leq S_{p,\mu_0}^{\frac{N}{p}}$. Dados $\delta, \delta' > 0$ existen $\lambda^* \in (0, \lambda_p)$ y $\mu^* \in (0, \widetilde{\mu})$ tal que si $\max_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \leq \lambda^*$ y $\max_{x\in\overline{\Omega}} \mu(x) \leq \mu^*$, entonces para toda $f(x) \in (0, \lambda^*)$ y $\mu(x) \in (0, \mu^*)$ para toda $x \in \Omega$ el problema $\left(P_{\mu,f,k}^G\right)$ tiene al menos*

$$cat_{B_\delta(M)/G}(M_\delta^-/G)$$

pares $\pm u$ de soluciones que satisfacen

$$\ell_k^G - \delta' \leq [\![u]\!]_{\mu,f}^p < \ell_k^G.$$

1.3.4. Multiplicidad de soluciones nodales

Sea G un subgrupo cerrado de $O(N)$ para el cual Ω y $\mu, f, k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ son G-invariantes. Denotemos por Γ el kernel de un epimorfismo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2 := \{-1, 1\}$.
Una función con valores reales u definida en Ω se llama τ-equivariante si

$$u(gx) = \tau(g)u(x) \ \ \forall x \in \Omega, g \in G.$$

Estudiaremos el siguiente problema

$$\left(P_{\mu,f,k}^\tau\right) \quad \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x) \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(gx) = \tau(x)u(x) & \forall x \in \Omega, g \in G \end{cases}$$

Si $g \in \Gamma$ entonces toda función u τ-equivariante satisface $u(gx) = u(x)$ para toda $x \in \Omega$; i.e., es Γ-invariante. Si u es una función τ-equivariante and $g \in \tau^{-1}(-1)$ entonces $u(gx) = -u(x)$ para toda $x \in \Omega$. Así, toda solución no trivial τ-equivariante de $\left(P_{\mu,f,k}^\tau\right)$ cambia de signo.

Definición 1.1. *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ es Γ-conexo si es Γ-invariante y si no se puede escribir como unión de dos abiertos disjuntos Γ-invariantes.*
Una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es $(\Gamma, 2)$-nodal si los conjuntos

$$\{x \in \Omega : u(x) > 0\} \quad \textit{and} \quad \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$

son no vacíos y Γ-conexos.

Para cada subconjunto G-invariante X de $\mathbb{R}^N$, definimos

$$X^\tau := \{x \in X : Gx = \Gamma x\}.$$

Sea $\delta > 0$, definimos
$$M^-_{\tau,\delta} := \{y \in M : \mathrm{dist}(y, \partial\Omega \cup \Omega^\tau) \geq \delta\},$$
y $B_\delta(M)$ como en (1.1). El siguiente Teorema es un resultado de multiplicidad de soluciones τ-equivariantes $(\Gamma, 2)$-nodal para el problema $\left(P^\Gamma_{\mu,f,k}\right)$.

Teorema 1.3. *Sea $N \geq p^2$. Supongamos que se cumplen **K1), K2), M1), F1), F2), (NE)** y $\ell^\Gamma_k \leq S^{\frac{N}{p}}_{p,\mu_0}$. Supongamos además que existe un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y un epimorfismo continuo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ tales que Ω, μ, f y k son $G-$invariante y $ker\tau = \Gamma$. Dados $\delta, \delta' > 0$ existen $\lambda^* \in (0, \lambda_p)$ y $\mu^* \in (0, \widetilde{\mu})$ tal que si $\max_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \leq \lambda^*$ y $\max_{x\in\overline{\Omega}} \mu(x) \leq \mu^*$, entonces para toda $f(x) \in (0, \lambda^*)$ y $\mu(x) \in (0, \mu^*)$ para toda $x \in \Omega$ el problema $\left(P^\Gamma_{\mu,f,k}\right)$ tiene al menos*
$$cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}(M^-_{\tau,\delta}/\Gamma)$$
pares $\pm u$ de soluciones $\tau-$equivariantes que satisfacen
$$2(\ell^\Gamma_k - \delta') \leq [\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f} < 2\ell^\Gamma_k.$$

1.3.5. Propiedades simétrica de las soluciones

Sea $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma} \subset O(N)$. En el siguiente Teorema daremos condiciones suficientes para la existencia de soluciones las cuales son Γ-invariantes pero no son $\widetilde{\Gamma}$-invariantes.

Teorema 1.4. *Sea $N \geq p^2$. Supongamos que se cumplen **(K1), (K2), (M1), (F1), (F2), (NE)** y $\ell^\Gamma_k \leq S^{\frac{N}{p}}_{p,\mu_0}$. Sea $\widetilde{\Gamma}$ un subgrupo cerrado de $O(N)$ tal que $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}$ y Ω, μ, f, k son $\widetilde{\Gamma}-$invariantes y se cumple*
$$\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} < \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\overline{\Gamma} x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}.$$
Dados $\delta, \delta' > 0$ existen $\lambda^* \in (0, \lambda_p)$ y $\mu^* \in (0, \widetilde{\mu})$ tal que si $\max_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \leq \lambda^*$ y $\max_{x\in\overline{\Omega}} \mu(x) \leq \mu^*$, entonces para toda $f(x) \in (0, \lambda^*)$ y $\mu(x) \in (0, \mu^*)$ para toda $x \in \Omega$ el problema $(P^\Gamma_{\mu,f,k})$ tiene al menos
$$cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M^-_\delta/\Gamma)$$
soluciones positivas que no son $\widetilde{\Gamma}-$invariantes.

2

Descripción metodológica

2.1. Planteamiento del problema

Dado un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ y funciones $\mu, f, k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, nos preguntamos si existen una o varias funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface la siguiente ecuación diferencial parcial con singularidad y exponente crítico

$$\begin{array}{ll} -\triangle_p u - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \tag{2.1}$$

donde $0 \in \Omega$ y $p^* = \frac{Np}{N-p}$ es conocido como el exponente crítico de Sobolev.
De esta ecuación diferencial parcial nos interesa conocer la existencia de una solución (en el sentido débil), es decir, bajo que condiciones sobre el dominio Ω, los parámetros y las funciones μ, f, k se tiene multiplicidad de soluciones (en el sentido débil) y finalmente si dichas soluciones son nodales, es decir, si las soluciones cambian de signo.

2.1.1. Operador p-Laplaciano

En ésta subsección daremos la definición del operador $-\triangle_p u$ conocido como el p-laplaciano, que es una generalización del laplaciano usual correspondiente al caso $p = 2$. El p-laplaciano ha sido estudiado como un modelo de operador elíptico no lineal en forma de divergencia, el hecho de que sea no lineal (caso $p \neq 2$) hace su estudio más difícil que del laplaciano usual.

Definición 2.1 (Operador p-Laplaciano)**.** *El operador **p-laplaciano** $-\triangle_p$ se define para $1 \leq p < \infty$ como sigue*

$$-\triangle_p u = -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$$

donde $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

El trabajo realizado en esta tesis se centra en el caso $2 \leq p$ para el operador p-laplaciano.

Teorema 2.1. *El operador p-laplaciano $-\triangle_p$ satisface*

$$-\triangle_p u = -\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
-\triangle_p u &= -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\\
&= -div\left(\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right|^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right)\\
&= -div\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right)\\
&= -div\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_1},\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\\
&= -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+...+\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{N}\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\\
&= -\left(\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}
$$

□

Como el problema tiene el operador $-\triangle_p$, gracias a la observación A.1, al Teorema 2.1 y a la definición A.3 se tiene que el problema (2.1) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, cuasilineal y elíptica.

2.2. Planteamiento variacional

En esta sección se dará la definición de solución clásica y solución débil, se usará el método variacional para resolver la ecuación diferencial planteada anteriormente, dicho método hace intervenir a los espacios de Sobolev que son los que comunmente se usan en éste tipo de problemas, además el método variacional o la formulación variacional transforma el problema de resolver una ecuación diferencial parcial en resolver un problema variacional que puede ser interpretado como resolver un problema de hallar puntos críticos de cierta función obtenida al usar el método variacional.

Definición 2.2. *Una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (2.1) se llama **solución clásica** ó **solución fuerte** de (2.1).*

Observación 2.1. *En la definición de solución clásica, la condición de que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ implica implícitamenteme (despejando a $-\triangle_p u$) que μ, f y k son continuas.*

Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una solución clásica de (2.1). Multiplicando ambos lados de la ecuación (2.1) por $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos

$$\int_\Omega -\triangle_p uv - \int_\Omega \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p} = \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}uv + \int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv. \tag{2.2}$$

Analicemos cada una de las integrales, empezando con

$$\int_\Omega -\triangle_p uvdx.$$

Como

$$\begin{aligned}
\triangle_p u &= div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) \\
&= div\left(\sum_{i=1}^N |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right),
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\triangle_p uv &= \int_\Omega -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx \\
&= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx.
\end{aligned}$$

Para poder aplicar el Teorema de integración por partes (ver apéndice A ó [13]) es necesario que $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^1(\Omega)$ para cada $i = 1, 2, ..., N$. Así obtenemos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)vdx = -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

Sumando estas identidades para $i = 1, 2, ..., N$ obtenemos la ***fórmula de Green***

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\triangle_p uv &= -\sum_{i=1}^N \left(-\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\right) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^N |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v.
\end{aligned}$$

De esta manera para que $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v$ tenga sentido basta que $|\nabla u|, |\nabla v| \in L^p(\Omega)$.
Para que $\int_\Omega \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p}$ tenga sentido basta con que $\mu\in C(\overline{\Omega})$, $u,v\in L^p(\Omega)$ y se satisfaga la desigualdad de Hardy (ver apéndice A, Teorema A.1). Finalmente para que las dos integrales restantes tengan sentido podemos pedir que $u,v\in L^p(\Omega)$, $f,k\in C(\overline{\Omega})$, y además $2\le p<N$ para la última integral que tiene incluido el exponente crítico de Sobolev.
Así de (2.2) se tiene

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v-\int_\Omega \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p}=\int_\Omega f(x)|u|^{p-2}uv+\int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv,$$

que está bien justificada en $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio abierto, suave y acotado, considerando $0\in\Omega$ y $\mu,f,k\in C(\overline{\Omega})$.
Como estamos pidiendo que $u,v\in L^p(\Omega)$ y $|\nabla u|,|\nabla v|\in L^p(\Omega)$ resulta conveniente recurrir a los espacios de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver apéndice A) donde el subíndice 0 es porque el problema tiene como hipótesis que $u=0$ en $\partial\Omega$. Además al estudiar problemas que involucran el operador p-laplaciano es natural trabajar en el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}$. Ahora estamos en condiciones de enunciar la definición de solución débil.

Definición 2.3 (Solución débil)**.** *Una función $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisface*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v-\int_\Omega \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p}=\int_\Omega f(x)|u|^{p-2}uv+\int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv \tag{2.3}$$

*para toda $v\in C_c^\infty(\Omega)$ se llama **solución débil** de (2.1).*

Es importante mencionar que en la definición de solución débil se puede sustituir $C_c^\infty(\Omega)$ por $W_0^{1,p}(\Omega)$ pues $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Del proceso usado para obtener (2.3) se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Si u es solución clásica de (2.1) entonces u es una solución débil de (2.1).*

2.2.1. Funcional asociado

Consideremos el funcional $E_{\mu,f,k}:W_0^{1,p}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por

$$E_{\mu,f,k}(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega\left(|\nabla u|^p-\mu(x)\frac{|u|^p}{|x|^p}-f(x)|u|^p\right)dx-\frac{1}{p^*}\int_\Omega k(x)|u|^{p^*}dx. \tag{2.4}$$

Donde $2\le p<N$ y $p^*=\frac{Np}{N-p}$. El funcional está bien definido y es continuo en $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver apéndice B, Proposición A.3). Más aún, $E_{\mu,f,k}$ es de clase C^1(ver apéndice B, Proposición A.3) y su derivada de Fréchet en cada punto $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ está dada por

$$\begin{aligned} DE_{\mu,f,k}(u)v &= \int_\Omega\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v-\mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p}\right)\\ &\quad -\int_\Omega f(x)|u|^{p-2}uv-\int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv \end{aligned} \tag{2.5}$$

para toda $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Notemos que los puntos críticos del funcional $E_{\mu,f,k}$ resultan ser soluciones débiles del problema (2.1), lo cual fue obtenido mediante el método variacional, de esta manera hemos tranformado el problema (2.1) de buscar soluciones débiles de una ecuación diferencial parcial en un problema de busqueda de puntos críticos del funcional $E_{\mu,f,k}$, dicho de otra manera se tiene la siguiente observación.

Observación 2.2. *Una solución débil del problema (2.1) es, por definición, un punto crítico de $E_{\mu,f,k}$, es decir, una función $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $DE_{\mu,f,k}(u) = 0$.*

2.2.2. Gráfica del funcional

Para nuestro problema definimos

$$[\![u]\!]_{\mu,f} = \left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu(x) \frac{|u|^p}{|x|^p} - f(x) |u|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y vamos a suponer en el resto de la tesis la siguiente condición:
M1) Para $0 < \mu(x) < \widetilde{\mu} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$ para toda $x \in \overline{\Omega}$, denotemos $\mu_0 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \mu(x)$.
Definamos

$$\lambda_p(\mu_0) = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} \right) dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}.$$

ya que $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacto, $\lambda_p(\mu_0)$ es positivo y se alcanza en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Además supongamos que se satisface la siguiente condición:
F1) Para $f_0 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} f(x)$ se debe cumplir $0 < f_0 < \lambda_p(\mu_0)$.
Recordemos que el primer valor propio de $-\triangle_p$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ (ver [33]) está dado como sigue:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p dx}{\int_\Omega |u|^p dx} \\ &= \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{|u|^p_{L^p(\Omega)}}. \end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra algunas desigualdades importantes de $[\![\cdot]\!]_{\mu,f}$.

Proposición 2.2. $[\![\cdot]\!]_{\mu,f}$ *satisface las siguientes desigualdades*

$$C_1 \, [\![\cdot]\!]_{0,0} = C_1 \| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq [\![\cdot]\!]_{\mu,f} \leq C_2 \| \cdot \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = C_2 \, [\![\cdot]\!]_{0,0}$$

donde $C_1, C_2 > 0$.

Demostración. Con las condiciones **(M1)** y **(F1)** tenemos

$$\begin{aligned} [\![u]\!]^p_{\mu,f} &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu(x) \frac{|u|^p}{|x|^p} - f(x) |u|^p \right) dx \\ &\geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} - f_0 |u|^p \right) dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

De la definición de $\lambda_p(\mu_0)$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\lambda_p \leq \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} \right) dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx}$$

de la cual

$$\int_\Omega f_0 \, |u|^p \, dx \leq \frac{f_0}{\lambda_p} \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} \right) dx. \tag{2.7}$$

Sustituyendo (2.7) en (2.6) y usando la desigualdad de Hardy

$$\begin{aligned}
[\![u]\!]^p_{\mu,f} &\geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} \right) dx - \frac{f_0}{\lambda_p} \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} \right) dx \qquad (2.8)\\
&= \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p} \right) \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p} \right) dx \\
&\geq \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p} \right) \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right) \\
&= \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p} \right) \left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}} \right) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \\
&= \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p} \right) \left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}} \right) \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} .
\end{aligned}$$

La otra desigualdad se cumple pues $0 < f_0 < \lambda_p(\mu_0)$ implica $f_1 = \min\limits_{x \in \overline{\Omega}} f(x) < f_0 < \lambda_p(\mu_0) < \lambda_1$. Por tanto, si $f_1 < 0$

$$\begin{aligned}
[\![u]\!]^p_{\mu,f} &\leq \int_\Omega \left(|\nabla u|^p - f(x) \, |u|^p \right) dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \frac{f_1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \\
&= \left(1 - \frac{f_1}{\lambda_1} \right) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Si $f_1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
[\![u]\!]^p_{\mu,f} &= \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega \mu(x) \frac{|u|^p}{|x|^p} dx - \int_\Omega f(x) \, |u|^p \, dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx.
\end{aligned}$$

De esta manera se obtiene el resultado. $\square$

La siguiente proposición nos da una equivalencia entre normas en el espacio $L^{p^*}(\Omega)$ para ello asumamos la siguiente condición:

K1) $k(x) > 0$ para toda $x \in \overline{\Omega}$ y $k(0) = 1$.

Proposición 2.3. *Si $k \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ y **(K1)** se satisface, las normas* $|u|_{k,p^*} = \left[\int_\Omega k\left(x\right)|u|^{p^*} dx\right]^{\frac{1}{p^*}}$ *y* $|u|_{p^*} = \left[\int_\Omega |u|^{p^*} dx\right]^{\frac{1}{p^*}}$ *sobre* $L^{p^*}(\Omega)$ *son equivalentes.*

Demostración. Como Ω es acotado, se cumple que $\min\limits_{\overline{\Omega}} k(x) > 0$. Dado que

$$\min_{\overline{\Omega}} k \int_\Omega |u|^{p^*} dx \leq \int_\Omega k(x)|u|^{p^*} dx \leq \max_{\overline{\Omega}} k \int_\Omega |u|^{p^*} dx$$

se tiene que $|u|_{k,p^*}$ es equivalente a la usual en $L^{p^*}(\Omega)$. □

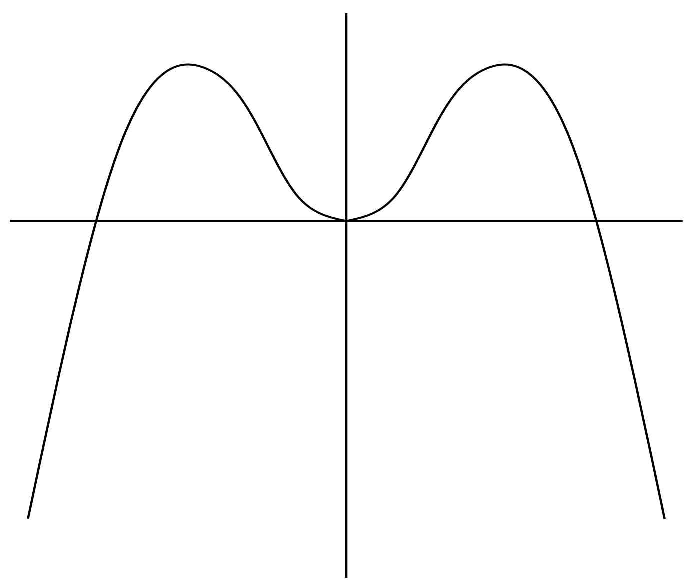
Reescribimos el funcional $E_{\mu,f,k}$ como

$$E_{\mu,f,k}(u) = \frac{1}{p}\, [\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f} - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*}_{k,p^*}. \tag{2.9}$$

Nos interesa demostrar la existencia de puntos críticos de $E_{\mu,f,k}$. Empecemos analizando su gráfica, para ello fijemos una direccion $0 \neq u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y veamos como es la grafica de $E_{\mu,f,k}$ sobre la recta generada por u, es decir, consideremos la funcion $E_{\mu,f,k,u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E_{\mu,f,k,u}(t) := E_{\mu,f,k}(ut) = \left(\frac{1}{p}\, [\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f}\right)|t|^p - \left(\frac{1}{p^*}|u|^{p^*}_{k,p^*}\right)|t|^{p^*} \tag{2.10}$$

Notemos que los coeficientes de $|t|^p$ y $|t|^{p^*}$ son positivos, de modo que, como $p^* > p$, la gráfica de ésta función tendrá la siguiente forma.



En particular $E_{\mu,f,k,u}$ no está acotada inferiormente y tiene un mínimo local en 0, que es obviamente solución de (2.1).

2.2.3. Variedad de Nehari

El conjunto de máximos de $E_{\mu,f,k,u}$ para todas las direcciones $u \neq 0$ es el conjunto

$$\begin{aligned} N_{\mu,f,k} &:= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u \neq 0,\ DE_{\mu,f,k}(u)u = 0\} \\ &= \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u \neq 0,\ [\![u]\!]_{\mu,f}^p = |u|_{k,p^*}^{p^*}\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Claramente los puntos críticos no triviales de $E_{\mu,f,k}$ están contenidos en este conjunto.

Proposición 2.4. *a) $u \in N_{\mu,f,k}$ si y sólo si $\max\limits_{t\geq 0} E_{\mu,f,k}(tu) = E_{\mu,f,k}(u)$.*

b) $N_{\mu,f,k}$ es una variedad de clase C^2.

c) El espacio tangente a $N_{\mu,f,k}$ en u es

$$\begin{aligned} T_u N_{\mu,f,k} &= \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : p \int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + \mu(x) \frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p} \\ &\qquad -f(x)|u|^{p-2}uv \Big) = p^* \int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv\}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

d) El campo vectorial radial $u \mapsto u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ es transversal a $N_{\mu,f,k}$, es decir, $u \notin T_u N_{\mu,f,k}$ para toda $u \in N_{\mu,f,k}$.

*A $N_{\mu,f,k}$ se le llama **variedad de Nehari** de $E_{\mu,f,k}$.*

Demostración. Como en cada dirección radial $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ la función $E_{\mu,f,k,u} : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sólo tiene un máximo como punto crítico, se tiene que, para $t > 0$

$$E'_{\mu,f,k,u}(t) = E'_{\mu,f,k}(tu)u = 0 \ \Leftrightarrow\ E'_{\mu,f,k}(tu)tu = 0,$$

esto último implica que $tu \in N_{\mu,f,k}$ ya que $tu \neq 0$, esto demuestra (a).
Consideremos el siguiente funcional de clase C^2

$$\phi_{\mu,f,k} : W_0^{1,p} \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{R},\ \phi_{\mu,f,k}(u) = [\![u]\!]_{\mu,f}^p - |u|_{k,p^*}^{p^*},$$

como $\phi_{\mu,f,k}^{-1}(0) = N_{\mu,f,k}$ basta probar que 0 es un valor regular de $\phi_{\mu,f,k}$. Supongamos que $u_0 \neq 0$ en $\phi_{\mu,f,k}^{-1}(0)$ es un punto crítico, entonces para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} D\phi_{\mu,f,k}(u_0)v &= p \int_\Omega \big(|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \cdot \nabla v \\ &\quad -\mu(x) \frac{|u_0|^{p-2}u_0 v}{|x|^p} - f(x)|u_0|^{p-2}u_0 v \Big) dx - p^* \int_\Omega k(x)|u_0|^{p^*-2}u_0 v dx \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

en particular si $v = u_0$

$$\begin{aligned} D\phi_{\mu,f,k}(u_0)u_0 &= p \int_\Omega \Big(|\nabla u_0|^p - \mu(x) \frac{|u_0|^p}{|x|^p} - f(x)|u_0|^p \Big) dx - p^* \int_\Omega k(x)|u_0|^{p^*} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $u_0 \in N_{\mu,f,k}$ entonces $D\phi_{\mu,f,k}(u_0)u_0 = (p-p^*) \llbracket u_0 \rrbracket^p_{\mu,f} = 0$, ésto es una contradicción pues $u_0 \neq 0$. Por lo cual 0 es un valor regular y en consecuencia la variedad de Nehari es de clase C^2.
Como $kerD\varphi_{\mu,f,k}(u) = T_u N_{\mu,f,k}$ para cada $u \in N_{\mu,f,k}$, (c) es consecuencia de (2.13) y $u \notin kerD\varphi_{\mu,f,k}(u)$ si $u \in N_{\mu,f,k}$, es decir, se cumple (d). $\square$

Decimos que un punto $u \in N_{\mu,f,k}$ es un punto crítico de $E_{\mu,f,k}\mid_{N_{\mu,f,k}}: N_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$ si $DE_{\mu,f,k}(u)v = 0$ para todo $v \in T_u N_{\mu,f,k}$. Una consecuencia de la proposición anterior es que las soluciones no triviales de (2.1) son justamente los puntos críticos de $E_{\mu,f,k}\mid_{N_{\mu,f,k}}$.

Corolario 2.1. *$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ es un punto crítico de $E_{\mu,f,k} : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si $u \in N_{\mu,f,k}$ y u es un punto crítico de $E_{\mu,f,k}\mid_{N_{\mu,f,k}}: N_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $u \in N_{\mu,f,k}$ es punto crítico de $E_{\mu,f,k}\mid_{N_{\mu,f,k}}$ entonces

$$DE_{\mu,f,k}(u)v = 0$$

para todo $v \in T_u N_{\mu,f,k}$. Además, por definición de $N_{\mu,f,k}$, se cumple que

$$DE_{\mu,f,k}(u)u = 0.$$

De la proposición anterior (d) se sigue que $W_0^{1,p}(\Omega) = T_u N_{\mu,f,k} \oplus$ *lin(u)* y en consecuencia, que $DE_{\mu,f,k}(u)w = 0$ para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

2.3. Formulación Variacional del Problema Simétrico

Sea $O(N)$ el grupo de todas las transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^N$ y sea Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$. Consideremos el primer problema que nos interesa.

$$\left(P^{\Gamma}_{\mu,f,k}\right) \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(\gamma x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega, \gamma \in \Gamma, \end{cases}$$

donde Ω es abierto, suave, acotado y $\Gamma-$ *invariante*, además μ, f, k son funciones continuas y tambíen Γ-invariantes. Recordemos que un subconjunto X de $\mathbb{R}^N$ es Γ-invariante si $\gamma x \in X$ para toda $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$ y una función $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es Γ-invariante si $h(\gamma x) = h(x)$ para toda $x \in X$ y $\gamma \in \Gamma$.
Nos interesa encontrar soluciones positivas y soluciones que cambian de signo para este problema.

Introduzcamos un homomorfismo continuo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$ definido sobre un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y denotemos $\Gamma := \ker\tau$. Recordemos que el problema (2.1) añadiendo simetrías nodales nos queda

$$\left(P^{\tau}_{\mu,f,k}\right) \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(gx) = \tau(g)u(x), \quad \forall x \in \Omega, g \in G \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto suave, acotado y G-invariante de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$ y $\mu, f, k \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ son funciones continuas $G-$invariantes que satisfacen **K1, K2, M1, F1** y **F2**.
Diremos que u es $\tau - equivariante$ si satisface

$$u(gx) = \tau(g)u(x), \quad \forall x \in \Omega, g \in G$$

Notemos que, si u es $\tau - equivariante$, entonces u es $\Gamma - invariante$, es decir, $u(gx) = u(x)$ para toda $x \in \Omega$, $g \in \Gamma$. Además cumple $u(gx) = -u(x)$ para toda $x \in \Omega$ y $g \in \tau^{-1}(-1)$. En consecuencia

- Toda solución de $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$ es una solución de $(P^{\Gamma}_{\mu,f,k})$, con $\Gamma = ker\tau$.

- Si $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo, entonces toda solución no trivial de $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$ es una solución de $(P^{\Gamma}_{\mu,f,k})$ que cambia de signo.

Se dará una formulación variacional para el problema $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$. Dada una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ el homomorfismo τ induce la acción natural de G sobre $W^{1,p}_0(\Omega)$ dada por

$$gu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (gu)(x) = \tau(g)\, u\left(g^{-1}x\right) \tag{2.14}$$

2.3.1. Normas G-invariantes

Notemos que $[\![\cdot]\!]^p_{\mu,f}$ es $G - invariante$ con respecto a la acción inducida por τ sobre $W^{1,p}_0(\Omega)$.
Sean $g \in G$ y $u, v \in W^{1,p}_0(\Omega)$. Como $g \in O(N)$ entonces $det|g| = 1$ y dado que $(gx) \cdot (gy) = x \cdot y$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, además

$$\nabla(gu)(x) = \tau(g) g \nabla u(g^{-1}(x)),$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
[\![gu]\!]_{\mu,f}^{p} &= \int_{\Omega}\left(|\nabla(gu)(x)|^{p}-\mu\left(x\right)\frac{|(gu)(x)|^{p}}{|x|^{p}}-f\left(x\right)|(gu)(x)|^{p}\right)dx \\
&= \int_{\Omega}\left(|\tau(g)g\nabla u(g^{-1}(x))|^{p}-\mu\left(x\right)\frac{|\tau\left(g\right)u\left(g^{-1}x\right)|^{p}}{|x|^{p}}\right)dx \\
&\quad -\int_{\Omega}f\left(x\right)|\tau\left(g\right)u\left(g^{-1}x\right)|^{p}dx \\
&= \int_{\Omega}\left(|g\nabla u(g^{-1}(x))|^{p}-\mu\left(x\right)\frac{|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}}{|x|^{p}}\right)dx \\
&\quad -\int_{\Omega}f\left(x\right)|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}dx \\
&= \int_{\Omega}\left(\left[g\nabla u(g^{-1}(x))\cdot g\nabla u(g^{-1}(x))\right]^{\frac{p}{2}}-\mu\left(x\right)\frac{|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}}{|x|^{p}}\right)dx \\
&\quad -\int_{\Omega}f\left(x\right)|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}dx \\
&= \int_{\Omega}\left(\left[\nabla u(g^{-1}(x))\cdot\nabla u(g^{-1}(x))\right]^{\frac{p}{2}}-\mu\left(x\right)\frac{|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}}{|x|^{p}}\right)dx \\
&\quad -\int_{\Omega}f\left(x\right)|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}dx \\
&= \int_{\Omega}\left(|\nabla u\left(g^{-1}x\right)|^{p}-\mu\left(x\right)\frac{|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}}{|x|^{p}}\right)dx \\
&\quad -\int_{\Omega}f\left(x\right)|u\left(g^{-1}x\right)|^{p}dx,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y=g^{-1}x$, como μ, f y Ω son G-invariantes y $|\det g|=1$ tenemos

$$\begin{aligned}
[\![gu]\!]_{\mu,f}^{p} &= \int_{\Omega}\left(|\nabla u\left(y\right)|^{p}-\mu\left(gy\right)\frac{|u\left(y\right)|^{p}}{|gy|^{p}}-f\left(gy\right)|u\left(y\right)|^{p}\right)dy \\
&= \int_{\Omega}\left(|\nabla u\left(y\right)|^{p}-\mu\left(y\right)\frac{|u\left(y\right)|^{p}}{|y|^{p}}-f\left(y\right)|u\left(y\right)|^{p}\right)dy \\
&= [\![u]\!]_{\mu,f}^{p}.
\end{aligned}$$

De manera similar, las normas $\|\cdot\|=[\![\cdot]\!]_{0,0}$ sobre $W_{0}^{1,p}\left(\Omega\right)$ y $|\cdot|_{k,p^{*}},|\cdot|_{p^{*}}$ sobre $L^{p^{*}}(\Omega)$ son $G-$*invariantes.*

Por tanto el funcional asociado al problema $\left(P^{\tau}_{\mu,f,k}\right)$

$$\begin{aligned} E_{\mu,f,k}(u) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p} - \mu(x)\frac{|u|^{p}}{|x|^{p}} - f(x)|u|^{p}\right)dx \\ &- \frac{1}{p^{*}}\int_{\Omega} g(x)|u|^{p^{*}}dx \\ &= \frac{1}{p}\,[\![u]\!]^{p}_{\mu,f} - \frac{1}{p^{*}}|u|^{p^{*}}_{k,p^{*}}, \end{aligned}$$

es $G - invariante$, con derivada

$$\begin{aligned} DE_{\mu,f,k}(u)v &= \int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^{p}}\right) \\ &- \int_{\Omega} f(x)|u|^{p-2}uvdx - \int_{\Omega} k(x)|u|^{p^{*}-2}uvdx. \end{aligned}$$

Debido a las simetrías, las soluciones están en el espacio de puntos fijos de $W^{1,p}_{0}(\Omega)$ bajo la acción definida en (2.14), o bien en el espacio de funciones $\tau - equivariantes$

$$\begin{aligned} W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\tau} &= \left\{u \in W^{1,p}_{0}(\Omega) : gu = u \quad \forall g \in G\right\} \\ &= \left\{u \in W^{1,p}_{0}(\Omega) : u(gx) = \tau(g)\,u(x) \quad \forall g \in G, x \in \Omega\right\}. \end{aligned}$$

Si $\tau \equiv 1$ entonces $G = \Gamma$ y $W^{1,p}_{0}(\Omega)$ es el espacio de puntos fijos restringido a la acción de Γ ó espacio de funciones $\Gamma - invariantes$ al que denotaremos por

$$W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\Gamma} = \left\{u \in W^{1,p}_{0}(\Omega) : u(gx) = u(x) \quad \forall g \in \Gamma, x \in \Omega\right\}.$$

Todas las soluciones no triviales de $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$ ó puntos críticos de $E_{\mu,f,k} : N_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$ están contenidos en

$$\begin{aligned} N^{\tau}_{\mu,f,k} &:= N_{\mu,f,k} \cap W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\tau} \\ &= \left\{u \in W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\tau} \setminus \{0\} : DE_{\mu,f,k}(u)\,u = 0\right\} \\ &= \left\{u \in W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\tau} \setminus \{0\} : [\![u]\!]^{p}_{\mu,f} = |u|^{p^{*}}_{k,p^{*}}\right\}. \end{aligned}$$

También denotaremos

$$N^{\Gamma}_{\mu,f,k} := N_{\mu,f,k} \cap W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\Gamma}.$$

Notemos que $N^{\tau}_{\mu,f,k}$ es radialmente difeomorfa a la esfera unitaria en $W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\tau}$ por la proyección radial

$$\pi_{\mu,f,k} : W^{1,p}_{0}(\Omega)^{\tau} \setminus \{0\} \to N^{\tau}_{\mu,f,k}, \quad \pi_{\mu,f,k}(u) = \left(\frac{[\![u]\!]^{p}_{\mu,f}}{|u|^{p^{*}}_{k,p^{*}}}\right)^{\frac{N-p}{p^{2}}} u.$$

Como un caso particular del Principio de Criticalidad Simétrica de Palais obtenemos

Teorema 2.2 (Principio de Criticalidad Simétrica)**.** *$u \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \setminus \{0\}$ es punto crítico de $E_{\mu,f,k} : W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \longrightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si u es punto crítico de $E_{\mu,f,k}\mid_{N^\tau_{\mu,f,k}} : N^\tau_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$, es decir, las soluciones no triviales de $\left(P^\tau_{\mu,f,k}\right)$ son precisamente los puntos críticos de la restricción de $E_{\mu,f,k}$ a $N^\tau_{\mu,f,k}$.*

Demostración. Por el Corolario 2.1 sabemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ es punto crítico de $E_{\mu,f,k} : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si u es punto crítico de $E_{\mu,f,k}\mid_{N_{\mu,f,k}} : N_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
& DE_{\mu,f,k}(gu)v \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla(gu)(x)|^{p-2}\nabla(gu)(x)\cdot\nabla v(x) - \mu(x)\frac{|(gu)(x)|^{p-2}(gu)(x)v(x)}{|x|^p}\right)dx \\
& - \int_\Omega f(x)|(gu)(x)|^{p-2}(gu)(x)v(x) - \int_\Omega k(x)|(gu)(x)|^{p^*-2}(gu)(x)v(x)dx \\
= & \int_\Omega \big(|\tau(g)g\nabla u(g^{-1}x)|^{p-2}(\tau(g)g\nabla u(g^{-1}x))\cdot\nabla v(x) \\
& - \mu(x)\frac{|\tau(g)u(g^{-1}x)|^{p-2}(\tau(g)u(g^{-1}x))v(x)}{|x|^p}\bigg)dx \\
& - \int_\Omega f(x)|\tau(g)u(g^{-1}x)|^{p-2}(\tau(g)u(g^{-1}x))v(x)dx \\
& - \int_\Omega k(x)|\tau(g)u(g^{-1}x)|^{p^*-2}(\tau(g)u(g^{-1}x))v(x)dx \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla u(g^{-1}x)|^{p-2}(\tau(g)g\nabla u(g^{-1}x))\cdot\nabla v(x) - \mu(x)\frac{|u(g^{-1}x)|^{p-2}\tau(g)u(g^{-1}x)v(x)}{|x|^p}\right)dx \\
& - \int_\Omega f(x)|u(g^{-1}x)|^{p-2}\tau(g)u(g^{-1}x)v(x)dx - \int_\Omega k(x)|u(g^{-1}x)|^{p^*-2}\tau(g)u(g^{-1}x)v(x)dx \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla u(y)|^{p-2}(\tau(g)g\nabla u(y))\cdot\nabla v(gy) - \mu(gy)\frac{|u(y)|^{p-2}\tau(g)u(y)v(gy)}{|gy|^p}\right)dy \\
& - \int_\Omega f(gy)|u(y)|^{p-2}\tau(g)u(y)v(gy)dy - \int_\Omega k(gy)|u(y)|^{p^*-2}\tau(g)u(y)v(gy)dy \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla u(y)|^{p-2}g\nabla u(y)\cdot\tau(g)\nabla v(gy) - \mu(gy)\frac{|u(y)|^{p-2}u(y)\tau(g)v(gy)}{|gy|^p}\right)dy \\
& - \int_\Omega f(gy)|u(y)|^{p-2}u(y)\tau(g)v(gy)dy - \int_\Omega k(gy)|u(y)|^{p^*-2}u(y)\tau(g)v(gy)dy \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla u(y)|^{p-2}g\nabla u(y)\cdot\tau(g^{-1})\nabla v(gy) - \mu(gy)\frac{|u(y)|^{p-2}u(y)\tau(g^{-1})v(gy)}{|gy|^p}\right)dy \\
& - \int_\Omega f(gy)|u(y)|^{p-2}u(y)\tau(g^{-1})v(gy)dy - \int_\Omega k(gy)|u(y)|^{p^*-2}u(y)\tau(g^{-1})v(gy)dy \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla u(y)|^{p-2}g\nabla u(y)\cdot g\nabla(g^{-1}v)(y) - \mu(gy)\frac{|u(y)|^{p-2}u(y)(g^{-1}v)(y)}{|gy|^p}\right)dy \\
& - \int_\Omega f(gy)|u(y)|^{p-2}u(y)(g^{-1}v)(y)dy - \int_\Omega k(gy)|u(y)|^{p^*-2}u(y)(g^{-1}v)(y)dy \\
= & \int_\Omega \left(|\nabla u(y)|^{p-2}\nabla u(y)\cdot\nabla(g^{-1}v)(y) - \mu(y)\frac{|u(y)|^{p-2}u(y)(g^{-1}v)(y)}{|y|^p}\right)dy \\
& - \int_\Omega f(y)|u(y)|^{p-2}u(y)(g^{-1}v)(y)dy - \int_\Omega k(y)|u(y)|^{p^*-2}u(y)(g^{-1}v)(y)dy \\
= & DE_{\mu,f,k}(u)(g^{-1}v) \\
= & \left(gDE_{\mu,f,k}(u)\right)(v)
\end{aligned}$$

para toda $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si además suponemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ entonces $g\left(DE_{\mu,f,k}(u)\right)(v) = DE_{\mu,f,k}(u)(v)$

es decir, $DE_{\mu,f,k}\mid_{N_{\mu,f,k}}(u) = DE_{\mu,f,k}(u)$. □

Observemos que si G es el grupo trivial escribimos $N_{\mu,f,k}$. Sea $u \in N^{\tau}_{\mu,f,k}$, notemos que

$$\begin{aligned} E_{\mu,f,k}(u) &= \frac{1}{p}\,[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f} - \frac{1}{p^*}\,|u|^{p^*}_{k,p^*} \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f} \\ &= \frac{1}{N}\,[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f} \end{aligned}$$

además, para toda $u \in W^{1,p}_0(\Omega)^{\tau} \diagdown \{0\}$ tenemos

$$\begin{aligned} E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(u)) &= \frac{1}{N}\left[\!\!\left[\left(\frac{[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f}}{|u|^{p^*}_{k,p^*}}\right)^{\frac{N-p}{p^2}} u\right]\!\!\right]^{p}_{\mu,f} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f}}{|u|^{p^*}_{k,p^*}}\right)^{\frac{N-p}{p}} [\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f} \\ &= \frac{1}{N}\frac{[\![\, u \,]\!]^{N}_{\mu,f}}{|u|^{N}_{k,p^*}} \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f}}{|u|^{p}_{k,p^*}}\right)^{\frac{N}{p}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.3.2. Propiedades de $m^{\tau}(\mu,f,k)$

Definamos

$$\begin{aligned} m(\mu,f,k) &= \inf_{u\in N_{\mu,f,k}} E_{\mu,f,k}(u) \\ &= \inf_{u\in N_{\mu,f,k}} \frac{1}{N}\,[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f} \\ &= \inf_{u\in W^{1,p}_0 \diagdown\{0\}} \frac{1}{N}\left(\frac{[\![\, u \,]\!]^{p}_{\mu,f}}{|u|^{p}_{k,p^*}}\right)^{\frac{N}{p}}. \end{aligned}$$

Particularmente $E_{\mu,f,k}$ está inferiormente acotado sobre $N_{\mu,f,k}$. En las restricciones para la variedad de Nehari invariante y equivariante denotemos

$$m^{\Gamma}(\mu,f,k) = \inf_{u\in N^{\Gamma}_{\mu,f,k}} E_{\mu,f,k}(u), \qquad m^{\tau}(\mu,f,k) = \inf_{u\in N^{\tau}_{\mu,f,k}} E_{\mu,f,k}(u)$$

respectivamente.

Proposición 2.5. $m^{\tau}(\mu, f, k) \geq m^{\Gamma}(\mu, f, k) > 0$.

Demostración. Como $N^{\tau}_{\mu,f,k} \subset N^{\Gamma}_{\mu,f,k}$ se tiene que $m^{\tau}(\mu, f, k) \geq m^{\Gamma}(\mu, f, k)$. Sea $u \in N^{\Gamma}_{\mu,f,k}$, entonces

$$E_{\mu,f,k}(u) = \frac{1}{N} [\![u]\!]^{p}_{\mu,f} = \frac{1}{N} |u|^{p^*}_{k,p^*}$$

Primero recordemos la ecuación obtenida en (2.8)

$$[\![u]\!]^{p}_{\mu,f} \geq \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right) \|u\|^{p}. \tag{2.16}$$

Por otro lado usando la desigualdad de Sobolev y la equivalencia de las normas $|\cdot|^{p^*}_{k,p^*}$ y $|\cdot|^{p^*}_{p^*}$.

$$|u|^{p^*}_{k,p^*} \leq C_0 |u|^{p^*}_{p^*} \leq C_0 C_1 \|u\|^{p^*}, \tag{2.17}$$

definimos $A = C_0 C_1$ la cual es positiva. De (2.16) y (2.17) tenemos

$$A \|u\|^{p^*} \geq \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right) \|u\|^{p},$$

lo cual implica

$$\|u\| \geq \left[\frac{1}{A}\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)\right]^{\frac{1}{p^*-p}}.$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} [\![u]\!]^{p}_{\mu,f} &\geq \frac{1}{N}\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right) \|u\|^{p} \\ &\geq \frac{1}{N}\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)\left[\frac{1}{A}\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)\right]^{\frac{p}{p^*-p}} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} m^{\Gamma}(\mu, f, g) &= \inf_{u \in N^{\Gamma}_{\mu,f,g}} E_{\mu,f,g}(u) \\ &= \inf_{u \in N^{\Gamma}_{\mu,f,g}} \frac{1}{N} [\![u]\!]^{p}_{\mu,f} \\ &\geq \frac{1}{N}\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)\left[\frac{1}{A}\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)\right]^{\frac{p}{p^*-p}}, \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba. □

Proposición 2.6. *Sea* $0 < f(x) \leq f'(x) < \lambda_p$, $0 < \mu(x) \leq \mu'(x) < \widetilde{\mu}$ *para toda* $x \in \overline{\Omega}$ *y* $k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *con las condiciones de arriba, entonces*

$$m(\mu', f', k) \leq m(\mu, f, k) \quad y \quad m^{\Sigma}(\mu', f', k) \leq m^{\Sigma}(\mu, f, k)$$

con $\Sigma = \Gamma$ *ó* $\Sigma = \tau$.

Demostración. Por definición de $[\![\cdot]\!]_{\mu,f}$ obtenemos $[\![u]\!]^p_{\mu',f'} \leq [\![u]\!]^p_{\mu,f}$. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned} m\left(\mu', f', k\right) &\leq E_{\mu',f',k}\left(\pi_{\mu',f',k}(u)\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(\frac{[\![u]\!]^p_{\mu',f'}}{|u|^p_{k,p^*}}\right)^{\frac{N}{p}} \\ &\leq \frac{1}{N}\left(\frac{[\![u]\!]^p_{\mu,f}}{|u|^p_{k,p^*}}\right)^{\frac{N}{p}} \\ &= E_{\mu,f,k}\left(\pi_{\mu,f,k}(u)\right) \end{aligned}$$

y de estas desigualdades, se concluye la proposición . □

Lema 2.1. *Con las condiciones **(M1)** y **(F1)**, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ obtenemos*

$$E_{0,0,k}\left(\pi_{0,0,k}(u)\right) \leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu_0}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} E_{\mu,f,k}\left(\pi_{\mu,f,k}(u)\right).$$

Demostración. Como

$$E_{\mu,f,k}\left(\pi_{\mu,f,k}(u)\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{[\![u]\!]^p_{\mu,f}}{|u|^p_{k,p^*}}\right)^{\frac{N}{p}} = \frac{1}{N}\left(\frac{[\![u]\!]^N_{\mu,f}}{|u|^N_{k,p^*}}\right),$$

y recordando que, de la ecuación (2.8) obtenemos

$$[\![u]\!]^N_{\mu,f} \geq \left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)^{\frac{N}{p}}\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)^{\frac{N}{p}} \|u\|^N,$$

entonces

$$E_{\mu,f,k}\left(\pi_{\mu,f,k}(u)\right) \geq \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|^N}{|u|^N_{k,p^*}}\right)\left(1 - \frac{f_0}{\lambda_p}\right)^{\frac{N}{p}}\left(1 - \frac{\mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)^{\frac{N}{p}}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} E_{\mu,f,k}\left(\pi_{\mu,f,k}(u)\right)\left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu_0}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} &\geq \frac{1}{N}\left(\frac{\|u\|^N}{|u|^N_{k,p^*}}\right) \\ &= E_{0,0,k}\left(\pi_{0,0,k}(u)\right). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.2. $m^\tau(0,0,k) \leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu_0}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} m^\tau(\mu, f, k)$.

2.3.3. Estimaciones para $m^\Gamma(\mu, f, k)$

Consideremos el conjunto

$$M := \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right\}, \tag{2.18}$$

donde $\Gamma y := \{\gamma y : \gamma \in \Gamma\}$ es la $\Gamma - \acute{o}rbita$ del punto y y $\#\Gamma y$ denota su cardinalidad. Recordemos que la $\Gamma - \acute{o}rbita$ de y es $\Gamma - homeomorfa$ al espacio homogéneo Γ/Γ_y donde $\Gamma_y := \{\gamma \in \Gamma : \gamma y = y\}$ es grupo de isotropía de y. El homeomorfismo está dado por

$$\Gamma/\Gamma_y \longmapsto \Gamma y, \quad [\gamma] := \gamma\Gamma_y \longmapsto \gamma y. \tag{2.19}$$

Proposición 2.7. *M es cerrado.*

Demostración. Si todas las $\Gamma - \acute{o}rbitas$ de Ω son infinitas entonces $M = \overline{\Omega}$. Supongamos que alguna $\Gamma - \acute{o}rbita$ es finita. Sea (y_n) una sucesión en M tal que $y_n \longrightarrow y$ en $\overline{\Omega}$. Para probar que M es cerrado, basta verificar que $y \in M$. Como k es continua, $k(y_n) \longrightarrow k(y)$, dado que $y_n \in M$, se tiene que $\#\Gamma y_n = r$ y $k(y_n) = k(y)$ para n suficientemente grande. En consecuencia, $\#\Gamma y \geq \#\Gamma y_n$. Mostraremos que $\#\Gamma y = \#\Gamma y_n$. Sean $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r \in \Gamma$, tales que $\gamma_i y \neq \gamma_j y$ si $i \neq j$, y sea $\delta > 0$ tal que las bolas $B_\delta(\gamma_i y)$, $i = 1, 2, ..., r$, son ajenas por pares. Como para toda n suficientemente grande $\gamma_i y_n \in B_\delta(\gamma_i y)$ concluimos que $\#\Gamma y \leq \#\Gamma y_n$. En consecuencia, $y \in M$ y por tanto M es cerrado. $\square$

Notemos que como $M \subset \Omega$ y por la proposición anterior se tiene que M es compacto. Más adelante se verá que si todas las $\Gamma - \acute{o}rbitas$ de Ω son infinitas, nuestro problema tiene una infinidad de soluciones. De modo que supondremos que se cumple

(fin) Existe $y \in \Omega$ tal que $\#\Gamma y < \infty$,

las condiciones (**K1**), (**F1**) y las siguientes dos condiciones

K2) k es ***localmente plano*** sobre M, esto es, existe $r > 0$, $v > N$ y $A > 0$ tal que

$$|k(x) - k(y)| \leq A|x - y|^v \quad \text{if} \quad y \in M \text{ and } |x - y| < r.$$

F2) $f(x) > 0$ para toda $x \in M$.

Fijemos $s > 0$ tal que

$$\min_{x \in B_s(M)} f(x) > 0$$

donde $B_s(M) := \{y \in \mathbb{R}^N : dist(y, M) \leq s\}$, y sea

$$\rho_s^\Gamma := \inf \left\{ r, \frac{s}{2}, \frac{|\gamma y - y|}{4} : y \in M, \gamma \in \Gamma, \gamma y \neq y \right\},$$

donde $r > 0$ es la constantede la condición (**K2**).

Lema 2.2. $\rho_s^\Gamma > 0$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existen sucesiones (γ_n) en Γ, (y_n) en M, tales que $\gamma_n y_n \neq y_n$ y $|\gamma_n y_n - y_n| \longrightarrow 0$. Como Γ y M son compactos, sin perdida de generalidad podemos suponer que $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ en Γ y que $y_n \longrightarrow y$ en M. Entonces $\gamma y = y$, en consecuencia, dada $\delta > 0$, se cumple que $\gamma_n y_n,\ y_n \in B_\delta(y)$ para toda n suficientemente grande. Esto implica que $\#\Gamma y_n \geq 2\#\Gamma y$, lo cual contadice que $y_n \in M$. $\square$

Definamos el siguiente conjunto $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$. Denotemos por $S_{0,p}$ la mejor constante de Sobolev para $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$S_{0,p} = \inf_{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}}}$$

y denotemos

$$\ell_k^\Gamma = \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k\left(x\right)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

El problema (2.1) está relacionado con los siguientes problemas límite

$$\left(P_{0,0,1}^\infty\right) \begin{cases} -\triangle_p u = |u|^{p^*-2} u \text{ en } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \end{cases}$$

$$\left(P_{\mu_0,0,1}^\infty\right) \begin{cases} -\triangle_p u - \mu_0 \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = |u|^{p^*-2} u \text{ en } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \end{cases}$$

Se sabe que las soluciones positivas no triviales de mínima energía del problema límite $\left(P_{0,0,1}^\infty\right)$ son los instantones [3]

$$U_0^{\varepsilon,y}\left(x\right) = C\left(N\right) \frac{\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}}}{\left(\varepsilon + |x-y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}, \tag{2.20}$$

con $\varepsilon > 0$, $y \in \mathbb{R}^N$ y $C\left(N\right) = \left(N\left(\frac{N-p}{p-1}\right)\right)^{\frac{N-p}{p^2}}$, además estas soluciones minimizan

$$\min_{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^p\right) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}}} = S_{0,p}$$

y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_0^{\varepsilon,y}|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |U_0^{\varepsilon,y}|^{p^*} \, dx = S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

Para el problema límite $\left(P_{0,\mu_0,1}^\infty\right)$ notemos que tiene soluciones de estado base radiales positivas U_{μ_0} las cuales son únicas excepto por dilataciones y traslaciones, esto es, las soluciones pueden ser escritas como $U_{\mu_0}^\varepsilon\left(\cdot\right) = \varepsilon^{-\frac{N-p}{p}} U_{\mu_0}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$ con $\varepsilon > 0$. Además, de la naturaleza de la ecuación de la que es solución se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\nabla U_{\mu_0}^\varepsilon\right|^p - \mu_0 \frac{\left|U_{\mu_0}^\varepsilon\right|^p}{|x|} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left|U_{\mu_0}^\varepsilon\right|^{p^*} dx = S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}},$$

donde la constante $S_{\mu_0,p}$ es la que minimiza el siguiente cociente

$$\min_{u\in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^p-\mu_0\frac{|u|^p}{|x|}\right)dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}}}=S_{\mu_0,p},$$

véase la semejanza con las soluciones (2.20) del primer problema límite. Utilizaremos los instantones para obtener una cota superior para $m^\tau(\mu,f,k)$. Fijemos $0<\rho<\rho_s^\Gamma$ y fijemos una fución de corte $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ radialmente simétrica y tal que $\varphi(x)=1$ si $|x|\le 1$, $\varphi(x)=0$ si $|x|\ge 2$ y $0\le\varphi(x)\le 1$ para toda $x\in\mathbb{R}^N$. Para cada $y\in\mathbb{R}^N,\ \gamma\in\Gamma$, denotamos

$$\varphi_{\gamma y}:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R},\qquad \varphi_{\gamma y}(x):=\varphi\left(\frac{x-\gamma y}{\rho}\right).$$

Sea

$$M_s^-:=\{y\in M: dist(y,\partial\Omega)\ge s\}.$$

Para cada $y\in M_s^-$ y $\varepsilon>0$, definimos

$$\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma(x):=\sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_y}k(y)^{\frac{p-N}{p^2}}\varphi_{\gamma y}(x)U_{\varepsilon,\gamma y}(x).$$

Observemos que $\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma>0$, $\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma$ es $\Gamma-invariante$ y su soporte satisface

$$sop\left(\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma\right)=B_{2\rho}(\Gamma y)\subset B_s(M_s^-)\subset\overline{\Omega},$$

por tanto $\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma\in W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$. En [26] P.G. Han probó las siguientes estimaciones

Lema 2.3. *Para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeña la función $u_\varepsilon(x)=\varphi\left(\frac{x}{\rho}\right)U_{\varepsilon,0}(x)$ satisface*

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|^p &= S_{p,0}^{\frac{N}{p}}+O\left(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}\right),\\
|u_\varepsilon|_{k,p^*}^{p^*} &= \left(\max_{x\in\overline{\Omega}}k(x)\right)S_{p,0}^{\frac{N}{p}}+O\left(\varepsilon^{\frac{N}{p}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha(p-1)}{p}}\right),\\
|u_\varepsilon|_p^p &= \begin{cases} C_0\varepsilon^{p-1} & si\quad N>p^2\\ C_0\varepsilon^{p-1}|\log\varepsilon| & si\quad N=p^2\end{cases}
\end{aligned}$$

donde $p<\alpha<\frac{N}{p-1}$ y C_0 es una constante positiva.

Usaremos este resultado para probar el siguiente.

Lema 2.4. *Para todo $y\in M_s^-$ y $\varepsilon>0$ suficientemente pequeña, la función $\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma$ satisface*

$$\begin{aligned}
\|\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma\|^p &= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)S_{p,0}^{\frac{N}{p}}+O\left(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}\right),\\
|\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma|_{k,p^*}^{p^*} &= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)S_{p,0}^{\frac{N}{p}}+O\left(\varepsilon^{\frac{N}{p}}\right)+O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha(p-1)}{p}}\right),\\
\int_\Omega f(x)|\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma|_p^p &\ge \begin{cases} C\varepsilon^{p-1} & si\quad N>p^2\\ C\varepsilon^{p-1}|\log\varepsilon| & si\quad N=p^2\end{cases}
\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva.

Demostración. La elección de ρ garantiza que el soporte de $\omega^{\Gamma}_{\varepsilon,y}$ es unión de bolas con interiores ajenos por pares

$$sop(\omega^{\Gamma}_{\varepsilon,y}) = B_{2\rho}(\Gamma y) = \cup_{z\in\Gamma y} B_{2\rho}(z).$$

Del lema anterior se tiene la primer igualdad

$$\begin{aligned}
\|\omega^{\Gamma}_{\varepsilon,y}\|^p &= \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_y} k(y)^{\frac{p-N}{p}} \|\varphi_{\gamma y} U_{\varepsilon,\gamma y}\|^p \\
&= \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} \|u_\varepsilon\|^p \\
&= \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{p,0}^{\frac{N}{p}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}\right).
\end{aligned}$$

Para toda $y \in M_s^-$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña.
La segunda igualdad requiere la propiedad **(K2)**.

$$\begin{aligned}
|\omega^{\Gamma}_{\varepsilon,y}|^{p^*}_{k,p^*} &= \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_y} k(y)^{-\frac{N}{p}} \|\varphi_{\gamma y} U_{\varepsilon,\gamma y}\|^{p^*}_{k,p^*} \\
&= \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N}{p}}} \|\varphi_{\gamma y} U_{\varepsilon,\gamma y}\|^{p^*}_{k,p^*} \\
&= \left(\frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \int \frac{k(x)|\varphi_{\gamma y} U_{\varepsilon,\gamma y}|^{p^*}}{k(y)} dx \\
&= \left(\frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \left(\int |U_{\varepsilon,\gamma y}|^{p^*} dx + \int \frac{k(x)\varphi^{p^*}_{\gamma y} - k(y)}{k(y)} |U_{\varepsilon,\gamma y}|^{p^*} dx\right) \\
&= \left(\frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \left(S_{p,0}^{\frac{N}{p}} + \varepsilon^{\frac{N}{p}} C(N)^{p^*} \int \frac{k(x)\varphi^{p^*}_{\gamma y} - k(y)}{k(y)\left(\varepsilon + |x-\gamma y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dx\right).
\end{aligned}$$

Queremos probar que la última integral está acotada, para ello, la descomponemos en dos partes.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x-\gamma y|\leq\rho} \left|\frac{k(x)\varphi_{\gamma y}^{p^*}-k(y)}{k(y)\left(\varepsilon+|x-\gamma y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N}\right| dx &= \int\limits_{|x-\gamma y|\leq\rho} \frac{|k(x)-k(y)|}{k(y)\left(\varepsilon+|x-\gamma y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N} dx \\
&\leq \int\limits_{|x-\gamma y|\leq\rho} \frac{A|x-\gamma y|^v}{k(y)|x-\gamma y|^{\frac{Np}{p-1}}} dx \\
&= \frac{A}{k(y)} \int\limits_{|x-\gamma y|\leq\rho} \frac{|x-\gamma y|^v}{|x-\gamma y|^{\frac{Np}{p-1}}} dx \\
&= \frac{A}{k(y)} \int\limits_{|x|\leq\rho} |x|^{v-\frac{Np}{p-1}} dx \\
&= \frac{Aw_N}{k(y)} \int_0^\rho r^{v-\frac{Np}{p-1}} r^{N-1} dr \\
&= \frac{Aw_N}{k(y)} \int_0^\rho r^{(v-\frac{Np}{p-1}+N)-1} dr \\
&= a_2 r^{v-\frac{Np}{p-1}+N} \;|_0^\rho \\
&= a_2 \rho^{v-\frac{N}{p-1}}
\end{aligned}$$

donde $a_2 = \frac{Aw_N}{k(y)(v-\frac{N}{p-1})}$, w_N :=volumen de la esfera unitaria de dimensión N.
Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x-\gamma y|\geq\rho} \left|\frac{k(x)\varphi_{\gamma y}^{p^*}-k(y)}{k(y)\left(\varepsilon+|x-\gamma y|^{\frac{p}{p-1}}\right)^N}\right| dx &\leq a_3 \int\limits_{|x|\geq\rho} |x|^{-\frac{Np}{p-1}} dx \\
&= a_3 \int_\rho^\infty r^{-\frac{Np}{p-1}-1} dr \\
&= a_4 \rho^{-\frac{N}{p-1}}
\end{aligned}$$

De lo anterior, usando el lema 2.3, obtenemos

$$|\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma|_{k,p^*}^{p^*} = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{p,0}^{\frac{N}{p}} + O\left(\varepsilon^{\frac{N}{p}}\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{\alpha(p-1)}{p}}\right),$$

para toda $y \in M_s^-$, $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.
Para la última desigualdad observemos que

$$sop(\omega_{\varepsilon,y}^\Gamma) \subset B_s(M_s^-)$$

y

$$a_1 := \min_{B_s(M_s^-)} f > 0.$$

El lema 2.3 implica que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f(x)|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p_p &\geq a_1 \int_\Omega |\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p_p \\
&= a_1 \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} |u_\varepsilon|^p_p \\
&= \begin{cases} C\varepsilon^{p-1} & \text{si} \quad N > p^2 \\ C\varepsilon^{p-1}|\log\varepsilon| & \text{si} \quad N = p^2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

con $C = C_0 a_1 \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) > 0.$ □

Proposición 2.8. *Supongamos que f y k satisfacen las condiciones **(F1)**, **(K1)**, **(F2)**, y **(K2)** y que se cumple **(fin)**. Dada $s > 0$ tal que $\min_{B_s(M)} f > 0$, existe $\varepsilon_s > 0$ con la siguiente propiedad:*
Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_s)$ existe θ_ε tal que

$$
E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\Gamma_{\varepsilon,y})) \leq \theta_\varepsilon < \frac{1}{N} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}} \quad \forall y \in M_s^-,
$$

donde $\pi_{\mu,f,k}$ es la proyección radial sobre la variedad de Nehari, en consecuencia, si $M_s^- \neq \emptyset$,

$$
m^\Gamma(\mu, f, k) < \frac{1}{N} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.
$$

Demostración. De la proyección radial (2.15) y el lema 2.4 se sigue que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$
\begin{aligned}
& E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\Gamma_{\varepsilon,y})) \\
= \; & \frac{1}{N} \left(\frac{[\![\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}]\!]^p_{\mu,f}}{|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p_{k,p^*}} \right)^{\frac{N}{p}} \\
\leq \; & \frac{1}{N} \left(\frac{\|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}\|^p - \int_\Omega f(x)|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p}{\left(|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^{p^*}_{k,p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}} \right)^{\frac{N}{p}} \\
= \; & \frac{1}{N} \left[\frac{\left(\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{p,0}^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}) - \int_\Omega f(x)|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p}{\left(\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{p,0}^{\frac{N}{p}} + O(\varepsilon^{\frac{N}{p}}) + O(\varepsilon^{\frac{\alpha(p-1)}{p}})} \right]^{\frac{N}{p}} \\
\leq \; & \frac{1}{N} \left[\left(\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right)^{\frac{p}{N}} S_{p,0} + c_1 \varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_2 \int_\Omega f(x)|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p \right]^{\frac{N}{p}} \\
=: \; & \theta_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Usando nuevamente el lema 2.4 obtenemos

$$c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_2\int_\Omega f(x)|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p \leq \begin{cases} c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_3\varepsilon^{p-1} & \text{si} \quad N > p^2 \\ c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_3\varepsilon^{p-1}|\log\varepsilon| & \text{si} \quad N = p^2 \end{cases}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} & c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_3\varepsilon^{p-1} < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} < c_3\varepsilon^{p-1} \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{N-p} < c_3\varepsilon^{p^2-p} \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{N} < c_3\varepsilon^{p^2} \\ \Leftrightarrow \quad & N > p^2, \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} & c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_3\varepsilon^{p-1}|\log\varepsilon| < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} < c_3\varepsilon^{p-1}|\log\varepsilon| \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{N-p} < c_3\varepsilon^{p^2-p}|\log\varepsilon|^p \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{N} < c_3\varepsilon^{p^2}|\log\varepsilon|^p \\ \Leftrightarrow \quad & c_1\varepsilon^{\frac{N-p^2}{p}} < c_3|\log\varepsilon| \\ \Leftrightarrow \quad & N = p^2, \end{aligned}$$

por lo cual se tiene que

$$c_1\varepsilon^{\frac{N-p}{p}} - c_2\int_\Omega f(x)|\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}|^p < 0$$

para toda $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño y, por lo tanto,

$$m^\Gamma(\mu, f, k) \leq E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\Gamma_{\varepsilon,y})) \leq \theta_\varepsilon < \frac{1}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

□

2.3.4. Estimaciones para $m^\tau(\mu, f, k)$

Sea $\Omega^\tau = \{y \in \Omega : \Gamma y = Gy\}$ y consideremos el conjunto

$$M^-_{\tau,s} := \{y \in M : dist\,(y, \partial\Omega \cup \Omega^\tau) \geq s\}.$$

Observemos que $M^-_{\tau,s}$ es un conjunto cerrado, que puede ser vacío (por ejemplo, cuando $\tau \equiv 1$). Este conjunto tiene la siguiente propiedad.

Lema 2.5. $\inf\left\{|gy - y| : \ y \in M^-_{\tau,s}, \ g \in G, \ gy \neq y\right\} > 0.$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existen sucesiones (y_n) en $M^{-}_{\tau,s}$ y (g_n) en G tales que $|g_n y_n - y_n| \longrightarrow 0$, en virtud del lema 2.2, $\tau(g_n) = -1$. Como G y $M^{-}_{\tau,s}$ son compactos podemos suponer que $g_n \longrightarrow g$ en G y $y_n \longrightarrow y$ en $M^{-}_{\tau,s}$. Entonces $gy = y$ y como τ es continua, $\tau(g) = -1$. Esto implica que $Gy = \Gamma y$, lo cual es una contradicción, pues $y \in M^{-}_{\tau,s}$. □

Definimos

$$\rho_s^\tau := \inf\left\{\rho_s^\Gamma, \frac{|gy-y|}{4} : y \in M^{-}_{\tau,s}, g \in G, gy \neq y\right\}.$$

Fijemos $0 < \rho \leq \rho_s^\tau$ en la construcción de las funciones $\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}$ de la sección anterior, y tomemos $g_\tau \in G$ tal que $\tau(g_\tau) = -1$. Para cada $y \in M^{-}_{\tau,s}$, $\varepsilon > 0$, definimos

$$\omega^\tau_{\varepsilon,y} := \omega^\Gamma_{\varepsilon,y} + \omega^\Gamma_{\varepsilon,g_\tau y}. \tag{2.21}$$

Como la función $\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}$ sólo depende de la $\Gamma -$ *órbita* Γy y no de y mismo, $\omega^\tau_{\varepsilon,y}$ no depende de la elección de g_τ.
La eleccón de ρ garantiza que los soportes de $\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}$ y $\omega^\Gamma_{\varepsilon,g_\tau y}$ tiene interiores ajenos y, por tanto, $\omega^\tau_{\varepsilon,y} \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \setminus \{0\}$ y

$$(\omega^\tau_{\varepsilon,y})^+ = \omega^\Gamma_{\varepsilon,y}, \qquad (\omega^\tau_{\varepsilon,y})^- = -\omega^\Gamma_{\varepsilon,g_\tau y}. \tag{2.22}$$

Una consecuencia inmediata de éste hecho y de la proposición 2.8 es el siguiente corolario.

Corolario 2.3. *Supongamos que f y k satisfacen las condiciones **(F1)**, **(K1)**, **(F2)** y **(K2)** y que se cumple **(fin)**. Dadas $s > 0$ tal que $\min_{B_s(M)} f > 0$, existe $\varepsilon_s > 0$ con la siguiente propiedad:*
Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_s)$ existe θ_ε tal que

$$E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\tau_{\varepsilon,y})) \leq 2\theta_\varepsilon < \frac{2}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \quad \forall y \in M^{-}_{\tau,s}.$$

En consecuencia, si $M^{-}_{\tau,s} \neq \emptyset$, entonces

$$m^\tau(\mu, f, k) < \frac{2}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

Demostración. Sea $t > 0$ tal que $\pi_{\mu,f,k}(\omega^\tau_{\varepsilon,y}) = t\omega^\tau_{\varepsilon,y}$. Se sigue de (2.22) y de la proposición 2.4 (a) que

$$\begin{aligned}
E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\tau_{\varepsilon,y})) &= E_{\mu,f,k}(t\omega^\tau_{\varepsilon,y}) \\
&= E_{\mu,f,k}(t\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}) + E_{\mu,f,k}(t\omega^\Gamma_{\varepsilon,g_\tau y}) \\
&= 2E_{\mu,f,k}(t\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}) \\
&\leq 2E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\Gamma_{\varepsilon,y})).
\end{aligned}$$

Las afirmaciones del corolario son ahora consecuencia inmediata de la proposición 2.8. □

De la sección anterior y eśta se tiene el siguiente lema.

Lema 2.6. *Si $\Omega \cap M \neq \emptyset$ entonces;*

a) $m^{\Gamma}(0,0,k) \leq \frac{1}{N}\ell_k^{\Gamma}$.

b) Si existe $y \in \Omega \cap M$ con $\Gamma x \neq Gy$, entonces $m^{\tau}(0,0,k) \leq \frac{2}{N}\ell_k^{\Gamma}$.

Para concluir el capítulo observemos que, para $s > 0$ tal que $\min\limits_{B_s(M)} f(x) > 0$ y $\varepsilon > 0$, hemos definido las funciones continuas

$$\begin{aligned} \alpha_s^{\Gamma} &: M_s^-/\Gamma \longrightarrow N_{\mu,f,k}^{\Gamma}, \quad \alpha_s^{\Gamma}(\Gamma y) = \pi_{\mu,f,k}(\omega_{\varepsilon,y}^{\Gamma}) \\ \alpha_s^{\tau} &: M_{\tau,s}^-/\Gamma \longrightarrow N_{\mu,f,k}^{\tau}, \quad \alpha_s^{\tau}(\Gamma y) = \pi_{\mu,f,k}(\omega_{\varepsilon,y}^{\tau}) \end{aligned}$$

donde;

$$M_s^-/\Gamma = \left\{\Gamma y : y \in M_s^-\right\},\ M_{\tau,s}^-/\Gamma = \left\{\Gamma y : y \in M_{\tau,s}^-\right\}$$

son los espacios de $\Gamma-$ *órbitas* de M_s^- y $M_{\tau,s}^-$ con la topología cociente.
La función α_s^{τ} tiene además una propiedad de simetría. El homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ induce una involución en el espacio de órbitas $\mathbb{R}^N/\Gamma$, a la que denotaremos nuevamente por τ, definida como sigue

$$\tau : \mathbb{R}^N/\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^N/\Gamma, \quad \tau(\Gamma y) = \Gamma(g_\tau y).$$

Esta involución no depende de la elección de $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$.
El conjunto de puntos fijos de esta involución es

$$(\mathbb{R}^N/\Gamma)^{\tau} := \{\Gamma y : \tau(\Gamma y) = \Gamma y\} = \{\Gamma y : \Gamma y = Gy\}.$$

De modo que, como

$$(M_{\tau,s}^-/\Gamma) \subset (\mathbb{R}^N/\Gamma) \setminus (\mathbb{R}^N/\Gamma)^{\tau},$$

se tiene que τ actúa libremente en $M_{\tau,s}^-/\Gamma$. La función α_s^{τ} es $\mathbb{Z}/2-$ *equivariante*, es decir,

$$\alpha_s^{\tau}(\tau(\Gamma y)) = -\alpha_s^{\tau}(\Gamma y), \quad \forall y \in M_{\tau,s}^-.$$

2.4. Sucesiones de Palais-Smale y existencia de soluciones Γ-invariantes

2.4.1. Sucesiones equivariantes de Palais-Smale

Como en el capítulo anterior, G es un subgrupo cerrado de $O(N)$ y $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ es un homomorfismo continuo. Queremos estudiar la pérdida de compacidad para el problema

$$\left(P_{\mu,f,k}^{\tau}\right) \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x) \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)|u|^{p-2}u + k(x)|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0, \qquad x \in \partial\Omega \\ u(gx) = \tau(g)u(x), \quad \forall x \in \Omega, g \in G \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto suave, acotado y G-invariante de $\mathbb{R}^N$, $0 \in \Omega$ y $\mu, f, k \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ son funciones continuas $G-$invariantes que satisfacen **K1, K2, M1, F1** y **F2**.
Sea

$$W_0^{1,p}(\Omega)^{\tau} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : u(gx) = \tau(g)u(x) \quad \forall g \in G, x \in \Omega\right\}$$

y sea $E_{\mu,f,k}(u) : W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$E_{\mu,f,k}(u) = \frac{1}{p}\, [\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f} - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*}_{k,p^*},$$

el funcional asociado a $\left(P^\tau_{\mu,f,k}\right)$.

Definición 2.4. *Una sucesión* $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ *que satisface*

$$E_{\mu,f,k}(u_n) \to c \quad and \quad DE_{\mu,f,k}(u_n) \to 0$$

es llamada una sucesión de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ *en c. Decimos que* $E_{\mu,f,k}$ *satisface la condición de Palais-Smale* $(PS)_c$ *si toda sucesión de Palais-Smale para* $E_{\mu,f,k}$ *en c tiene una subsucesión convergente. Si además* $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ *entonces diremos que* $\{u_n\}$ *es una sucesión de Palais-Smale* $\tau-$*equivariante y* $E_{\mu,f,k}$ *satisface la condición de Palais-Smale* $\tau-$*equivariante,* $(PS)^\tau_c$. *Si* $\tau = 1$ $\{u_n\}$ *diremos que es una sucesión de Palais-Smale* $\Gamma-$*invariante y que* $E_{\mu,f,k}$ *satisface la condición de Palais-Smale* $\Gamma-$*invariante,* $(PS)^\Gamma_c$.

El funcional $E_{\mu,f,k}$ no cumple $(PS)^\tau_c$ para todo c. Daremos en ésta sección un resultado de las sucesiones $\tau-$*equivariantes* de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ en términos de las soluciones de los problemas

$$\left(P^\infty_{0,0,1}\right)\begin{cases} -\triangle_p u = |u|^{p^*-2}\, u \text{ en } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\end{cases}$$

$$\left(P^\infty_{\mu_0,0,1}\right)\begin{cases} -\triangle_p u - \mu_0 \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = |u|^{p^*-2}\, u \text{ en } \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right)\end{cases}$$

El funcional asociado a $\left(P^\infty_{0,0,1}\right)$ es $E^\infty_{0,0,1} : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : |\nabla u| \in L^p(\mathbb{R}^N)\right\}$$

es un subespacio completo con norma $\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p$ y

$$\begin{aligned} E^\infty_{0,0,1}(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*}_{p^*}. \end{aligned}$$

El funcional asociado a $\left(P^\infty_{\mu_0,0,1}\right)$ es $E^\infty_{\mu_0,0,1} : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E^\infty_{\mu_0,0,1}(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p - \mu_0 \frac{|u|^p}{|x|^p}\right) - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} \\ &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{\mu_0} - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*}_{p^*}. \end{aligned}$$

Como antes, denotaremos por

$$Gy := \{gy : g \in G\}$$

a la $G-$ *órbita* de y, y por

$$G_y := \{g \in G : gy = y\}$$

el grupo de isotropía de y. Recordemos que la $G-$ *órbita* de y es $G-homeomorfa$ al espacio homogéneo G/G_y. El homeomorfismo está dado por

$$G/G_y \longrightarrow Gy, \qquad [g] := gG_y \longmapsto gy$$

La demostración del siguiente resultado se puede ver en [42].

Teorema 2.3. *Sea (u_n) una sucesión de Palais-Smale $\tau-equivariante$ en $W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ para $E_{\mu,f,k}$ en $c \geq 0$. Entonces existe una solución u del problema $\left(P^\tau_{\mu,f,k}\right)$, $m, l \in \mathbb{N}$; un subgrupo cerrado G^i de índice finito en G, sucesiones $\left\{y_n^i\right\} \subset \Omega$, $\left\{r_n^i\right\} \subset (0,+\infty)$; una solución $\widehat{u}_0^i$ de $(P^\infty_{0,0,1})$, para $i = 1, ..., m$; $\left\{R_n^j\right\} \subset (0,+\infty)$ y una solución $\widetilde{u}_\mu^j$ de $(P^\infty_{\mu_0,0,1})$ para $j = 1, ..., l$ tal que:*

(i) $G_{y_n^i} = G^i$, $\forall n \geq 1$ y $y_n^i \to y^i \in \overline{\Omega}$ cuando $n \longrightarrow \infty$, para $1 \leq i \leq m$,

(ii) $\left(r_n^i\right)^{-1} dist\left(y_n^i, \partial\Omega\right) \to \infty$ y $\left(r_n^i\right)^{-1}\left|gy_n^i - g'y_n^i\right| \to \infty$, si $n \to \infty$ para toda $[g] \neq [g'] \in G/G^i$, $i = 1, ..., m$,

(iii) $\widehat{u}_0^i(gx) = \tau(g)\,\widehat{u}_0^i(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $g \in G^i$, $i = 1, 2, ..., m$,

(iv) $R_n^j \to 0$ si $n \longrightarrow \infty$ y $\widetilde{u}_\mu^j(gx) = \tau(g)\,\widetilde{u}_\mu^j(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$ y $g \in G$, $j = 1, ..., l$,

(v)

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u(x) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{[g]\in G/G^i} \left(r_n^i\right)^{\frac{p-N}{p}} k\left(y^i\right)^{\frac{p-N}{p^2}} \tau(g)\,\widehat{u}_0^i\left(g^{-1}\left(\frac{x - gy_n^i}{r_n^i}\right)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{l} \left(R_n^j\right)^{\frac{p-N}{p}} \widetilde{u}_\mu^j\left(\frac{x}{R_n^j}\right) + o(1), \end{aligned}$$

(vi) $E_{\mu,f,k}(u_n) \to E_{\mu,f,k}(u) + \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\#\left(G/G^i\right)}{k\left(y^i\right)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^\infty_{0,0,1}\left(\widehat{u}_0^i\right) + \sum_{j=1}^{l} E^\infty_{\mu_0,0,1}\left(\widetilde{u}_\mu^j\right)$,

$n \to \infty$.

2.4.2. Existencia de soluciones $\Gamma-invariantes$

Consideremos el problema

$$\left(P^\Gamma_{\mu,f,k}\right) \begin{cases} -\triangle_p u - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} = f(x)\,|u|^{p-2}u + k(x)\,|u|^{p^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(\gamma x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega, \gamma \in \Gamma \end{cases}$$

donde Γ es un subgrupo cerrado de $O(N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es abierto, suave, acotado y $\Gamma - invariante$, $N \geq p^2$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\mu, f, k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ son continuas y $\Gamma - invariantes$. Queremos obtener resultados de existencia de soluciones positivas y de soluciones que cambian de signo para este problema.

Soluciones positivas $\Gamma - ivariantes$

Consideremos el conjunto

$$M = \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} = \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right\}.$$

Recordemos que M es cerrado. El siguiente corolario del teorema 2.3 describe el comportamiento de las sucesiones $\Gamma - invariantes$ de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ en niveles de energía c cercanos al mínimo.

Corolario 2.4. *Sea (u_n) una sucesión $\Gamma - invariante$ de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ en c.*

a) Si

$$c < \min \left\{ \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}, \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \right\}$$

entonces, (u_n) tiene una subsucesión convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$.

b) Si

$$c = \min \left\{ \left(\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}, \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \right\}$$

entonces, o bien existe una subsucesión de (u_n) convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$, o bien existen sucesiones (y_n) en Ω, (r_n) en $(0, +\infty)$ y (R_n^j) en $(0, +\infty)$, $1 \leq j \leq l$ con las siguientes propiedades:

b.1) $y_n \longrightarrow y_0$ en M cuando $n \longrightarrow \infty$ y $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0}$ $\forall n \geq 1$,

b.2) $(r_n)^{-1} dist(y_n, \partial\Omega) \longrightarrow \infty$ y $(r_n)^{-1} |\gamma y_n - \gamma' y_n| \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para toda $[\gamma] \neq \left[\gamma'\right] \in \Gamma / \Gamma_{y_0}$,

b.3)

$$\left\| u_n - \sum_{[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_{y_0}} r_n^{\frac{p-N}{p}} k(y_0)^{\frac{p-N}{p^2}} \widehat{U}\left(r_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n) \right) + \sum_{j=1}^{l} (R_n^j)^{\frac{p-N}{p}} \widetilde{U}_\mu \left(\frac{x}{R_n^j} \right) \right\| \longrightarrow 0$$

en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donde $\widehat{U}$ es, salvo signo, el instantón

$$U(x) = C(N) \frac{1}{\left(1 + |x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}$$

y $\widetilde{U}_\mu$ es solución de estado base del problema $\left(P_{\mu_0,0,1}^{\infty}\right)$.

Demostración. Para probar *a)* aplicaremos el teorema 2.3 con $G = \Gamma$ y $\tau \equiv 1$. Si $\widehat{u}_0$ es una solución no trivial de $(P^{\infty}_{0,0,1})$ y $\widetilde{u}_{\mu_0}$ una solución no trivial de $(P^{\infty}_{\mu_0,0,1})$ entonces

$$E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{u}_0) \geq \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}, \quad E^{\infty}_{\mu_0,0,1}(\widetilde{u}_{\mu_0}) \geq \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}$$

de *(vi)* del teorema 2.3 se tiene

$$c = E_{\mu,f,k}(u) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\#\left(\Gamma/\Gamma_i\right)}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{u}_0) + \sum_{j=1}^{l} E^{\infty}_{\mu_0,0,1}(\widetilde{u}^{j}_{\mu_0})$$

entonces para $m \geq 1,\ l \geq 1$ y dado que $m(\mu, f, k) \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
c &\geq \sum_{i=1}^{m} \frac{\#\left(\Gamma/\Gamma_i\right)}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} + \sum_{j=1}^{l} \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\#\Gamma y_i}{k(y_i)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} + \sum_{j=1}^{l} \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} + \sum_{j=1}^{l} \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \\
&= \frac{m}{N} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}} + \frac{l}{N} S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}} \\
&\geq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} + \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}.
\end{aligned}$$

En consecuencia si,

$$c < \min \left\{ \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}, \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \right\}$$

necesariamente $m = 0,\ l = 0$ y la afirmación *(v)* del teorema 2.3 garantiza que (u_n) tiene una subsucesión convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^{\Gamma}$. Ahora probaremos *b)*, si

$$c = \min \left\{ \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}, \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \right\}$$

y (u_n) no tiene ninguna subsucesión convergente, entonces el teorema 2.3 garantiza la existencia de un subgrupo cerrado Γ_1 de Γ, de sucesiones (y_n) en Ω, (r_n) en $(0, \infty)$, una solución no trivial $\widehat{U}$ del problema $(P^{\infty}_{0,0,1})$, (R^{j}_{n}) en $(0, \infty)$ $1 \leq j \leq l$ y una solución no trivial $\widetilde{U}^{j}_{\mu_0}$ del problema $(P^{\infty}_{\mu_0,0,1})$ tales que: $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_1} =$

Γ_1, $y_n \longrightarrow y_0 \in \overline{\Omega}$, $r_n^{-1}dist(y_n, \partial\Omega) \longrightarrow \infty$, $r_n^{-1}|\gamma y_n - \gamma' y_n| \longrightarrow \infty$ si $[\gamma] \neq \left[\gamma'\right] \in \Gamma/\Gamma_1$,

$$u_n = \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_{y_0}} (r_n)^{\frac{p-N}{p}} k(y_0)^{\frac{p-N}{p^2}} \widehat{U}\left(\gamma^{-1}r_n^{-1}(x-\gamma y_n)\right) + \sum_{j=1}^{l} (R_n^j)^{\frac{p-N}{p}} \widetilde{U}^j_{\mu_0}\left(\frac{x}{R_n^j}\right) + o(1)$$

en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, además;

$$c = E_{\mu,f,k}(u) + \left(\frac{\#(\Gamma/\Gamma_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) + \sum_{j=1}^{l} E^{\infty}_{\mu_0,0,1}(\widetilde{U}^j_{\mu_0})$$

entonces

$$\begin{aligned} c &\geq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma} E_{\mu,f,k}(u) + \left(\frac{\#\Gamma y_n}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) + \sum_{j=1}^{l} \frac{S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} \\ &\geq \left(\frac{\#\Gamma y_n}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) \\ &\geq \left(\min_{x\in\widehat{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) \end{aligned}$$

Tenemos dos casos:

Caso I

Si $\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}} \leq S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}$, entonces

$$c \geq \left(\frac{\#\Gamma y_n}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) \geq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) \geq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N} = c$$

así

$$\left(\frac{\#\Gamma y_n}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}$$

como $E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) \geq \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}$, entonces de ésta última igualdad se tiene que $y_n, y_0 \in M$, $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_1}$ y $E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) = \frac{S_{0,p}^{\frac{N}{p}}}{N}$, como los instantones salvo signo, son las únicas soluciones no triviales de energía mínima de $(P^{\infty}_{0,0,1})$ reemplazando de ser necesario la sucesión (r_n) por un múltiplo positivo de ella, obtenemos que $\widehat{U} = \pm U$. Observemos que, como $\widehat{U}$ es radialmente simétrica,

$$\widehat{U}(\gamma^{-1}r_n^{-1}(x-\gamma y_n)) = \widehat{U}(r_n^{-1}(x-\gamma y_n)).$$

Caso II

Si

$$\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}} \leq S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}$$

entonces

$$\begin{aligned} c &\geq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{U}) + \sum_{j=1}^{l} E^{\infty}_{\mu_0,0,1}(\widetilde{U}^j_\mu) \\ &\geq \frac{S^{\frac{N}{p}}_{\mu_0,p}}{N} \\ &= c, \end{aligned}$$

así

$$\sum_{j=1}^{l} E^{\infty}_{\mu_0,0,1}(\widetilde{U}^j_\mu) = \frac{S^{\frac{N}{p}}_{\mu_0,p}}{N},$$

en consecuencia $j = 1$ y por tanto $\widetilde{U}^1_\mu = U_{\mu_0}$. □

Probaremos ahora el resultado de existencia de soluciones positivas.

Teorema 2.4. *Si $N \geq p^2$, las funciones μ, f, k satisfacen* ***(K1), (K2), (M1), (F1)*** *y* ***(F2)****, $M \cap \Omega \neq \emptyset$ y $\ell^\Gamma_k \leq S^{\frac{N}{p}}_{\mu_0,p}$ entonces el problema $(P^\Gamma_{\mu,f,k})$ tiene almenos una solución positiva que satisface*

$$\frac{1}{N} [\![u]\!]^p_{\mu,f} = m^\Gamma(\mu, f, k).$$

Demostración. Sea (u_n) una sucesión minimizante para $E_{\mu,f,k}$ en $N^\Gamma_{\mu,f,k}$, es decir, $u_n \in N^\Gamma_{\mu,f,k}$ y

$$E_{\mu,f,k}(u_n) \longrightarrow \inf_{N^\Gamma_{\mu,f,k}} E_{\mu,f,k} =: m^\Gamma(\mu, f, k).$$

Por el principio variacional de Ekeland podemos suponer que (u_n) es una sucesión $\Gamma-$invariante de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$. En la proposición 2.8 probamos que

$$m^\Gamma(\mu, f, k) < \frac{1}{N} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S^{\frac{N}{p}}_{0,p}$$

y por el corolario anterior se garantiza que una subsucesión de (u_n) converge fuertemente a $u_0 \in N^\Gamma_{\mu,f,k}$ y como $E_{\mu,f,k}$ es de clase C^1, se tiene que u_0 es un mínimo de $E_{\mu,f,k}$ en $N_{\mu,f,k}$. Dado que $|u_0| \in N^\Gamma_{\mu,f,k}$ y $E_{\mu,f,k}(|u_0|) = E_{\mu,f,k}(u_0)$, se tiene que $|u_0|$ es también un mínimo de $E_{\mu,f,k}$ en $N^\Gamma_{\mu,f,k}$, es decir, $|u_0|$ es una solución positiva de $(P^\Gamma_{\mu,f,k})$. □

Soluciones τ-equivariantes

Supondremos ahora que Γ es el nucleo de un epimorfismo continuo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ y que Ω, μ, f y k son G-invariantes. El siguiente corolario del teorema 2.3 describe el comportamiento de las sucesiones τ-invariantes de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ en niveles de energía c cercanos al mínimo.
De nuevo consideremos el conjunto

$$M = \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} = \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right\}$$

Corolario 2.5. *Supongamos que $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo con $ker\tau = \Gamma$. Sea (u_n) una sucesión τ-equivariante de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ en c.*

a) Si

$$c < \min\left\{\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)\frac{2}{N}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \frac{2}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}$$

entonces, (u_n) tiene una subsucesión convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$.

b) Si

$$c = \min\left\{\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)\frac{2}{N}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \frac{2}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}$$

entonces, o bien existe una subsucesión de (u_n) convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$, o bien existen sucesiones (y_n) en Ω, (r_n) en $(0,+\infty)$ y (R_n^j) en $(0,+\infty)$, $1 \leq j \leq l$ con las siguientes propiedades:

b.1) $y_n \longrightarrow y_0$ en M cuando $n \longrightarrow \infty$ y $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0}$ $\forall n \geq 1$

b.2) $(r_n)^{-1}dist(y_n, \partial\Omega) \longrightarrow \infty$ y $(r_n)^{-1}|gy_n - g'y_n| \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$ para toda $[g] \neq \left[g'\right] \in G/\Gamma_{y_0}$.

b.3)

$$\left\| u_n - \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_{y_0}} r_n^{\frac{p-N}{p}} k(y_0)^{\frac{p-N}{p^2}} \tau(g)\widehat{U}\left(r_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n)\right) + \sum_{j=1}^{l} (R_n^j)^{\frac{p-N}{p}} \widetilde{U}_\mu\left(\frac{x}{R_n^j}\right)\right\| \longrightarrow 0$$

en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donde $\widehat{U}$ es, salvo signo, el instantón

$$U(x) = C(N)\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}$$

y $\widetilde{U}_\mu$ es solución de estado base del problema $\left(P_{\mu_0,0,1}^{\infty}\right)$

Demostración. Supongamos que ninguna subsucesión de (u_n) converge y que

$$c \leq \min\left\{\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)\frac{2}{N}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \frac{2}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}. \tag{2.23}$$

Mostraremos entonces que

$$c = \min\left\{\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)\frac{2}{N}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \frac{2}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}$$

y que existen sucesiones (y_n) en M y $(r_n), (R_n^j)$ en $(0,+\infty)$ para $1 \leq j \leq l$ que satisface ***(b.1)-(b.3)***. Esto prueba el resultado.
Como en el Corolario 2.4 tenemos dos casos;
Caso I

Supongamos $\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}} \leq S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}$ entonces $c = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \dfrac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$. Con las hipótesis anteriores, el Teorema 2.3 asegura que existen; un subgrupo cerrado G_1 de G, sucesiones (y_n) en Ω, (r_n) en $(0,\infty)$, una solución no trivial $\widehat{u}_0$ del problema $(P_{0,0,1}^{\infty})$ y (R_n^j) en $(0,\infty)$, una solución no trivial $\widetilde{u}_{\mu_0}^j$ del problema $(P_{\mu_0,0,1}^{\infty})$ para todo $1 \leq j \leq l$ tales que:
$y_n \longrightarrow y_0$ en $\overline{\Omega}$, $G_{y_n} = G_1$, $r_n^{-1} dist(y_n, \partial\Omega) \longrightarrow \infty$, $r_n^{-1}|gy_n - g^{'}y_n| \longrightarrow \infty$ si $[g] \neq \left[g^{'}\right] \in G/G_1$, $\widehat{u}_0$ es $\tau \mid_{G_1}$-equivariante, y

$$\begin{aligned} c &\geq \left(\frac{\#(G/G_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) + \sum_{j=1}^{l} E_{\mu_0,0,1}^{\infty}(\widetilde{u}_{\mu_0}^j) \\ &\geq \left(\frac{\#(G/G_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Supongamos que $\tau \mid_{G_1}: G_1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo y tomemos $g_\tau \in G_1$ con $\tau(g_\tau) = -1$. Entonces $\widehat{u}_0$ satisface $\widehat{u}_0(g_\tau z) = \tau(g_\tau)\widehat{u}_0(z) = -\widehat{u}_0(z)$ ó $\widehat{u}_0(z) = -\widehat{u}_0(g_\tau z)$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$ es decir, $\widehat{u}_0$ cambia de signo, $\widehat{u}_0^-(z) = -\max\{-\widehat{u}_0(z), 0\} = -\widehat{u}_0^+(g_\tau z)$ y, por tanto, $\|\widehat{u}_0^{\pm}\|^p = |\widehat{u}_0^{\pm}|_{p^*}^{p^*}$. En consecuencia, $\widehat{u}_0^{\pm}$ está en la variedad de Nehari

$$N_{0,0,1}^{\infty} = \left\{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) : u \neq 0, \|u\|^p = |u|_{p^*}^{p^*}\right\}$$

asociada al funcional $E_{0,0,1}^{\infty}$ y cumple

$$E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) = E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0^+) + E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0^-) = 2E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0^+) \geq \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

Si $E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) = \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$ entonces $E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0^+) = \frac{1}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$ y $\widehat{u}_0^+$ es una solución de $(P_{0,0,1}^{\infty})$, lo cual es imposible ya que $\widehat{u}_0^+$ se anula en un abierto de $\mathbb{R}^N$. En consecuencia, $E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) > \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$ y (2.24) implica que

$$\begin{aligned} c &\geq \left(\frac{\#(G/G_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) \\ &= \frac{\#G_{y_0}}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}} E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) \\ &\geq \frac{\#\Gamma_{y_0}}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}} E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) \\ &\geq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) E_{0,0,1}^{\infty}(\widehat{u}_0) \\ &> \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción a la suposición del inicio.
Por tanto, $\tau \mid_{G_1} \equiv 1$, es decir, $G_0 = G_1 = G_{y_n} \subset \Gamma$ y, como $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ es un epimorfismo, se tiene que

$\#(G/G_1) \cong 2\#(\Gamma/G_1)$. De (2.24) se tiene

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{\#(G/G_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}} E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{u}_0) \\ &= \frac{2\#(\Gamma/G_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}} E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{u}_0) \\ &\geq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}} \end{aligned}$$

con lo cual se tiene

$$\frac{2\#(\Gamma/G_1)}{k(y_0)^{\frac{N-p}{p}}} E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{u}_0) = c = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$$

En consecuencia, $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0} = G_1$, $y_n, y_0 \in M$ y $E^{\infty}_{0,0,1}(\widehat{u}_0) = \frac{1}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$, como los instantones son, salvo signo, las únicas soluciones no triviales de energía mínima de $(P^{\infty}_{0,0,1})$, de la propiedad ***(v)*** del teorema 2.3 se sigue que, reemplazando a la sucesión (r_n) de ser necesario por un múltiplo positivo de ella,

$$u_n = \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_{y_0}} r_n^{\frac{p-N}{p}} k(y_0)^{\frac{p-N}{p^2}} \tau(g) \widehat{U}\left(r_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n) \right) + \sum_{j=1}^{l} (R_n^j)^{\frac{p-N}{p}} \widetilde{U}_{\mu} \left(\frac{x}{R_n^j} \right),$$

donde $\widehat{U} = \pm U$ y $\widetilde{U}_{\mu}$ es solución de estado base del problema $(P^{\infty}_{\mu_0,0,1})$. El caso II es análogo al establecido en el corolario 2.4 . □

Como consecuencia del resultado anterior obtenemos la existencia de soluciones $\tau-$equivariantes.

Teorema 2.5. *Sea $N \geq p^2$. Supongamos que las funciones μ, f, k satisfacen **(K1)**, **(K2)**, **(M1)**, **(F1)** y **(F2)**. Si Γ es el nucleo de un epimorfismo continuo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ definido en un subgrupo cerrado G de $O(N)$ tal que Ω, μ, f y k son $G-$invariantes y $Gy \neq \Gamma y$ para algún $y \in M \cap \Omega$ y $\ell_k^{\Gamma} \leq S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}$ entonces el problema $(P^{\Gamma}_{\mu,f,k})$ tiene al menos un par de soluciones $\tau-$equivariantes $\pm u$ que satisfacen*

$$\frac{1}{N} [\![u]\!]^p_{\mu,f} = m^{\tau}(\mu, f, k).$$

Demostración. Como $Gy \neq \Gamma y$ para algún $y \in M \cap \Omega$, tenemos que $M^-_{\tau,s} \neq \emptyset$ para $s > 0$ suficientemente pequeña y el corolario 2.3 asegura que

$$m^{\tau}(\mu, f, k) < \frac{2}{N} \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

Sea (u_n) una sucesión minimizante para $E_{\mu,f,k}$ en $N^{\tau}_{\mu,f,k}$, es decir, $u_n \in N^{\tau}_{\mu,f,k}$ y $E_{\mu,f,k}(u_n) \longrightarrow \inf_{N_{\mu,f,k}} E_{\mu,f,k} =: m^{\tau}(\mu, f, k)$.

Por el principio variacional de Ekeland podemos suponer que (u_n) es una sucesión $\tau-$equivariante de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$. El corolario anterior garantiza que una subsucesión de (u_n) converge fuertemente a $u_0 \in N^{\tau}_{\mu,f,k}$ y, como $E_{\mu,f,k}$ es de clase C^1, se tiene que u_0 es un mínimo de $E_{\mu,f,k}$ en $N^{\tau}_{\mu,f,k}$, es decir, u_0 es una solución no trivial de $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$. □

Observación 2.3. *Los corolarios 2.4 y 2.5 pueden se escritos como en el siguiente resultado.*

Corolario 2.6. *Sea (u_n) una sucesión $\Gamma -$ invariante de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$ en c,*

a) Si

$$c < \min\left\{\left(\frac{\#\left(G/\Gamma\right)}{N}\right)\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \frac{\#\left(G/\Gamma\right)}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}$$

entonces (u_n) tiene una subsucesión convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$.

b) Si

$$c = \min\left\{\left(\frac{\#\left(G/\Gamma\right)}{N}\right)\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \frac{\#\left(G/\Gamma\right)}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}$$

entonces, o bien existe una subsucesión de (u_n) convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma$, o bien existen sucesiones (y_n) en Ω y (r_n) en $(0,+\infty)$ con las siguientes propiedades

b.1) $y_n \longrightarrow y_0$ *en* M *cuando* $n \longrightarrow \infty$ *y* $\Gamma_{y_n} = \Gamma_{y_0}$ $\forall n \geq 1$

b.2) $(r_n)^{-1}dist(y_n,\partial\Omega) \longrightarrow \infty$ *y* $(r_n)^{-1}|\gamma y_n - \gamma' y_n| \longrightarrow \infty$ *cuando* $n \longrightarrow \infty$ *para toda* $[\gamma] \neq \left[\gamma'\right] \in \Gamma/\Gamma_{y_0}$.

b.3)

$$\left\| u_n - \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_{y_0}} r_n^{\frac{p-N}{p}} k(y_0)^{\frac{p-N}{p^2}}\tau(g)\widehat{U}\left(r_n^{-1}(\cdot - \gamma y_n)\right) + \sum_{j=1}^{l}(R_n^j)^{\frac{p-N}{p}}\widetilde{U}_\mu\left(\frac{x}{R_n^j}\right)\right\| \longrightarrow 0$$

en $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donde $\widehat{U}$ es, salvo signo, el instantón

$$U(x) = C(N)\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}}$$

y $\widetilde{U}_\mu$ es solución de estado base del problema $\left(P_{\mu_0,0,1}^{\infty}\right)$

La prueba del este resultado es análoga a los corolarios anteriores. Una consecuencia de este resultado es

Corolario 2.7. *$E_{\mu,f,k}$ satisface $(PS)_c^\tau$ para cualquier valor*

$$c < \min\left\{\frac{\#\left(G/\Gamma\right)}{N}\ell_k^\Gamma, \frac{\#\left(G/\Gamma\right)}{N}S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}\right\}.$$

2.5. Multiplicidad de soluciones Γ-ivariantes

2.5.1. Teoría equivariante de Lusternik-Schnirelmann

Sea X un espacio topológico. Una involución en X es una función continua $\tau_X : X \longrightarrow X$ que cumple $\tau_X \circ \tau_X = id_X$. Cada involución define una acción del grupo $\mathbb{Z}/2$ en X y viceversa. La involución $\tau_X = id_X$ corresponde a la acción trivial. Consideremos la involución inducida por el homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ cuyo nucleo es $\Gamma = ker\tau$ en el espacio de órbitas $\mathbb{R}^N/\Gamma$, definido como sigue

$$\tau : \mathbb{R}^N/\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^N/\Gamma, \quad \tau(\Gamma y) = \Gamma(g_\tau y)$$

donde $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$. Consideremos también la involución antípoda en $N^\tau_{\mu,f}$ dada por $u \longmapsto -u$.
Sean X, Y espacios topológicos con involuciones $\tau_X : X \longrightarrow X$ y $\tau_Y : Y \longrightarrow Y$ respectivamente. Diremos que una función continua $f : X \longrightarrow Y$ es $\mathbb{Z}/2-$ *equivariante* si $\tau_Y \circ f = f \circ \tau_X$. Dos funciones $\mathbb{Z}/2-$ *equivariantes* $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ son $\mathbb{Z}/2-$ *homotópicas* si existe una homotopía $\theta : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que $\theta(x,0) = f_0(x)$, $\theta(x,1) = f_1(x)$ y $\theta(\tau_X x, t) = \tau_Y \theta(x,t)$ para todo $x \in X$, $t \in [0,1]$. Un subconjunto A de X es $\mathbb{Z}/2-$ *invariante* si $\tau_X a \in A$ para toda $a \in A$.

Definición 2.5. *La $\mathbb{Z}/2$-categoría de una función $\mathbb{Z}/2-$ equivariante $f : X \longrightarrow Y$ es el mínimo entero*

$$k := \mathbb{Z}/2 - cat(f)$$

tal que existen k subconjuntos abiertos $\mathbb{Z}/2-$ invariantes $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de X que satisfacen:

i) $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k$.

ii) Para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ existe un punto $y_i \in Y$ y una función $\mathbb{Z}/2-$ equivariante,

$$\alpha_i : X_i \longrightarrow \{y_i, \tau_Y y_i\}$$

tal que la restricción $f|_{X_i} : X_i \longrightarrow Y$ es $\mathbb{Z}/2-$ homotópica a α_i.

Si no existe tal cubierta definimos $\mathbb{Z}/2 - cat(f) = \infty$.

Si A es un subconjunto $\mathbb{Z}/2$-invariante de X y $i : A \hookrightarrow X$ es la inclusión, denotamos

$$\mathbb{Z}/2 - cat_X(A) := \mathbb{Z}/2 - cat(i) \text{ y } \mathbb{Z}/2 - cat(X) := \mathbb{Z}/2 - cat_X(X).$$

Si $\tau_X = id_X$ entonces

$$\mathbb{Z}/2 - cat_X(A) := cat_X(A) \text{ y } \mathbb{Z}/2 - cat(X) := cat(X).$$

Lema 2.7. *a) Si $f : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$ son $\mathbb{Z}/2-$equivariantes, se cumple,*

$$\mathbb{Z}/2 - cat(h \circ f) \leq \min\{\mathbb{Z}/2 - cat(f), \mathbb{Z}/2 - cat(h)\}$$

en particular, $\mathbb{Z}/2 - cat(f) \leq \mathbb{Z}/2 - cat(Y)$.

b) Si $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ son $\mathbb{Z}/2-$homotópicas, entonces

$$\mathbb{Z}/2 - cat(f_0) = \mathbb{Z}/2 - cat(f_1).$$

Denotaremos por $\widehat{X}$ al espacio de $\mathbb{Z}/2-$órbitas de X y por $q_X : X \longrightarrow \widehat{X}$ a la correspondiente aplicación cociente. Si $f : Y \longrightarrow X$ es una función $\mathbb{Z}/2-$equivariante, denotaremos por $\widehat{f} : \widehat{Y} \longrightarrow \widehat{X}$ a la función inducida por f. Decimos que la acción $\mathbb{Z}/2$ en X dada por la involución τ_X es libre, si $\tau_X x \neq x$ para toda $x \in X$.

Lema 2.8. *Supongamos que la acción de $\mathbb{Z}/2$ en X es libre. Entonces se cumple lo siguiente:*

a) Para toda función $\mathbb{Z}/2-$equivariante $f : Y \longrightarrow X$ se cumple que $\mathbb{Z}/2 - cat(f) = cat(\widehat{f})$.

b) Si existen funciones continuas $f : Y \longrightarrow X$ y $h : X \longrightarrow Z$ tales que h es $\mathbb{Z}/2-$invariante, es decir, $h(\tau_X x) = h(x)$ para toda $x \in X$ entonces

$$cat(h \circ f) \leq \mathbb{Z}/2 - cat(X)$$

La categoría equivariante de Lusternik-Schnirelmann proporciona una cota inferior para el número de pares de puntos críticos de un funcional par en una variedad de Banach.
Recordemos que un funcional $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ en c si toda sucesión (u_m) en M tal que

$$\phi(u_m) \longrightarrow c \ \text{ y } \ D\phi(u_m) \longrightarrow 0$$

contiene una subsucesión convergente. Denotamos

$$\phi^d := \{u \in M : \phi(u) \leq d\}.$$

Una demostración del siguiente resultado clásico se encuentra en [14].

Teorema 2.6. *Sea M una subvariedad de clase C^2 de un espacio de Banach completo que es simétrico respecto al origen (es decir, $u \in M \Leftrightarrow -u \in M$). Además $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional par de clase C^1 acotado inferiormente sobre M y que satisface la condición $(PS)_c$ para toda $c \leq d$. Entonces el funcional ϕ tiene al menos $\mathbb{Z}/2 - cat(\phi^d)$ pares de puntos críticos $\pm u$ con valores críticos $\phi(\pm u) \leq d$.*

2.5.2. La propiedad de Palais-Smale en la variedad de Nehari

El corolario 2.5 garantiza que, si todas las $\Gamma-$órbitas de Ω son infinitas, entonces $E_{\mu,f,k} : W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface $(PS)_c^\tau$ para todo homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ y todo $c \in \mathbb{R}$. En general para poder aplicar el teorema de Lusternik-Schnirelmann requerimos verificar que la restricción de $E_{\mu,f,k}$ a la variedad de Nehari $N^\tau_{\mu,f,k}$ satisface $(PS)_c^\tau$.
Sea $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ un homomorfismo continuo con $\Gamma = ker\tau$. Consideremos la restricción del funcional

$$E_{\mu,f,k} : W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ E_{\mu,f,k}(u) = \frac{1}{p} \,[\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f} - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*}_{k,p^*}$$

a la variedad de Nehari

$$N_{\mu,f,k} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \setminus \{0\} : [\![\, u \,]\!]^p_{\mu,f} = |u|^{p^*}_{k,p^*} \right\}$$

La derivada $DE_{\mu,f,k}\,|_{N^\tau_{\mu,f,k}}(u)$ de la restricción de $E_{\mu,f,k}$ a $N^\tau_{\mu,f,k}$ es la proyección ortogonal de la derivada $DE_{\mu,f,k}$ sobre el espacio tangente a $N_{\mu,f,k}$ en u,

$$\begin{aligned} T_u N^\tau_{\mu,f,k} \quad &= \quad \{v \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau : p \int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + \mu(x) \frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p} \\ &\qquad -f(x)|u|^{p-2}uv \Big) = p^* \int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv \} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Proposición 2.9. *Sea (u_n) una sucesión en $N^{\tau}_{\mu,f,k}$ tal que $E_{\mu,f,k}(u_n) \longrightarrow c$. Entonces*

$$D\left(E_{\mu,f,k}\mid_{N^{\tau}_{\mu,f,k}}\right)(u_n) \longrightarrow 0 \text{ si y solo si } DE_{\mu,f,k}(u_n) \longrightarrow 0.$$

Es decir, (u_n) es una sucesión $\tau-$equivariante de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}\mid_{N^{\tau}_{\mu,f,k}}$ si y solo si es una sucesión $\tau-$equivariante de Palais-Smale para $E_{\mu,f,k}$.

2.5.3. Función bariórbita

En lo siguiente supondremos que la condición $\ell_k^{\Gamma} \leq S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}$ se cumple y asumamos la siguiente condición de no existencia.

(NE) El ínfimo de $E_{0,0,k}$ no se alcanza en $N^{\Gamma}_{0,0,k}$. Con estas condiciones, el corolario 2.7 y el lema 2.6 implican que

$$\begin{aligned} m^{\Gamma}(0,0,k) &= \inf_{N^{\Gamma}_{0,0,k}} E_{0,0,k} \\ &= \frac{\ell_k^{\Gamma}}{N} \\ &= \frac{1}{N}\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) S_{0,p}^{\frac{N}{p}}. \end{aligned}$$

Sea

$$M = \left\{ y \in \overline{\Omega} : \frac{\#\Gamma y}{k(y)^{\frac{N-p}{p}}} = \min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right\}.$$

Para todo $y \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \Gamma$, los subgrupos de isotropía satisface $\Gamma_{\gamma y} = \gamma \Gamma_y \gamma^{-1}$. Por tanto el conjunto de subgrupos de isotropía de subconjuntos $\Gamma - invariantes$ consta de clases conjugadas.

Escojamos $\Gamma_i \subset \Gamma$, $i = 1, 2, ..., m$ uno en cada clase conjugada de un subgrupo de isotropía de M.

Denotemos $V^i = \left\{ z \in \mathbb{R}^N : \gamma z = z \forall \gamma \in \Gamma_i \right\}$ al espacio de puntos fijos de $\mathbb{R}^N$ bajo la acción de Γ_i. Sea

$$M^i = \{ y \in M : \Gamma_y = \Gamma_i \},$$

notemos que M es la unión de subconjuntos cerrados ajenos,

$$M = \Gamma M^1 \cup \Gamma M^2 \cup \cdots \cup \Gamma M^m, \qquad \Gamma M^i \cap \Gamma M^j = \phi, \text{ si } i \neq j$$

donde $\Gamma M^i = \left\{ \gamma y : \gamma \in \Gamma, y \in M^i \right\} = \{ y \in M : (\Gamma_y) = (\Gamma_i) \}$.

Por definición de M se sigue que la función k es constante sobre cada ΓM^i. Entonces podemos definir $k_i = k\left(\Gamma M^i\right) \in \mathbb{R}$.

De la compacidad de M podemos fijar $\delta_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |y - \gamma y| &\geq 3\delta_0 \quad \forall y \in M, \gamma \in \Gamma \text{ con } \gamma y \neq y, \\ dist\left(\Gamma M^i, \Gamma M^j\right) &\geq 3\delta_0 \quad \forall i, j = 1, 2, ..., m \text{ con } i \neq j \end{aligned}$$

y tal que el subgrupo de isotropía de cada punto en

$$M^i_{\delta_0} = \left\{ z \in V^i : dist\left(z, M^i\right) \leq \delta_0 \right\}$$

es precisamente Γ_i.

Definamos

$$W_{\varepsilon,z} = \sum_{[\gamma]\in\frac{\Gamma}{\Gamma_i}} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma z} \quad \text{si } z \in M^i_{\delta_0},$$

donde $U_{\varepsilon,y} = U_0^{\varepsilon,y}$ es el instantón de Aubin y Talenti dado en la ecuación (2.20).

Para cada $\delta \in (0, \delta_0)$ definimos

$$\begin{aligned}
M^i_\delta &= \left\{ z \in V^i : dist\left(z, M^i\right) \leq \delta \right\}, \\
M_\delta &= M^1_\delta \cup \cdots \cup M^m_\delta, \\
B_\delta &= \left\{ (\varepsilon, z) : \varepsilon \in (0, \delta), z \in M_\delta \right\}, \\
\theta_\delta &= \left\{ \pm W_{\varepsilon,z} : (\varepsilon, z) \in B_\delta \right\}, \quad \theta_0 = \theta_{\delta_0}.
\end{aligned}$$

Con esta notación y antes de definir la función que nos interesa, vamos a probar una serie de lemas que nos ayudaran a entender la naturaleza de las funciones $W_{\varepsilon,z}$.

Lema 2.9. *Dados $\delta \in (0, \delta_0)$ y $\rho > 0$ existe $\eta > m^\Gamma(0, 0, k)$ con la siguiente propiedad. Para cada $u \in N^\Gamma_{0,0,k}$ con $E_{0,0,k}(u) \leq \eta$ existe $W \in \theta_\delta$ tal que*

$$\|u - W\| < \rho$$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que existe una sucesión $\{u_n\} \in N^\Gamma_{0,0,k}$ con $E_{0,0,k}(u_n) \leq m^\Gamma(0, 0, k) + \frac{1}{n}$ tal que

$$\inf_{W\in\theta_\delta} \|u_n - W\| \geq \rho \tag{2.26}$$

Por el principio variacional de Ekeland podemos suponer que $\{u_n\}$ es una sucesión de Palais-Smale $\Gamma-$ *invariante*. Como $E_{0,0,k}$ no alcanza su ínfimo en $N^\Gamma_{0,0,k}$, la sucesión $\{u_n\}$ no contiene una subsucesión convergente, lo cual es una contradicción. □

Lema 2.10. i) $\|W_{\varepsilon,z}\|^p \to Nm^\Gamma(0, 0, k)$ *si* $\varepsilon \to 0$ *uniformemente en* $z \in M_{\delta_0}$.

ii) $\|W_{\varepsilon,z} + W_{\varepsilon',z'}\|^p \geq 2Nm^\Gamma(0, 0, k)$ *para toda* $z, z' \in M_{\delta_0}, \varepsilon, \varepsilon' > 0$.

Demostración. Sea $W_{\varepsilon,z} = \sum_{[\gamma]\in\frac{\Gamma}{\Gamma_i}} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma z}$ donde $z \in M^i_{\delta_0}$ y supongamos que $\#\frac{\Gamma}{\Gamma_i} = 2$. Sean $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \frac{\Gamma}{\Gamma_i}$ con $[\gamma_1] \neq [\gamma_2]$ entonces $W_{\varepsilon,z} = k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma_1 z} + k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma_2 z}$.

Calculemos $\|W_{\varepsilon,z}\|^p$;

$$\begin{aligned}
\|W_{\varepsilon,z}\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma_1 z}\right) + \nabla\left(k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma_2 z}\right)|^p \\
&\leq k_i^{\frac{p-N}{p}}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^p\right] \\
&+ k_i^{\frac{p-N}{p}} p \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}\cdot\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}\left[|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} + |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2}\right] \\
&+ k_i^{\frac{p-N}{p}} C_p\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-1}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z} + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-1}\right].
\end{aligned}$$

De igual forma se obtiene la otra desigualdad.

$$\begin{aligned}
\|W_{\varepsilon,z}\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma_1 z}\right) + \nabla\left(k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma_2 z}\right)|^p \\
&\geq k_i^{\frac{p-N}{p}}\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^p\right] \\
&+ k_i^{\frac{p-N}{p}} p \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}\cdot\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}\left[|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} + |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2}\right] \\
&- k_i^{\frac{p-N}{p}} C_p\left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-1}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z} + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-1}\right].
\end{aligned}$$

Notemos que $U_{\varepsilon,y}(x) = \varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp*}} U\left(\frac{x-y}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)$ donde

$$U(x) = U_{1,0}(x) = C(N)\frac{1}{\left(1+|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N-p}{p}}},$$

en efecto

$$\begin{aligned}
U_{\varepsilon,y}(x) &= C(N)\frac{\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}}}{(\varepsilon+|x-y|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} \\
&= C(N)\frac{\varepsilon^{\frac{N-p}{p^2}}}{\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}(1+\frac{|x-y|^{\frac{p}{p-1}}}{\varepsilon})^{\frac{N-p}{p}}} \\
&= C(N)\frac{\varepsilon^{\frac{(N-p)(1-p)}{p^2}}}{(1+\left|\frac{x-y}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} \\
&= \varepsilon^{\frac{(N-p)(1-p)}{p^2}}\frac{C(N)}{(1+\left|\frac{x-y}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} \\
&= \varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp*}}\frac{C(N)}{(1+\left|\frac{x-y}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}})^{\frac{N-p}{p}}} \\
&= \varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp*}}U\left(\frac{x-y}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right).
\end{aligned}$$

Analicemos la siguiente integral

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|^{p-1}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\left(\varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp*}}U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)|^{p-1}\nabla\left(\varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp*}}U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)dx \\
&= \varepsilon^{-\frac{(p-1)(N+p*)}{p*}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|^{p-1}\nabla U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dx \\
&= \varepsilon^{-\frac{(N)(p-1)}{p}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|^{p-1}\nabla U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y=\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}$ se tiene:

$$\varepsilon^{-\frac{N(p-1)}{p}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|^{p-1}\nabla U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}|\nabla U(y)|^{p-1}\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dy.$$

Notemos que

$$\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right) = \frac{-\left(\frac{N-p}{p-1}\right)C(N)\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{-\frac{p-2}{p-1}}\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)}{\left(1+\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N}{p}}}.$$

Calculemos $\lim_{\varepsilon\to 0}\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)$. Basta calcular el límite de sus componentes

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{-\frac{p-2}{p-1}}\left(y_k+\frac{\gamma_1 z_k-\gamma_2 z_k}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)}{\left(1+\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N}{p}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{-\frac{p-2}{p-1}}\left(y_k+\frac{\gamma_1 z_k-\gamma_2 z_k}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)}{\left(1+\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{N}{p}}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i+\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)^2\right)^{-\frac{p-2}{2(p-1)}}\left(\frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}y_k+(\gamma_1 z_k-\gamma_2 z_k)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)}{\left(1+\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i+\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)^2\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{\frac{N}{p}}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i^2+2y_i\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}+\left(\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)^2\right)\right)^{-\frac{p-2}{2(p-1)}}\left(\frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}y_k+(\gamma_1 z_k-\gamma_2 z_k)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)}{\left(1+\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i^2+2y_i\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}+\left(\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)^2\right)\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{\frac{N}{p}}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(\sum_{i=1}^N\frac{1}{\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}}\left(y_i^2\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}+2y_i\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)+(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)^2\right)\right)^{-\frac{p-2}{2(p-1)}}\left(\frac{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}y_k+(\gamma_1 z_k-\gamma_2 z_k)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)}{\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i^2\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}+2y_i\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)+(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)^2\right)\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{\frac{N}{p}}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{\frac{N-1}{p}}\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i^2\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}+2y_i\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)+(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)^2\right)\right)^{-\frac{p-2}{2(p-1)}}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}y_k+(\gamma_1 z_k-\gamma_2 z_k)\right)}{\left(\varepsilon+\left(\sum_{i=1}^N\left(y_i^2\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}+2y_i\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)+(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)^2\right)\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{\frac{N}{p}}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(y)|^{p-1}\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dy=0,$$

por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|^{p-1}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)\,dx=0.$$

De manera análoga para la integral

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)|^{p-1}dx,$$

haciendo el mismo cambio de variable y analizando el siguiente límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right|^{p-1}$$

se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)|^{p-1}dx=0.$$

Ahora analicemos la siguiente integral

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)\cdot\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)\,|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|^{p-2}\,dx\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^N}\nabla\left(\varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp^*}}U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\cdot\nabla\left(\varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp^*}}U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\left|\nabla\left(\varepsilon^{\frac{N(1-p)}{pp^*}}U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\right|^{p-2}dx\\
=\;&\varepsilon^{\frac{2N(1-p)}{pp^*}+\frac{N(1-p)(p-2)}{pp^*}-\frac{2(p-1)}{p}-\frac{(p-1)(p-2)}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\nabla U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\left|\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right|^{p-2}dx\\
=\;&\varepsilon^{-\frac{N(p-1)}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\nabla U\left(\frac{x-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\left|\nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right|^{p-2}dx\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U(y)\cdot\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|\nabla U(y)|^{p-2}\,dy\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(y)|^{p-2}\,\nabla U(y)\cdot\nabla U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dy\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(y)|^{p-2}\,\nabla U(y)\cdot\nabla\left[U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right]dy \qquad (2.27)\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^N}|U(y)|^{p^*-2}\,U(y)U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dy \qquad (2.28)\\
=\;&\int_{\mathbb{R}^N}U(y)^{p^*-1}U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dy, \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

de (2.27) a (2.28) únicamente basta recordar que $U(y)$ es solución del problema límite $\left(P^{\infty}_{0,0,1}\right)$, de (2.28) a (2.29) usamos que $U(y)$ es positiva. Recordemos que:

$$U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)=\frac{C(N)}{\left[1+\left|y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{N-p}{p}}}.$$

Calculemos $\lim_{\varepsilon\to 0} U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} U\left(y+\frac{\gamma_1 z-\gamma_2 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\\
=\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C(N)}{\left[1+\left(\sum_{i=1}^{N}\left(y_i+\frac{\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)^2\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}\right]^{\frac{N-p}{p}}}\\
=\ &\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C(N)\varepsilon^{\frac{N-p}{p}}}{\left[\varepsilon+\left(\sum_{i=1}^{N}\left(y_i^2\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p}}+2y_i\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)+(\gamma_1 z_i-\gamma_2 z_i)^2\right)\right)^{\frac{p}{2(p-1)}}\right]^{\frac{N-p}{p}}}\\
=\ &0
\end{aligned}$$

y como $[\gamma_1]\neq[\gamma_2]$ se tiene $\int_{\mathbb{R}} U(y)^{p*-1}\, U\left(y-\frac{\gamma_2 z-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)dy\to 0$ cuando $\varepsilon\to 0$, por lo cual

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)\cdot\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)\,|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|^{p-2}\,dx=0,$$

de forma análoga se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)\cdot\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)\,|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)|^{p-2}\,dx=0.$$

Además $U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)$ y $U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)$ son soluciones del problema límite $\left(P_{0,0,1}^{\infty}\right)$ y satisfacen

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}(x)|^p dx=S_{0,p}^{\frac{N}{p}}=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}(x)|^p dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\|W_{\varepsilon,z}\|^p &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(k_i^{\frac{p-N}{p}}\left[\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^p+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^p\right]\right)\\
&= k_i^{\frac{p-N}{p}}\left(2S_{0,p}^{\frac{N}{p}}\right)\\
&= \frac{\left(\#\frac{\Gamma}{\Gamma_i}\right)}{k_i^{\frac{N-p}{p}}}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}\\
&= Nm^{\Gamma}(0,0,k).
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\#\frac{\Gamma}{\Gamma_i}=s$. Sea $\frac{\Gamma}{\Gamma_i}=\{[\gamma_1],[\gamma_2],...,[\gamma_s]\}$ donde $[\gamma_r]\neq[\gamma_j], r,j=$

$1, 2, 3, ..., s$ es decir, distintas dos a dos. Mediante algunos cálculos se tiene

$$\begin{aligned}\|W_{\varepsilon,z}\|^p &\leq k_i^{\frac{p-N}{p}}\left[\sum_{[\gamma]}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}|^p+\sum_{[\gamma]\neq[\gamma_1]}\int_{\mathbb{R}^N}U(y)^{p*-1}U\left(y-\frac{\gamma z-\gamma_1 z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right.\\ &+\sum\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(y)||\nabla U\left(y-\frac{\gamma_1 z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|^{p-1}\\ &+\sum\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(y)||\nabla U\left(y-\frac{\gamma_1 z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|^{p-2}|\nabla U\left(y-\frac{\gamma_2 z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|\\ &\vdots\\ &+\sum\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(y)||\nabla U\left(y-\frac{\gamma_1 z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|\cdots|\nabla U\left(y-\frac{\gamma_{s-1} z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|^{p-s}|\nabla U\left(y-\frac{\gamma_s z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)|\end{aligned}$$

donde $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ son representantes de las clases. Cuando $\varepsilon \to 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\|W_{\varepsilon,z}\|^p &\to k_i^{\frac{p-N}{p}}\left[\sum_{[\gamma]\in\frac{\Gamma}{\Gamma_i}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}|^p\right]\\ &= k_i^{\frac{p-N}{p}}\left(sS_{0,p}^{\frac{N}{p}}\right)\\ &= \frac{\left(\#\frac{\Gamma}{\Gamma_i}\right)}{k_i^{\frac{N-p}{p}}}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}\\ &= Nm^{\Gamma}(0,0,k),\end{aligned}$$

esto demuestra i).
Para ii) consideremos

$$W_{\varepsilon,z}=\sum_{[\gamma]\in\frac{\Gamma}{\Gamma_i}}k_i^{\frac{p-N}{p^2}}U_{\varepsilon,\gamma z},\quad z\in M_{\delta_0}^i,$$

$$W_{\varepsilon',z'}=\sum_{[\gamma]\in\frac{\Gamma}{\Gamma_j}}k_j^{\frac{p-N}{p^2}}U_{\varepsilon',\gamma z'},\quad z'\in M_{\delta_0}^j,$$

donde $i, j = 1, 2, 3, ..., m$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \|W_{\varepsilon,z} + W_{\varepsilon',z'}\|^p & = & \int_{\mathbb{R}} |\nabla W_{\varepsilon,z} + \nabla W_{\varepsilon',z'}|^p \\ & \geq & \int_{\mathbb{R}} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^p + \int_{\mathbb{R}} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^p \\ & + & p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-2} \\ & + & p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^{p-2} \\ & - & C_p \int_{\mathbb{R}} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-1} \nabla W_{\varepsilon',z'} \\ & - & C_p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^{p-1}. \end{array}$$

Supongamos nuevamente que $\#\Gamma/\Gamma_i = 2 = \#\Gamma/\Gamma_j$ esto es:

$$W_{\varepsilon,z} = k_i^{\frac{p-N}{p^2}} \left(U_{\varepsilon,\gamma_1 z} + U_{\varepsilon,\gamma_2 z}\right),$$

$$W_{\varepsilon',z'} = k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \left(U_{\varepsilon',\gamma_1' z'} + U_{\varepsilon',\gamma_2' z'}\right).$$

Definamos

$$\begin{array}{rcl} A^+\left(W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon',z'}\right) & = & p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-2} \\ & + & p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^{p-2} \\ & + & C_p \int_{\mathbb{R}} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-1} \nabla W_{\varepsilon',z'} \\ & + & C_p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^{p-1} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} A^-\left(W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon',z'}\right) & = & p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-2} \\ & + & p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^{p-2} \\ & - & C_p \int_{\mathbb{R}} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-1} \nabla W_{\varepsilon',z'} \\ & - & C_p \int_{\mathbb{R}} \nabla W_{\varepsilon,z} |\nabla W_{\varepsilon',z'}|^{p-1} \end{array}$$

con lo cual

$$\|W_{\varepsilon,z}\|^p + \|W_{\varepsilon',z'}\|^p + A_-\left(W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon',z'}\right) \leq \|W_{\varepsilon,z} + W_{\varepsilon',z'}\|^p \leq \|W_{\varepsilon,z}\|^p + \|W_{\varepsilon',z'}\|^p + A_+\left(W_{\varepsilon,z}, W_{\varepsilon',z'}\right)$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \nabla W_{\varepsilon,z} \cdot \nabla W_{\varepsilon',z'} |\nabla W_{\varepsilon,z}|^{p-2} \\
= \quad & k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z} + \nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}] \cdot \left[\nabla U_{\varepsilon',\gamma_1' z'} + \nabla U_{\varepsilon',\gamma_2' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z} + \nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} \\
= \quad & k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z} + \nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} \\
\geq \quad & k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] \cdot \\
& \cdot \left[|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} + |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} - C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-3} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}| - C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}| |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-3}\right] \\
= \quad & k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} \right. \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] \left(-C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-3} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|\right) \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] \left(-C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}| |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-3}\right) \right\} \\
\geq \quad & k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} \right. \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} -|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z}| |\nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}|\right] \left(-C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-3} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|\right) \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} -|\nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z}| |\nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}|\right] \left(-C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}| |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-3}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\geq \quad & k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} \right. \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}\right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z}| |\nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}|\right] \left(C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-3} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|\right) \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z}| |\nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'}|\right] \left(C_p |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}| |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-3}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'} \right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_1 z}|^{p-2} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,j=1}^{2} \nabla U_{\varepsilon,\gamma_i z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma_j' z'} \right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma_2 z}|^{p-2} \right\} \\
&\geq \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i} \sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j} k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U_{\varepsilon,\gamma z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma' z'} \right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}|^{p-2}.
\end{aligned}
$$

Ahora analicemos $\int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U_{\varepsilon,\gamma z} \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma' z'} \right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}|^{p-2}$

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}(x) \cdot \nabla U_{\varepsilon',\gamma' z'}(x) \right] |\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}(x)|^{p-2} dx \\
&= \varepsilon^{-\frac{N(p-1)^2}{p^2}} \left(\varepsilon'\right)^{-\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U\left(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}} \right) \cdot \nabla U\left(\frac{x-\gamma' z'}{(\varepsilon')^{\frac{p-1}{p}}} \right) \left| \nabla U\left(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right|^{p-2} dx \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(y) \cdot \nabla U\left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{p-1}{p}} y + \frac{\gamma z - \gamma' z'}{(\varepsilon')^{\frac{p-1}{p}}} \right) |\nabla U(y)|^{p-2} dy \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(y) \cdot \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{\frac{p-1}{p}} \nabla \left[U\left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{p-1}{p}} y + \frac{\gamma z - \gamma' z'}{(\varepsilon')^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right] |\nabla U(y)|^{p-2} dy \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(y) \cdot \nabla \left[U\left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{p-1}{p}} y + \frac{\gamma z - \gamma' z'}{(\varepsilon')^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right] |\nabla U(y)|^{p-2} dy \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} U(y)^{p^*-1} U\left(\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{p-1}{p}} y + \frac{\gamma z - \gamma' z'}{(\varepsilon')^{\frac{p-1}{p}}} \right) dy.
\end{aligned}
$$

Por lo anterior y de manera análoga que en el inciso anterior se tiene

$$\|W_{\varepsilon,z} + W_{\varepsilon',z'}\|^p \geq \|W_{\varepsilon,z}\|^p + \|W_{\varepsilon',z'}\|^p \geq 2Nm^{\Gamma}(0,0,k).$$

□

Lema 2.11. i) *Si* $\varepsilon_n \to 0$ *y se cumple cualquiera de las dos siguientes* $\varepsilon_n' \geq \delta > 0$ *o* $dist\left(\Gamma_{z_n}, \Gamma_{z_n'}\right) \geq \delta$ *entonces*

$$\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p + o(1) \geq 2Nm^{\Gamma}(0,0,k).$$

ii) *Si* $\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p \to 0, \varepsilon_n \to 0, \varepsilon_n' \to 0$ *entonces para alguna subsucesión*

$$\left|\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n'}\right)^{\frac{p-1}{p}} - 1\right| \to 0, \left(\varepsilon_n \varepsilon_n'\right)^{-\frac{p-1}{p}} dist\left(\Gamma z_n, \Gamma z_n'\right)^2 \to 0.$$

Demostración. Para i) notemos

$$
\begin{aligned}
\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{\varepsilon_n,z_n} - \nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^p \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^N} 2\left(|\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}|^p + |\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^p \right) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{\varepsilon_n,z_n} + \nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^p
\end{aligned}
$$

con lo cual se obtiene

$$\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p + A^+\left(\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}, \nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}\right) \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^p.$$

Usando las hipótesis y los resultados del lema anterior obtenemos

$$\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p + o(1) \geq 2m^\Gamma(0,0,k).$$

Para ii) recordemos la siguiente desigualdad. Para vectores en $\mathbb{R}^N$ con el producto escalar estandar cuando $p \geq 2$

$$\begin{aligned} C_p|a-b|^p &\leq \left\langle |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b, a-b\right\rangle \\ &= |a|^p + |b|^p - \langle a,b\rangle\left(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}\right), \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} C_p\|W_{\varepsilon_n,z_n} - W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p &\leq \|W_{\varepsilon_n,z_n}\|^p + \|W_{\varepsilon_n',z_n'}\|^p \\ &- \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}\cdot\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}\right)\left(|\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}|^{p-2} + |\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^{p-2}\right). \end{aligned}$$

Usando las hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}\cdot\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}\right)\left(|\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}|^{p-2} + |\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^{p-2}\right) &\leq 2Nm^\Gamma(0,0,k) \\ &= 2\frac{\#\Gamma/\Gamma_i}{k_i^{\frac{N-p}{p}}}S_{0,p}^{\frac{N}{p}}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

notemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}\cdot\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}\right)|\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}|^{p-2} \\ = &\sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i}\sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j} k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla U_{\varepsilon_n,\gamma z_n}\cdot\nabla U_{\varepsilon_n',\gamma' z_n'}\right)\left|\sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i}\nabla U_{\varepsilon_n,\gamma z_n}\right|^{p-2} \end{aligned} \tag{2.31}$$

y

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}\cdot\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}\right)|\nabla W_{\varepsilon_n',z_n'}|^{p-2} \\ = &\sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i}\sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j} k_j^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla U_{\varepsilon_n,\gamma z_n}\cdot\nabla U_{\varepsilon_n',\gamma' z_n'}\right)\left|\sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j}\nabla U_{\varepsilon_n',\gamma' z_n'}\right|^{p-2} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Analicemos la integral de los sumandos.
Supongamos que $\#\Gamma/\Gamma_i = n_1$, $\#\Gamma/\Gamma_j = n_2$, es decir, $\Gamma/\Gamma_i = \{[\gamma_1],[\gamma_2],...,[\gamma_{n_1}]\}$, $\Gamma/\Gamma_j = \left\{[\gamma_1'],[\gamma_2'],...,[\gamma_{n_2}']\right\}$ donde $\gamma\in\Gamma/\Gamma_i,\ \gamma'\in\Gamma/\Gamma_j$.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla U_{\varepsilon_n,\gamma z_n} \cdot \nabla U_{\varepsilon'_n,\gamma' z'_n}\right) \left| \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i} \nabla U_{\varepsilon_n,\gamma z_n} \right|^{p-2}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla \left(\varepsilon_n^{\frac{N(1-p)}{pp^*}} U\left(\frac{x-\gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right) \cdot \nabla \left((\varepsilon'_n)^{\frac{N(1-p)}{pp^*}} U\left(\frac{x-\gamma' z'_n}{(\varepsilon'_n)^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right] \left| \sum_{s=1}^{n_1} \nabla \left(\varepsilon_n^{\frac{N(1-p)}{pp^*}} U\left(\frac{x-\gamma_s z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right|^{p-2} dx$$
$$= \varepsilon_n^{-\frac{N(p-1)^2}{p^2}} (\varepsilon'_n)^{-\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U\left(\frac{x-\gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) \cdot \nabla U\left(\frac{x-\gamma' z'_n}{(\varepsilon'_n)^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right] \left| \nabla U\left(\frac{x-\gamma_1 z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) + \nabla U\left(\frac{x-\gamma_2 z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) + \ldots + \nabla U\left(\frac{x-\gamma_{n_1} z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right|^{p-2} dx$$
$$= \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma' z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right] \left| \nabla U\left(y - \frac{\gamma_1 z_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) + \nabla U\left(y - \frac{\gamma_2 z_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) + \ldots + \nabla U\left(y - \frac{\gamma_{n_1} z_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right|^{p-2} dy$$
$$= \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma' z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right] \left| \sum_{[\gamma_s]\in\Gamma/\Gamma_i} \nabla U\left(y - \frac{\gamma_s z_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right|^{p-2} dy$$

de manera analoga

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla U_{\varepsilon_n,\gamma z_n} \cdot \nabla U_{\varepsilon'_n,\gamma' z'_n}\right) \left| \sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j} \nabla U_{\varepsilon'_n,\gamma' z'_n} \right|^{p-2}$$
$$= \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{N(p-1)^2}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma' z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right] \left| \sum_{[\gamma'_s]\in\Gamma/\Gamma_j} \nabla U\left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma'_s z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right|^{p-2} dy$$

Sustituyendo en (2.31) y (2.32) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla W_{\varepsilon_n,z_n} \cdot \nabla W_{\varepsilon'_n,z'_n}\right) |\nabla W_{\varepsilon_n,z_n}|^{p-2}$$
$$= \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i} \sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j} k_i^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_j^{\frac{p-N}{p^2}} \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{N(p-1)}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma' z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right] \left| \sum_{[\gamma_s]\in\Gamma/\Gamma_i} \nabla U\left(y - \frac{\gamma_s z_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right|^{p-2} dy$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla W_{\varepsilon_n,z_n} \cdot \nabla W_{\varepsilon'_n,z'_n}\right) |\nabla W_{\varepsilon'_n,z'_n}|^{p-2}$$
$$= \sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i} \sum_{[\gamma']\in\Gamma/\Gamma_j} k_j^{\frac{(p-N)(p-1)}{p^2}} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{N(p-1)^2}{p^2}} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma' z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right] \left| \sum_{[\gamma'_s]\in\Gamma/\Gamma_j} \nabla U\left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon'_n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma'_s z'_n - \gamma z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right)\right)\right|^{p-2} dy$$

De lo anterior junto con (2.30) se sigue que $i = j$ y para alguna subsucesión existe una única $[\gamma] \in \Gamma/\Gamma_i$ tal que $dist\left(\Gamma z_n, \Gamma z_n^{'}\right) = |z_n - \gamma z_n^{'}|$. Entonces si $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^{'}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma z_n^{'} - z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right) \left| \sum_{[\gamma_s],[g] \in \Gamma/\Gamma_i} \nabla U \left(y - \frac{\gamma_s z_n - g z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right|^{p-2} \longrightarrow S_{0,p}^{\frac{N}{p}}$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla U(y) \cdot \nabla U \left(\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^{'}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(y - \frac{\gamma^{'} z_n^{'} - z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right) \left| \sum_{[\gamma_s],[g] \in \Gamma/\Gamma_i} \nabla U \left(y - \frac{\gamma_s z_n - g z_n}{\varepsilon_n^{\frac{p-1}{p}}} \right) \right|^{p-2} \longrightarrow 0$$

si $[\gamma^{'}] \neq [\gamma]$. Lo mismo ocurre para la igualdad derivada de (2.32). Por lo cual

$$\left| \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n^{'}} \right)^{\frac{p-1}{p}} - 1 \right| \longrightarrow 0 \ \ y \ \ \varepsilon_n^{-\frac{p-1}{p}} dist\left(\Gamma z_n, \Gamma z_n^{'}\right) \longrightarrow 0.$$

□

Lema 2.12. *Sea* $\theta_0 = \{\pm W_{\varepsilon,z} : \varepsilon > 0, z \in M_{\delta_0}\}$. *Dados* $0 < \delta < \delta_0$ *y* $R > 0$ *existe* $\eta > m^{\Gamma}(0,0,k)$ *tal que para toda* $u \in N_{0,0,k}^{\Gamma}$ *con* $E_{0,0,k}(u) \leq \eta$ *se cumple lo siguiente:*

i) $\displaystyle\inf_{W \in \theta_0} \|u - W\|^p < \frac{N}{2^{p-1}} m^{\Gamma}(0,0,k)$ *y este ínfimo se alcanza.*

ii) *Si* $\widehat{W} \in \theta_0$ *satisface* $\|u - \widehat{W}\| = inf_{W \in \theta_0} \|u - W\|$ *entonces* $\widehat{W} \in \theta_\delta$.

iii) *Si* $v_s W_{\varepsilon_s, z_s} \in \theta_0$ *satisface* $\|u - v_s W_{\varepsilon_s,z_s}\| = inf_{W \in \theta_0} \|u - W\|$ $s = 1,2$ *entonces* $z_1, z_2 \in M_{\delta_0}^i$ *para la misma* $i \in \{1, 2, ..., m\}$ *y se cumple*

$$v_1 = v_2, \left| \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{p-1}{p}} - 1 \right| < R, (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-\frac{p-1}{p}} dist\left(\Gamma z_1, \Gamma z_2\right)^2 < R.$$

Demostración. Sea $R^{'} \in (0, R)$ tal que si $\left| \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{'}} \right)^{\frac{p-1}{p}} - 1 \right| < R^{'}$ y $\left(\varepsilon \varepsilon^{'} \right)^{\frac{p-1}{p}} dist\left(\Gamma z, \Gamma z^{'}\right)^2 < R^{'}$ entonces $|\varepsilon^{\frac{p-1}{p}} - (\varepsilon^{'})^{\frac{p-1}{p}}| < \frac{\delta}{2}$ y $dist\left(\Gamma z, \Gamma z^{'}\right) < \frac{\delta}{2}$. Por el Lema 2.11 inciso (ii) existen $0 < \rho < \left(\frac{N}{2^{p-1}} m^{\Gamma}(0,0,k)\right)^{\frac{1}{p}}$ y $\delta^{'} \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ tales que si $\varepsilon, \varepsilon^{'} \in (0, \delta^{'})$ y $\|W_{\varepsilon,z} - W_{\varepsilon^{'},z^{'}}\| < 2\rho$ entonces

$$\left| \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^{'}} \right)^{\frac{p-1}{p}} - 1 \right| < R^{'} \ y \ \left(\varepsilon \varepsilon^{'} \right)^{\frac{p-1}{p}} dist\left(\Gamma z, \Gamma z^{'}\right)^2 < R^{'},$$

para tales $\delta^{'}$ y ρ tomamos $\eta > m^{\Gamma}(0,0,k)$ como en el Lema 2.9, entonces para $u \in N_{0,0,k}^{\Gamma} \cap E_{0,0,k}^{\eta}$ se cumple

$$\inf_{W \in \theta_0} \|u - W\|^p \leq \inf_{W \in \theta_{\delta^{'}}} \|u - W\|^p < \rho^p < \frac{N}{2^{p-1}} m^{\Gamma}(0,0,k). \tag{2.33}$$

Dado que $\int_{\mathbb{R}^N}(\nabla u\cdot\nabla U_{\varepsilon,z})|\sum_{[\gamma]\in\Gamma/\Gamma_i}\nabla U_{\varepsilon,\gamma z}|^{p-2}\longrightarrow 0$ cuando $\varepsilon\longrightarrow 0$ y cuando $\varepsilon\longrightarrow\infty$ uniformemente en $z\in M_{\delta_0}$, existen $\varepsilon_0,\varepsilon_\infty>0$ tales que

$$\|u\pm W_{\varepsilon,z}\|^p\longrightarrow\|u\|^p+\|W_{\varepsilon,z}\|^p\geq\|u\|^p\geq Nm^{\Gamma}(0,0,k)\ \ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\cup(\varepsilon_\infty,\infty),\tag{2.34}$$

esto junto con (2.33) implican que $\inf_{W\in\theta_0}\|u-W\|$ se alcanza, esto demuestra (i).
Notemos que si $\|u-vW_{\varepsilon,z}\|<\rho$ y $\|u-v'W_{\varepsilon',z'}\|<\rho$ con $v,v'\in\{\pm1\}$, $\varepsilon,\varepsilon'\in(0,\delta')$, entonces

$$\begin{aligned}\|vW_{\varepsilon,z}-v'W_{\varepsilon',z'}\| &= \|u-u+vW_{\varepsilon,z}-v'W_{\varepsilon',z'}\|\\ &= \|u-u+vW_{\varepsilon,z}-v'W_{\varepsilon',z'}\|\\ &\leq \|u-v'W_{\varepsilon',z'}\|+\|u-vW_{\varepsilon,z}\|\\ &< 2\rho\\ &< \left(2Nm^{\Gamma}(0,0,k)\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

El Lema anterior implica que $v=v'$ y la elección de ρ y δ' implican que $\left|\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{p-1}{p}}-1\right|<R'$ y $\left(\varepsilon\varepsilon'\right)^{\frac{p-1}{p}}dist\left(\Gamma z,\Gamma z'\right)^2<R'$. En particular, si $u\in N^{\Gamma}_{0,0,k}\cap E^{\eta}_{0,0,k}$ y $\|u-v_sW_{\varepsilon_s,z_s}\|=\text{ínf}_{W\in\theta_0}\|u-W\|$ entonces $\|u-v_sW_{\varepsilon_s,z_s}\|<\rho$ y en consecuencia $v_1=v_2$, $\left|\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{p-1}{p}}-1\right|<R'$ y $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\frac{p-1}{p}}dist\left(\Gamma z,\Gamma z'\right)^2<R'$.
Del Lema anterior se sigue que $z_1,z_2\in M_\delta$, la elección de R' implica además que $dist(\Gamma z_1,\Gamma z_2)<\frac{\delta}{2}$ y recordando que $dist(\Gamma M^i,\Gamma M^j)\geq 3\delta_0\ \forall i,j=1,2,...,m\ \ i\neq j$ concluimos que $z_1,z_2\in M^i_{\delta_0}$ para la misma $i\{1,2,...,m\}$. Esto prueba (iii).
Supongamos que $\widehat{W}=vW_{\varepsilon,z}\in\theta_0$ satisface $\|u-\widehat{W}\|=\text{ínf}_{W\in\theta_0}\|u-W\|$ de (2.33) se sigue que existe $v'W_{\varepsilon',z'}\in\theta_{\delta'}$ tal que $\|u-v'W_{\varepsilon',z'}\|<\rho$. Entonces $v=v'$, $\left|\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^{\frac{p-1}{p}}-1\right|<R'$ y $\left(\varepsilon\varepsilon'\right)^{\frac{p-1}{p}}dist\left(\Gamma z,\Gamma z'\right)^2<R'$. Nuestra elección de R' implica que $|\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}-(\varepsilon')^{\frac{p-1}{p}}|<\frac{\delta}{2}$ y $dist\left(\Gamma z,\Gamma z'\right)<\frac{\delta}{2}$. Además como $(\varepsilon',z')\in B_{\delta'}$ y $\delta'<\frac{\delta}{2}$, se tiene que $(\varepsilon,z)\in B_\delta$, es decir, $\widehat{W}=vW_{\varepsilon,z}\in\theta_\delta$. Esto demuestra (ii). □

Lema 2.13. *Existen $\delta\in(0,\delta_0)$, $\rho>0$ y $R>0$ tales que si $v_sW_{\varepsilon_s,z_s}\in\theta_\delta$, con $s=1,2$ satisfacen*

$$\|u-v_sW_{\varepsilon_s,z_s}\|=inf_{W\in\theta_0}\|u-W\|<\rho,$$

con $z_1,z_2\in M^i_\delta$ para la misma $i\in\{1,2,...,m\}$, $|\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{p-1}{p}}-1|\leq R$ y $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-\frac{p-1}{p}}|z_1-z_2|^2\leq R$ entonces $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ y $z_1=z_2$.

Demostración. Consideremos la función $\chi_u:(0,\infty)\times M^i_{\delta_0}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$\chi_u(\varepsilon,z):=\|u-W_{\varepsilon,z}\|^p.$$

Escribimos $\zeta = (\varepsilon, z)$. Sea $h = (h_0, h_1, ..., h_d) \in \mathbb{R} \times V^i$ donde $d := dimV^i$. Calculemos la primera y segunda derivada de la función χ_u

$$\begin{aligned}
\chi_u^{'}(\zeta)\,h &= -p\int |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2}\left(\nabla(u-W_\zeta)\cdot\nabla D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h\right)\\
\frac{1}{p}\chi_u^{''}(\zeta)(h,h) &= \int |\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}\left(|\nabla(D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h)|^2\right)\\
&- \int \nabla(u-W_\zeta)\cdot\nabla\left[D_\zeta\left(|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h\right)h\right]
\end{aligned}$$

donde

$$W_\zeta(x) = W_{\varepsilon,z}(x) = \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} U_{\varepsilon,\gamma z}(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h &= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\left(D_\zeta U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h\right)\\
&= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\left([\nabla_\zeta U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)]\cdot h\right)\\
&= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\left(\sum_{j=0}^{d}\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j\right)\\
&= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j=0}^{d}\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\zeta^2 W_\zeta(\cdot)(h,h) &= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j=0}^{d}\left[D_\zeta\left(\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j\right)h\right]\\
&= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j=0}^{d}\left[\nabla_\zeta\left(\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j\right)\cdot h\right]\\
&= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j=0}^{d}\left[\sum_{k=0}^{d}\partial_k\left(\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j\right)h_k\right]\\
&= \sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j,k=0}^{d}\partial_{jk}^2 U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j h_k.
\end{aligned}$$

donde $\partial_0 = \partial_\varepsilon, \partial_j = \partial_{z_j}, \partial_{00} = \partial_{\varepsilon\varepsilon}, \partial_{0k} = \partial_{\varepsilon z_k}, \partial_{j0} = \partial_{z_j\varepsilon}$, $\partial_{jk} = \partial_{z_j z_k}$ y la suma es sobre $[\gamma] \in \frac{\Gamma}{\Gamma_i}$.

Analicemos la primer integral de la segunda derivada de la función χ_u

$$\begin{aligned}
& \int |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} |\nabla D_\zeta W_\zeta(\cdot) h|^2 \\
= & \int |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} \left(\nabla D_\zeta W_\zeta(\cdot) h \cdot \nabla D_\zeta W_\zeta(\cdot) h\right) \\
= & \int |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} \left(\nabla \left[\sum_{[\gamma]} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} \sum_{j=0}^{d} \partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot) h_j\right] \cdot \nabla \left[\sum_{[\gamma']} k_i^{\frac{p-N}{p^2}} \sum_{k=0}^{d} \partial_k U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot) h_k\right]\right) \\
= & \int |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} \left(k_i^{2\frac{p-N}{p^2}} \sum_{j,k=0}^{d} \sum_{[\gamma][\gamma']} \left[\nabla \partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot) h_j \cdot \nabla \partial_k U_{\varepsilon,\gamma' z}(\cdot) h_k\right]\right) \\
= & k_i^{2\frac{p-N}{p^2}} \sum_{j,k=0}^{d} \sum_{[\gamma][\gamma']} \int |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} \left[\nabla \partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot) h_j \cdot \nabla \partial_k U_{\varepsilon,\gamma' z}(\cdot) h_k\right].
\end{aligned}$$

Para calcular los sumandos de esta expresión, observemos que

$$U_{\varepsilon,z} = \varepsilon^{\frac{(N-p)(1-p)}{p^2}} U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\nabla_z U_{\varepsilon,z}(x) &= \varepsilon^{\frac{(N-p)(1-p)}{p^2}} \nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right) \\
&= -\varepsilon^{-\frac{(p-1)N}{p^2}} \nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\varepsilon U_{\varepsilon,z}(x) &= \varepsilon^{\frac{(N-p)(1-p)}{p^2}} \nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right) \cdot \left(-\frac{(x-z)\,\varepsilon^{\frac{p-1}{p}-1}}{\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}\right)^2}\left(\frac{p-1}{p}\right)\right) \\
&+ U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\varepsilon^{\frac{(N-p)(1-p)}{p^2}-1}\frac{(N-p)(1-p)}{p^2} \\
&= -\varepsilon^{-\frac{(p-1)N}{p^2}}\left[\nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)\right. \\
&+ \left. U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}\right)\frac{(N-p)(p-1)}{p^2}\right].
\end{aligned}$$

Si denotamos

$$\begin{aligned}
V_0(y) &= \nabla U(y) \cdot \frac{y(p-1)}{\varepsilon^{\frac{1}{p}} p} + \frac{U(y)\,(N-p)(p-1)}{\varepsilon^{\frac{1}{p}} p^2} \\
V_j(y) &= \frac{\partial U}{\partial y_j}(y), j = 1, ..., d,
\end{aligned}$$

con ésto obtenemos

$$\begin{aligned}\left[\nabla\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(x)h_j\cdot\nabla\partial_k U_{\varepsilon,\gamma' z}(x)h_k\right] &= \varepsilon^{-\frac{2(p-1)N}{p^2}}\left[\nabla\left(V_j\left(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\cdot\nabla\left(V_k\left(\frac{x-\gamma' z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right)\right]h_jh_k\\ &= \varepsilon^{-\frac{2(p-1)(N+p)}{p^2}}\left[\nabla V_j\left(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\nabla V_k\left(\frac{x-\gamma' z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right]h_jh_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& k_i^{2\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j,k=0}^{d}\sum_{[\gamma][\gamma']}\int|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}\left[\nabla\partial_j U_{\varepsilon,\gamma z}(\cdot)\,h_j\cdot\nabla\partial_k U_{\varepsilon,\gamma' z}(\cdot)\,h_k\right]\\ =\;& k_i^{2\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j,k=0}^{d}\sum_{[\gamma][\gamma']}\int|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}\varepsilon^{-\frac{2(p-1)(N+p)}{p^2}}\left[\nabla V_j\left(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\nabla V_k\left(\frac{x-\gamma' z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right]h_jh_k\\ =\;& k_i^{2\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j,k=0}^{d}\sum_{[\gamma][\gamma']}\varepsilon^{-\frac{2(p-1)(N+p)}{p^2}}\int|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}\left[\nabla V_j\left(\frac{x-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\nabla V_k\left(\frac{x-\gamma' z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right]h_jh_k\\ =\;& k_i^{2\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j,k=0}^{d}\sum_{[\gamma][\gamma']}\varepsilon^{\frac{(p-1)(Np-2N-2p)}{p^2}}h_jh_k\\ & \int|\nabla\left[(u-W_\zeta)\left(y\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}+\gamma z\right)\right]|^{p-2}\left[\nabla V_j(y)\cdot\nabla V_k\left(y-\frac{\gamma' z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right]\\ =\;& k_i^{2\frac{p-N}{p^2}}\sum_{j,k=0}^{d}\sum_{[\gamma][\gamma']}\varepsilon^{\frac{(p-1)(Np-2N-2p)+p(p-1)(p-2)}{p^2}}h_jh_k\\ & \int|\nabla(u-W_\zeta)\left(y\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}+\gamma z\right)|^{p-2}\left[\nabla V_j(y)\cdot\nabla V_k\left(y-\frac{\gamma' z-\gamma z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\right]\\ =\;& \varepsilon^{\frac{(p-1)(Np-2(N+p)+p(p-1)(p-2)}{p^2}}\frac{\#\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_i}\right)}{k_i^{2\frac{N-p}{p^2}}}\left(\sum_{j,k=0}^{d}a_{jk}h_jh_k+o_\varepsilon(1)\right)\end{aligned}$$

donde

$$a_{jk}=|\nabla(u-W_\zeta)(z)|^{p-2}\int[\nabla V_j(y)\cdot\nabla V_k(y)]\,dy$$

$o_\varepsilon(1)\longrightarrow 0$ cuando $\varepsilon\longrightarrow 0$.

Ahora analicemos la segunda integral de la segunda derivada de χ_u. Considerando el producto escalar en $\mathbb{R}$ y usando que $\nabla(u-W_\zeta)\in L^p$ y

$$\nabla\left[D_\zeta\left(|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h\right)\right]\in L^{\frac{p}{p-1}}$$

se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}& \int\nabla(u-W_\zeta)\cdot\nabla\left[D_\zeta\left(|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h\right)\right]\\ \leq\;& \int|\nabla(u-W_\zeta)||\nabla\left[D_\zeta\left(|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}D_\zeta W_\zeta(\cdot)\,h\right)\right]|\\ \leq\;& \left[\int|\nabla(u-W_\zeta)|^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ & \left[\int|\nabla\left(D_\zeta\left(|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\right)h\right)|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}\\ =\;& \|u-W_\zeta\|\left[\int|\nabla\left(D_\zeta\left(|\nabla(u-W_\zeta)|^{p-2}D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\right)h\right)|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

Analicemos la integral

$$\left[\int |\nabla \left(D_\zeta \left(|\nabla \left(u - W_\zeta\right)|^{p-2} D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\right) h\right)|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Consideremos

$$A = \int |\nabla \left(D_\zeta \left(|\nabla \left(u - W_\zeta\right)|^{p-2} D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\right) h\right)|^{\frac{p}{p-1}}$$

$$B = |\nabla \left(D_\zeta \left(|\nabla \left(u - W_\zeta\right)|^{p-2} D_\zeta W_\zeta(\cdot)h\right) h\right)|$$

y $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N : B \geq 1\right\}, \Omega' = \left\{x \in \mathbb{R}^N : B < 1\right\}$ se tienen dos casos:

Caso 1:
si $A \geq 1$ se tiene

$$A^{\frac{p-1}{p}} \leq \int_\Omega B^2 + \int_{\Omega'} B$$

Caso 2:
si $A < 1$ se tiene

$$A^{\frac{p-1}{p}} \leq \left[\int_\Omega B^2 + \int_{\Omega'} B\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Mediante algunos cálculos sencillos obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega'} B \quad &\leq \quad \int_{\Omega'} |\nabla \left(D_\zeta |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} h\right)| (D_\zeta W_\zeta(\cdot)h) dx \\
&+ \quad \int_{\Omega'} \left(D_\zeta |\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2} h\right) |\nabla(D_\zeta W_\zeta(\cdot)h)| dx \\
&+ \quad \int_{\Omega'} |\nabla \left(|\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2}\right)| (D^2_\zeta W_\zeta(\cdot)(h,h)) dx \\
&+ \quad \int_{\Omega'} (|\nabla(u - W_\zeta)|^{p-2}) |\nabla(D^2_\zeta W_\zeta(\cdot)(h,h))| dx.
\end{aligned}$$

De forma análoga se tiene una desigualdad para $\int_\Omega B^2$. Para conocer cada sumando se necesita lo siguiente.

$$\begin{aligned}
D_z(\nabla_z U_{\varepsilon,z}(x)) \quad &= \quad \varepsilon^{-\frac{(p-1)(N+p)}{p^2}} D(\nabla U) \left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right) \\
D_\varepsilon(\nabla_z U_{\varepsilon,z}(x)) \quad &= \quad \varepsilon^{-\frac{(p-1)(N+p)}{p^2}} \left\{ \left(\frac{p-1}{p}\right) \right. \\
& \left[\nabla \frac{\partial U}{\partial x_i} \left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right) \cdot \left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\right]_{i=1}^N \\
& + \quad \left. \frac{(p-1)N}{p^2 \varepsilon^{\frac{1}{p}}} \nabla U \left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right) \right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_z\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}U_{\varepsilon,z}(x)\right) &= \varepsilon^{-\frac{(p-1)(N+p)}{p^2}}\left\{D(\nabla U)\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\right.\\
&\quad \cdot\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)\\
&\quad + \left.\nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\left(\frac{p-1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}p}+\frac{(N-p)(p-1)}{p^2\varepsilon^{\frac{1}{p}}p}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}U_{\varepsilon,z}(x)\right) &= \varepsilon^{-\frac{(p-1)(N+p)}{p^2}}\left\{D(\nabla U)\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\cdot\right.\\
&\quad \cdot\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)^2\\
&\quad + \nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p+1}{p}}}\right)\left(\frac{p-1}{p}\right)\\
&\quad + \nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p+1}{p}}}\right)\frac{(N-p)(p-1)^2}{p^3}\\
&\quad + \nabla U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\cdot\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p+1}{p}}}\right)\frac{N(p-1)^2}{p^3}\\
&\quad + U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\frac{(N-p)(p-1)}{p^3\varepsilon^{\frac{2}{p}}}\\
&\quad + U\left(\frac{x-z}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}}\right)\frac{N(N-p)(p-1)^2}{p^3}
\end{aligned}
$$

Se sustituye cada una de estas igualdades en cada sumando para obtener una igualdad análoga que (1). Para terminar la demostración se usa el teorema de Taylor junto con las hipótesis del teorema y mediante algunos cálculos sencillos se llega al resultado. □

Proposición 2.10. *Supongamos que $E_{0,0,k}$ no alcanza su ínfimo en $N^\Gamma_{0,0,k}$. Sea $\delta\in(0,\delta_0)$. Entonces existe $\eta > m^\Gamma(0,0,k)$ con la siguiente propiedad: Para cada $u\in N^\Gamma_{0,0,k}$ tal que $E_{0,0,k}(u)\leq\eta$ se cumple que*

$$\inf_{W\in\Theta_0}\|u-W\| < \left(\frac{N}{2^{p-1}}m^\Gamma(0,0,k)\right)^{\frac{1}{p}}$$

y existe exactamente un $v\in\{-1,1\}$, un $\varepsilon\in(0,\delta_0)$ y una Γ-órbita $\Gamma z\in M_{\delta_0}$ tales que

$$\|u-vW_{\varepsilon,z}\| = \inf_{W\in\Theta_0}\|u-W\|.$$

Además $(\varepsilon,z)\in B_\delta$.

Demostración. Sean $\delta \in (0, \delta_0)$, $\rho > 0$ y $R > 0$ como en el lema 2.13. Sin perdida de generalidad podemos suponer que esta δ es mas pequeña que la dada por la proposición. De los lemas 2.9 y 2.12 se sigue que existe $\eta > m^\Gamma(0,0,k)$ tal que para toda $u \in N^\Gamma_{0,0,k}$ con $E_{0,0,k}(u) \leq \eta$ se cumple que

$$\inf_{W \in \theta_0} \|u - w\| < \rho$$

y se cumplen las propiedades (i), (ii) y (iii) del lema 2.12, es decir, $\inf_{W \in \theta_0} \|u - W\|^p < \frac{N}{2^{p-1}} m^\Gamma(0,0,k)$ y que este ínfimo se alcanza. Además, si $v_s W_{\varepsilon_s, z_s} \in \theta_0$ satisface

$$\|u - v_s W_{\varepsilon_s, z_s}\| = \inf_{W \in \theta_0} \|u - W\|, \quad s = 1, 2.$$

entonces $v_s W_{\varepsilon_s, z_s} \in \theta_\delta$, $\;z_1, z_2 \in M^i_\delta$ para la misma $i \in \{1, 2, ..., m\}$ y se cumple que $v_1 = v_2$, $\left| \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{p-1}{p}} - 1 \right| <$ R y $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^{-\frac{p-1}{p}} dist\, (\Gamma z_1, \Gamma z_2)^2 < R$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $dist\, (\Gamma z_1, \Gamma z_2) = |z_1 - z_2|$ y remplazando u por $-u$ si es necesario, podemos suponer además que $v_1 = v_2 = 1$. El Lema 2.13 implica que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y $z_1 = z_2$. □

2.5.4. Definición de la función bariórbita.

Fijemos $\delta \in (0, \delta_0)$ y escojamos $\eta > m^\Gamma(0,0,k)$ como en la Proposición 2.10. Definamos

$$\begin{aligned} E^\eta_{0,0,k} &:= \{u \in W^{1,p}_0(\Omega) : E_{0,0,k}(u) \leq \eta\}, \\ N^\eta_{0,0,k} &:= \{u \in W^{1,p}_0(\Omega) \setminus \{0\} : DE_{0,0,k}(u)u = 0\}, \\ B_\delta(M) &:= \{z \in \mathbb{R} : dist(z, M) \leq \delta\} \end{aligned}$$

y el espacio $B_\delta(M)/\Gamma$ de Γ-órbitas de $B_\delta(M)$.

Definición 2.6. *La función bariórbita*

$$\beta^\Gamma : N^\Gamma_{0,0,k} \cap E^\eta_{0,0,k} \to B_\delta(M)/\Gamma$$

está definida por

$$\beta^\Gamma(u) = \Gamma y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \|u \pm W_{\varepsilon,z}\| = \min_{W \in \Theta_0} \|u - W\|.$$

Proposición 2.11. *La función bariórbita $\beta^\Gamma : N^\Gamma_{0,0,k} \cap E^\eta_{0,0,k} \to B_\delta(M)/\Gamma$ es continua y $\mathbb{Z}/2$-invariante i.e.*

$$\beta^\Gamma(u) = \beta^\Gamma(-u) \; \forall u \in N^\Gamma_{0,0,k} \cap E^\eta_{0,0,k}.$$

Demostración. Por definición β^Γ es $\mathbb{Z}/2$-invariante. Probaremos que β^Γ es continua. Supongamos que $u_n \to u$ en $N^\Gamma_{0,0,k} \cap E^\eta_{0,0,k}$ (converge fuertemente en el espacio), sea $\varepsilon_n, \varepsilon \in (0, \delta)$, $y_n, y \in M_\delta$ tales que cambiando el signo a u_n y u si es necesario, se cumple que:

$$\|u_n - W_{\varepsilon_n, y_n}\| = \min_{W \in \Theta_0} \|u - W\|, \; \|u - W_{\varepsilon, y}\| = \min_{W \in \Theta_0} \|u - W\|,$$

entonces $\beta^\Gamma(u_n) = \Gamma y_n$ y $\beta^\Gamma(u) = \Gamma y$. Como M_δ es compacto podemos tomar subsucesiones tales que $y_n \to y'$ y que $\varepsilon_n \to \varepsilon' \in [0,\delta]$. Si $\varepsilon' = 0$ entonces $A^-(u_n, W_{\varepsilon_n,y_n}) \longrightarrow 0$ en consecuencia para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\frac{N}{2} m^\Gamma(0,0,k) &> \|u_n - W_{\varepsilon_n,y_n}\|^p \\ &\geq \|u_n\|^p + \|W_{\varepsilon_n,y_n}\|^p - A^-(u_n, W_{\varepsilon_n,y_n}) \\ &\geq N m^\Gamma(0,0,k)\end{aligned}$$

por lo cual $\varepsilon' \neq 0$.
Entonces $W_{\varepsilon_n,y_n} \to W_{\varepsilon',y'}$ y tomando el límite cuando $n \to \infty$ en

$$\|u_n - W_{\varepsilon,y}\| \geq \|u_n - W_{\varepsilon_n,y_n}\| \geq \|u - W_{\varepsilon_n,y_n}\| - \|u - u_n\|,$$

de donde obtenemos

$$\|u - W_{\varepsilon,y}\| \geq \|u - W_{\varepsilon',y'}\|,$$

en consecuencia

$$\|u - W_{\varepsilon,y}\| = \|u - W_{\varepsilon',y'}\| = \min_{W\in\Theta} \|u - W\|.$$

Por tanto $\varepsilon = \varepsilon'$, $\Gamma y = \Gamma y'$ y

$$\beta^\Gamma(u) = \Gamma y' = \lim_{n\to\infty} \Gamma y_n = \lim_{n\to\infty} \beta^\Gamma(u_n)$$

es decir, β^Γ es continua.

$\square$

Definamos $u^\pm = \pm \max\{\pm u, 0\}$.
Si Γ es el kernel de un epimorfismo $\tau : G \to \mathbb{Z}/2$, elijamos $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$. Sea $u \in N^\tau_{0,0,k}$ entonces u cambia de signo y $u^-(x) = -u^+(g_\tau^{-1}x)$. Por tanto, $\|u^-\|^p = \|u^+\|^p$ y $|u^-|^{p*}_{k,p*} = |u^+|^{p*}_{k,p*}$. En consecuencia

$$u \in N^\tau_{0,0,k} \Rightarrow u^\pm \in N^\Gamma_{0,0,k} \text{ y } E_{0,0,k}(u) = 2E_{0,0,k}(u^\pm), \tag{2.35}$$

Lema 2.14. *$E_{0,0,k}$ no alcanza su ínfimo en $N^\tau_{0,0,k}$, en consecuencia*

$$m^\tau(0,0,k) := \inf_{N^\tau_{0,0,k}} E_{0,0,k} = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}} = 2m^\Gamma(0,0,k).$$

Demostración. Por contradiccion. Supongamos que existe $u \in N^\tau_{0,0,k}$ tal que $E_{0,0,k}(u) = m^\tau(0,0,k)$. Entonces $u^+ \in N^\tau_{0,0,k}$ y

$$m^\tau(0,0,k) \leq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

Se tiene que

$$m^\Gamma(0,0,k) \leq E_{0,0,k}(u^+) = \frac{1}{2} m^\tau(0,0,k) \leq \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right) \frac{1}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}} = m^\Gamma(0,0,k).$$

Es decir, u^+ es un mínimo de $E_{0,0,k}$ sobre $N^{\Gamma}_{0,0,k}$, lo cual contradice (NE). El corolario 2.5 implica

$$m^{\tau}(0,0,k) = \left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} \right) \frac{2}{N} S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

□

La propiedad 2.35 implica

$$u^{\pm} \in N^{\Gamma}_{0,0,k} \cap E^{\eta}_{0,0,k} \ \ \forall u \in N^{\tau}_{0,0,k} \cap E^{2\eta}_{0,0,k},$$

dado que

$$\|u^+ - vW_{\varepsilon,y}\| = \min_{W\in\Theta_0} \|u^+ - W\| \Longleftrightarrow \|u^- + vW_{\varepsilon,g_\tau y}\| = \min_{W\in\Theta_0} \|u^- - W\|, \tag{2.36}$$

por tanto,

$$\beta^{\Gamma}(u^+) = \Gamma y \Longleftrightarrow \beta^{\Gamma}(u^-) = \Gamma(g_\tau y). \tag{2.37}$$

Lema 2.15. *Para toda $u \in N^{\tau}_{0,0,k} \cap E^{2\eta}_{0,0,k}$ se cumple que $\beta^{\Gamma}(u^+) \neq \beta^{\Gamma}(u^-)$.*

Demostración. Sea $y \in M_\delta$ tal que $\beta^{\Gamma}(u^+) = \Gamma y$ y sea $v = \pm 1$ tal que

$$\|u^+ - vW_{\varepsilon,y}\| = \min_{W\in\theta_0} \|u^+ - W\|.$$

Si $\beta^{\Gamma}(u^+) = \beta^{\Gamma}(u^-)$, las propiedades (2.36) y (2.37) implican que

$$\|u^- - vW_{\varepsilon,y}\| = \min_{W\in\theta_0} \|u^- - W\|.$$

De la proposicion 2.10 se sigue que

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|u^+ - vW_{\varepsilon,y} + u^- - vW_{\varepsilon,y}\| \\ &\leq \min_{W\in\theta_0} \|u^+ - W\| + \min_{W\in\theta_0} \|u^- - W\| \\ &< \left(\frac{N}{2^{p-1}} m^{\Gamma}(0,0,k)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{N}{2^{p-1}} m^{\Gamma}(0,0,k)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2\left(\frac{N}{2^{p-1}} m^{\Gamma}(0,0,k)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En consecuencia, el lema 2.14 garantiza que

$$E_{0,0,k}(u) = \frac{1}{N}\|u\|^p < 2m^{\Gamma}(0,0,k) = m^{\tau}(0,0,k).$$

Esto no es posible, ya que $u \in N^{\tau}_{0,0,k}$. □

Observación 2.4. *El homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ induce una involución en el espacio de órbitas $\mathbb{R}^N/\Gamma$, definida como sigue*

$$\tau : \mathbb{R}^N/\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^N/\Gamma, \quad \tau(\Gamma y) = \Gamma(g_\tau y).$$

Denotemos por $B_\delta(M)^\tau := \{z \in B_\delta(M) : Gz = \Gamma z\}$.

Proposición 2.12. *La función*

$$\beta^\tau : N^\tau_{0,0,k} \cap E^{2\eta}_{0,0,k} \longrightarrow \left(B_\delta(M) \backslash B^\tau_\delta(M)\right)/\Gamma, \ \beta^\tau(u) := \beta^\Gamma(u^+).$$

está bien definida, es continua y es $\mathbb{Z}/2-$ equivariante para la acción definida en la observación (2.4), es decir,

$$\beta^\tau(-u) = \Gamma(g_\tau y) \iff \beta^\tau(u) = \Gamma y.$$

Demostración. Si $u \in N^\tau_{0,0,k} \cap E^{2\eta}_{0,0,k}$ y $\beta^\tau(u) = \Gamma y \in B_\delta(M)^\tau/\Gamma$ entonces $\beta^\Gamma(u^+) = \Gamma y = \Gamma(g_\tau y) = \beta^\Gamma(u^-)$, contadiciendo el lema 2.15 . En consecuencia, $\beta^\tau(u) \notin B_\delta(M)^\tau/\Gamma$. La continuidad se sigue de la proposición 2.11 y la equivarianza de (2.37) ya que

$$\beta^\tau(-u) = \beta^\Gamma\left((-u)^+\right) = \beta^\Gamma(-u^-) = \beta^\Gamma(u^-)$$

esto concluye la demostración. $\square$

3

Resultados

Consideremos el problema

$$\left(P^{\Gamma}_{\mu,f,k}\right)\begin{cases} -\triangle_p u-\mu\left(x\right)\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p}}=f\left(x\right)|u|^{p-2}u+k\left(x\right)|u|^{p^{*}-2}u & x\in\Omega\\ u=0, \qquad x\in\partial\Omega\\ u\left(\gamma x\right)=u\left(x\right), \quad \forall x\in\Omega,\gamma\in\Gamma\end{cases}$$

donde Γ es un subgrupo cerrado de $O(N)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ es abierto, suave, acotado y $\Gamma-invariante$, $N\geq p^2$, $p^*=\frac{Np}{N-p}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\mu,f,k:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}^N$ son continuas y $\Gamma-invariantes$.
Consideremos el conjunto

$$M=\left\{y\in\overline{\Omega}:\frac{\#\Gamma y}{k\left(y\right)^{\frac{N-p}{p}}}=\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{k\left(x\right)^{\frac{N-p}{p}}}\right\}.$$

Supongamos en toda ésta sección que μ,f,k satisfacen las siguientes condiciones **K1), K2), M1), F1)** y **F2)**. Supondremos además que **(NE)** se cumple, es decir, $E_{0,0,k}$ no alcanza su ínfimo en $N^{\Gamma}_{0,0,k}$. Queremos obtener resultados de multiplicidad de soluciones para este problema.

3.1. Multiplicidad de soluciones $\Gamma-$invariantes

Denotemos por

$$\ell^{\Gamma}_k:=\left(\min_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}\right)S_{0,p}^{\frac{N}{p}}.$$

y para $\delta>0$, denotemos por

$$M^{-}_{\delta}:=\{y\in M:dist(y,\partial\Omega)\geq\delta\},\quad B_\delta(M):=\left\{z\in\mathbb{R}^N:dist(z,M)\leq\delta\right\}$$

Teorema 3.1. *Sea $N\geq p^2$. Supongamos que se cumplen **K1), K2), M1), F1), F2), (NE)** y $\ell^{\Gamma}_k\leq S_{\mu_0,p}^{\frac{N}{p}}$. Dados $\delta,\delta'>0$ existen $\lambda^*\in(0,\lambda_p)$ y $\mu^*\in(0,\widetilde{\mu})$ tal que si $\max_{x\in\overline{\Omega}}f(x)\leq\lambda^*$ y $\max_{x\in\overline{\Omega}}\mu(x)\leq\mu^*$, entonces para toda $f(x)\in(0,\lambda^*)$ y $\mu(x)\in(0,\mu^*)$ para toda $x\in\Omega$ el problema $\left(P^{\Gamma}_{\mu,f,k}\right)$ tiene al menos*

$$cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M^{-}_{\delta}/\Gamma).$$

pares $\pm u$ de soluciones que satisfacen

$$\ell_k^\Gamma - \delta' \leq [\![u]\!]_{\mu,f}^p < \ell_k^\Gamma$$

Demostración. De la proposición 2.9 y el corolario 2.4 se sigue que $E_{\mu,f,k}\mid_{N^\Gamma_{\mu,f,k}}: N^\Gamma_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de $(PS)_\theta$ para todo $\theta < \frac{\ell_k^\Gamma}{N}$. De la teoría de Lusternik-Schnirelmann, teorema 2.6, se sigue que $E_{\mu,f,k}\mid_{N^\Gamma_{\mu,f,k}}$ tiene al menos

$$\mathbb{Z}/2 - cat(N^\Gamma_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k})$$

pares $\pm u$ de puntos críticos en $N^\Gamma_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}$. Estimaremos ésta categoría.
Sin perdida de generalidad supongamos que $\delta \in (0, \delta_0)$, con δ_0 como en la sección anterior. Escojamos $\eta > \frac{\ell_k^\Gamma}{N} = m^\Gamma(0,0,k)$ como en la proposición 2.10 y consideremos la función bariórbita

$$\beta^\Gamma : N^\Gamma_{0,0,k} \cap E^\eta_{0,0,k} \longrightarrow B_\delta(M)/\Gamma$$

de la definición 2.6. Ésta es continua y $\mathbb{Z}/2-$invariante (proposición 2.11). Sin perder generalidad podemos suponer que $\delta' < \ell_k^\Gamma$, sean $\lambda^* \in (0, \lambda_p)$ y $\mu^* \in (0, \widetilde{\mu})$ tal que

$$\left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu} - \mu^*}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p - \lambda^*}\right)^{\frac{N}{p}} = \min\left\{2, \frac{N\eta}{\ell_k^\Gamma}, \frac{\ell_k^\Gamma}{\ell_k^\Gamma - \delta'}\right\}.$$

Si $f_0 \in (0, \lambda^*)$ y μ_0 $(0, \mu^*)$, se sigue del lema 2.1 que, para cada $\theta < \frac{\ell_k^\Gamma}{N}$

$$\begin{aligned} E_{0,0,k}(\pi_{0,0,k}(u)) &\leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu} - \mu_0}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(u)) \\ &\leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu} - \mu_0}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} \frac{\ell_k^\Gamma}{N} \\ &\leq \eta \end{aligned}$$

para toda $u \in N^\Gamma_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}$, donde $\pi_{0,0,k} : W_0^{1,p}(\Omega)^\Gamma \setminus \{0\} \longrightarrow N^\Gamma_{\mu,f,k}$ denota la proyección radial. En consecuencia, la función

$$\beta^\Gamma \circ \pi_{0,0,k} : N^\Gamma_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k} \longrightarrow B_\delta(M)/\Gamma$$

está bien definida, es continua y $\mathbb{Z}/2-$invariante.
Fijemos $0 < s < \delta$ tal que $\min_{B_s(M)} f > 0$ y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_s)$, donde ε_s es como en la proposición 2.8. Dicha proposición garantiza la existencia de un $\theta := \theta_\varepsilon$ tal que

$$E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\Gamma_{\varepsilon,y})) \leq \theta_\varepsilon < \frac{\ell_k^\Gamma}{N} \quad \forall y \in M_s^-.$$

La función

$$\alpha_\delta^\Gamma : M_\delta^-/\Gamma \longrightarrow N^\Gamma_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}, \quad \alpha_\delta^\Gamma(\Gamma y) = \pi_{\mu,f,k}(\omega^\Gamma_{\varepsilon,y}),$$

está bien definida y es continua. De la definición 2.6 de la función bariórbita se sigue que

$$\beta^\Gamma(\pi_{0,0,k}(\alpha_\delta^\Gamma(\Gamma y))) = \Gamma y \quad \forall y \in M_\delta^-.$$

El lema 2.7 garantiza que

$$\mathbb{Z}/2 - cat(N^{\Gamma}_{\mu,f,k} \cap E^{\theta}_{\mu,f,k}) \geq cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M^{-}_{\delta}/\Gamma),$$

puesto que $m^{\Gamma}(0,0,k) = \frac{\ell^{\Gamma}_k}{N}$, del corolario 2.2 y de la elección de λ^* y μ^* se sigue que

$$\theta < \frac{\ell^{\Gamma}_k}{N} = m^{\Gamma}(0,0,k) \leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu^*}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p-\lambda^*}\right)^{\frac{N}{p}} m^{\Gamma}(\mu,f,k) < 2m^{\Gamma}(\mu,f,k).$$

Por tanto, $E_{\mu,f,k}\mid_{N^{\Gamma}_{\mu,f,k}}$ tiene al menos

$$cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M^{-}_{\delta}/\Gamma)$$

pares $\pm u$ de puntos críticos con $E_{\mu,f,k}(u) < \text{mín}\left\{\frac{\ell^{\Gamma}_k}{N}, 2m^{\Gamma}(\mu,f,k)\right\}$. El corolario 2.2 y la elección de λ^* y μ^* implican además que

$$\left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu^*}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p-\lambda^*}\right)^{\frac{N}{p}} \leq \frac{\ell^{\Gamma}_k}{\ell^{\Gamma}_k - \delta'}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\ell^{\Gamma}_k - \delta'}{N} &\leq \left(\frac{\widetilde{\mu}-\mu^*}{\widetilde{\mu}}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p-\lambda^*}{\lambda_p}\right)^{\frac{N}{p}} \frac{\ell^{\Gamma}_k}{N} \\
&\leq m^{\Gamma}(\mu,f,k) \\
&\leq E_{\mu,f,k}(u) \\
&\leq \frac{1}{N}\, [\![u]\!]^{p}_{\mu,f} \\
&< \frac{\ell^{\Gamma}_k}{N},
\end{aligned}$$

por tanto

$$\ell^{\Gamma}_k - \delta' \leq [\![u]\!]^{p}_{\mu,f} < \ell^{\Gamma}_k.$$

Esto concluye la demostración. □

3.2. Multiplicidad de soluciones $\tau-$ equivariantes

Denotemos por

$$B_\delta(M)^{\tau} := \{z \in B_\delta(M) : Gz = \Gamma z\}$$

Teorema 3.2. *Sea $N \geq p^2$. Supongamos que se cumplen **K1), K2), M1), F1), F2), (NE)** y $\ell^{\Gamma}_k \leq S^{\frac{N}{p}}_{\mu_0,p}$. Supongamos además que existe un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y un epimorfismo continuo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ tales que Ω, μ, f y k son $G-$invariantes y $ker\tau = \Gamma$. Dados $\delta, \delta' > 0$ existen $\lambda^* \in (0,\lambda_p)$ y $\mu^* \in (0,\widetilde{\mu})$ tal que si $\text{máx}_{x\in\overline{\Omega}} f(x) \leq \lambda^*$ y $\text{máx}_{x\in\overline{\Omega}} \mu(x) \leq \mu^*$, entonces para toda $f(x) \in (0,\lambda^*)$ y $\mu(x) \in (0,\mu^*)$ para toda $x \in \Omega$ el problema $\left(P^{\Gamma}_{\mu,f,k}\right)$ tiene al menos*

$$cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^{\tau})/\Gamma}(M^{-}_{\tau,\delta}/\Gamma).$$

pares $\pm u$ de soluciones $\tau-$equivariantes que satisfacen

$$2(\ell_k^\Gamma - \delta') \leq [\![u]\!]_{\mu,f}^p < 2\ell_k^\Gamma.$$

Demostración. De la proposición 2.9 y el corolario 2.5 se sigue que $E_{\mu,f,k} \mid_{N^\tau_{\mu,f,k}}: N^\tau_{\mu,f,k} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de $(PS)_\theta$ para todo $\theta < 2\frac{\ell_k^\Gamma}{N}$. Como $E_{\mu,f,k} \mid_{N^\tau_{\mu,f,k}}$ es un funcional par de clase C^1 y $N^\tau_{\mu,f,k}$ es una subvariedad de Banach de clase C^2, simétrica respecto al origen tenemos, de la teoría de Lusternik-Schnirelmann en el teorema 2.6, que $E_{\mu,f,k} \mid_{N^\tau_{\mu,f,k}}$ tiene al menos

$$\mathbb{Z}/2 - cat(N^\tau_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k})$$

pares $\pm u$ de puntos críticos en $N^\tau_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}$. Estimaremos ésta categoría para un valor apropiado θ.
Sin perdida de generalidad supongamos que $\delta \in (0, \delta_0)$, con δ_0 como en la sección anterior. Escojamos $\eta > \frac{\ell_k^\Gamma}{N} = m^\Gamma(0,0,k) = \frac{1}{2}m^\tau(0,0,k)$ como en la proposición 2.10 y consideremos la función bariórbita

$$\beta^\tau : N^\tau_{0,0,k} \cap E^{2\eta}_{0,0,k} \longrightarrow (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma$$

de la definición 2.12 y de la proposición 2.12 sabemos que esta función es continua y $\mathbb{Z}/2-$equivariante. Sin perder generalidad podemos suponer que $\delta' < \ell_k^\Gamma$, sean $\lambda^* \in (0, \lambda_p(\mu_0))$ y $\mu^* \in (0, \widetilde{\mu})$ tales que

$$\left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu} - \mu^*}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p(\mu_0)}{\lambda_p(\mu_0) - \lambda^*}\right)^{\frac{N}{p}} = \text{mín}\left\{2, \frac{N\eta}{\ell_k^\Gamma}, \frac{\ell_k^\Gamma}{\ell_k^\Gamma - \delta'}\right\}.$$

Si $f_0 \in (0, \lambda^*)$ y μ_0 $(0, \mu^*)$, se sigue del lema 2.1 que, para cada $\theta < 2\frac{\ell_k^\Gamma}{N}$

$$\begin{aligned}
E_{0,0,k}(\pi_{0,0,k}(u)) &\leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu} - \mu_0}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p(\mu_0)}{\lambda_p(\mu_0) - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(u)) \\
&\leq \left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu} - \mu_0}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p(\mu_0)}{\lambda_p(\mu_0) - f_0}\right)^{\frac{N}{p}} 2\frac{\ell_k^\Gamma}{N} \\
&\leq \frac{N\eta}{\ell_k^\Gamma}\left(2\frac{\ell_k^\Gamma}{N}\right) \\
&= 2\eta
\end{aligned}$$

para toda $u \in N^\tau_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}$, donde $\pi_{0,0,k} : W_0^{1,p}(\Omega)^\tau \setminus \{0\} \longrightarrow N^\tau_{\mu,f,k}$ denota la proyección radial. En consecuencia, la función

$$\beta^\tau \circ \pi_{0,0,k} : N^\tau_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k} \longrightarrow (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma.$$

está bien definida, es continua y $\mathbb{Z}/2-$equivariante.
Como $\delta > 0$ tal que $\text{mín}_{B_\delta(M)} f > 0$ y $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta)$, donde ε_δ es como en el corolario 2.3, dicho corolario garantiza la existencia de una $\theta := \theta_\varepsilon$ tal que

$$E_{\mu,f,k}(\pi_{\mu,f,k}(\omega^\tau_{\varepsilon,y})) \leq 2\theta_\varepsilon < 2\frac{\ell_k^\Gamma}{N} \quad \forall y \in M^-_{\tau,\delta}$$

donde

$$M^-_{\tau,\delta} := \{y \in M : dist\,(y, \partial\Omega \cup \Omega^\tau) \geq \delta\}$$
$$\omega^\tau_{\varepsilon,y} = \omega^\Gamma_{\varepsilon,y} - \omega^\Gamma_{\varepsilon,g_\tau y}, \quad \tau(g_\tau) = -1.$$

La función

$$\alpha^\tau_\delta : M^-_{\tau,\delta}/\Gamma \longrightarrow N^\tau_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}, \quad \alpha^\tau_\delta(\Gamma y) = \pi_{\mu,f,k}(\omega^\tau_{\varepsilon,y})$$

está bien definida, es continua y $\mathbb{Z}/2-$equivariante. Además

$$\beta^\tau(\pi_{0,0,k}(\alpha^\tau_\delta(\Gamma y))) = \Gamma y \quad \forall y \in M^-_{\tau,\delta}.$$

Del lema 2.7 considerando $h = \beta^\tau \circ \pi_{0,0,k}$ y $f = \alpha^\tau_\delta$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/2 - cat(N^\tau_{\mu,f,k} \cap E^\theta_{\mu,f,k}) &\geq \mathbb{Z}/2 - cat(\alpha^\tau_\delta) \\ &\geq \mathbb{Z}/2 - cat(\beta^\tau \circ \pi_{0,0,k} \circ \alpha^\tau_\delta)\end{aligned}$$

además $\beta^\tau \circ \pi_{0,0,k} \circ \alpha^\tau_\delta = i : M^-_{\tau,\delta}/\Gamma \hookrightarrow (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma$ es la inclusión, entonces

$$\mathbb{Z}/2 - cat(\beta^\tau \circ \pi_{0,0,k} \circ \alpha^\tau_\delta) = \mathbb{Z}/2 - cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}(M^-_{\tau,\delta}/\Gamma).$$

Por otra parte, la acción de $G/\Gamma \cong \mathbb{Z}/2$ sobre $(B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)$ es libre, ya que, la acción es inducida por $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ la cual está dada por la involución

$$\tau_B : (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma \longrightarrow (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma, \quad \tau_B(\Gamma y) = \Gamma(g_\tau y)$$

donde $g_\tau \in \tau^{-1}(-1)$ y $y \in (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)$ y la involución es libre, pues $\tau_B(\Gamma y) \neq \Gamma y$.
Denotemos por $\widehat{f}$ a la función inducida por $\beta^\tau \circ \pi_{0,0,k} \circ \alpha^\tau_\delta$ construida de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} M^-_{\tau,\delta}/\Gamma \arrow[r, "\beta^\tau\circ\pi_{0,0,k}\circ\alpha^\tau_\delta"] \arrow[d, "q_{M^-_{\tau,\delta}/\Gamma}"] & (B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma \arrow[d, "q_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}"] \\ (M^-_{\tau,\delta}/\Gamma)/(\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\widehat{f}"] & ((B_\delta(M) \setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma)/(\mathbb{Z}/2) \end{tikzcd}$$

Por el lema 2.8 obtenemos que

$$\mathbb{Z}/2 - cat(\beta^\tau \circ \pi_{0,0,k} \circ \alpha^\tau_\delta) = cat(\widehat{f}),$$

entonces

$$\mathbb{Z}/2 - cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}(M^-_{\tau,\delta}/\Gamma) = cat_{((B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma)/(\mathbb{Z}/2)}(M^-_{\tau,\delta}/\Gamma)/(\mathbb{Z}/2).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(M^-_{\tau,\delta}/\Gamma)/(\mathbb{Z}/2) &= \Big\{(\mathbb{Z}/2)(\Gamma y) : \Gamma y \in M^-_{\tau,\delta}/\Gamma\Big\} \\ &= \Big\{\Gamma y, -\Gamma y : \Gamma y \in M^-_{\tau,\delta}/\Gamma\Big\} \\ &= \Big\{G y : y \in M^-_{\tau,\delta}\Big\} \\ &= M^-_{\tau,\delta}/G,\end{aligned}$$

de forma análoga
$$((B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma)/(\mathbb{Z}/2)=(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/G,$$
así
$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/2-cat(N^\tau_{\mu,f,k}\cap E^\theta_{\mu,f,k}) &\geq \mathbb{Z}/2-cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/\Gamma}(M^-_{\tau,\delta}/\Gamma)\\ &= cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/G}(M^-_{\tau,\delta}/G),\end{aligned}$$

puesto que $m^\tau(0,0,k)=2\frac{\ell^\Gamma_k}{N}$, del corolario 2.2 y de la elección de λ^* y μ^* se sigue que
$$\theta<2\frac{\ell^\Gamma_k}{N}=2m^\Gamma(0,0,k)=m^\tau(0,0,k)\leq\left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu^*}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p-\lambda^*}\right)^{\frac{N}{p}}m^\tau(\mu,f,k)<2m^\tau(\mu,f,k).$$
Por tanto, $E_{\mu,f,k}\mid_{N^\tau_{\mu,f,k}}$ tiene al menos
$$cat_{(B_\delta(M)\setminus B_\delta(M)^\tau)/G}(M^-_{\tau,\delta}/G)$$
pares $\pm u$ de puntos críticos con $E_{\mu,f,k}(u)<\text{mín}\left\{2\frac{\ell^\Gamma_k}{N},2m^\tau(\mu,f,k)\right\}$. El corolario 2.2 y la elección de λ^* y μ^* implican además que si
$$\left(\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}-\mu^*}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_p-\lambda^*}\right)^{\frac{N}{p}}\leq\frac{\ell^\Gamma_k}{\ell^\Gamma_k-\delta'}$$
entonces
$$\begin{aligned}2\frac{\ell^\Gamma_k-\delta'}{N} &\leq \left(\frac{\widetilde{\mu}-\mu^*}{\widetilde{\mu}}\right)^{\frac{N}{p}}\left(\frac{\lambda_p-\lambda^*}{\lambda_p}\right)^{\frac{N}{p}}2\frac{\ell^\Gamma_k}{N}\\ &\leq m^\tau(\mu,f,k)\\ &\leq E_{\mu,f,k}(u)\\ &\leq \frac{1}{N}\,[\![\,u\,]\!]^p_{\mu,f}\\ &< 2\frac{\ell^\Gamma_k}{N},\end{aligned}$$
por tanto
$$2(\ell^\Gamma_k-\delta')\leq[\![\,u\,]\!]^p_{\mu,f}<2\ell^\Gamma_k.$$
Esto concluye la demostración. □

Ahora solo necesitamos comprobar que las soluciones obtenidas en los dos teoremas anteriores tienen las propiedades nodales requeridas. Este es el objetivo de la siguiente sección.

3.3. Propiedades nodales de las soluciones

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que un punto crítico de $E_{\mu,f,k}\mid_{N^\Gamma_{\mu,f,k}}: N^\Gamma_{\mu,f,k}\longrightarrow\mathbb{R}$ no cambie de signo.

Proposición 3.1. *si $u \in N^{\Gamma}_{\mu,f,k}$ es un punto crítico de $E_{\mu,f,k}$ tal que $E_{\mu,f,k}(u) < 2m^{\Gamma}(\mu,f,k)$ entonces, o bien $u \geq 0$, o bien $u \leq 0$.*

Demostración. si $u \in N^{\Gamma}_{\mu,f,k}$ es un punto crítico de $E_{\mu,f,k}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 = DE_{\mu,f,k}(u)u^{\pm} &= \int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u^{\pm} - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uu^{\pm}}{|x|^{p}}\right) \\ &- \int_{\Omega} f(x)|u|^{p-2}uu^{pm} - \int_{\Omega} k(x)|u|^{p^*-2}uu^{\pm} \\ &= \|u^{\pm}\|^{p}_{\mu,f} - |u^{\pm}|^{p^*}_{k,p^*} \end{aligned}$$

donde $u^{\pm} = \pm \max\{\pm u, 0\}$. Así pues $u^+ \neq 0$ y $u^- \neq 0$ entonces $u^{\pm} \in N^{\Gamma}_{\mu,f,k}$ y en consecuencia

$$E_{\mu,f,k}(u) = E_{\mu,f,k}(u^+) + E_{\mu,f,k}(u^-) \geq 2m^{\Gamma}(\mu,f,k)$$

contradiciendo la hipótesis. Por tanto o bien $u^+ = 0$ o $u^- = 0$. $\square$

Supongamos ahora que esxisten un subgrupo cerrado G de $O(N)$ y un epimorfismo continuo $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ tales que Ω, μ, f, k son $G-$invariantes y $ker\tau = \Gamma$. Queremos estudiar las propiedades nodales de las soluciones de energía pequeña del problema $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$.
Sea Γ un subgrupo cerrado de $O(N)$ y sea A un conjunto $\Gamma-$invariante de $\mathbb{R}^N$.

Definición 3.1. *Decimos que A es $\Gamma-$conexo si no se puede expresar como la unión de dos subconjuntos ajenos $\Gamma-$invariantes abiertos en A.*

Un subconjunto $\Gamma-$conexo no es necesariamente conexo.

Definición 3.2. *Una función continua $\Gamma-$invariante $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es $(\Gamma, 2)-$nodal si los conjuntos*

$$\{x \in A : u(x) > 0\} \quad \{x \in A : u(x) < 0\}$$

son no vacíos y $\Gamma-$conexos.

Proposición 3.2. *Sean G un subgrupo cerrado de $O(N)$, $\tau : G \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ un epimorfismo continuo y $\Gamma = ker\tau$. Supongamos que Ω, μ, f y k son $G-$invariantes. Si $u \in N^{\tau}_{\mu,f,k}$ es un punto crítico de $E_{\mu,f,k}$ tal que $E_{\mu,f,k}(u) < 2m^{\tau}(\mu,f,k)$ entonces u es $(\Gamma,2)-$nodal.*

Demostración. Como u es una solución del problema $(P^{\tau}_{\mu,f,k})$, se tiene que u es continua en $\overline{\Omega}$. Supongamos que existen dos abiertos ajenos $\Gamma-$ invariantes U_1 y U_2 tales que

$$\{x \in \Omega : u(x) > 0\} = U_1 \cup U_2.$$

Sea $g_\tau \in G$ tal que $\tau(g_\tau) = -1$, definimos

$$u_i(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in U_i \cup g_\tau(U_i) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

entonces $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega)^\tau$ para $i = 1, 2$. Como u es punto crítico de $E_{\mu,f,k}$ se tiene que

$$0 = DE_{\mu,f,k}(u)u_i = \|u_i\|_{\mu,f}^p - |u_i|_{k,p^*}^{p^*}$$

entonces $U_1 \neq \emptyset$ y $U_2 \neq \emptyset$ de donde $u_1, u_2 \in N_{\mu,f,k}^\tau$ y

$$E_{\mu,f,k}(u) = E_{\mu,f,k}(u_1) + E_{\mu,f,k}(u_2) > 2m^\Gamma(\mu, f, k)$$

lo cual contradice la hipótesis. Por tanto

$$\{x \in \Omega : u(x) > 0\} \quad \text{y} \quad \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$$

son $\Gamma-$conexos y u es $(\Gamma, 2)-$nodal. □

3.4. Propiedades simétricas de las soluciones

Teorema 3.3. *Sea $N \geq p^2$. Supongamos que se cumplen **(K1)**, **(K2)**, **(M1)**, **(F1)**, **(F2)**, **(NE)** y $\ell_k^\Gamma \leq S_{p,\mu_0}^{\frac{N}{p}}$. Sea $\widetilde{\Gamma}$ un subgrupo cerrado de $O(N)$ tal que $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}$ y Ω, μ, f, k son $\widetilde{\Gamma}-$invariantes y se cumple*

$$\min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\Gamma x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}} < \min_{x \in \overline{\Omega}} \frac{\#\overline{\Gamma} x}{k(x)^{\frac{N-p}{p}}}.$$

Dados $\delta, \delta' > 0$ existen $\lambda^* \in (0, \lambda_p)$ y $\mu^* \in (0, \widetilde{\mu})$ tal que si $\max_{x \in \overline{\Omega}} f(x) \leq \lambda^*$ y $\max_{x \in \overline{\Omega}} \mu(x) \leq \mu^*$, entonces para toda $f(x) \in (0, \lambda^*)$ y $\mu(x) \in (0, \mu^*)$ para toda $x \in \Omega$ el problema $(P_{\mu,f,k}^\Gamma)$ tiene al menos

$$cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M_\delta^- / \Gamma)$$

soluciones positivas que no son $\widetilde{\Gamma}-$invariantes.

Demostración. Dados δ, δ'. Por el Teorema 3.1 existen λ^* y μ^* tal que el problema $(P_{\mu,f,k}^\Gamma)$ tiene al menos

$$cat_{B_\delta(M)/\Gamma}(M_\delta^- / \Gamma)$$

soluciones positivas que satisfacen

$$E_{\mu,f,k}(u) < \frac{\ell_k^\Gamma}{N}.$$

Dado que $m^{\widetilde{\Gamma}}(\mu, f, k)$ es la mínima energía posible de una solución $\widetilde{\Gamma}-$invariante, bastará probar que existe $f_0 \in (0, \lambda^*)$ y $\mu_0 \in (0, \mu^*)$ tal que

$$\frac{\ell_k^\Gamma}{N} \leq m^{\widetilde{\Gamma}}(\mu, f, k) \quad \text{si } \max_{\Omega} f \leq f_0. \tag{3.1}$$

Ahora bien, el corolario 2.2 afirma que

$$\left(\frac{\widetilde{\mu} - \mu_0}{\widetilde{\mu}}\right)^{\frac{N}{p}} \left(\frac{\lambda_p - f_0}{\lambda_p}\right)^{\frac{N}{p}} m^{\widetilde{\Gamma}}(0, 0, k) \leq m^{\widetilde{\Gamma}}(\mu, f, k),$$

así pues, para obtener (3.1) bastará probar que

$$\frac{\ell_k^{\Gamma}}{N} < m^{\widetilde{\Gamma}}(0,0,k).$$

Si $m^{\widetilde{\Gamma}}(0,0,k)$ no se alcanza, entonces $m^{\widetilde{\Gamma}}(0,0,k) = \frac{\ell_k^{\widetilde{\Gamma}}}{N}$ y la condición (3.1) garantiza que

$$m^{\widetilde{\Gamma}}(0,0,k) = \frac{\ell_k^{\widetilde{\Gamma}}}{N} > \frac{\ell_k^{\Gamma}}{N}.$$

Supongamos que existe $u \in N_{0,0,k}^{\widetilde{\Gamma}}$ tal que $E_{\mu,f,k}(u) = m^{\widetilde{\Gamma}}(0,0,k)$, observemos que $N_{0,0,k}^{\widetilde{\Gamma}} \subset N_{0,0,k}^{\Gamma}$. La condición **(NE)** asegura que $E_{0,0,k}$ no alcanza su ínfimo en $N_{0,0,k}$ en consecuencia,

$$\frac{\ell_k^{\Gamma}}{N} = m^{\Gamma}(0,0,k) < m^{\widetilde{\Gamma}}(0,0,k) = E_{0,0,k}(u)$$

esto prueba la afirmación (3.1) y prueba el teorema. □

Cabe mencionar que los resultados obtenidos en el presente trabajo se pretenden publicar en un revista especializada, en la parte de anexos adjuntamos el correo electronico por parte de la revista que hace constar que recibe el artículo.

4

Discusión

Tras describir y analizar los diferentes resultados obtenidos con la aplicación del metodo variacional en ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, procede ahora realizar una discusión y conclusiones que sirvan para consolidar lo obtenido en la presente tesis, al tiempo que suponga una futura línea para nuestras investigaciones.

El objetivo general que planteamos en nuestra investigación era hacer uso del método variacional para encontrar soluciones de una ecuación diferencial parcial, elíptica y con singularidad, el método variacional nos tranfomó el problema (ecuación diferencial) en un problema de puntos críticos, lo relevante del trabajo es que el método variacional hizo intervenir a los espacios de Sobolev. En trabajos previos se han usado esta clase de espacios y en particular espacios de Sobolev que resultan ser espacios de Hilbert los cuales son espacios lineales, completos y con producto escalar. En este trabajo se probaron resultados similares a los mostrados en [7], la diferencia de los trabajos previos con nuestro proyecto de investigación fue el hecho de que el espacio de Sobolev en el cual se hizo el estudio resultó ser un espacio de Banach el cual no posee un producto escalar, entonces los resultados expuestos en esta tesis pueden ser considerados como una generalización a resultados enunciados en la introducción ya que haciendo las consideraciones adecuadas en las funciones μ, f, k y el exponente p en el problema de investigación podemos llegar a problemas estudiados previamente.Debemos hacer notar que los teoremas importantes para la construcción de la demostración del Teorema principal, fueron modificados debido a que los espacios usados no resultaron espacios Euclidianos y propiedades clásicas como el Teorema de Riesz ya no pueden ser aplicables. Otro aspecto importante del trabajo realizado es que la topología juega un papel importante en el desarrollo de nuestra investigación ya que el número de soluciones del problema o el número de puntos críticos esta intimamente relacionado con la topología del dominio.

5

Conclusiones

Las aportaciones más relevantes del proyecto de investigación pueden ser resumidas en las siguientes conclusiones.

1. El problema de investigación tiene soluciones positivas simétricas y soluciones que cambian de signo (nodales).
2. El método variacional resulta ser eficiente al resolver ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden.
3. El número de soluciones débiles del problema de investigación depende de la topología del dominio.
4. El análisis funcional es una herramienta de suma importancia pues se analiza el funcional asociado al problema con resultados propios de esta área de las matemáticas.
5. La categoria de Lusternik-Schnirelmann es un invariante topológico con el cual fue posible establecer la relación entre el número de soluciones y la topología del dominio.
6. La teoría de grupos fue un factor fundamental en los resultados de soluciones simétricas y nodales.

Apéndice A

Anexos

Clasificación de una ecuación diferencial parcial

Las siguientes definiciones son de suma importancia, pues identificamos que tipo de ecuación tiene el problema y de que clase es, dichas definiciones se pueden consultar en [17] y [23].

Notación A.1 (Multiíndice). *a) Un vector de la forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ donde cada componente α_i es un entero no negativo es llamado multiíndice de orden*

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N.$$

b) Dado un multiíndice α, definimos

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N} u}.$$

c) Si k es un entero no negativo

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$$

el conjunto de todas las derivadas parciales de orden k.

d)

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definición A.1. *Una expresión de la forma*

$$F\left(D^k u(x), D^{k-1} u(x), ..., Du(x), u(x), x\right) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \tag{A.1}$$

es llamada ecuación diferencial parcial de orden k, donde

$$F : \mathbb{R}^{N^k} \times \mathbb{R}^{N^{k-1}} \times ... \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

está dada y $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es desconocida.

Definición A.2 (Clasificación de una E.D.P.). *i) La ecuación diferencial parcial (A.1) es llamada* ***lineal*** *si tiene la forma*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x)$$

para funciones dadas a_α $(|\alpha| \leq k)$, *y* f. *Esta Ecuación Diferencial Parcial Lineal es* ***homogénea*** *si* $f \equiv 0$.

ii) La Ecuación diferencial parcial (A.1) es ***semilineal*** *si es de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)D^\alpha u + a_0\left(D^{k-1}u, ..., Du, u, x\right) = 0$$

.

iii) La Ecuación diferencial parcial (A.1) es ***cuasilineal*** *si es de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left(D^{k-1}u, ..., Du, u, x\right)D^\alpha u + a_0\left(D^{k-1}u, ..., Du, u, x\right) = 0$$

Observación A.1. *De acuerdo a las definiciones anteriores, una expresión de la forma*

$$F\left(D^2u(x), Du(x), u(x), x\right) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{A.2}$$

es llamada ecuación diferencial parcial de segundo orden, donde

$$F : \mathbb{R}^{N^2} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

además es llamada ***cuasilineal*** *si es de la forma*

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha\left(Du, u, x\right)D^\alpha u + a_0\left(Du, u, x\right) = 0$$

Definición A.3. *Se dice que una ecuación diferencial parcial de segundo orden es* ***elíptica*** *si la matriz de coeficientes es (en cada caso) definida positiva en el dominio de los respectivos argumentos (ver [23]).*

Algunos resultados técnicos

Dado un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ denotemos por

$$C_c^k(\Omega) := C_c^0(\Omega) \cap C^k(\Omega)$$

al conjunto de funciones $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k con soporte compacto contenido en Ω.

Proposición A.1 (Integración por partes). *Se cumplen lo siguiente*

1. *Si* $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces* $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \ \ \forall i = 1, 2, ..., N.$

2. *Si* $f \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, *entonces*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi + \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f = 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., N$$

Demostración. Ver [13]. □

El siguiente resultado es de suma importancia para el problema abordado en esta tesis, específicamente en la parte de la singularidad de la ecuación diferencial parcial. El teorema siguiente es conocido como la desigualdad de Hardy, la prueba se puede consultar en [21] ó [28].

Teorema A.1. *Sean* $1 < p < N$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto, suave y acotado, entonces si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1. $\frac{u}{|x|} \in L^p(\Omega)$.
2. ***(Desigualdad de Hardy)***
$$\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \leq \frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$
con $\widetilde{\mu} = \left(\frac{N-p}{p}\right)^p$. $\widetilde{\mu}$ *es conocida como la mejor constante de Hardy.*

Desigualdad de Hölder

Sea $1 \leq p \leq \infty$; se designa por p' el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La demostración del siguiente teorema se puede ver en [5] y [30].

Teorema A.2 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean* $f \in L^p$ *y* $g \in L^{p'}$ *con* $1 \leq p \leq \infty$. *Entonces* $f \cdot g \in L^1$ *y*

$$\int |fg| \leq |f|_{L^p} |g|_{L^{p'}}.$$

Una consecuencia muy útil de la desigualdad de Hölder es el siguiente corolario.

Corolario A.1. *Sean* $f_1, f_2, ..., f_k$ *funciones tales que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \ \ 1 \leq i \leq k \quad \textit{con} \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} = 1,$$

entonces

$$\int_\Omega |f_1 f_2 \cdots f_k| \leq |f_1|_{L^{p_1}} |f_2|_{L^{p_2}} \cdots |f_k|_{L^{p_k}}.$$

Espacios de Sobolev

Definición A.4. *Sea* $p \in [1, \infty]$. *El* ***espacio de Sobolev*** $W^{1,p}(\Omega)$ *se define como*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{ll} \exists g_1, g_2, ..., g_N \in L^p(\Omega) & \textit{tales que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi & \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \ i = 1, 2, ..., N \end{array} \right\}$$

Proposición A.2. *El espacio* $W^{1,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $p \in [1, \infty]$.

Definición A.5. *Sea $1 \leq p < \infty$; $W_0^{1,p}(\Omega)$ designa el cierre de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Es conocido que para tratar problemas como el que se está desarrollando en esta tesis, los espacios donde pueden ser analizadas las soluciones son los espacios de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, la norma usual en éste espacio es

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Encajes de Sobolev

Los encajes de Sobolev son una herramienta fundamental para el desarrollo de esta tesis, éstas desigualdades permiten estimar la norma en L^q de una función $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ en términos de la norma en L^p de su gradiente. Estas desigualdades se extienden por densidad a $W_0^{1,p}(\Omega)$ y permiten obtener encajes continuos de éste en otros espacios.
A continuación se enunciaran algunos resultados acerca de estos encajes cuya prueba se puede consultar en [5], [13] y [43].
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto de clase C^1 con $\partial\Omega$ acotada o bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.

Teorema A.3. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Se verifica*
si $1 \leq p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para toda $q \in [p, \infty)$,
si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,
con inyecciones continuas.

Teorema A.4 (Rellich-Kondrachov)**.** *Supongamos Ω acotado de clase C^1, se verifica:*
si $p < N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para toda $q \in [1, p^*)$,
si $p = N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para toda $q \in [1, \infty)$,
si $p > N$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,
con inyecciones compactas.

Los resultados anteriores son válidos para $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.5 (Desigualdad de Poincare)**.** *Supongamos que Ω es un abierto acotado. Entonces existe una constante C (depende de Ω y p) tal que*

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \ (1 \leq p \leq \infty)$$

en particular la expresión $|\nabla u|_{L^p(\Omega)}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$.

Operadores de Nemytskij

El siguiente teorema es de suma importancia ya que enuncia condiciones necesarias para que un operador de Nemytskij sea continuo. (ver Teorema 12.10 de [18] página 78)

Teorema A.6. *Sean $p_1, p_2, ..., p_m$ y r números reales, $p_i \geq 1$ ($i = 1, 2, ..., m$), $r \geq 1$. Sea $h = h(x, \xi)$ una función definida para $x \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{R}^m$, y h una función de Caratheodory (es decir, para toda $\xi \in \mathbb{R}^N$, la función $h_\xi(x) = h(x, \xi)$ es medible sobre Ω y para casi toda $x \in \Omega$, la función $h_x(\xi) = h(x, \xi)$ es continua sobre $\mathbb{R}^m$). Denotemos por $\mathcal{H}(u_1, ..., u_m)$ al operador de Nemytskij determinado por h.*

i) Entonces, para funciones arbitrarias $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $(i = 1, 2, ..., m)$,

$$\mathcal{H}(u_1, ..., u_m) \in L^r(\Omega),$$

si y solo si se cumple la siguiente condición

(a) Existen $g \in L^r(\Omega)$ *y* $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$ *tal que para casi toda* $x \in \Omega$ *y para toda* $\xi \in \mathbb{R}^m$

$$|h(x, \xi_1, ..., \xi_m)| \leq g(x) + c \sum_{i=1}^{m} |\xi|^{\frac{p_i}{r}}$$

ii) Si la condición (a) se satisface, entonces el operador de Nemytskij $\mathcal{H}$ *es un operador continuo de* $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) \times ... \times L^{p_m}(\Omega)$ *en* $L^r(\Omega)$.

Diferenciabilidad en espacios de Banach

En este apéndice mostraremos que el funcional asociado (2.4) es de clase C^2, para esto, primero enunciaremos algunos resultados importantes.

Diferenciabilidad en espacios de Banach

Sean X, Y espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente.

Lema A.1. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *una función lineal. Entonces* T *es continua si y sólo si existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

A una función lineal y continua $T : X \longrightarrow Y$ se le suele llamar un operador acotado.
Denotemos por

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y : T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Este es un espacio de Banach con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y.$$

Denotamos por $X' := \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. El espacio X' se llama el dual topológico de X.

Definición A.6. *Sea* U *un subconjunto abierto de* X. *Una función* $F : U \longrightarrow Y$ *es Gateaux diferenciable en un punto* $u \in U$ *si existe* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ *tal que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = Tv, \quad \forall v \in X.$$

T *se llama la derivada de Gateaux de* F *en* u *y se denota por* $DF(u) := T$. *Decimos que* F *es continuamente diferenciable o que es de clase* C^1 *si es Gateaux diferenciable en todo punto* $u \in U$, *y la derivada*

$$DF : U \longrightarrow \mathcal{B}(X, Y), \quad u \longmapsto DF(u)$$

es continua.

Como $\mathcal{B}(X,Y)$ es de nuevo un espacio de Banach, tiene sentido preguntarse si $DF: U \longrightarrow \mathcal{B}(X,Y)$ es continuamente diferenciable. Si lo es, decimos que F es dos veces continuamente diferenciable o de clase C^2. La derivada de DF se llama segunda derivada de F y se denota por $D^2F: U \longrightarrow \mathcal{B}(X, \mathcal{B}(X,Y))$. Decimos que F es ***k-veces continuamente diferenciable*** o de clase C^k si existen todas sus derivadas hasta la de orden k, que denotamos D^kF, y son continuas. Decimos que F es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.
Los siguientes resultados serán de suma importancia para probar que el funcional asociado al problema (2.1) es de clase C^2.

Teorema A.7. *Si $r > 1$, entonces $\alpha_0(t) = |t|^r$, con $t \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, y*

$$\alpha_0'(t) = r|t|^{r-2}t.$$

Una consecuencia importante de este teorema son los siguientes lemas.

Lema A.2. *Si $r > 1$, $a, b \in \mathbb{R}^N$, entonces $\alpha_1(t) = |a+tb|^r$, con $t \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y*

$$\alpha_1'(t) = r|a+tb|^{r-2}(a+tb)\cdot b,$$

además se satisface la siguiente desigualdad

$$\left|\frac{|a+tb|^r - |a|^r}{t}\right| \leq r|b|\left(|a|+|b|\right)^{r-2}, \quad \forall t \in [-1,1].$$

Demostración. Observemos que

$$\alpha_1(t) = \left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+tb_k)^2\right)^{\frac{r}{2}},$$

usando la regla de la cadena y el Teorema A.7 se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_1'(t) &= \frac{r}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+tb_k)^2\right)^{\frac{r}{2}-1}\left(\sum_{k=1}^{N}2(a_k+tb_k)b_k\right)\\ &= r|a+tb|^{r-2}(a+tb)\cdot b.\end{aligned}$$

Por otra parte, por el Teorema del Valor Medio, para cada $t \in [-1,1]$ existe $s \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{|a+tb|^r - |a|^r}{t} &= \frac{\alpha_1(t)-\alpha_1(0)}{t}\\ &= \alpha_1'(st)\\ &= r|a+(st)b|^{r-2}(a+(st)b)\cdot b.\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}\left|\frac{|a+tb|^r - |a|^r}{t}\right| &= r|a+(st)b|^{r-2}|(a+(st)b)\cdot b|\\ &\leq r|a+(st)b|^{r-2}|a+(st)b||b|\\ &= r|b||a+(st)b|^{r-1}\\ &\leq r|b|\left(|a|+|(st)b|\right)^{r-1}\\ &\leq r|b|\left(|a|+|b|\right)^{r-1}\end{aligned}$$

para todo $t \in [-1,1]$. $\square$

Lema A.3. *Si $r > 1$, $a, b \in \mathbb{R}^N$, entonces $\alpha_2(t) = |a+tb|^{r-2}(a+tb)$, con $t \in \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 y*

$$\alpha_2'(t) = (r-2)|a+tb|^{r-4}\left[(a+tb)\cdot b\right](a+tb) + |a+tb|^{r-2}b$$

además se satisface la siguiente desigualdad

$$\left|\frac{|a+tb|^{r-2}(a+tb) - |a|^{r-2}a}{t}\right| \leq (r-1)|b|\left(|a|+|b|\right)^{r-2}, \quad \forall t \in [-1,1].$$

Demostración. Observemos que

$$\alpha_2(t) = \sum_{k=1}^{N} |a+tb|^{r-2}(a_k + tb_k)\, e_k,$$

donde e_k es un vector canónico de $\mathbb{R}^N$. Usando el Lema A.2 se tiene

$$\alpha_2'(t) = \sum_{k=1}^{N}\left[(r-2)|a+tb|^{r-4}\left[(a+tb)\cdot b\right](a_k+tb_k) + |a+tb|^{r-2}b_k\right] e_k$$

es decir,

$$\alpha_2'(t) = (r-2)|a+tb|^{r-4}\left[(a+tb)\cdot b\right](a+tb) + |a+tb|^{r-2}b.$$

Por otra parte, aplicando el Teorema del Valor Medio a cada entrada de la función α_2 para cada $t \in [-1,1]$ existe $s \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{|a+tb|^{r-2}(a+tb) - |a|^{r-2}a}{t} &= \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(0)}{t} \\
&= \alpha_2'(st) \\
&= (r-2)|a+(st)b|^{r-4}\left[(a+(st)b)\cdot b\right](a+(st)b) + |a+(st)b|^{r-2}b.
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|a+tb|^{r-2}(a+tb) - |a|^{r-2}a}{t}\right| &\leq (r-2)|a+(st)b|^{r-4}|a+(st)b||b||a+(st)b| + |a+(st)b|^{r-2}|b| \\
&\leq (r-2)|a+(st)b|^{r-2}|b| + |a+(st)b|^{r-2}|b| \\
&= (r-2)|b||a+(st)b|^{r-2} \\
&\leq (r-2)|b|\left(|a| + |(st)b|\right)^{r-2} \\
&\leq (r-2)|b|\left(|a|+|b|\right)^{r-2}
\end{aligned}$$

para toda $t \in [-1,1]$. $\square$

Diferenciabilidad del funcional

Proposición A.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p \in [2, N]$. El funcional*

$$E_{\mu,f,k}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu(x)\frac{|u|^p}{|x|^p} - f(x)|u|^p \right) dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega k(x)|u|^{p^*} dx$$

es de clase C^2 y

$$\begin{aligned} DE_{\mu,f,k}(u)v &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p} \right) \\ &\quad - \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}uv - \int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv \end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Probaremos esta proposición mediante los siguientes lemas.

Lema A.4. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $r \in [2, N]$, $Q(x) \in L^\infty(\Omega)$ y el funcional $\psi : W_0^{1,r}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por*

$$\psi(u) = \frac{1}{r}\int_\Omega Q(x)|u(x)|^r dx$$

es de clase C^2 y

$$D\psi(u)v = \int_\Omega Q(x)|u(x)|^{r-2}u(x)v(x)dx.$$

Demostración. Primero probaremos que el funcional está bien definido. Como $Q \in L^\infty(\Omega)$ entonces existe una constante C_∞ tal que $|Q(x)| \leq C_\infty$ c.t.p. en Ω lo cual implica

$$\psi(u) \leq \frac{C_\infty}{r}\int_\Omega |u(x)|^r dx,$$

por las desigualdades de Sobolev se tiene

$$\psi(u) \leq \frac{C_\infty}{r}\|u\|^r_{W_0^{1,r}(\Omega)} < \infty,$$

por lo cual, el funcional ψ está bien definido.

Ahora probaremos que ψ es Gateaux diferenciable.

Sean $u, v \in W_0^{1,r}(\Omega)$ entonces $u, v \in L^r(\Omega)$, usando el Lema A.2 se tiene que

$$\frac{|u + tv|^r - |u|^r}{t} \leq r(|u| + |v|)^{r-1}|v|, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

por lo cual

$$\int_\Omega \left| \frac{|u + tv|^r - |u|^r}{t} \right| \leq r\int_\Omega (|u| + |v|)^{r-1}|v|, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

pero $v \in L^r(\Omega)$ y $(|u|+|v|)^{r-1} \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$, usando la desigualdad de Hölder se obtiene

$$r\int_\Omega (|u|+|v|)^{r-1}|v| \leq |v|_{L^r(\Omega)}\,||u|+|v||^{r-1}_{L^r(\Omega)}$$

así

$$r(|u|+|v|)^{r-1}|v| \in L^1(\Omega) \;\; \forall t \in [-1,1]$$

y

$$\frac{|u+tv|^r - |u|^r}{t} \in L^1(\Omega) \;\; \forall t \in [-1,1]\,,$$

además

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{|u(x)+tv(x)|^r - |u(x)|^r}{t} &= r|u(x)|^{r-2}u(x)v(x), \quad \forall x \in \Omega \\ \left|\frac{|u(x)+tv(x)|^r - |u(x)|^r}{t}\right| &\leq r(|u(x)|+|v(x)|)^{r-1}|v(x)|, \;\; \forall x \in \Omega, t \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\psi(u+tv)-\psi(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{r}\int_\Omega Q(x)\frac{|u(x)+tv(x)|^r - |u(x)|^r}{t}dx \\ &= \frac{1}{r}\int_\Omega Q(x)\left(\lim_{t\to 0}\frac{|u(x)+tv(x)|^r - |u(x)|^r}{t}\right)dx \\ &= \int_\Omega Q(x)|u(x)|^{r-2}u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Ahora bien, para $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$, la función $\mathcal{T} : W_0^{1,r}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{T}v := \int_\Omega Q(x)|u|^{r-2}uv,$$

es claramente lineal, además como $u, v \in W_0^{1,r}(\Omega)$ entonces $|v| \in L^r(\Omega), |u|^{r-1} \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$ y usando la desigualdad de Hölder y las desigualdades de Sobolev se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}v| &= \left|\int_\Omega Q(x)|u|^{r-2}uv\right| \\ &\leq \int_\Omega |Q(x)||u|^{r-1}|v| \\ &\leq C_\infty \int_\Omega |u|^{r-1}|v| \\ &\leq C_\infty ||u|^{r-1}|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}|v|_{L^r(\Omega)} \\ &= C_\infty |u|^{r-1}_{L^r(\Omega)}|v|_{L^r(\Omega)} \\ &\leq C_\infty |u|^{r-1}_{L^r(\Omega)} C_0 \|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}, \end{aligned}$$

como u es fija y $C_0 > 0$, considerando $C = C_\infty |u|_{L^r(\Omega)}^{r-1} C_0$ se tiene $C > 0$ y en consecuencia

$$|\mathcal{T}v| \leq C\|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}.$$

Lo cual significa que $\mathcal{T}$ es continua, por lo cual

$$\mathcal{T} \in \mathcal{B}\left(W_0^{1,r}(\Omega), \mathbb{R}\right).$$

Por lo anterior obtenemos que ψ es *Gateaux diferenciable* y

$$D\psi(u)v = \int_\Omega Q(x)|u|^{r-2}uv.$$

Por otra parte, notemos que $D\psi : W_0^{1,r}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,r}(\Omega) := \mathcal{B}\left(W_0^{1,r}(\Omega), \mathbb{R}\right)$, ahora probaremos que ψ es de clase C^1,basta probar que $D\psi$ es continua. Para ello consideremos una sucesión convergente $u_n \longrightarrow u$ en $W_0^{1,r}$ mostraremos que

$$\|D\psi(u_n) - D\psi(u)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$\|D\psi(u_n) - D\psi(u)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}=1} |D\psi(u_n)v - D\psi(u)v|,$$

pero

$$\begin{aligned}
|D\psi(u_n)v - D\psi(u)v| &= \left|\int_\Omega Q(x)|u_n|^{r-2}u_n v - \int_\Omega Q(x)|u|^{r-2}uv\right| \\
&\leq \int_\Omega |Q(x)v\left(|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right)| \\
&\leq C_\infty \int_\Omega |v| \left||u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right| \\
&\leq C_\infty \int_\Omega \left|v\left(|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right)\right|,
\end{aligned}$$

como $u, v, u_n \in W_0^{1,r}(\Omega)$ se tiene que $v \in L^r(\Omega)$, $\left(|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right) \in L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$. Usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|D\psi(u_n)v - D\psi(u)v| \leq C_\infty |v|_{L^r(\Omega)} \left||u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}.$$

Consideremos la función $\phi : L^r(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)$ definida como

$$\phi(u) = |u|^{r-2}u,$$

dado que $u_n \longrightarrow u$ en $L^r(\Omega)$, el teorema A.2 o A.4 de [43] asegura que

$$\phi(u_n) \longrightarrow \phi(u) \text{ en } L^{\frac{r}{r-1}}$$

es decir,

$$\left|\,|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0. \tag{A.3}$$

Usando los encajes de Sobolev se tiene

$$\begin{aligned}
|D\psi(u_n)v - D\psi(u)v| &\leq C_\infty |v|_{L^r(\Omega)} \left|\,|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}\\
&\leq C_\infty C\|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \left|\,|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}
\end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
\|D\psi(u_n) - D\psi(u)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}=1} |D\psi(u_n)v - D\psi(u)v|\\
&\leq |D\psi(u_n)v - D\psi(u)v|\\
&\leq C_\infty C\|v\|_{W_0^{1,r}(\Omega)} \left|\,|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}\\
&\leq C_\infty C \left|\,|u_n|^{r-2}u_n - |u|^{r-2}u\right|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (A.3)

$$\|D\psi(u_n) - D\psi(u)\|_{W^{-1,r}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

es decir, $D\psi$ es continua, así ψ es de clase C^1.
A continuación probaremos que $D\psi_1$ es *Gateaux diferenciable.*

Sean $u, v, h \in W_0^{1,r}(\Omega)$ entonces $u, v, h \in L^r(\Omega)$, usando el Lema A.3 se tiene que

$$\frac{|u+th|^{r-2}(u+th) - |u|^{r-2}u}{t} v \leq (r-1)|h|\left(|u|+|h|\right)^{r-2} v, \quad \forall t \in [-1,1]$$

por lo cual

$$\int_\Omega \left|\frac{|u+th|^{r-2}(u+th) - |u|^{r-2}u}{t} v\right| \leq (r-1)\int_\Omega |h|\left(|u|+|h|\right)^{r-2}|v|, \quad \forall t \in [-1,1],$$

pero $v, h \in L^r$ y $\left(|u|+|h|\right)^{r-2} \in L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega)$, usando el corolario A.1 obtenemos

$$(r-1)\int_\Omega |h|\left(|u|+|h|\right)^{r-2}|v| \leq (r-1)|h|_{L^r(\Omega)}\,\left||u|+|h|\right|^{r-2}_{L^r(\Omega)}\,|v|_{L^r(\Omega)}, \quad \forall t \in [-1,1], \quad \forall t \in [-1,1]$$

así

$$(r-1)|h|\left(|u|+|h|\right)^{r-2}|v| \in L^1(\Omega) \;\; \forall t \in [-1,1]$$

y

$$\left|\frac{|u+th|^{r-2}(u+th) - |u|^{r-2}u}{t} v\right| \in L^1(\Omega) \;\; \forall t \in [-1,1]$$

además

$$\lim_{t\to 0} \frac{|u(x)+th(x)|^{r-2}(u(x)+th(x)) - |u(x)|^{r-2}u(x)}{t} v(x) = (r-1)|u(x)|^{r-2}h(x)v(x), \quad \forall x \in \Omega$$

y

$$\left| \frac{|u(x)+th(x)|^{r-2}(u(x)+th(x)) - |u(x)|^{r-2}u(x)}{t} v(x) \right| \leq (r-1)(|u(x)|+|h(x)|)^{r-2}|h(x)||v(x)|$$

$\forall t \in [-1,1]\,, x \in \Omega$. Del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesge se sigue que

$$\begin{aligned}
D^2\psi(u)(v,h) &= \lim_{t\to 0} \frac{D\psi(u+th)v - D\psi(u)v}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega Q(x) \frac{|u(x)+th(x)|^{r-2}(u(x)+th(x)) - |u|^{r-2}u}{t} v(x)dx \\
&= \int_\Omega Q(x) \lim_{t\to 0} \left(\frac{|u(x)+th(x)|^{r-2}(u(x)+th(x)) - |u|^{r-2}u}{t} v(x) \right) dx \\
&= (r-1) \int_\Omega Q(x)|u(x)|^{r-2}h(x)v(x)dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, $u, v \in W_0^{1,r}(\Omega)$ la función $\mathfrak{T} : W_0^{1,r}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathfrak{T}h := (r-1) \int_\Omega Q(x)|u|^{r-2}vh$$

claramente es lineal, además como $|u|^{r-2} \in L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega)$ y $v, h \in L^r(\Omega)$ entonces la desigualdad de Hölder junto con los encajes de Sobolev implica

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}h| &\leq (r-1)C_\infty \int_\Omega |u|^{r-2}|v||h| \\
&\leq (r-1)C_\infty |u|^{r-2}_{L^r(\Omega)} |v|_{L^r(\Omega)} |h|_{L^r(\Omega)} \\
&\leq (r-1)C_\infty |u|^{r-2}_{L^r(\Omega)} |v|_{L^r(\Omega)} C_0 \|h\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}
\end{aligned}$$

donde $C_0 > 0$. Considerando $C = (r-1)C_\infty |u|^{r-2}_{L^r(\Omega)} |v|_{L^r(\Omega)} C_0$ se tiene $C > 0$ y

$$|\mathfrak{T}h| \leq C\|h\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}$$

es decir, $\mathfrak{T}$ es continua. Así $D\psi$ es *Gateaux diferenciable* y

$$D^2\psi(u)(v,h) = (r-1) \int_\Omega Q(x)|u|^{r-2}vh.$$

Ahora, para probar que ψ es de clase C^2 basta probar que $D^2\psi : W_0^{1,r}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(W_0^{1,r}(\Omega), W^{-1,r}(\Omega))$ es continua. Consideremos una sucesión convergente $u_n \longrightarrow u$ en $W_0^{1,r}(\Omega)$, notemos que

$$\|D^2\psi(u_n) - D^2\psi(u)\|_{\mathcal{B}(W_0^{1,r}(\Omega), W^{-1,r}(\Omega))} = \sup_{\|h\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}=1} |D^2\psi(u_n)(v,h) - D^2\psi(u)(v,h)|$$

pero

$$\begin{aligned}
|D^2\psi(u_n)(v,h) - D^2\psi(u)(v,h)| &= \left|(r-1)\int_\Omega Q(x)(|u_n|^{r-2} - |u|^{r-2})vh\right| \\
&\leq (r-1)\int_\Omega |Q(x)| \left||u_n|^{r-2} - |u|^{r-2}\right| |v||h| \\
&\leq (r-1)C_\infty \int_\Omega \left||u_n|^{r-2} - |u|^{r-2}\right| |v||h|.
\end{aligned}$$

Por otra parte, consideremos la función $A : L^r(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega)$ dada por

$$A(u) = |u|^{r-2}.$$

Dado que $u_n \longrightarrow u$ en $L^r(\Omega)$, el teorema A.2 o A.4 de [43] asegura que $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ en $L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega)$, es decir,

$$\left||u_n|^{r-2} - |u|^{r-2}\right|_{L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Como $(|u_n|^{r-2} - |u|^{r-2}) \in L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega), v, h \in L^r(\Omega)$ y usando desigualdad de Hölder junto con encajes de Sobolev

$$|D^2\psi(u_n)(v,h) - D^2\psi(u)(v,h)| \leq (r-1)C_\infty \left||u_n|^{r-2} - |u|^{r-2}\right|_{L^{\frac{r}{r-2}}(\Omega)} |v|_{L^r(\Omega)} C\|h\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}$$

donde $C > 0$. Por lo cual

$$\|D^2\psi(u_n) - D^2\psi(u)\|_{\mathcal{B}(W_0^{1,r}(\Omega), W^{-1,r}(\Omega))} \longrightarrow 0$$

es decir, $D^2\psi$ es continua. Por lo tanto ψ es de clase C^2, lo cual concluye la demostración. □

Para el siguiente resultado necesitaremos el siguiente lema.

Lema A.5. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p \in [2, N]$. La función $\sigma : L^p(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ dada por*

$$\sigma(u) = \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}}$$

es continua.

Demostración. Supongamos que σ no es continua, entonces existe una sucesión (u_n) en $L^p(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y $\dfrac{|u_n|^{p-2}u_n}{|x|^{p-1}}$ no converge a $\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}}$ en $L^{\frac{p}{p-1}}$. Por tanto, existen $\varepsilon_0 > 0$ y una subsucesión (v_n) de (u_n) tales que

$$\left|\frac{|v_n|^{p-2}v_n}{|x|^{p-1}} - \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}}\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} > \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $v_n \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$, la sucesión (v_n) contiene una subsucesión (w_n) con las siguientes propiedades

$$\begin{array}{ll} w_n(x) \longrightarrow u(x) & c.d. \text{ en } \Omega \\ |w_{n+1} - w_n|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^n} & \forall n \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{A.4}$$

Definamos

$$\widetilde{w}_n := |w_1(x)| + \sum_{j=1}^{n-1} |w_{j+1}(x) - w_j(x)|,$$

entonces $\widetilde{w}_n \in L^p(\Omega)$ y para $m > n$ se tiene

$$|\widetilde{w}_m(x) - \widetilde{w}_n(x)| = \sum_{j=1}^{m-1} |w_{j+1}(x) - w_j(x)|.$$

Usando la desigualdad de Minkowski (es decir, la desigualdad del triángulo para la norma $|\cdot|_{L^p(\Omega)}$) obtenemos

$$|\widetilde{w}_m - \widetilde{w}_n|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{j=n}^{m-1} |w_{j+1}(x) - w_j(x)|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{2^j}.$$

Esto pueba que $(\widetilde{w}_n)$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$, en consecuencia $\widetilde{w}_n \longrightarrow \widetilde{w}$ en $L^p(\Omega)$.
Notemos que

$$|w_n(x)| \leq |w_n(x) - w_{n-1}(x)| + \cdots + |w_2(x) - w_1(x)| + |w_1(x)| = \widetilde{w}_n(x) \leq \widetilde{w}(x) \tag{A.5}$$

para todo $x \in \Omega$. Y tomando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$

$$|u(x)| \leq \widetilde{w}(x) \;\text{ c.d. en } \Omega \tag{A.6}$$

en consecuencia, se sigue de (A.4) que

$$\left|\frac{|w_n(x)|^{p-2}w_n(x) - |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)}{|x|^{p-1}}\right|^{\frac{p}{p-1}} = \frac{||w_n(x)|^{p-2}w_n(x) - |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)|^{\frac{p}{p-1}}}{|x|^p} \longrightarrow 0$$

c.d. en Ω, además de (A.5) y (A.6)

$$\begin{aligned}
\frac{||w_n(x)|^{p-2}w_n(x) - |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)|^{\frac{p}{p-1}}}{|x|^p} &\leq \frac{\left(|w_n(x)|^{p-1} + |u(x)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}}{|x|^p} \\
&\leq \frac{2^{\frac{p}{p-1}}\left(|w_n(x)|^p + |u(x)|^p\right)}{|x|^p} \\
&\leq \frac{2^{\frac{2p-1}{p-1}}|\widetilde{w}(x)|^p}{|x|^p}
\end{aligned}$$

entonces

$$\int_\Omega \left|\frac{|w_n(x)|^{p-2}w_n(x) - |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)}{|x|^{p-1}}\right|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq 2^{\frac{2p-1}{p-1}} \frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla \widetilde{w}(x)|^p dx < \infty$$

es decir,

$$\left|\frac{|w_n(x)|^{p-2}w_n(x) - |u_n(x)|^{p-2}u_n(x)}{|x|^{p-1}}\right|^{\frac{p}{p-1}} \in L^1(\Omega).$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada obtenemos que

$$\left| \frac{|w_n|^{p-2} - |u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}} \right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

es decir,

$$|\sigma(w_n) - \sigma(u)|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

esto contradice nuestra primer suposición y demuestra que σ es continua. $\square$

Usaremos este resultado para probar el siguiente Lema.

Lema A.6. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p \in [2, N]$. *El funcional* $\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dado por*

$$\varphi(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{\mu(x)|u|^p}{|x|^p} dx$$

es de clase C^2, *además*

$$D\varphi(u)v = \int_\Omega \frac{\mu(x)|u|^{p-2}uv}{|x|^p} dx$$

para todo $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Primero probaremos que φ es *Gateaux diferenciable*, para ello consideremos nuevamente el Lema A.2, $\mu \in C(\overline{\Omega})$, Ω acotado y procediendo como en el Lema A.4 aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Se tiene para $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{\mu(x)}{|x|^p} \left(\frac{|u+tv|^p - |u|^p}{t} \right) dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{\mu(x)}{|x|^p} \left(\lim_{t \to 0} \frac{|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t} \right) dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega \frac{\mu(x)}{|x|^p} p|u(x)|^{p-2}u(x)v(x) dx \\
&= \int_\Omega \frac{\mu(x)|u(x)|^{p-2}u(x)v(x)}{|x|^p} dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la función $F : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Fv := \int_\Omega \frac{\mu(x)|u|^{p-2}uv}{|x|^p},$$

claramente es lineal. Además, para $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
|Fv| &= \left| \int_\Omega \frac{\mu(x)|u|^{p-2}uv}{|x|^p} dx \right| \\
&\leq \int_\Omega \frac{|\mu(x)||u|^{p-1}|v|}{|x|^p} dx \\
&\leq \max_{x \in \overline{\Omega}} |\mu(x)| \int_\Omega \frac{|u|^{p-1}|v|}{|x|^p} dx \\
&= \max_{x \in \overline{\Omega}} |\mu(x)| \int_\Omega \left(\frac{|u|^{p-1}}{|x|^{p-1}} \right) \left(\frac{|v|}{|x|} \right) dx
\end{aligned}$$

Notemos que $\frac{|u|^{p-1}}{|x|^{p-1}} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ y $\frac{|u|}{|x|} \in L^p(\Omega)$ pues

$$\int_\Omega \left|\frac{|v|}{|x|}\right|^p dx = \int_\Omega \frac{|v|^p}{|x|^p} dx \leq \frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla v|^p dx < \infty$$

y

$$\int_\Omega \left|\frac{|u|^{p-1}}{|x|^{p-1}}\right|^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx = \leq \frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty.$$

Entonces, usando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
|Fv| &\leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \left|\frac{|u|^{p-1}}{|x|^{p-1}}\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \left|\frac{|v|}{|x|}\right|_{L^p(\Omega)} \\
&= \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \left[\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^p} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_\Omega \frac{|v|^p}{|x|^p} dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \left[\frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^p dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla v|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \frac{1}{\widetilde{\mu}} \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{\mu}$ es la constante de Hardy. Considerando $C = \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \frac{1}{\widetilde{\mu}} \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} > 0$ obtenemos,

$$|Fv| \leq C\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

lo cual significa que F es continua, por lo cual

$$F \in \mathcal{B}\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right).$$

Por lo anterior obtenemos que φ es Gateaux diferenciable y

$$D\varphi(u)v = \int_\Omega \frac{\mu(x)|u|^{p-2}uv}{|x|^p}.$$

Por otra parte, notemos que $D\varphi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p}(\Omega) := \mathcal{B}\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R}\right)$, ahora probaremos que φ es de clase C^1, basta probar que $D\varphi$ es continua. Para ello consideremos una sucesión convergente $u_n \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, mostraremos que

$$\|D\varphi(u_n) - D\varphi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$\|D\varphi(u_n) - D\varphi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} |D\varphi(u_n)v - D\varphi(u)v|,$$

pero

$$\begin{aligned}
|D\varphi(u_n)v - D\varphi(u)v| &= \left|\int_\Omega \frac{\mu(x)|u_n|^{p-2}u_n v}{|x|^p} - \int_\Omega \frac{\mu(x)|u|^{p-2}uv}{|x|^p}\right| \\
&\leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \int_\Omega \left|\left(\frac{|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}}\right) \frac{v}{|x|}\right|.
\end{aligned}$$

Notemos que, dado que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces $\frac{v}{|x|} \in L^p(\Omega)$, en efecto, por la desigualdad de Hardy se tiene

$$\int_\Omega \frac{|v|^p}{|x|^p} \leq \frac{1}{\widetilde{\mu}} \int_\Omega |\nabla v|^p < \infty$$

además, como $u_n, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que $\dfrac{|u_n|^{p-2}u_n}{|x|^{p-1}}, \dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, así

$$\frac{|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Por lo cual, aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}
|D\varphi(u_n)v - D\varphi(u)v| &\leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \left| \frac{|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}} \right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \left|\frac{v}{|x|}\right|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \widetilde{\mu}^{-\frac{1}{p}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \left| \frac{|u_n|^{p-2}u_n}{|x|^{p-1}} - \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{p-1}} \right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Por el lema anterior y dado que $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$ se tiene

$$|D\varphi(u_n)v - D\varphi(u)v| \leq \left(\max_{x\in\overline{\Omega}} |\mu(x)|\right) \widetilde{\mu}^{-\frac{1}{p}} |\sigma(u_n) - \sigma(u)|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Por lo tanto

$$\|D\varphi(u_n) - D\varphi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Es decir, φ es de clase C^1. □

Lema A.7. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p \in [2, N]$. El funcional $\chi : W_0^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dado por*

$$\chi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

es de clase C^2 y

$$D\chi(u)v \quad = \quad \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Claramente χ está bien definida gracias a los encajes de Sobolev. De manera análoga al lema A.4 se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\chi(u+tv) - \chi(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{p}\int_\Omega \left(|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p\right) dx}{t} \\
&= \frac{1}{p} \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega \left(\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t} \right) dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la función $G : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Gv := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

es claramente lineal. Notemos que

$$\begin{aligned} |Gv| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u \cdot \nabla v| dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} |\nabla u| |\nabla v| dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| dx. \end{aligned}$$

Como $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$, además $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ pues;

$$\int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-1} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx < \infty,$$

entonces, usando la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned} |Gv| &\leq \left| |\nabla u|^{p-1} \right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} ||\nabla v||_{L^p(\Omega)} \\ &= \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dado que u es fija y considerando $C = \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ se obtiene

$$|Gv| \leq C \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

es decir, G es continua, por lo cual

$$G \in \mathcal{B}\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R} \right)$$

con lo cual se obtiene que χ es *Gateaux diferenciable* y

$$D\chi(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Para probar que χ es de clase C^1 mostraremos que $D\chi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p}(\Omega) := \mathcal{B}\left(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R} \right)$ dada por

$$D\chi(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

es continua.
Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$, probaremos que

$$\|D\chi(u_n) - D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\|D\chi(u_n)-D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} &= \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} |D\chi(u_n)v - D\chi(u)v| \\
&= \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \left| \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \right) dx \right| \\
&= \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \left| \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right) \cdot \nabla v dx \right| \\
&\leq \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \int_\Omega \left| \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u \right) \cdot \nabla v \right| dx \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

pero

$$\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\cdot\nabla v = \left[|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_1} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\frac{\partial v}{\partial x_1} + \cdots + \left[|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_N} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\right]\frac{\partial v}{\partial x_N}$$

entonces

$$|\left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\cdot\nabla v| \leq \sum_{i=1}^{N} \left| \left[|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\frac{\partial v}{\partial x_i} \right|.$$

Así obtenemos

$$\|D\chi(u_n)-D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \sum_{i=1}^{N} \left| \left[|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]\frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \qquad \text{(A.8)}$$

Dado que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ para cada $i = 1,2,...,N$.
Además $|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$, $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ para cada $i = 1,2,...,N$, en efecto, como $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{\frac{p(p-2)}{p-1}} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right|^{\frac{p}{p-1}} dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{\frac{p(p-2)}{p-1}} |\nabla u_n|^{\frac{p}{p-1}} dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx \\
&= \|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

es decir, $|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ para cada $i = 1,2,...,N$. De la manera análoga se obtiene $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ para cada $i = 1,2,...,N$, con lo cual obtenemos

$$\left(|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$$

para cada $i = 1, 2, ..., N$.

Usando la desigualdad de Hölder en la ecuación (A.8) obtenemos

$$\|D\chi(u_n) - D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \sum_{i=1}^{N} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^p(\Omega)}.$$

Recordemos que $\|v|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = |v|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^p(\Omega)}$ entonces, para una k fija tenemos $\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_{L^p(\Omega)} \leq 1$. Por lo cual

$$\|D\chi(u_n) - D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{N} \left| |\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}. \tag{A.9}$$

Por otra parte, consideremos la función $h_k : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h_k(x, y) = |y|^{p-2}y_k, \quad k = 1, 2, ..., N$$

donde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$ con y_k medible.
Claramente cada $h_k(x, y)$ es una función de Caratheodory. Definamos el operador de ***Nemytskij*** (ó superposición) H_k generado por h_k actuando sobre $y = y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_N(x))$ ($y_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función en $L^p(\Omega)$), dado por

$$\begin{aligned} H_k(y_1, y_2, ..., y_N)(x) &= h(x, y(x)) \\ &= h(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_N(x)) \end{aligned}$$

para $x \in \Omega$.

Notemos que $H_k(y_1, y_2, ..., y_N)(x) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, en efecto pues

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left||y|^{p-2}y_k\right|^{\frac{p}{p-1}} dx &= \int_\Omega |y|^{\frac{p(p-2)}{p-1}}|y_k|^{\frac{p}{p-1}}dx \\ &\leq \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{N}(y_i)^2\right]^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}} |y_k|^{\frac{p}{p-1}}dx \\ &\leq \int_\Omega N^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}-1}\left[\sum_{i=1}^{N}|y_i|^{\frac{p(p-2)}{p-1}}\right]|y_k|^{\frac{p}{p-1}}dx \\ &= N^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\int_\Omega |y_i|^{\frac{p(p-2)}{p-1}}|y_k|^{\frac{p}{p-1}}dx\right] \end{aligned}$$

y dado que $|y_k|^{\frac{p}{p-1}} \in L^{p-1}(\Omega)$ y $|y_i|^{\frac{p(p-2)}{p-1}} \in L^{\frac{p-1}{p-2}}(\Omega)$, usando la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left||y|^{p-2}y_k\right|^{\frac{p}{p-1}} dx &\leq N^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}-1}\sum_{i=1}^N \left||y_i|^{\frac{p(p-2)}{p-1}}\right|_{L^{\frac{p-1}{p-2}}(\Omega)} \left||y_k|^{\frac{p}{p-1}}\right|_{L^{p-1}(\Omega)} \\
&= N^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}-1}\sum_{i=1}^N |y_i|^{\frac{p(p-2)}{p-1}}_{L^p(\Omega)} |y_k|^{\frac{p}{p-1}}_{L^p(\Omega)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

De esta manera se tiene

$$H_k : [L^p(\Omega)]^N \longrightarrow L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega).$$

Además $h_k(x,y)$ cumple la condición de crecimiento, es decir,

$$\begin{aligned}
|h_k(x,y)| &= \left||y|^{p-2}y_k\right| \\
&= |y|^{p-2}|y_k| \\
&\leq |y|^{p-2}|y| \\
&= |y|^{p-1} \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^N (y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{p-1} \\
&\leq \left[N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^N |y_i|\right]^{p-1} \\
&\leq N^{\frac{p-3}{2}}\sum_{i=1}^N |y_i|^{p-1}
\end{aligned}$$

El teorema A.6 del apéndice A, asegura que el operador H_k es continuo de $\underbrace{L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)\times ... \times L^p(\Omega)}_{N-veces}$ en $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$.

Ahora recordemos que, dado que $u_n \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ en $L^p(\Omega)$ para cada $i = 1,2,...,N$ lo cual implica que $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ en $L^p(\Omega)^N$. Retomando la ecuación (A.9)

$$\begin{aligned}
\|D\chi(u_n) - D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} &\leq \sum_{i=1}^N \left||\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^N \left|H_i\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right)(x) - H_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)(x)\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}
\end{aligned}$$

pero H_i es continua para cada $i = 1,2,...,N$, entonces

$$\left|H_i\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \frac{\partial u_n}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right)(x) - H_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)(x)\right|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

para cada $i = 1, 2, ..., N$, por lo cual

$$\|D\chi(u_n) - D\chi(u)\|_{W^{-1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

es decir, $D\chi$ es continua, lo cual implica que χ es de clase C^1.

Ahora mostraremos que $D\chi$ es de clase C^1. Primero calculemos la derivada de *Gateaux* de $D\chi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p}(\Omega)$. Sean $u, v, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{D\chi(u+th)v - D\chi(u)v}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_\Omega |\nabla(u+th)|^{p-2}\nabla(u+th)\cdot\nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v dx\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+th)|^{p-2}\nabla(u+th) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u}{t}\cdot\nabla v dx.
\end{aligned}$$

Del Lema A.3 se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{|\nabla u(x) + t\nabla h(x)|^{p-2}\left(\nabla u(x) + t\nabla h(x)\right) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)}{t}\cdot\nabla v(x)\right|\\
\leq\ & (p-1)|\nabla h(x)|\left(|\nabla u(x)| + |\nabla h(x)|\right)^{p-2}|\nabla v(x)|,
\end{aligned}$$

$\forall x \in \Omega, t \in [-1, 1]$, además

$$\int_\Omega |\nabla h(x)|\left(|\nabla u(x)| + |\nabla h(x)|\right)^{p-2}|\nabla v(x)| dx < \infty$$

$\forall x \in \Omega, t \in [-1, 1]$, pues, dado que $u, v, h \in W_0^{1,p}(\Omega)$, usando el Corolario A.1 se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla h|\left(|\nabla u| + |\nabla h|\right)^{p-2}|\nabla v| dx &\leq ||\nabla h||_{L^p(\Omega)}\left|\left(|\nabla u| + |\nabla h|\right)^{p-2}\right|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)}||\nabla v||_{L^p(\Omega)}\\
&= \|h\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,||\nabla u| + |\nabla h||_{L^p(\Omega)}^{p-2}\,\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

De esta manera se puede aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue. Por lo cual

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{D\chi(u+th)v - D\chi(u)v}{t}\\
=\ & \int_\Omega \left[\lim_{t\to 0}\frac{|\nabla u + t\nabla h|^{p-2}\left(\nabla u + t\nabla h\right) - |\nabla u|^{p-2}\nabla u}{t}\right]\cdot\nabla v dx\\
=\ & \int_\Omega \left[\lim_{t\to 0}(p-2)|\nabla u + t\nabla h|^{p-4}\left[(\nabla u + t\nabla h)\cdot\nabla h\right]\left(\nabla u + t\nabla h\right) + |\nabla u + t\nabla h|^{p-2}\nabla h\right]\cdot\nabla v dx\\
=\ & \int_\Omega \left[(p-2)|\nabla u|^{p-4}\left[\nabla u\cdot\nabla h\right]\nabla u + |\nabla u|^{p-2}\nabla h\right]\cdot\nabla v dx
\end{aligned}$$

Ahora bien, dados $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ la función

$$\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\mathcal{F}h := \int_\Omega \left[(p-2)|\nabla u|^{p-4}\left[\nabla u\cdot\nabla h\right]\nabla u + |\nabla u|^{p-2}\nabla h\right]\cdot\nabla v dx$$

claramente es lineal y dado que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}h| &\leq \int_\Omega \left|(p-2)|\nabla u|^{p-4}\left[\nabla u\cdot\nabla h\right]\nabla u + |\nabla u|^{p-2}\nabla h\right| |\nabla v| dx \\
&\leq \int_\Omega \left((p-2)|\nabla u|^{p-4}|\nabla u||\nabla h||\nabla u| + |\nabla u|^{p-2}|\nabla h|\right)|\nabla v| dx \\
&= \int_\Omega \left((p-2)|\nabla u|^{p-2}|\nabla h| + |\nabla u|^{p-2}|\nabla h|\right)|\nabla v| dx \\
&= \int_\Omega (p-1)|\nabla u|^{p-2}|\nabla h||\nabla v| dx \\
&\leq (p-1)||\nabla u|^{p-2}|_{L^{\frac{p}{p-2}}(\Omega)}||\nabla h||_{L^p(\Omega)}||\nabla v||_{L^p(\Omega)} \\
&= (p-1)\|u\|^{p-2}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|h\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{F}$ es continua. Por lo tanto $D\chi$ es *Gateaux diferenciable* y

$$D^2\chi(u)(v,h) = \int_\Omega \left((p-2)|\nabla u|^{p-4}\left[\nabla u\cdot\nabla h\right]\nabla u + |\nabla u|^{p-2}\nabla h\right)\cdot\nabla v dx.$$

Finalmente, para probar que χ es de clase C^2 solo hace falta probar que

$$D^2\chi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}\left(W_0^{1,p}(\Omega), W^{-1,p}(\Omega)\right)$$

es continua lo cual se hace de manera análoga a como se probó que la primer derivada es continua. □

Finalmente, podemos dar la **demostración de la proposición A.3**

Demostración. Consideremos el funcional

$$E_{\mu,f,k}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega \left(|\nabla u|^p - \mu(x)\frac{|u|^p}{|x|^p} - f(x)|u|^p\right)dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega k(x)|u|^{p^*}dx$$

Podemos dividir el funcional como la suma de los siguientes funcionales

$$\begin{aligned}
\theta_1(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx. \\
\theta_2(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega \mu(x)\frac{|u|^p}{|x|^p} dx. \\
\theta_3(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega f(x)|u|^p dx. \\
\theta_4(u) &= \frac{1}{p^*}\int_\Omega k(x)|u|^{p^*} dx.
\end{aligned}$$

donde $\theta_i : W_0^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ para $i = 1, 2, 3, 4$. El lema A.7 prueba que el funcional θ_1 es de clase C^2, el lema A.6 prueba que el funcional θ_2 es de clase C^2, el lema A.4 considerando $Q(x) = f(x)$ y $r = p$ prueba que el funcional θ_3 es de clase C^2, finalmente el lema A.4 considerando $Q(x) = k(x)$ y $r = p^*$ prueba que el funcional θ_4 es de clase C^2. Además estos lemas tienen como consecuencia que

$$\begin{aligned} DE_{\mu,f,k}(u)v &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v - \mu(x)\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^p} \right) \\ &\quad - \int_\Omega f(x)|u|^{p-2}uv - \int_\Omega k(x)|u|^{p^*-2}uv \end{aligned}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Bibliografía

[1] D. Arcoya, J. I. Diaz, L. Tello, *S-shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalue modelarising in climatology*, J. Differential Equations, Vol. 150 (1), pp. 215-225, (1998).

[2] C. Atkinson, K. E. Kalli, *Some boundary value problems for the Bingham model*, J. Non-Newtonian Fluid Mech, Vol. 41, pp. 339-363, (1992).

[3] Th. Aubin, *Problemes isoperimetriques et espaces de sobolev*, J. Diff. Geom. 11 (1976), 573-598.

[4] J. W. Barrett, L. Prigozhin, *Bean's critical-state model as the $p \longrightarrow \infty$ limit of an evolutionary p-laplacian equation*, Nonlinear Anal. 42, pp. 977-993, (2000)

[5] H. Brezis, *Análisis funcional*, Alianza editorial, Madrid 1984.

[6] H. Brezis, L. Niremberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents*, Commun. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[7] A. Cano, M. Clapp, *Multiple positive and 2-nodal symmetric solutions of elliptic problems with critical nonlinearity*, J. Differential Equations 237 (2007) 133-158.

[8] A. Cano, S. Hernández-Linares, E. Hernández-Martínez, *Multiple solutions for a singular semilinear elliptic problems with critical exponent and symmetries*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010 (2010), No. 112, pp. 1-14.

[9] A. Cano, E. Hernández- Martínez, *Multiple symmetric solutions for a singular semilinear elliptic problem with critical exponent*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 122, pp. 1-14.

[10] A. Castro, M. Clapp, *The effect of the domain topology on the number of minimal nodal solutions of an elliptic equation at critical growth in a symmetric domain*, Nonlinearity 16 (2003), 579-590.

[11] G. Cerami, S. Solimini, M. Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. 69 (1986), 289-306.

[12] M. Clapp, *A global compactness result for elliptic problems with critical nonlinearity on symmetric domains*, en Nonlinear Equations: Methods, Models and applications, 117-126, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 54, Birkhäuser, Boston, 2003.

[13] M. Clapp, *Análisis Matemático*, 1a. Edición, Colección papirhos, Serie textos, Núm. 2, 2015.

[14] M. Clapp, D. Puppe, *Critical point theory with symmetries*, J. reine angew. Math. 418 (1991), 1-29.

[15] M. Clapp, S. Tiwari, *Multiple solutions to a pure supercritical problem for the p-Laplacian*, Calc. Var. (2016) 55:7.

[16] P. Drabek, A. Kufner, and F. Nicolosi, *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities*, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1997.

[17] L.C. Evans, *Partial differential equations*, GSM 19, Amer.Math.Soc., Providence RI 1998.

[18] S. Fucik, A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam- Oxford-New York 1980.

[19] M. F. Furtado, *Multiplicity of nodal solutions for a critical quasilinear equation with symmetry*, Nonlinear Analysis, 63 (2005) 1153-1166.

[20] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Existence and nonuniqueness for the p-Laplacian nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations 12 (1987) 1389-1430.

[21] J. Garcia Azorero, I. Peral Alonso, *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Differential Equations 144 (1998) 441-476.

[22] N. Ghoussoub, C. Yuan, *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5703-5743.

[23] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001.

[24] Q. Guo, P. Niu, *Nodal and positive solutions for singular semilinear elliptic equations with critical exponents in symmetric domains*, J. Differential Equations 245 (2008), 3974-3985.

[25] Q. Guo, P. Niu, Y. Wang, *Global compactness results for singular quasilinear elliptic problems with critical Sobolev exponents and applications*, Nonlinear Analysis 71 (2009) 2944-2963.

[26] P. G. Han, *Quasilinear elliptic problems with critical exponents and Hardy terms*, Nonlinear Anal. TMA 61 (2005) 735-758.

[27] P. G. Han, Z. X. Liu, *Solution for a singular critical growth problem with weight*, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007), 1075-1085.

[28] G. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1934.

[29] E. Jannelli *The role played by space dimension in elliptic critical problems*, J. Differential Equations 156, (1999), 407-426.

[30] J. Jost, *Postmodern Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998.

[31] A. N. Kolmogorov, *Introductory real analysis*, Dover publications, Inc, New York.

[32] M. Lazzo, *Solutions positives multiples pour une é quation elliptique non linéaire avec léxposant critique de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris 314, Série I (1992), 61-64.

[33] P. Lindqvist, *On non-linear Rayleigh quotient*, Potential Anal. Vol. 2 pp. 199-218, (1993)

[34] R. Palais, *Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds*, Topology Vol. 5 pp. 115-132, Pergamon Press, 1966.

[35] R. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm.Math.Phys. 69 (1979), 19-30.

[36] I. Peral, *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, Second School on Nonlinear Functional Analysis and Appl. Diff. Eqns., I.C.T.P.I. Trieste, 1997.

[37] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw - Hill, New York 1966.

[38] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York 1966.

[39] M. Struwe, *A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities*, Math.Z. 187 (1984), 511-517.

[40] M. Struwe, *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1996.

[41] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Math. Pure Appl. 110, (1976), 353-372.

[42] L. Wang, Q. Wei, D. Kang, *Multiple positive solutions for p-Laplace elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and a Hardy-type term*, Nonlinear Analysis 74 (2011) 626-638.

[43] M. Willem, *Minimax theorems*, PNLDE 24, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin 1996.