Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

# CONVERGENCIA SECUENCIAL EN ESPACIOS TOPOLÓGICOS PRIMERO NUMERABLES, DE FRÉCHET, SECUENCIALES Y DE ESTRECHEZ NUMERABLE

# TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

PATRICIA CRUZ MATÍAS

DIRECTORES DE TESIS:

DR. DAVID MAYA ESCUDERO
DR. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

MAYO DE 2018

# Introducción

La Topología es la disciplina matemática de origen geométrico que estudia las propiedades intrínsecas de la posición de un objeto que no cambian cuando se someten a cierto tipo de transformaciones llamadas *funciones continuas*. Los objetos de estudio se llaman *espacios topológicos* y son parejas de la forma $(X, \tau)$, donde $X$ es un conjunto y $\tau$ es una familia de subconjuntos de $X$ (entre los que se encuentran el vacío y el total) que es cerrada bajo uniones arbitrarias y bajo intersecciones finitas. En este caso $\tau$ es llamada una *topología* para $X$ y a los elementos de $\tau$ se les llama *abiertos*. Además, decimos que $W \subset X$ es *cerrado* en $X$ si y sólo si $X - W \in \tau$. Así, una topología para $X$ también está determinada por sus conjuntos cerrados.

Para un espacio topológico $(X, \tau)$, una *sucesión* de elementos en $X$ es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Si $f(n) = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión se representa por el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y los valores de $f$, esto es, los elementos $x_n$, se llaman términos de la sucesión. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $X$ *converge* a un punto $w \in X$, si para cualquier $U \in \tau$ tal que $w \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq m$. Podemos representar el concepto anterior escribiendo simplemente: $x_n \longrightarrow w$. A $w$ se le llama *punto límite* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Los espacios métricos son un caso particular de espacios topológicos. En estos espacios un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos los puntos límite de sus sucesiones convergentes. Como los conjuntos cerrados determinan a los abiertos, entonces las sucesiones convergentes caracterizan la topología en un espacio métrico.

En esta tesis estudiaremos brevemente el concepto de convergencia de sucesiones o *convergencia secuencial* en los espacios topológicos de estrechez numerable, secuenciales, de Fréchet y primero numerables. Analizaremos la influencia de las sucesiones convergentes en la topología para dichos espacios. El Capítulo 1 consta de conceptos básicos que son fundamentales para una lectura accesible de este trabajo. El Capítulo 2 está dedicado al concepto central, convergencia de sucesiones, donde presentaremos el comportamiento de las sucesiones convergentes en distintos espacios topológicos. En los capítulos $3, 4, 5$ y $6$ veremos cómo se relacionan los espacios topológicos de estrechez numerable, secuenciales, de Fréchet y primero numerables, y su comportamiento con respecto a algunas estructuras topológicas.

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo se presenta notación, definiciones y propiedades fundamentales para el desarrollo de los siguientes Se analizan brevemente los espacios topológicos y métricos. Especialmente se estudian las topologías inducidas por funciones.

## 1.1. Conjuntos y funciones

**Notación 1.1.** El símbolo $\mathbb{N}$ denotará al conjunto de los números naturales y el símbolo $\omega$ denotará al primer ordinal infinito, esto es, $\omega = \{0\} \cup \mathbb{N}$; y al primer cardinal infinito.

**Notación 1.2.** Denotaremos por $\omega_1$ al primer ordinal infinito no numerable. Además $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ con el orden lineal.

**Definición 1.3.** Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto. Decimos que $A$ es

- **finito** si existen $n \in \mathbb{N}$ y una función biyectiva $f : A \to \{1, 2, \cdots, n\}$.
- **numerable** si existe una función biyectiva $f : A \to \mathbb{N}$.
- **a lo más numerable** si $A$ es un conjunto finito o numerable.

**Notación 1.4.** Sean $X, Y$ conjuntos. Entonces $Y^X = \{f : X \to Y \mid f \text{ es función } \}$.

La prueba del siguiente teorema se puede consultar en [6, Sección 1.14, b), p. 8].

**Teorema 1.5.** *Si* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una colección de conjuntos numerables, entonces* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *es numerable.*

**Proposición 1.6.** *Sea* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces se satisface que:*

*i)* $\frac{1}{m} < \frac{m+2}{m^2+m}$.

*ii) Si* $m \neq 1$ *se cumple que* $\frac{m+2}{m^2+m} < \frac{1}{m-1}$.

**Proposición 1.7.** *Sean $X, Y$ dos conjuntos y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Para cada $W \subset X$ se satisface que $\{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset W\} = Y - f(X - W)$.*

**Demostración**. Sea $z \in Y$ tal que $f^{-1}(\{z\}) \subset W$. Se tiene que $X - W \subset X - f^{-1}(\{z\})$. Además $X - f^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(\{z\})$. Como $f^{-1}(Y) - f^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(Y - \{z\})$, se deduce que $X - W \subset f^{-1}(Y - \{z\})$. Luego $f(X - W) \subset f(f^{-1}(Y - \{z\}))$. De que $f$ es suprayectiva se sigue que $f(f^{-1}(Y - \{z\})) = Y - \{z\}$. Así, $f(X - W) \subset Y - \{z\}$. Es decir, $z \in Y - f(X - W)$. Por lo tanto $\{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset W\} \subset Y - f(X - W)$. Por otra parte, sea $z \in Y - f(X - W)$ y supongamos que $f^{-1}(\{z\}) \cap (X - W) \neq \emptyset$. Sea $k \in f^{-1}(\{z\}) \cap (X - W)$. Aseguramos que $f(k) = z$ y $f(k) \in f(X - W)$. Obtenemos que $z \in f(X - W)$, esto no es posible. Garantizamos que $f^{-1}(\{z\}) \cap (X - W) = \emptyset$, de donde $f^{-1}(\{z\}) \subset W$. Entonces $Y - f(X - W) \subset \{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset W\}$. Concluimos que $\{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset W\} = Y - f(X - W)$. □

## 1.2. Espacios topológicos

Las definiciones que no se escriban se consideraran como en [5].

**Definición 1.8.** Sean $X$ un conjunto y $\tau$ una familia de subconjuntos de $X$. Decimos que $\tau$ es una **topología** para $X$ si satisface las siguientes condiciones:

i. $\emptyset, X \in \tau$.

ii. Si $\mathcal{C} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \tau$.

iii. Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.

Si $\tau$ es una topología para $X$, a los elementos de $\tau$ los llamamos **abiertos** en $X$.
A la pareja $(X, \tau)$ se le llama **espacio topológico.**

**Definición 1.9.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $x$ es un **punto aislado** de $X$ si $\{x\} \in \tau$.

**Definición 1.10.** Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico y $Y \subset X$. Al espacio topológico $(Y, \tau_Y)$ donde $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$ se le llama **subespacio** de $(X, \tau_X)$.

**Proposición 1.11.** *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos. Sea $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$. Definamos $\tau = \{U \subset X : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in I\}$. Entonces $(X, \tau)$ es un espacio topológico.*

**Demostración**. Para cada $\alpha \in I$, tenemos que $\emptyset \cap X_\alpha = \emptyset \in \tau_\alpha$. Entonces $\emptyset \in \tau$. Por otro lado, para cada $\beta \in I$ se tiene que $X_\beta \subset X$, y $X \cap X_\beta = X_\beta \in \tau_\beta$. Aseguramos que $X \in \tau$.

Sea $\{P_\sigma : \sigma \in J\}$ una familia arbitraria de elementos de $\tau$. Para cada $\sigma \in J$, se satisface que $P_\sigma \cap X_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Sea $\beta \in I$. De que $\left(\bigcup_{\sigma\in J} P_\sigma\right) \cap X_\beta = \bigcup_{\sigma\in J}(P_\sigma \cap X_\beta)$ y $\bigcup_{\sigma\in J}(P_\sigma \cap X_\beta) \in \tau_\beta$ garantizamos que $\left(\bigcup_{\sigma\in J} P_\sigma\right) \cap X_\beta \in \tau_\beta$. Así, $\bigcup_{\sigma\in J} P_\sigma \in \tau$.

Finalmente, sean $A, B \in \tau$. Para cada $\beta \in I$, se deduce que $(A \cap B) \cap X_\beta = (A \cap X_\beta) \cap (B \cap X_\beta)$ y $(A \cap X_\beta) \cap (B \cap X_\beta) \in \tau_\beta$. Es decir, $(A \cap B) \cap X_\beta \in \tau_\beta$. Por lo tanto $A \cap B \in \tau$.

Concluimos que $(X, \tau)$ es un espacio topológico. □

Denotamos con $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ al espacio topológico de la Proposición 1.11. Llamamos **suma topológica** de la familia $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ al espacio $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$.

**Definición 1.12.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $P \subset X$. Un **punto de adherencia** a $P$, es un elemento $x \in X$ tal que para cada $U \in \tau$ que satisface que $x \in U$, se tiene que $U \cap P \neq \emptyset$. Al conjunto $Cl_X(P)$ de puntos de adherencia a $P$ se le llama **cerradura** del conjunto $P$ en $X$.

De la Definición 1.12 se deduce la siguiente proposición.

**Proposición 1.13.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $A, B$ subconjuntos de $X$.*

*i. Si $A \subset B$ entonces $Cl_X(A) \subset Cl_X(B)$.*

*ii. $A \subset Cl_X(A)$.*

*iii. $A$ es cerrado en $X$ si y sólo si $A = Cl_X(A)$.*

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [6, Teorema 7.2, p. 44]

**Teorema 1.14.** *Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función. Entonces $f$ es continua si y sólo si para cada $E \subset X$, $f(Cl_X(E)) \subset Cl_Y(f(E))$.*

El siguiente teorema puede cosultarse en [1, Teorema 8.3, pp. 79 - 80]

**Teorema 1.15.** *Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función. Entonces $f$ es continua si y sólo si para cada $B \subset Y$, $Cl_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl_Y(B))$.*

**Proposición 1.16.** *Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos, y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Entonces $f(X - Cl_X(f^{-1}(W))) \cap W = \emptyset$ para cada $W \subset Y$.*

**Demostración**. Sea $W \subset Y$. Del inciso *ii)* de la Proposición 1.13 se deduce que $f^{-1}(W) \subset Cl_X(f^{-1}(W))$. Así garantizamos que $X - Cl_X(f^{-1}(W)) \subset X - f^{-1}(W)$. Con las igualdades $X - f^{-1}(W) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(W) = f^{-1}(Y - W)$ aseguramos que $X - Cl_X(f^{-1}(W)) \subset f^{-1}(Y - W)$. Por lo que $f(X - Cl_X(f^{-1}(W))) \subset f(f^{-1}(Y - W))$. Como $f$ es una función suprayectiva, se sigue que $f(X - Cl_X(f^{-1}(W))) \subset Y - W$. Con esto se concluye que $f(X - Cl_X(f^{-1}(W))) \cap W = \emptyset$. □

**Definición 1.17.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Diremos que $x$ es un **punto límite** de $A$ si para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$ se cumple que $A \cap U - \{x\} \neq \emptyset$. El conjunto $A'_X$ de puntos límite de $A$ se llama **conjunto derivado** de $A$ en $X$.

### 1.2.1. Bases, bases locales y producto topológico

**Definición 1.18.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\mathcal{B} \subset \tau$. Decimos que $\mathcal{B}$ es **base** de $\tau$ si para cada $A \in \tau$ y para todo $a \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B \subset A$.

**Proposición 1.19.** *Sean $X$ un conjunto y $\beta$ una colección de subconjuntos de $X$ tal que $\bigcup \beta = X$. Si para todo $x \in X$ y para cada $A_1, A_2 \in \beta$ de modo que $x \in A_1 \cap A_2$, existe $A_3 \in \beta$ que satisface que $x \in A_3 \subset A_1 \cap A_2$, entonces $\tau = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup D : D \subset \beta\}$ es topología para $X$ y $\beta$ es base de $\tau$.*

**Notación 1.20.** Sea $\kappa$ un número cardinal. Sea $\omega$ el primer ordinal infinito numerable. Definimos $X_\kappa = \{c_\kappa\} \cup \{(x, y) \in \kappa \times \omega\}$, donde $c_\kappa \notin \kappa \times \omega$. Para cada $f \in \omega^\kappa$, sea $B_f = \{c_\kappa\} \cup \{(a, b) \in \kappa \times \omega : b \geq f(a)\}$.

**Proposición 1.21.** *La colección $\mathcal{B}_\kappa = \{B_f : f \in \omega^\kappa\} \cup \{\{(x, y)\} : (x, y) \in \kappa \times \omega\}$ es base para una topología $\tau_\kappa$ en $X_\kappa$. El símbolo $S(\kappa)$ denotará al espacio topológico $(X_\kappa, \tau_\kappa)$.*

**Demostración**. Notemos que $\bigcup \mathcal{B}_\kappa = X_\kappa$. Sea $p \in X_\kappa$. Entonces $p = c_\kappa$ ó $p \in \kappa \times \omega$. Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\kappa$ tales que $p \in B_1 \cap B_2$. Si $p \in \kappa \times \omega$, basta hacer $B_3 = \{p\}$. Si $p = c_\kappa$, existen $f_1, f_2 \in \omega^\kappa$ tales que $B_1 = B_{f_1}$, $B_2 = B_{f_2}$. Así, vamos a definir $g \in \omega^\kappa$ mediante $g(a) = \text{máx}\,\{f_1(a), f_2(a)\}$ para cada $a \in \kappa$. De este modo, $p \in B_g \subset B_1 \cap B_2$. La conclusión es inmediata de la Proposición 1.19. $\square$

**Definición 1.22.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B} \subset \tau$ es llamada una **subbase** para $\tau$, si la familia de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ es una base de $\tau$.

**Definición 1.23.** Sean $I$ un conjunto de índices y $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Definimos la **función proyección** $\pi_\alpha : \prod_{\beta \in I} X_\beta \to X_\alpha$ por $\pi_\alpha((x_\beta)_{\beta \in I}) = x_\alpha$ para cada $\alpha \in I$.

**Definición 1.24.** Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Definimos las funciones proyección mediante $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to Y$.

**Definición 1.25.** Sea $I$ un conjunto de índices. Sea $(X_\alpha, \tau_\alpha)$ un espacio topológico para cada $\alpha \in I$. La **topología producto** sobre $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ es aquella que tiene por subbase al conjunto $\mathcal{B} = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : \beta \in I,\ U_\beta \in \tau_\beta\}$.

**Observación 1.26.** Si $I$ es finito, entonces la topología producto tiene como base a la colección $\mathcal{B} = \left\{ \prod\limits_{\alpha \in I} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha, \quad \forall \alpha \in I \right\}$.

**Notación 1.27.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. El símbolo $\tau_{X\times Y}$ indicará la topología producto para $X \times Y$.

**Definición 1.28.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $\mathcal{B} \subset \tau$ y $x_0 \in X$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **base local de $\boldsymbol{x_0}$**, si para todo $U \in \tau$ tal que $x_0 \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in V \subset U$ y $x_0 \in W$ para cada $W \in \mathcal{B}$.

**Corolario 1.29.** *Cada punto de $\kappa \times \omega$ es un punto aislado en $S(\kappa)$. La colección $\mathcal{B} = \{B_f : f \in \omega^\kappa\}$ es una base local para $c_\kappa$ en $S(\kappa)$.*

La siguiente proposición se deduce de las Definiciones 1.12 y 1.17.

**Proposición 1.30.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$, $Cl_X(A) = A \cup A'_X$.*

### 1.2.2. Topologías inducidas por funciones

**Teorema 1.31.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico, $Y$ un conjunto y $f : X \to Y$ una función. Si $\tau_f = \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \tau_X\}$, entonces $\tau_f$ es una topología para $Y$.*

**Demostración**. Como $\emptyset, Y \subset Y$ tales que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X$ y $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X$, garantizamos que $\emptyset, Y \in \tau_f$.

Sea $\{B_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de elementos de $\tau_f$. Entonces $B_i \subset Y$ tal que $f^{-1}(B_i) \in \tau_X$ para cada $i \in I$. Así, $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \in \tau_X$. Como $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$, se infiere que $\bigcup_{i\in I} B_i \in \tau_f$.

Ahora, sean $A, B \in \tau_f$. Se sigue que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \tau_X$. Dado que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$, se deduce que $A \cap B \in \tau_f$.

Por lo tanto $\tau_f$ es una topología para $Y$. $\square$

Las proposiciones de esta sección son inmediatas del Teorema 1.31.

**Notación 1.32.** El símbolo $(\mathbb{R}, \tau_{(u,\mathbb{R})})$ denota la topología usual para $\mathbb{R}$.

**Notación 1.33.** El símbolo $(\mathbb{R}^2, \tau_{(u,\mathbb{R}^2)})$ indica la topología usual para $\mathbb{R}^2$ donde $\tau_{(u,\mathbb{R}^2)} = \{A \subset \mathbb{R}^2 :$ para cada $(x, y) \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset A\}$.

**Notación 1.34.** Denotamos por $S$ al conjunto $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, y para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $S_m = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq m\}$.

**Lema 1.35.** *Dotamos a $S$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_{(u,\mathbb{R})})$, $\tau_S$. Cada punto de $S - \{0\}$ es aislado y la familia $\{S_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una base local de $0$ en $S$.*

**Demostración**. Mostraremos que cada punto de $S-\{0\}$ es aislado. Sea $x \in S-\{0\}$. Así, $x = \frac{1}{m}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. De la Proposición 1.6 obtenemos que $\{\frac{1}{m}\} = S \cap \left(\frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m^2+m}\right)$. Por lo que $x$ es un punto aislado en $S$.

Ahora, probaremos que la familia $\{S_m : m \in \mathbb{N}\}$ es una base local de 0 en $S$. Veamos que $\{S_m : m \in \mathbb{N}\} \subset \tau_S$. Sea $m \in \mathbb{N}$. De la Proposición 1.6 obtenemos que $S_m = S \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{m+2}{m^2+m}\right)$, es decir, $S_m \in \tau_S$. Finalmente, sea $U \in \tau_S$ tal que $0 \in U$. Por lo que existe $V \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ de modo que $0 \in U = S \cap V$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Además, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in S_M \subset U$. $\square$

**Notación 1.36.** Sea $\Upsilon$ el subespacio $((\mathbb{R}-\{0\}) \times \{0\}) \cup (S \times \{1\})$ de $(\mathbb{R}^2, \tau_{(u,\mathbb{R}^2)})$ (ver Figura 1.1) y definimos $f : \Upsilon \to \mathbb{R}$ mediante $f(x,y) = x$.

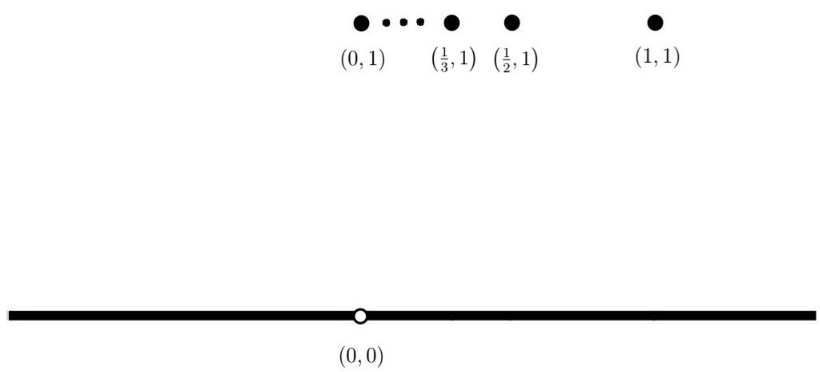


Figura 1.1: $\Upsilon$.

**Proposición 1.37.** *La pareja $\mathbb{R}^\dagger = (\mathbb{R}, \tau_f)$ es un espacio topológico.*

**Notación 1.38.** Sean $\mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})}) = \{U \in \tau_{(u,\mathbb{R})} :$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in U, \forall n \geq m\}$ y $\mathcal{W} = \{\{0\} \cup U : U \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})\}$.

**Proposición 1.39.** *La familia $\mathcal{U} = \tau_{(u,\mathbb{R})} \cup \mathcal{W}$ es base para $\mathbb{R}^\dagger$ (ver Proposición 1.37).*

**Demostración**. Veamos que $\mathcal{U} \subset \tau_f$. Sea $V \in \mathcal{U}$. Supongamos que $V \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$. Como $f^{-1}(V) = (V \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon$, concluimos que $V \in \tau_f$. Si $V \in \mathcal{W}$, existe $U \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$ tal que $V = \{0\} \cup U$. Así, $U \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ y existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in U$ para cada $n \geq M$. Además $f^{-1}(V) = f^{-1}(\{0\} \cup U) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(U) = \{(0,1)\} \cup ((U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon)$. Observemos que si $(0,1) \in (U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon$, entonces $f^{-1}(V) = (U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon$. Supongamos que $(0,1) \notin (U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon$. Tenemos que $((-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}) \times (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})) \cap \Upsilon = \{(0,1)\} \cup \{(\frac{1}{n}, 1) : n > M\}$. Del hecho que $(\frac{1}{n}, 1) \in (U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon$ para cada $n \geq M$, se sigue que $(((-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}) \times (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})) \cap \Upsilon) \cup ((U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon) = \{(0,1)\} \cup ((U \times \mathbb{R}) \cap \Upsilon)$. Esto significa que $f^{-1}(V) = (((-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}) \times (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})) \cup (U \times \mathbb{R})) \cap \Upsilon$. En cualquier caso obtenemos que $f^{-1}(V) \in \tau_\Upsilon$. Se deduce que $V \in \tau_f$. Por lo tanto $\mathcal{U} \subset \tau_f$.

Ahora, sea $U \in \tau_f$ y $x \in U$. Entonces $f^{-1}(U) \in \tau_\Upsilon$. Tenemos que $f^{-1}(U) = V \cap \Upsilon$ para algún $V \in \tau_{(u,\mathbb{R}^2)}$.

CASO I. $x = 0$
Tenemos que $(0,1) \in f^{-1}(U)$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $((-\varepsilon,\varepsilon) \times (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)) \cap \Upsilon \subset V \cap \Upsilon$. Luego, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{M} < \varepsilon$. Aseguramos que $(\frac{1}{n}, 1) \in ((-\varepsilon,\varepsilon)\times(1-\varepsilon,1+\varepsilon))\cap\Upsilon \subset V\cap\Upsilon$ para cada $n \geq M$. Además, $f((\frac{1}{n},0)) \in f(((-\varepsilon,\varepsilon)\times(1-\varepsilon,1+\varepsilon))\cap\Upsilon) \subset f(f^{-1}(U))$ para cada $n \geq M$, por lo tanto $\frac{1}{n} \in U$ para cada $n \geq M$. Obtenemos que para cada $n \geq M$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $(\frac{1}{n}, 0) \in ((\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n) \times (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)) \cap \Upsilon \subset V \cap \Upsilon$. Entonces $f((\frac{1}{n},0)) \in f(((\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n) \times (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)) \cap \Upsilon) \subset f(V \cap \Upsilon) \subset U$, para cada $n \geq M$. Notemos que $f\left(\bigcup_{n\geq M}\left(\left(\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n\right) \times (-\varepsilon_n,\varepsilon_n)\right) \cap \Upsilon\right) = \bigcup_{n\geq M}\left(\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n\right)$. Sea $K = \bigcup_{n\geq M}\left(\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n\right)$. Como $K \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ y $\frac{1}{n} \in K$ para todo $n \geq M$, deducimos que $K \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$. Se sigue que $\{0\} \cup K \in \mathcal{W}$ y $x \in \{0\} \cup K \subset U$.

CASO II. $x \neq 0$
Tenemos que $(x,0) \in f^{-1}(U)$. Se infiere que $(x,0) \in V$ y así, existe $\varepsilon \in (0, |x|)$ tal que $(x,0) \in ((x-\varepsilon, x+\varepsilon), (-\varepsilon,\varepsilon))\cap\Upsilon \subset V\cap\Upsilon$. Esto implica que $f((x,0)) \in f(((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon))\cap\Upsilon) \subset f(f^{-1}(U))$. Como $f(((x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon))\cap\Upsilon) = (x-\varepsilon,x+\varepsilon) \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$, basta hacer $B = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ para decir que existe $B \in \mathcal{U}$ tal que $x \in B \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es base de $\tau_f$. $\square$

**Notación 1.40.** Sea $M = (\{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\} \times S) \cup \{(0,0)\}$ (ver Figura 1.2). Dotamos a $S \times \omega$ (ver Figura 1.3) con la topología producto, $\tau_{S\times\omega}$, y definimos $\rho : S \times \omega \to M$ de la siguiente manera:

$$\rho((x,y)) = \begin{cases} (x,y), & \text{si } y = 0 \\ \left(\frac{1}{m}, 0\right), & \text{si } (x,y) = (0,m),\ m \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right), & \text{si } (x,y) = \left(\frac{1}{n}, m\right),\ m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

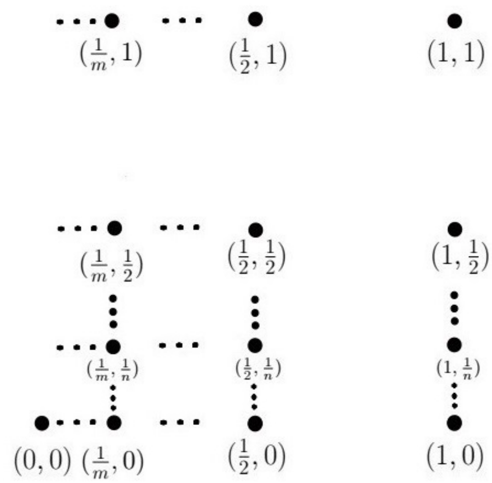


Figura 1.2: $M$.

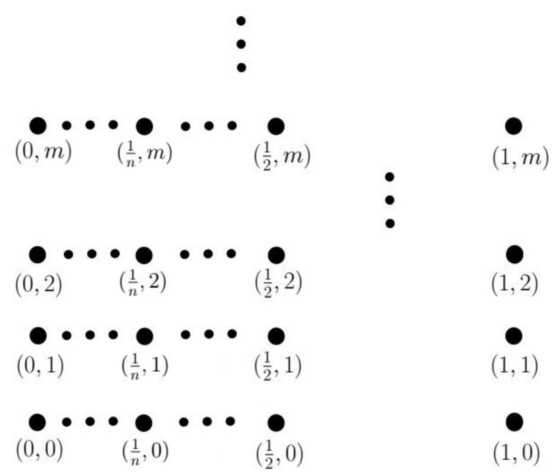


Figura 1.3: $S \times \omega$.

**Proposición 1.41.** *La pareja $(M, \tau_\rho)$ es un espacio topológico y satisface que:*

*i) Para cada $m \in \omega$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\quad S_n \times \{m\} \in \tau_{S\times\omega}$ (ver Notación 1.34).*

*ii) Para cada $m \in \omega$, $\quad \mathcal{C}_m = \{S_n \times \{m\} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para $(0, m) \in S \times \omega$.*

*iii) Si $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ y $\quad m \in \omega$, entonces $\left(\frac{1}{n}, m\right)$ es un punto aislado en $S \times \omega$.*

*iv) Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ es un punto aislado en $M$.*

*v) Para cada $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \{\{\frac{1}{m}\} \times S_n \big| n \in \mathbb{N}\}$ es base local para $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ en $M$.*

*vi) Para cada* $m \in \mathbb{N}$ *y para cada* $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, *sea* $Q_h^m = \{(0,0)\} \cup \left( \bigcup_{n \geq m} \left( \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times S_{h(n)} \right) \right)$ *(ver Notación 1.34). Entonces* $\mathcal{Q} = \{Q_h^m \big| \, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \, m \in \mathbb{N}\}$ *es base local para* $(0,0)$ *en* $M$.

**Demostración**. Los incisos $i)$ y $iii)$ son inmediatos del Lema 1.35.

Probaremos el inciso $ii)$. Sea $m \in \omega$. El inciso $i)$ garantiza que $\mathcal{C}_m \subset \tau_{S \times \omega}$. Sea $U \in \tau_{S \times \omega}$ tal que $(0, m) \in U$. Por Lema 1.35 existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $(0, m) \in S_{N_m} \times \{m\} \subset U$.

Demostraremos el inciso $iv)$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Como $\rho^{-1}(\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\}) = \{(\frac{1}{n}, m)\}$, del inciso $iii)$ obtenemos que $\rho^{-1}(\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\}) \in \tau_{S \times \omega}$. Esto significa que $\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\} \in \tau_\rho$.

Verificaremos el inciso $v)$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Veamos que $\mathcal{M} \subset \tau_\rho$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\rho^{-1}\left(\{\frac{1}{m}\} \times S_n\right) = \{(\frac{1}{m}, 0)\} \cup (S_n \times \{m\})$. Por incisos $i)$ y $iii)$ deducimos que $\{(\frac{1}{m}, 0)\} \cup (S_n \times \{m\}) \in \tau_{S \times \omega}$. Por lo que $\{\frac{1}{m}\} \times S_n \in \tau_\rho$, es decir, $\mathcal{M} \subset \tau_\rho$. Ahora, sea $U \in \tau_\rho$ tal que $\left(\frac{1}{m}, 0\right) \in U$. Así, $\rho^{-1}(U) \in \tau_{S \times \omega}$ y $(0, m) \in \rho^{-1}(U)$. Por inciso $ii)$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $(0, m) \in S_N \times \{m\} \subset \rho^{-1}(U)$. Esto implica que $\left(\frac{1}{m}, 0\right) \in \rho(S_N \times \{m\}) \subset U$. Como $\rho(S_N \times \{m\}) = \{\frac{1}{m}\} \times S_N$, concluimos la prueba.

Finalmente, veremos que el inciso $vi)$ es cierto. Mostraremos que $\mathcal{Q} \subset \tau_\rho$. Sean $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $m \in \mathbb{N}$. Como $\rho^{-1}(Q_h^m) = (S_m \times \{0\}) \cup \left( \bigcup_{s \geq m} (S_{h(s)} \times \{s\}) \right)$, del inciso $i)$ deducimos que $\rho^{-1}(Q_h^m) \in \tau_{S \times \omega}$. Así, $Q_h^m \in \tau_\rho$. Por lo que $\mathcal{Q} \subset \tau_\rho$.

Ahora, sea $U \in \tau_\rho$ tal que $(0,0) \in U$. Entonces $\rho^{-1}(U) \in \tau_{S \times \omega}$ y $(0,0) \in \rho^{-1}(U)$. El inciso $ii)$ asegura que existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $(0,0) \in S_N \times \{0\} \subset \rho^{-1}(U)$. Se sigue que $(0,0) \in \rho(S_N \times \{0\}) \subset U$. Esto implica que $(\frac{1}{n}, 0) \in U$ para cada $n \geq N$. Por lo que $(0, n) \in \rho^{-1}(U)$ para cada $n \geq N$. Nuevamente, el inciso $ii)$ garantiza que para cada $n \geq N$, existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que $(0, n) \in S_{M_n} \times \{n\} \subset \rho^{-1}(U)$. Luego, $\rho(S_{M_n} \times \{n\}) \subset U$ para cada $n \geq N$. Tenemos que $\rho(S_{M_n} \times \{n\}) = \{\frac{1}{n}\} \times S_{M_n}$ para cada $n \geq N$. Consideremos $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida por $g(n) = M_n$ para cada $n \geq N$ y $g(n) = 1$ para cada $n < N$. Se concluye que $\{(0,0)\} \cup \left( \bigcup_{n \geq N} \left( \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times S_{g(n)} \right) \right) = Q_g^N$. Además, $(0,0) \in Q_g^N \subset U$. □

**Notación 1.42.** Dado $P$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, denotamos por $\Delta(P, t)$ al conjunto $\{(x, tx) : x \in P\}$.

**Notación 1.43.** Sea $S(\omega) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Delta\left(S, \frac{1}{m}\right)$ (ver Figura 1.4). Para $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sean $\Psi_h = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Delta\left(S_{h(m)}, \frac{1}{m}\right)$ y $\Phi_h = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left(S_{h(m)} \times \{m\}\right)$. Dotamos a $S \times \mathbb{N}$ con la topología producto $\tau_{S\times\mathbb{N}}$ y definimos $g : S \times \mathbb{N} \to S(\omega)$ de la siguiente manera:

$$g((x,m)) = \left(x, \frac{x}{m}\right).$$

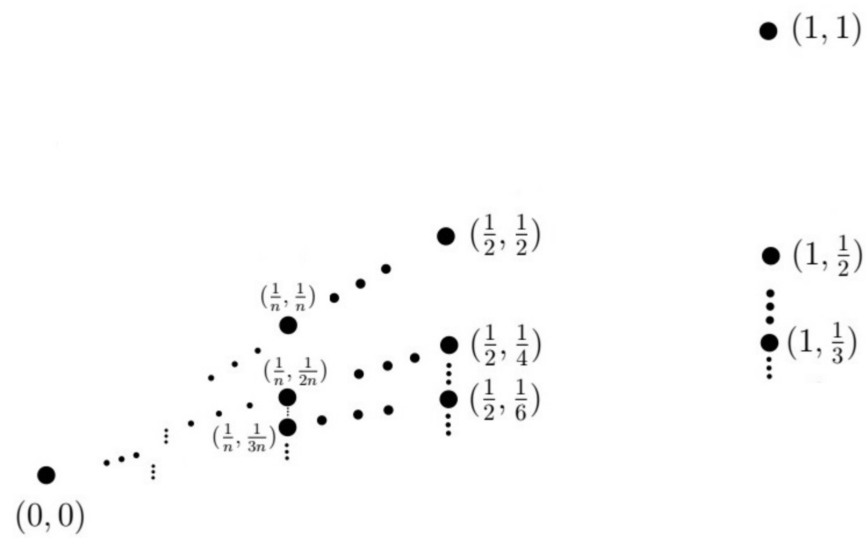


Figura 1.4: $S(\omega)$.

**Proposición 1.44.** *La pareja $(S(\omega), \tau_g)$ es un espacio topológico y tiene las siguientes propiedades:*

*i.* $g^{-1}(\Psi_h) = \Phi_h$ *para cada* $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

*ii. Si* $U \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$ *tal que* $\{0\} \times \mathbb{N} \subset U$, *entonces existe* $e \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *tal que* $\{0\} \times \mathbb{N} \subset g^{-1}(\Psi_e) \subset U$.

*iii. Cada punto de* $S(\omega) - \{(0,0)\}$ *es un punto aislado.*

*iv. La familia* $\mathcal{B} = \{\Psi_h \big| \ h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *es una base local para* $(0,0)$ *en* $S(\omega)$.

*v.* $(S(\omega), \tau_g)$ *es un espacio de Hausdorff .*

**Demostración**. Probaremos el inciso $i$). Sea $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Notemos que si $m \in \mathbb{N}$, entonces $g(S_{h(m)} \times \{m\}) = \Delta(S_{h(m)}, \frac{1}{m})$. Así, se tiene que $g(\Phi_h) = \Psi_h$. Esto implica que $\Phi_h \subset g^{-1}(\Psi_h)$. Veamos que $g^{-1}(\Psi_h) \subset \Phi_h$. Sea $(x,m) \in S \times \mathbb{N}$ tal que $g(x,m) \in \Psi_h$. Si $x = 0$, entonces $(x,m) \in \Phi_h$. Supongamos que $x \neq 0$. Esto implica que $x = \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $g(x,m) \in \Delta(S_{h(m)}, \frac{1}{m})$. De aquí se deduce que $n \geq h(m)$. Por lo que $(x,m) \in \Phi_h$.

Para probar la afirmación $ii)$, por Lema 1.35, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $S_{N_m} \times \{m\} \subseteq U$. Definimos $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante $e(m) = N_m$. Tenemos que $\Phi_e \subset U$. Además, $\{0\} \times \mathbb{N} \subset \Phi_e$ y por el inciso anterior $g^{-1}(\Psi_e) = \Phi_e$.

Para el inciso $iii)$, sean $n, m \in \mathbb{N}$. Observemos que $g^{-1}(\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{nm})\}) = \{(\frac{1}{n}, m)\}$. Del Lema 1.35, se sigue que $\{(\frac{1}{n}, m)\} \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$. Por lo tanto, $\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{nm})\} \in \tau_g$, es decir, $(\frac{1}{n}, \frac{1}{nm})$ es un punto aislado.

Para verificar el inciso $iv)$, sea $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Del inciso $i)$, tenemos que $g^{-1}(\Psi_h) = \Phi_h$. Así, basta verificar que $\Phi_h \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$. Por Lema 1.35, se tiene que $S_{h(m)} \times \{m\} \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces $\Phi_h = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_{h(m)} \times \{m\} \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$. Ahora, sea $U \in \tau_g$ tal que $(0,0) \in U$. Tenemos que $\{0\} \times \mathbb{N} \subset g^{-1}(U) \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$. Por inciso $ii)$ existe $e \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\{0\} \times \mathbb{N} \subset g^{-1}(\Psi_e) \subset g^{-1}(U)$. Del inciso $i)$ obtenemos que $(0,0) \in \Psi_e \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base local de $(0,0)$ en $S(\omega)$.

Mostraremos que $S(\omega)$ es de Hausdorff. Sean $x, y \in S(\omega)$ tales que $x \neq y$.

CASO I. $x,\ y \in S(\omega) - \{(0,0)\}$.
El inciso $iii)$ garantiza que $x$ y $y$ son puntos aislados. Así, $\{x\}, \{y\} \in \tau_g$ tales que $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

CASO II. $x = (0,0)$ y $y \in S(\omega) - \{(0,0)\}$.
Del inciso $iii)$ se deduce que $\{y\} \in \tau_g$. Más aún, como $y \in S(\omega) - \{(0,0)\}$ existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $y = (\frac{1}{a}, \frac{1}{ab})$. Consideremos la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida mediante $h(w) = a + 2$. El inciso $iv)$ asegura que $\Psi_h \in \tau_g$. Tenemos que $x \in \Psi_h$. Además, $\Psi_h \cap \{y\} = \emptyset$. Por lo tanto $S(\omega)$ es de Hausdorff. $\square$

**Notación 1.45.** Sean $X_1 = \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\} \times S$, $X_2 = \{2 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\} \times (S - \{0\})$, $X_3 = (S - \{0\}) \times \{y : -1 < y \leq 0\}$, $X_4 = \{(2, y) : 0 \leq y \leq 1\}$, $X_5 = \{(0, -1)\}$, $\Theta = \bigcup_{i=1}^{5} X_i$ (ver Notación 1.34, 1.40 y Figura 1.5) y $\Xi = M \cup \{(0,1)\}$ (ver Figura 1.6).
Dotamos a $\Theta$ con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_{(u,\mathbb{R}^2)}), \tau_\Theta$, y definimos $\eta : \Theta \to \Xi$ de la siguiente manera:

$$\eta((x,y)) = \begin{cases} (x,y), & \text{si } (x,y) \in X_1 \\ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right), & \text{si } (x,y) = \left(2 + \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \text{ para algunos } m, n \in \mathbb{N} \\ \left(\frac{1}{m}, 0\right), & \text{si } (x,y) = \left(\frac{1}{m}, p\right) \text{ para algún } m \in \mathbb{N} \text{ y para algún } -1 < p \leq 0 \\ (0,1), & \text{si } (x,y) = (2, q) \text{ para algún } 0 \leq q \leq 1 \\ (0,0), & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$

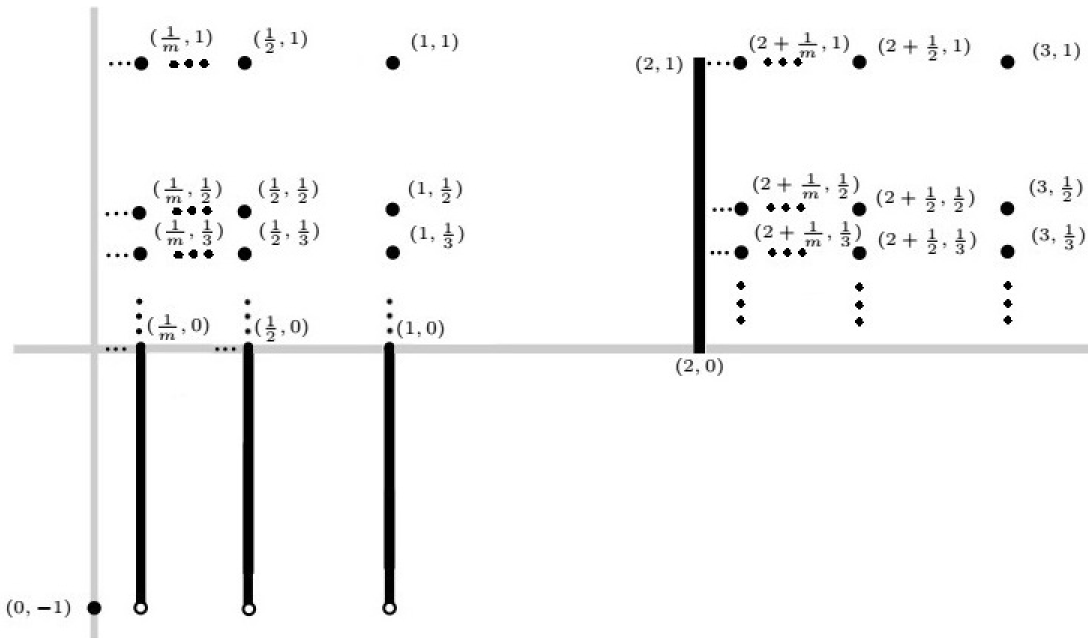


Figura 1.5: $\Theta$.

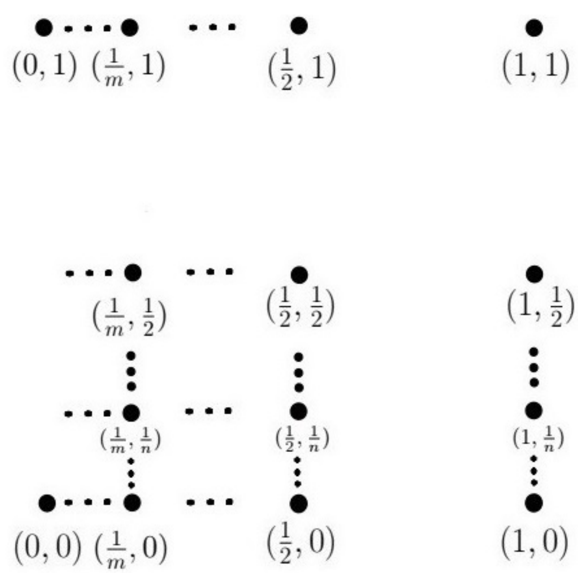


Figura 1.6: $\Xi$.

**Proposición 1.46.** *La pareja* $(\Xi, \tau_\eta)$ *es un espacio topológico y satisface que:*

*i) Si* $n, m \in \mathbb{N}$*, entonces* $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$ *es un punto aislado.*

*ii) Si* $m \in \mathbb{N}$*,* $\mathcal{M} = \{\{\frac{1}{m}\} \times S_n \big| n \in \mathbb{N}\}$ *es base local para* $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$*.*

*iii) La familia* $\mathcal{Q} = \{Q_h^m \big| \, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \; m \in \mathbb{N}\}$ *es base local para* $(0,0)$.

*iv) Para cada* $N \in \mathbb{N}$ *y para cada* $g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *sea* $W^N_{(g,h)} = \{(0,1)\} \cup \left(\bigcup_{n \geq N} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times (S_{g(n)} - \{0\})\right)\right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left((S_{h(n)} - \{0\}) \times \left\{\frac{1}{n}\right\}\right)\right)$. *Entonces* $\mathcal{W} = \{W^n_{(g,h)} : n \in \mathbb{N}, \; g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *es base local para* $(0,1)$.

**Demostración**. Probaremos el inciso $i)$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Definimos $A = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m^2+m}\right) \times \left(\frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n^2+n}\right)$ y $B = \left(2 + \frac{1}{m+1}, 2 + \frac{m+2}{m^2+m}\right) \times \left(\frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n^2+n}\right)$ (ver Proposición 1.6). Como $\eta^{-1}(\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\}) = \{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right), \left(2 + \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\} = \Theta \cap (A \cup B)$, tenemos que $\eta^{-1}(\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)\}) \in \tau_\Theta$. Concluimos que $\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ es un punto aislado.

Argumentaremos el inciso $ii)$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Veamos que $\mathcal{M} \subset \tau_\eta$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\eta^{-1}(\{\frac{1}{m}\} \times S_n) = (\{\frac{1}{m}\} \times (S_n - \{0\})) \cup (\{2 + \frac{1}{m}\} \times (S_n - \{0\})) \cup \{\left(\frac{1}{m}, p\right) : -1 < p \leq 0\}$. Entonces $\eta^{-1}(\{\frac{1}{m}\} \times S_n) = \Theta \cap \left(\left(\frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m^2+m}\right) \times \left(-1, \frac{n+2}{n^2+n}\right) \cup \left(2 + \frac{1}{m+1}, 2 + \frac{m+2}{m^2+m}\right) \times \left(0, \frac{n+2}{n^2+n}\right)\right)$ (ver Proposición 1.6). Se garantiza que $\{\frac{1}{m}\} \times S_n \in \tau_\eta$. Por lo que $\mathcal{M} \subset \tau_\eta$.

Sea $U \in \tau_\eta$ tal que $\left(\frac{1}{m}, 0\right) \in U$. Tenemos que $\eta^{-1}(U) \in \tau_\Theta$ tal que $\{\left(\frac{1}{m}, p\right) : -1 < p \leq 0\} \subset \eta^{-1}(U)$. Existe $\varepsilon > 0$ de manera que $\Theta \cap ((\frac{1}{m} - \varepsilon, \frac{1}{m} + \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \subset \eta^{-1}(U)$. Esto implica que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Aseguramos que $(\frac{1}{m}, \frac{1}{s}) \in \eta^{-1}(U)$ para cada $s \geq K$, de donde $(\frac{1}{m}, \frac{1}{s}) \in U$ para cada $s \geq K$. Así, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{m}, 0\right) \in \{\frac{1}{m}\} \times S_K \subset U$.

Mostraremos el inciso $iii)$. Verifiquemos que $\mathcal{Q} \subset \tau_\eta$. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Sean $A = \bigcup_{n \geq N} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n^2+n}\right) \times \left(-1, \frac{h(n)+2}{h^2(n)+h(n)}\right)$, $E = (-1,1) \times (-\frac{3}{2}, 0)$ y $D = \bigcup_{n \geq N} \left(2 + \frac{1}{n+1}, 2 + \frac{n+2}{n^2+n}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{h(n)+2}{(h(n))^2+h(n)}\right)$. Notemos que $\eta^{-1}(Q_h^N) = \{(0,-1)\} \cup ((S_N - \{0\}) \times \{p : -1 < p \leq 0\}) \cup \left(\bigcup_{n \geq N} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left(S_{h(n)} - \{0\}\right)\right)\right) \cup \left(\bigcup_{n \geq N} \left(\left\{2 + \frac{1}{n}\right\} \times \left(S_{h(n)} - \{0\}\right)\right)\right) = \Theta \cap (A \cup D \cup E)$. Garantizamos que $Q_h^N \in \tau_\eta$. Concluimos que $\mathcal{Q} \subset \tau_\eta$.

Ahora, sea $U \in \tau_\eta$ tal que $(0,0) \in U$. Tenemos que $\eta^{-1}(U) \in \tau_\Theta$ tal que $(0,-1) \in \eta^{-1}(U)$. Existe $\varepsilon > 0$ de manera que $\Theta \cap ((-\varepsilon, \varepsilon) \times (-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)) \subset \eta^{-1}(U)$. Esto implica que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Aseguramos que $(\frac{1}{n}, p) \in \eta^{-1}(U)$ para cada $n \geq K$ y $-1 < p < -1 + \varepsilon$. Se deduce que $(\frac{1}{n}, 0) \in U$ para cada $n \geq K$. Del inciso $ii)$ se obtiene que existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \{\frac{1}{n}\} \times S_{M_n} \subset U$ para cada $n \geq K$. Definamos $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ por $h(n) = 1$ para cada $n < K$ y $h(n) = M_n$ para cada $n \geq K$. Es decir, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $(0,0) \in Q_h^K \subset U$.

Para el inciso $iv)$, primero verificaremos que $\mathcal{W} \subset \tau_\eta$. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Sean $A = \bigcup_{n \geq N} \left( \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n^2+n} \right) \times \left( 0, \frac{g(n)+2}{(g(n))^2+g(n)} \right)$, $D = \bigcup_{n \geq N} \left( 2 + \frac{1}{n+1}, 2 + \frac{n+2}{n^2+n} \right) \times \left( -\frac{1}{2}, \frac{g(n)+2}{(g(n))^2+g(n)} \right)$, $F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left( 2 - \frac{1}{h(m)}, 2 + \frac{h(m)+2}{(h(m))^2+h(m)} \right) \times \left( \frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m^2+m} \right)$ y $G = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left( -\frac{1}{h(m)}, \frac{h(m)+2}{(h(m))^2+h(m)} \right) \times \left( \frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m^2+m} \right)$ (ver Proposición 1.6).

Como $\eta^{-1}(W^N_{(g,h)}) = X_4 \bigcup \left( \bigcup_{n \geq N} \left( \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left( S_{h(n)} - \{0\} \right) \right) \right) \bigcup \left( \bigcup_{n \geq N} \left( \left\{ 2 + \frac{1}{n} \right\} \times \left( S_{h(n)} - \{0\} \right) \right) \right) \bigcup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \left( S_{h(n)} - \{0\} \right) \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \right) \bigcup \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left( \left\{ 2 + \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}, m \geq h(n) \right\} \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \right) = \Theta \cap (A \cup D \cup F \cup G)$. Por lo que $W^N_{(g,h)} \in \tau_\eta$. Concluimos que $\mathcal{W} \subset \tau_\eta$.

Ahora, sea $U \in \tau_\eta$ tal que $(0,1) \in U$. Tenemos que $\eta^{-1}(U) \in \tau_\Theta$ tal que $X_4 \subset \eta^{-1}(U)$. Además $\{(2,0)\} \cup (\{2\} \times S - \{0\}) \subset X_4$. Así, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\Theta \cap ((2-\varepsilon_0, 2+\varepsilon_0) \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)) \subset \eta^{-1}(U)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $\Theta \cap ((2-\varepsilon_n, 2+\varepsilon_n) \times (\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n)) \subset \eta^{-1}(U)$. Esto implica que existe $J_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{J_0} < \varepsilon_0$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $J_n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{J_n} < \varepsilon_n$. Aseguramos que $(2 + \frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \eta^{-1}(U)$ para cada $n, m \geq J_0$ y que para cada $n \in \mathbb{N}$ $(2 + \frac{1}{j}, \frac{1}{n}) \in \eta^{-1}(U)$ para cada $j \geq J_n$. Se deduce que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in U$ para cada $n, m \geq J_0$ y que $(\frac{1}{j}, \frac{1}{n}) \in U$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $j \geq J_n$. Basta definir $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mediante $g(n) = J_0$ y $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mediante $h(n) = J_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De este modo, existe $W^{J_0}_{(g,h)} \in \mathcal{W}$ tal que $(0,1) \in W^{J_0}_{(g,h)} \subset U$. $\square$

## 1.3. Funciones continuas y funciones especiales

**Notación 1.47.** Sea $X$ un conjunto. Representamos a la topología conumerable para $X$ con el símbolo $(X, \tau_{con})$. La pareja $(X, \tau_{cof})$ indica la topología cofinita para $X$. Usaremos $(X, \tau_{ind})$ significando la topología indiscreta para $X$.

**Definición 1.48.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que $f$ es una **función continua** si para cada $V \in \tau_Y$ se tiene que $f^{-1}(V) \in \tau_X$.

La siguiente proposición se sigue del Teorema 1.31.

**Proposición 1.49.** *Sean $X, Y$ conjuntos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Si $Y$ es dotado con $\tau_f$, entonces $f$ es continua.*

**Ejemplo 1.50.** La función $f : (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \to (\mathbb{R}, \tau_{con})$ definida mediante $f(r) = r$ no es continua porque $\mathbb{R} - \mathbb{N} \in \tau_{con}$ pero $f^{-1}(\mathbb{R} - \mathbb{N}) = \mathbb{R} - \mathbb{N} \notin \tau_{ind}$.

**Definición 1.51.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$ es llamada **función abierta** si para cada $U \in \tau_X$ se tiene que $f(U) \in \tau_Y$.

**Ejemplo 1.52.** La función $f : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \to (\mathbb{R}, \tau_{cof})$ definida mediante $f(r) = r$ es continua pero no abierta. Notemos que $\{2\} \in \tau_{dis}$ pero $f(\{2\}) = \{2\} \notin \tau_{cof}$ porque $\mathbb{R} - \{2\}$ no es finito.

**Definición 1.53.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$ es llamada **función cerrada** si para cada $F \subset X$ cerrado en $X$ se tiene que $f(F)$ es cerrado en $Y$.

**Ejemplo 1.54.** La función del Ejemplo 1.52 es continua pero no cerrada. Notemos que $\mathbb{R} - \{2\}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ pero no lo es en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ porque $\mathbb{R} - \{2\}$ no es finito.

La prueba del siguiente teorema puede consultarse en [1, Teorema 11.4, p. 87]

**Teorema 1.55.** *Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces $f$ es cerrada si y sólo si $Cl_Y(f(A)) \subset f(Cl_X(A))$ para cada $A \subset X$.*

**Definición 1.56.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ continua y suprayectiva es llamada **función pseudo-abierta** si para cada $y \in Y$ y para cada $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$ se tiene que $y \in int_Y(f(U))$.

**Proposición 1.57.** *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Si $f$ es abierta o cerrada, $f$ es una función pseudo-abierta.*

**Demostración**. Tenemos dos casos por analizar.
Caso I. $f$ es abierta.
Sean $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. Entonces $f(f^{-1}(\{y\})) \subset f(U)$. Se satisface que $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$. Por lo tanto $\{y\} \subset f(U)$. De que $f$ es abierta se tiene que $f(U) \in \tau_Y$, entonces $f(U) = int_Y(f(U))$. De lo anterior, $y \in int_Y(f(U))$.
Caso II. $f$ es cerrada.
Sean $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. De que $U \in \tau_X$ se sigue que $X - U$ es cerrado en $X$ y, dado que $f$ es cerrada se tiene que $f(X - U)$ es cerrado en $Y$. Entonces $Y - f(X - U) \in \tau_Y$. De la Proposición 1.7 se deduce que $\{p \in Y : f^{-1}(\{p\}) \subset U\}$ es abierto en $Y$. Como $y \in \{p \in Y : f^{-1}(\{p\}) \subseteq U\}$, de la Proposición 1.7 obtenemos que $y \in int_Y(f(U))$.
De cualquier caso se deduce que $f$ es una función pseudo-abierta. □

**Ejemplo 1.58.** No toda función pseudo-abierta es abierta.
La función $g$ definida en Notación 1.43 es pseudo-abierta pero no abierta. Tenemos que $g$ es suprayectiva. La topología para $S(\omega)$ implica que $g$ es continua. Ahora, sean $y \in S(\omega)$ y $U \in \tau_{S \times \mathbb{N}}$ tal que $g^{-1}(\{y\}) \subset U$. Tenemos 2 casos.

i. Si $y \in S(\omega) - \{(0,0)\}$, por inciso $ii)$ de la Proposición 1.44 tenemos que $\{y\} \in \tau_g$. De que $g^{-1}(\{y\}) \subset U$ tenemos que $y \in \{y\} \subset g(U)$. Entonces $y \in int_{S(\omega)}(g(U))$.

ii. Si $y = (0,0)$, entonces $\{0\} \times \mathbb{N} = g^{-1}(\{y\}) \subset U$. Por inciso $ii)$ de la Proposición 1.44 existe $e \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $\{0\} \times \mathbb{N} \subset g^{-1}(\Psi_e) \subset U$. De donde $(0,0) \in \Psi_e \subset g(U)$. Por inciso $iv)$ de la Proposición 1.44, $\Psi_e \in \tau_g$. Concluimos que $y \in int_{S(\omega)}(g(U))$.

Así, $g$ es una función pseudo-abierta. Para ver que esta función no es abierta, notemos que $S \times \{1\} \in \tau_{S\times\mathbb{N}}$ pero $g(S \times \{1\}) \notin \tau_g$. De lo contrario, como $(0,0) \in g(S \times \{1\})$, por inciso $iv)$ de la Proposición 1.44, existe $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $(0,0) \in \Psi_h \subset g(S \times \{1\})$. Contradicción.

**Definición 1.59.** Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ suprayectiva y continua es llamada **función cociente** si para cada $U \subset Y$ tal que $f^{-1}(U) \in \tau_X$ se tiene que $U \in \tau_Y$. Nótese que si $f$ es cociente entonces $\tau_Y = \tau_f$.

El Teorema 1.31 y la Proposición 1.49 garantizan la siguiente proposición.

**Proposición 1.60.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico, $Y$ un conjunto y $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva. Si dotamos a $Y$ con la topología $\tau_f$, entonces $f$ es cociente.*

**Proposición 1.61.** *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Si $f$ es una función pseudo-abierta entonces $f$ es una función cociente.*

**Demostración**. De la hipótesis tenemos que $f$ es una función continua y suprayectiva. Ahora, sea $U \subset Y$ tal que $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Debemos mostrar que $U \in \tau_Y$, para ello basta probar que $U = int_Y(U)$. Como $int_Y(U) \subset U$, es suficiente mostrar que $U \subset int_Y(U)$. Sea $z \in U$. Entonces $f^{-1}(\{z\}) \subset f^{-1}(U)$. Luego $z \in int_Y(f(f^{-1}(U)))$ porque $f$ es pseudo - abierta. De la suprayectividad de $f$ concluimos que $z \in int_Y(U)$. Esto permite decir que $U \subset int_Y(U)$. Así que $U = int_Y(U)$. Esto muestra que $f$ es una función cociente. $\square$

**Ejemplo 1.62.** La función $\rho$ definida en Notación 1.40 es cociente (ver Proposición 1.60) y no es pseudo-abierta. Mostraremos que $\rho$ no es pseudo-abierta. Tenemos que $(0,0) \in M$. Sea $k \in \mathbb{N}$. El inciso $ii)$ de la proposición 1.41 garantiza que $S_k \times \{0\} \in \tau_{S\times\omega}$ tal que $\rho^{-1}(\{(0,0)\}) \subset S_k \times \{0\}$. Supongamos que $(0,0) \in int_M(\rho(S_k \times \{0\}))$. De la definición de $\rho$ se sigue que $\rho(S_k \times \{0\}) = S_k \times \{0\}$. Por inciso $vi)$ de la Proposición 1.41 existen $m \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $(0,0) \in Q_h^m \subset int_M(S_k \times \{0\}) \subset S_k \times \{0\}$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $(0,0) \notin int_M(\rho(S_k \times \{0\}))$. Así, la función $\rho$ no es pseudo-abierta.

**Definición 1.63.** Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que $f$ es un **homeomorfismo** si satisface que:

1. $f$ es una función biyectiva;

2. $f$ es una función continua;

3. $f^{-1}$ la función inversa de $f$, es una función continua.

Cuando existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos decimos que son **homeomorfos**.

El siguiente resultado puede consultarse en [6, Teorema 7.9, p. 46].

**Teorema 1.64.** *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función biyectiva. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *$f$ es un homeomorfismo.*
2. *$f$ es continua y abierta.*
3. *$f$ es continua y cerrada.*
4. *Para cada $A \subset X$, $f(Cl_X(A)) = Cl_Y(f(A))$.*

**Corolario 1.65.** *Si $\kappa = \omega$ entonces $S(\kappa)$ y $S(\omega)$ son homeomorfos. (Consultar Proposiciones 1.21 y 1.44)*

**Definición 1.66.** Se dice que una propiedad $P$ es topológica, si cada vez que un espacio $(X, \tau)$ tiene la propiedad $P$, también la posee cualquier espacio topológico homeomorfo a $(X, \tau)$.

## 1.4. Espacios métricos

**Definición 1.67.** Un conjunto $X$ se llama **espacio métrico**, si existe una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in X$, satisface las siguientes condiciones:

i. $d(x, y) \geq 0$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

ii. $d(x, y) = d(y, x)$, y

iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

A la función $d$ le llamamos **métrica** o **función distancia** para $X$.
Denotamos al espacio métrico con $(X, d)$.

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [6, Ejemplo 3.2 a), p. 23].

**Proposición 1.68.** *Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico. Entonces $\tau_\rho = \{A \subset X :$ para cada $a \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(a) \subset A\}$ es una topología para $X$. A $\tau_\rho$ se le llama **topología inducida** por la métrica $\rho$ . Además $\{B_\varepsilon(x) : x \in X$ y $\varepsilon > 0\}$ es una base para esta topología.*

**Proposición 1.69.** *Los espacios métricos son de Hausdorff.*

**Demostración**. Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $x,\ y \in X$ con $x \neq y$. Tenemos que $d(x, y) > 0$. Así, $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{3} > 0$. Los conjuntos $B_\varepsilon(x), B_\varepsilon(y) \in \tau_\rho$ son tales que $x \in B_\varepsilon(x),\ y \in B_\varepsilon(y)$ y $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. □

**Proposición 1.70.** *Sean $(X, \rho)$ un espacio métrico y $Y \subset X$. Entonces $Y$ es un espacio métrico.*

**Demostración**. Sea $d : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $d(x, y) = \rho(x, y)$ para cada $x, y \in Y$. Notemos que $d$ es una métrica para $Y$. □

**Proposición 1.71.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico, entonces existe una métrica $\rho$ para $X$ tal que $\rho(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$ y $\rho$ genera la misma topología para $X$ que $d$.*

**Demostración**. Consideremos la función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$\rho((x, y)) = \text{mín}\{1, d((x, y))\}$$

Mostraremos que $\rho$ es métrica para $X$. Sean $x, y, z \in X$. Primero, dado que $(X, d)$ es un espacio métrico entonces $d$ es una métrica para $X$, así que $d((x, y)) \geq 0$. Entonces $\rho((x, y)) = \text{mín}\{1, d((x, y))\} \geq 0$.

Veamos que $\rho((x, y)) = 0$ si y sólo si $x = y$. Primero, supongamos que $\rho((x, y)) = 0$. Entonces $\text{mín}\{1, d((x, y))\} = 0$. Así $d((x, y)) = 0$. De donde se tiene que $x = y$.
Recíprocamente supongamos que $x = y$. Entonces $d((x, y)) = 0$ y así $\text{mín}\{1, d((x, y))\} = \text{mín}\{1, 0\} = 0$. De esto se sigue que $\rho((x, y)) = 0$.

Mostraremos ahora que $\rho((x, y)) = \rho((y, x))$. Para ello observemos que $d((x, y)) = d((y, x))$. Entonces $\text{mín}\{1, d((x, y))\} = \text{mín}\{1, d((y, x))\}$. Así, $\rho((x, y)) = \rho((y, x))$.

Finalmente probaremos que $\rho$ satisface que $\rho((x, y)) \leq \rho((x, z)) + \rho((z, y))$.

CASO I. $d((x, z)) \geq 1$ ó $d((z, y)) \geq 1$.
Como $\rho((z, y)) \geq 0$ y $\rho((x, z)) \geq 0$, tenemos que $1 \leq 1 + \rho((z, y))$ ó $1 \leq \rho((x, z)) + 1$.

CASO II. $d((x, z)) < 1$ y $d((z, y)) < 1$.
Como $\rho((x, y)) \leq d((x, y))$ y $d((x, y)) \leq d((x, z)) + d((z, y))$.

De ambos casos se deduce que $\rho((x, y)) \leq \rho((x, z)) + \rho((z, y))$.

Ahora, probaremos que $\tau_d = \tau_\rho$. Veamos que $\tau_d \subset \tau_\rho$. Sean $V \in \tau_d$ y $x \in V$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $B^d_\delta(x) \subset V$. Consideremos $\sigma = \text{mín}\{1, \delta\}$. Probaremos que $B^\rho_\sigma(x) \subset V$. Sea $w \in B^\rho_\sigma(x)$. Tenemos que $\rho(w, x) < \sigma \leq 1$. Así que $\rho(w, x) < 1$, de donde se deduce que $\rho((w, x)) = d((w, x))$. Entonces $d((w, x)) < \sigma$, y dado que $\sigma \leq \delta$ entonces $d((w, x)) < \delta$. Por lo que $w \in B^d_\delta(x)$ y entonces $w \in V$. Por lo tanto $V \in \tau_\rho$ y así, tenemos que $\tau_d \subset \tau_\rho$.

Para ver que $\tau_\rho \subset \tau_d$, sean $U \in \tau_\rho$ y $x \in U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^\rho_\varepsilon(x) \subset U$. Veremos que $B^d_\varepsilon(x) \subset U$. Sea $w \in B^d_\varepsilon(x)$. Dado que $\rho((w,x)) \leq d((w,x))$, se tiene que $\rho((w,x)) < \varepsilon$, por lo que $w \in B^\rho_\varepsilon(x)$ y entonces $w \in U$. Por lo tanto $U \in \tau_d$ y así, tenemos que $\tau_\rho \subset \tau_d$.
Entonces $\tau_d = \tau_\rho$, es decir, $\rho$ y $d$ generan la misma topología para $X$. □

**Definición 1.72.** Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Decimos que $(X,\tau)$ es **metrizable** si existe una métrica $d$ en $X$ tal que $\tau_d = \tau$.

**Proposición 1.73.** *Sea $\{(X_\alpha, \rho_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios métricos ajenos dos a dos. Entonces $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ es un espacio metrizable.*

**Demostración**. Recordemos que $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha = (X,\tau)$, donde $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $\tau = \{U \subset X : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in I\}$. Consideremos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d((x,y)) = \begin{cases} \rho_\alpha((x,y)), & \text{si } x, y \in X_\alpha \text{ para algún } \alpha \in I, \\ 1, & \text{si } x \in X_\alpha,\ y \in X_\beta \text{ y } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$ tal que $\rho_\alpha((x,y)) \leq 1$ para todo $x, y \in X_\alpha$, por la Proposición 1.71.
Primero mostraremos que $d$ es una métrica para $X$. Sean $x, y, z \in X$. Entonces existen $\alpha, \beta, \gamma \in I$ tales que $x \in X_\alpha$, $y \in X_\beta$ y $z \in X_\gamma$. Primero, observemos que

i. si $\alpha = \beta$, entonces $d((x,y)) = \rho_\alpha((x,y))$ y dado que $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$, tenemos que $d((x,y)) \geq 0$.

ii. si $\alpha \neq \beta$, entonces $d((x,y)) = 1$, de donde $d((x,y)) \geq 0$.

Por lo tanto $d((x,y)) \geq 0$.

Veamos que $d((x,y)) = 0$ si y sólo si $x = y$.
Supongamos que $d((x,y)) = 0$. Entonces $\alpha = \beta$ y así $d((x,y)) = \rho_\alpha((x,y))$, de donde $\rho_\alpha((x,y)) = 0$. Como $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$, tenemos que $x = y$.
Recíprocamente supongamos que $x = y$, entonces $x, y \in X_\alpha$ por lo que $d((x,y)) = \rho_\alpha((x,y))$ y dado que $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$, tenemos que $\rho_\alpha((x,y)) = 0$, por lo tanto $d((x,y)) = 0$ .

Para probar que $d((x,y)) = d((y,x))$ veamos que si $\alpha = \beta$ entonces $d((x,y)) = \rho_\alpha((x,y)) = \rho_\alpha((y,x))$ porque $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$. Como $\rho_\alpha((y,x)) = d((y,x))$ obtenemos que $d((x,y)) = d((y,x))$. Si $\alpha \neq \beta$ entonces $d((x,y)) = 1 = d((y,x))$.

Finalmente, analicemos los siguientes casos para verificar la desigualdad triangular.

CASO I. $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq \gamma$.
Entonces $d((x,y)) = \rho_\alpha((x,y))$, $d((x,z)) = 1$ y $d((z,y)) = 1$. Como $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$ tal que $\rho_\alpha((x,y)) \leq 1$, obtenemos $\rho_\alpha((x,y)) \leq 1+1$, es decir, $d((x,y)) \leq d((x,z)) + d((z,y))$.

CASO II. $\alpha = \beta$ y $\alpha = \gamma$.
Entonces $x, y, z \in X_\alpha$, así que $d((x,y)) = \rho_\alpha((x,y))$, $d((x,z)) = \rho_\alpha((x,z))$ y $d((z,y)) = \rho_\alpha((z,y))$. Dado que $\rho_\alpha$ es una métrica para $X_\alpha$ se satisface que $\rho_\alpha((x,y)) \leq \rho_\alpha((x,z)) + \rho_\alpha((z,y))$, es decir, $d((x,y)) \leq d((x,z)) + d((z,y))$.

CASO III. $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ y $\gamma \neq \beta$.
Entonces $d((x,y)) = 1$, $d((x,z)) = 1$ y $d((z,y)) = 1$. Entonces $d((x,y)) \leq d((x,z)) + d((z,y))$.

CASO IV. $\alpha \neq \beta$ y, $\gamma = \alpha$ ó $\gamma = \beta$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $\gamma = \beta$. Entonces $d((x,y)) = 1$, $d((x,z)) = 1$ y $d((z,y)) = \rho_\beta((z,y))$. Debido a que $\rho_\beta$ es una métrica para $X_\beta$, tenemos que $\rho_\beta((x,y)) \geq 0$. Así, $1 \leq 1 + \rho_\beta((z,y))$. Deducimos que $d((x,y)) \leq d((x,z)) + d((z,y))$.

De este análisis se deduce que $d((x,y)) \leq d((x,z)) + d((z,y))$. Por lo tanto $d$ es una métrica para $X$. Entonces $(X,d)$ es un espacio métrico.

Ahora, veremos que la métrica $d$ genera la misma topología que $\tau$. Empezaremos viendo que $\tau_d \subset \tau$. Sean $U \in \tau_d$, $\alpha \in I$ y $x \in U \cap X_\alpha$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B^d_\varepsilon(x) \subset U$. Si $s \in B^{\rho_\alpha}_\varepsilon(x)$, entonces $\rho_\alpha((s,x)) < \varepsilon$. Dado que $s, x \in X_\alpha$, $d((s,x)) = \rho_\alpha((s,x))$. Deducimos que $d((s,x)) < \varepsilon$, de donde $s \in B^d_\varepsilon(x)$. Así, $s \in U$, más aún, $s \in U \cap X_\alpha$, esto es $B^{d_\alpha}_\varepsilon(x) \subset U \cap X_\alpha$, es decir, $U \cap X_\alpha \in \tau_{d_\alpha}$. Como $\alpha$ fue elegido arbitrariamente, concluimos que $U \in \tau$. Entonces $\tau_d \subset \tau$.

Por otro lado sean $R \in \tau$ y $z \in R$. Entonces existe $\psi \in I$ tal que $z \in X_\psi$. Como $R \cap X_\psi \in \tau_{\rho_\psi}$, existe $\delta > 0$ tal que $B^{\rho_\psi}_\delta(z) \subset R \cap X_\psi$. Consideremos $r = \text{mín}\{1, \delta\}$. Observemos que $r > 0$. Sea $w \in B^d_r(z)$. Entonces existe $\beta \in I$ tal que $w \in X_\beta$ de modo que $d((w,z)) < r$. Dado que $r \leq 1$ y $r \leq \delta$, $d((w,z)) < 1$ y $d((w,z)) < \delta$, deducimos que $\psi = \beta$ y así $w, z \in X_\psi$, de donde $d((w,z)) = \rho_\psi((w,z))$, luego $\rho_\psi((w,z)) < \delta$, es decir $w \in B^{\rho_\psi}_\delta(z)$, por lo que $w \in R$. Luego $B^d_r(z) \subset R$. Así $R \in \tau_d$. Entonces $\tau \subset \tau_d$. Por lo tanto $\tau = \tau_d$. $\square$

# Capítulo 2

# Convergencia de sucesiones

Este capítulo incluye propiedades básicas derivadas de la definición de convergencia. Principalmente se estudia el concepto de convergencia de sucesiones en los espacios topológicos definidos en el capítulo anterior y finaliza con un resultado que asegura que todo espacio de Hausdorff que tenga una sucesión convergente infinita contiene un subespacio metrizable.

**Definición 2.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Una **sucesión** en $X$ es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. La sucesión $f$ se representa por el símbolo $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y los valores de $f$, esto es, los elementos $f(n)$, se llaman términos de la sucesión. Para denotar una sucesión sólo lo haremos por sus elementos en lugar de hacerlo por la función. Si $f$ es una sucesión y $f(n) = x_n$, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denotara a $f$.

**Definición 2.2.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $X$ **converge** a un punto $w \in X$, si para cualquier $U \in \tau$ tal que $w \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq m$. Representamos el concepto anterior escribiendo $x_n \longrightarrow w$.

**Proposición 2.3.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $x \in X$, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ y $\mathcal{B}$ una base de $\tau$. Entonces $x_n \longrightarrow x$ si y sólo si para cualquier $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq m$.*

**Demostración**. La primera parte es inmediata de la Definición 2.2. Supongamos que para cualquier $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq m$. Mostraremos que $x_n \longrightarrow x$. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ es base de $\tau$ existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U$. La hipótesis implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$ para cada $n \geq m$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq m$. Esto garantiza que $x_n \longrightarrow x$. $\square$

**Proposición 2.4.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in Cl_X(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow x$.*

**Demostración**. Supongamos que $x \in Cl_X(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $A \cap B_{\frac{1}{n}}(x) \neq \emptyset$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$. De esta manera construimos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Mostraremos que $x_n \longrightarrow x$. Sea $U \in \tau_d$ tal que $x \in U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Más aún, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Esto implica que para cada $n \geq m$, $\ x_n \in U$. Recíprocamente, supongamos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Sea $V \in \tau_d$ tal que $x \in V$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq M$. Así, $A \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in Cl_X(A)$. $\square$

**Proposición 2.5.** *El espacio $\mathbb{R}^\dagger$ definido en la Proposición 1.37 satisface que:*

*i.* $\frac{1}{n} \to 0$

*ii.* *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión tal que $x_n \to 0$ $\ y\ $ $0 \notin \{x_m : m \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \geq M$.*

**Demostración**. Probaremos $i$). Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in U$ (ver Proposición 1.39).
Caso I. $U \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$.
Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. Luego existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para cada $n \geq M$. Entonces $\frac{1}{n} \in U$ para cada $n \geq M$.
Caso II. $U \in \mathcal{W}$.
Entonces existe $L \in \mathbb{P}(\tau_u)$ tal que $U = \{0\} \cup L$. De que $L \in \mathbb{P}(\tau_u)$ tenemos que $L \in \tau_u$ y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in L$ para cada $n \geq m$, y como $L \subset U$, se sigue que $\frac{1}{n} \in U$ para cada $n \geq m$.
De lo anterior $\frac{1}{n} \to 0$.

Haremos la prueba de $ii$) por contradicción. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ y $n_k \geq k$ tal que $x_{n_k} \notin \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}$. Sea $J = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $|J| = \infty$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $U_n \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ tal que $\frac{1}{n} \in U_n$ y $U_n \cap J = \emptyset$. Consideremos $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, observemos que $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ es tal que $\frac{1}{n} \in V$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $V \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$, así $\{0\} \cup V \in \mathcal{W}$ es tal que $0 \in \{0\} \cup V$. Además, notemos que:

$$
\begin{aligned}
(\{0\} \cup V) \cap J = (\{0\} \cap J) \cup (V \cap J) &= \Big(\{0\} \cap J\Big) \cup \left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap J\right) \\
&= \Big(\{0\} \cap J\Big) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap J)\right) \\
&= \Big(\{0\} \cap J\Big) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \emptyset\right) \\
&= \Big\{0\Big\} \cap J.
\end{aligned}
$$

De lo anterior,

$$
\Big\{0\Big\} \cap J = \begin{cases} \Big\{0\Big\}, & \text{si } 0 \in J \\ \emptyset, & \text{si } 0 \notin J. \end{cases}
$$

Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \{0\} \cup V$ para cada $n \geq M$. Por otro lado, dado que $|J| = \infty$, existe $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq M$ tal que $x_m \notin \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ y $x_m \neq 0$, es decir, $x_m \in (\{0\} \cup V) \cap J$, entonces $x_m \in \{0\} \cap J$, luego $x_m \in \{0\}$ lo cual no es posible. □

**Proposición 2.6.** *El espacio $M$ definido en la Proposición 1.41 satisface que:*

*i) Ninguna sucesión de puntos aislados converge a $(0,0)$.*

*ii) Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ es una sucesión tal que $x_n \longrightarrow (0,0)$ y $(0,0) \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \{(\frac{1}{m}, 0) : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \geq m$.*

**Demostración**. Probaremos el inciso $i$). Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) m \in \mathbb{N}\}$. Sean $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión. Sea $B = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in A_n\}$. Supongamos que $|B| < \infty$. Sean $w = \text{máx}\ (B) + 1$ y $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ la función constante $g(n) = 1$. Por inciso $vi$) de la Proposición 1.41, $Q_g^w \in \tau_\rho$ tal que $(0,0) \in Q_g^w$. Pero $x_n \notin Q_g^w$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $|B| = \infty$. Para cada $m \in B$ sea $B_m = \{s_m \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{s_m}\right) \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}$. Si $|B_m| < \infty$ para cada $m \in B$, sea $b_m = \text{máx}\ (B_m) + 1$ para cada $m \in B$. Sea $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definida por $h(m) = b_m$ para cada $m \in B$ y $h(m) = 1$ para cada $m \notin B$. Entonces $Q_h^1 \in \tau_\rho$ tal que $(0,0) \in Q_h^1$, pero $x_n \notin Q_h^1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, si existe $m \in B$ tal que $|B_m| = \infty$ entonces $\left(\frac{1}{m}, 0\right)$ es un punto límite de la sucesión. Concluimos que $x_n \nrightarrow (0,0)$. Así, ninguna sucesión de puntos de $A$ converge a $(0,0)$.

Haremos la prueba del inciso $ii$) por contradicción. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ es una sucesión tal que $x_n \longrightarrow (0,0)$ y $(0,0) \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \geq n$ con $X_{N_n} \notin \{(\frac{1}{m}, 0) : m \in \mathbb{N}\}$. Definamos $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mediante $h(1) = N_1$ y $h(n+1) = \text{mín}\ \{N_s > h(n),\ s \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{x_{h(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos aislados, de donde $x_{h(n)} \to (0,0)$. Esto es una contradicción al inciso $ii$). Por lo tanto, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ es una sucesión tal que $x_n \longrightarrow (0,0)$ y $(0,0) \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \{(\frac{1}{m}, 0) : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \geq m$. □

**Ejemplo 2.7.** Existe un subconjunto de puntos aislados $Z$ de $(S(\omega) \times S, \tau_{S(\omega)\times S})$ (ver Proposición 1.44 y Lema 1.35) tal que ninguna sucesión de puntos de $Z$ converge a $((0,0),0)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{(\frac{1}{m}, \frac{1}{nm}) : m \in \mathbb{N}\}$. Definimos $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \times \{\frac{1}{n}\}$. Probaremos que ninguna sucesión de puntos de $Z$ converge a $((0,0),0)$. Supongamos que existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ tal que $x_n \to ((0,0),0)$. Sea $\mathcal{E} \subset \{E_n \times \{\frac{1}{n}\} : n \in \mathbb{N}\}$ y que satisface que si $m \in \mathbb{N}$ entonces $E_m \times \{\frac{1}{m}\} \in \mathcal{E}$ si existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $x_a \in E_m \times \{\frac{1}{m}\}$.

i. Si $\mathcal{E}$ es un conjunto finito, sea $w = \text{máx}\{m \in \mathbb{N} : E_m \times \{\frac{1}{m}\} \in \mathcal{E}\}$. Entonces $U = S(\omega) \times S_{w+1} \in \tau_{S(\omega)\times S}$ tal que $((0,0),0) \in U$, pero para cada $a \in \mathbb{N}$, $x_a \notin U$.

ii. Si $\mathcal{E}$ es un conjunto infinito, para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $E_m \times \{\frac{1}{m}\} \in \mathcal{E}$ sea $F_m = \{b \in \mathbb{N} : x_b \in E_m \times \{\frac{1}{m}\}\}$. Como $x_n \to ((0,0),0)$ se sigue que $F_m$ es un conjunto finito. Esto implica que $F_m = \{b_i \in \mathbb{N} : i = 1, \cdots, k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Así, para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$ tenemos que $x_{b_i} = ((\frac{1}{p_i}, \frac{1}{mp_i}), \frac{1}{m})$ para algún $p_i \in \mathbb{N}$. Sea $p_{F_m} = \max\{p_i : x_{b_i} \in E_m \times \{\frac{1}{m}\}\}$. Vamos a definir una función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante

$$h(n) = \begin{cases} p_{F_n} + 1, & \text{si } E_n \times \{\frac{1}{n}\} \in \mathcal{E} \\ 1, & \text{si } E_n \times \{\frac{1}{n}\} \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Por inciso $iv)$ de la Proposición 1.44, $U = \Psi_h \in \tau_g$ tal que $(0,0) \in U$. Así $U \times S \in \tau_{S(\omega)\times S}$ tal que $((0,0),0) \in U$ pero para cada $a \in \mathbb{N}$, $x_a \notin U$.

De ambos casos obtenemos que $x_n \nrightarrow ((0,0),0)$, lo cual es una contradicción.

**Proposición 2.8.** *Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico de Hausdorff y una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ infinita convergente a $x \in X$, entonces $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es un subespacio metrizable de $X$.*

**Demostración**. Consideremos la función $d : S \times S \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$d((p,q)) = \begin{cases} \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, & \text{si } p = x_n,\ q = x_m \\ \frac{1}{n}, & \text{si } p = x_n,\ q = x \\ \frac{1}{m}, & \text{si } p = x,\ q = x_m \\ 0, & \text{si } p = q \end{cases}$$

Veremos que la función $d$ es una métrica para $S$. Sean $p, q, r \in S$. Como $|w| \geq 0$ para cada $w \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $d((p,q)) \geq 0$. Además, $d((p,q)) = 0$ si y sólo si $p = q$. Mostraremos ahora que $d((p,q)) = d((q,p))$ y para ello supongamos que $p \neq q$ y analicemos los siguientes casos:

CASO I. $p \neq q$ y $x \notin \{p,q\}$.
Entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ y de modo que $p = x_m$ y $q = x_n$. Luego $d((p,q)) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$ y dado que $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = d((q,p))$. Así, $d((p,q)) = d((q,p))$.

CASO II. $p \neq q$ y $x \in \{p,q\}$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $q = x$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = x_m$. Luego como $d((p,q)) = \frac{1}{m}$ y $d((q,p)) = \frac{1}{m,}$ tenemos que $d((p,q)) = d((q,p))$.

Finalmente probaremos que $d$ satisface la desigualdad triangular.

CASO I. $p = q$.
Entonces $d((p,q)) = 0$. Dado que $d((p,r)) \geq 0$ y $d((r,q)) \geq 0$, se deduce que $d((p,r)) + d((r,q)) \geq 0$. Así, $d((p,q)) \leq d((p,r)) + d((r,q))$.

CASO II. $\quad p \neq q \quad \text{y} \quad r \in \{p, q\}$.
Sin perder generalidad supongamos que $r = p$, entonces $d((p,q)) = d((r,q))$. Dado que $d((p,q)) \leq d((p,q)) + d((p,r))$, entonces $d((p,q)) \leq d((p,r)) + d((r,q))$.

CASO III. $\quad p \neq q \quad \text{y} \quad r \notin \{p, q\}$.
SUBCASO i. $\quad x \in \{p, q\}$
Sin pérdida de generalidad supongamos que $p = x$. Entonces existen $m_q, m_r \in \mathbb{N}$ con $m_q \neq m_r$ tales que $q = x_{m_q}$ y $r = x_{m_r}$. De donde $d((p,q)) = \frac{1}{m_q}$, $d((p,r)) = \frac{1}{m_r}$ y $d((r,q)) = \left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_r}\right|$. Como $\frac{1}{m_q} = \left|\frac{1}{m_q}\right| = \left|\frac{1}{m_q} + \left(\frac{1}{m_r} - \frac{1}{m_r}\right)\right| = \left|\frac{1}{m_r} + \left(\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_r}\right)\right| \leq \frac{1}{m_r} + \left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_r}\right|$, obtenemos que $d((p,q)) \leq d((p,r)) + d((r,q))$.

SUBCASO ii. $\quad x \notin \{p, q, r\}$
Entonces existen $m_p, m_q, m_r \in \mathbb{N}$ con $m_p \neq m_q$, $m_q \neq m_r$, $m_r \neq m_p$ y tales que $p = x_{m_p}$, $q = x_{m_q}$ y $r = x_{m_r}$. De donde tenemos que $d((p,q)) = \left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_p}\right|$, $d((p,r)) = \left|\frac{1}{m_r} - \frac{1}{m_p}\right|$ y $d((r,q)) = \left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_r}\right|$, como $\left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_p}\right| \leq \left|\frac{1}{m_r} - \frac{1}{m_p}\right| + \left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_r}\right|$, deducimos que $d((p,q)) \leq d((p,r)) + d((r,q))$.

SUBCASO iii. $\quad r = x$
Entonces existen $m_p, m_q \in \mathbb{N}$ con $m_p \neq m_q$ tales que $p = x_{m_p}$ y $q = x_{m_q}$. Tenemos que $d((p,q)) = \left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_p}\right|$, $d((p,r)) = \frac{1}{m_p}$ y $d((r,q)) = \frac{1}{m_q}$. Como $\left|\frac{1}{m_q} - \frac{1}{m_p}\right| \leq \frac{1}{m_q} + \frac{1}{m_p}$, obtenemos que $d((p,q)) \leq d((p,r)) + d((r,q))$.

Del análisis de estos casos podemos decir que $d((p,q)) \leq d((p,r)) + d((r,q))$. Por lo tanto $d$ es una métrica para $S$. Entonces $(S, d)$ es un espacio métrico.

Finalmente probaremos que $\tau_S = \tau_d$. Sean $U \in \tau_S$ y $p \in U$. Entonces $U = S \cap V$ para algún $V \in \tau$. Tenemos los siguientes casos:

CASO I. $\quad p = x$.
Entonces $x \in V$. Dado que $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq N$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Mostraremos que $B^d_\varepsilon(p) \subset U$, para lo cual sea $q \in B^d_\varepsilon(p)$. Si $q = x$ entonces $q = p$, de donde $q \in U$. Si $q \neq x$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $q = x_k$, así que $d((p,q)) = \frac{1}{k}$, de aquí se sigue que $\frac{1}{k} < \varepsilon$, es decir $\frac{1}{k} < \frac{1}{N}$, así que $N < k$ y por lo tanto $x_k \in V$, de esta manera se satisface que $x_k \in A \cap V$, esto es $q \in U$. Obtenemos que $B^d_\varepsilon(p) \subset U$.

CASO II. $\quad p \neq x$.
Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = x_m$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{m(m+1)}$. Mostraremos que $B^d_\varepsilon(p) = \{p\}$. Sea $y \in B^d_\varepsilon(p)$. Si $y = x$, tenemos que $d((y,p)) = \frac{1}{m}$. Como $\frac{1}{m} \not< \frac{1}{m(m+1)}$ deducimos que $y \neq x$. Así, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $y = x_j$. Por lo que $d((y,p)) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{j}\right|$, de donde se sigue que $\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{j}\right| < \frac{1}{m(m+1)}$. Obtenemos que $\frac{1}{m} - \frac{1}{j} < \frac{1}{m(m+1)}$. Inferimos que $j < m + 1$.

Por lo tanto $m \geq j$. Supongamos que $m > j$. Así, $\frac{1}{m} < \frac{1}{j}$. Luego $\frac{1}{j} - \frac{1}{m} < \frac{1}{m(m+1)}$. Esto implica que $\frac{m-j}{jm} < \frac{1}{m(m+1)}$. Se deduce que $m(m+1)(m-j) < jm$. Dado que $m(m+1) \leq m(m+1)(m-j)$, se tiene que $m+1 < j$. Una contradicción. Concluimos que $m = j$. De esta manera se satisface que $y = p$. Luego $B_\varepsilon^d(p) \subset \{p\}$. Por lo tanto $B_\varepsilon^d(p) = \{p\}$. Además, como $p \in U$ tenemos que $B_\varepsilon^d(p) \subset U$.

De ambos casos se deduce que $U \in \tau_d$.

Ahora veremos que $\tau_d \subset \tau_S$, para lo cual sean $\varepsilon > 0$ y $p \in S$.

CASO I. $\quad p = x_k \quad$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
Dado que $(X, \tau)$ es de Hausdorff, existen $U_0, V_0 \in \tau$ tales que $p \in U_0$, $x \in V_0$ y $U_0 \cap V_0 = \emptyset$. De esto tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V_0$ para cada $n \geq M$. La condición $k \geq M$ implica que $p \in U_0 \cap V_0$, lo cual es una contradicción. Entonces $k < M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < M$ y $n \neq k$ consideremos $U_n, V_n \in \tau$ tales que $x_k \in U_n, x_n \in V_n$ y $U_n \cap V_n = \emptyset$. Sea $U = U_0 \cap \left( \bigcap_{n<M, n\neq k} U_n \right)$. Por una parte tenemos que $p \in U \cap S$. Sea $q \in U \cap S$, entonces $q \in S$. Si $q = x$ tenemos que $q \in U_0 \cap V_0$, lo cual no es posible. Así, $q = x_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si $m \geq M$, nuevamente obtenemos que $q \in U_0 \cap V_0$, lo cual no es posible, por lo tanto $m < M$. Si $m \neq k$, se sigue que $x_m \in V_m \cap U_m$, lo cual no es posible. Deducimos que $m = k$, de donde $q = x_k = p$. Luego $U \cap S \subset \{p\}$. Por lo tanto $U \cap S = \{p\}$. Garantizamos que $\{p\} \in \tau_S$.

CASO II. $\quad p = x$.
Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ entonces $\{x\} \cup \{x_n : n \geq N\} \subset B_\varepsilon^d(p)$. Notemos que $\{x_n : n < N\}$ es cerrado en $S$ porque $S$ es de Hausdorff. Entonces $\{x\} \cup \{x_n : n \geq N\} \in \tau_S$.

De cualquier caso existe $W \in \tau_S$ tal que $p \in W \subset B_\varepsilon^d(p)$. Por lo tanto $\tau_d = \tau_S$, es decir $S$ es un subespacio metrizable de $X$. $\square$

# Capítulo 3

# Espacios topológicos de Estrechez Numerable

En este capítulo se estudian algunas de las propiedades básicas derivadas de los espacios de estrechez numerable. Incluye resultados útiles para determinar si un espacio topológico dado es o no de estrechez numerable. Describiremos algunas funciones bajo las cuales se preserva la estrechez numerable. Aquí se expondrán algunas estructuras topológicas de estrechez numerable como la suma topológica y el producto de espacios de estrechez numerable. Se analizará brevemente la relación con respecto a la estrechez numerable y los espacios compactos, paracompactos y numerablemente compactos.

**Notación 3.1.** Si $A$ es un conjunto, $\mathbf{N}(A) = \{B \subset A : B \text{ es a lo más numerable }\}$ y $\mathbf{F}(A) = \{C \subset A : C \text{ es finito}\}$.

**Notación 3.2.** Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico, $\mathcal{CL}(X) = \{K \subset X : Cl_X(K) = K\}$.

**Definición 3.3.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que $X$ tiene **estrechez numerable** si para cada $A \subset X$ la condición $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} \subset A$ implica que $A$ es cerrado en $X$.

**Ejemplo 3.4.** El espacio cofinito $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ tiene estrechez numerable. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\bigcup\{Cl_{\mathbb{R}}(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} \subset A$. Si $A$ es finito, entonces $A$ es cerrado. Si $A$ es infinito existe $B \subset A$ infinito numerable. Como $Cl_{\mathbb{R}}(B) = \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} \subset A$. Así, $A = \mathbb{R}$. En cualquier caso $A$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

**Notación 3.5.** Denotaremos por $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales.

**Ejemplo 3.6.** El espacio conumerable $(\mathbb{R}, \tau_{con})$ es un espacio que no tiene estrechez numerable. Mostraremos que el conjunto $\mathbb{I}$ satisface la codición de la Definición 3.3 pero no es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{con})$. Si $W \in \mathbf{N}(\mathbb{I})$ entonces $W \in \mathbf{N}(\mathbb{R})$. Tenemos que $\mathbf{N}(\mathbb{R}) = \mathcal{CL}(\mathbb{R})$. Así, $Cl_{\mathbb{R}}(W) = W$. Es decir, $Cl_{\mathbb{R}}(W) \subset \mathbb{I}$ para cada $W \in \mathbf{N}(\mathbb{I})$. Además, $\mathbb{I}$ no es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{con})$ porque de lo contrario se tiene que $\mathbb{R} - \mathbb{I} \in \tau_{con}$, lo cual no es posible porque $\mathbb{I}$ no es numerable.

**Teorema 3.7.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces $X$ tiene estrechez numerable si y sólo si para cada $x \in X$ y $A \subset X$ tal que $x \in Cl_X(A)$ existe $C \in \mathbf{N}(A)$ con $x \in Cl_X(C)$.*

**Demostración**. Probaremos que $X$ tiene estrechez numerable. Sea $A \subset X$ tal que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} \subset A$. Para nuestro objetivo veremos que $Cl_X(A) = A$. Sea $x \in Cl_X(A)$, por hipótesis existe $C \in \mathbf{N}(A)$ tal que $x \in Cl_X(C)$. Luego $x \in \bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\}$, de donde $x \in A$. Así, $Cl_X(A) \subset A$. Por lo que $Cl_X(A) = A$.

Supongamos ahora que $X$ tiene estrechez numerable. Sean $x \in X$ y $A \subset X$ tal que $x \in Cl_X(A)$. Consideremos $E = \bigcup\{Cl_X(C) : C \in \mathbf{N}(A)\}$. Observemos que si $w \in A$, entonces $\{w\} \in \mathbf{N}(A)$ y $w \in E$. Por lo tanto $A \subset E$. Así, $Cl_X(A) \subset Cl_X(E)$.

Probaremos que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(E)\} \subset E$. Sea $s \in \bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(E)\}$, entonces existe $P \in \mathbf{N}(E)$ tal que $s \in Cl_X(P)$. Notemos que para cada $z \in P$, existe $C_z \in \mathbf{N}(A)$ tal que $z \in Cl_X(C_z)$. Sea $Q = \bigcup\limits_{z \in P} C_z$. Tenemos que $Q \in \mathbf{N}(A)$. Por lo tanto $Cl_X(Q) \subset E$. Veremos que $s \in Cl_X(Q)$. Sea $U \in \tau$ tal que $s \in U$. Entonces $P \cap U \neq \emptyset$ y así, existe $m \in P \cap U$, de esta manera se tiene que $m \in P$ y que $m \in U$, entonces $U \cap C_m \neq \emptyset$, y dado que

$U \cap C_m \subset \bigcup\limits_{z \in P} (U \cap C_z) = U \bigcap \left( \bigcup\limits_{z \in P} C_z \right) = U \cap Q$, se deduce que $U \cap Q \neq \emptyset$.

Por lo tanto $s \in Cl_X(Q)$. Entonces $s \in E$, es decir, $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(E)\} \subset E$, debido a la estrechez numerable de $X$ concluimos que $E$ es cerrado.

Obtenemos que $Cl_X(A) \subset E$. Luego se satisface que $x \in E$, así que, existe $D \in \mathbf{N}(A)$ tal que $x \in Cl_X(D)$. □

**Corolario 3.8.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces $X$ tiene estrechez numerable si y sólo si para cada $A \subset X$ se cumple que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} = Cl_X(A)$.*

**Demostración**. Supongamos que $X$ tiene estrechez numerable y sea $A \subset X$. Demostraremos que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} = Cl_X(A)$. Dado que $Cl_X(W) \subset Cl_X(A)$ para cada $W \in \mathbf{N}(A)$ entonces $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} \subset Cl_X(A)$. Para demostrar la otra contención, sea $x \in Cl_X(A)$, entonces por el Teorema 3.7 existe $C \in \mathbf{N}(A)$ tal que $x \in Cl_X(C)$. Luego $x \in \bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\}$. Así, $Cl_X(A) \subset \bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\}$. Por lo tanto $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} = Cl_X(A)$.
Recíprocamente, supongamos que para cada $A \subset X$ se cumple que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} = Cl_X(A)$. Probaremos que $X$ tiene estrechez numerable utilizando nuevamente el Teorema 3.7. Sean $G \subset X$ y $x \in X$ tal que $x \in Cl_X(G)$. Nuestra hipótesis garantiza que $\bigcup\{Cl_X(L) : L \in \mathbf{N}(G)\} = Cl_X(G)$. Entonces $x \in \bigcup\{Cl_X(L) : L \in \mathbf{N}(G)\}$. Luego existe $C \in \mathbf{N}(G)$ tal que $x \in Cl_X(C)$. Concluimos que $X$ tiene estrechez numerable. □

**Teorema 3.9.** *Tener estrechez numerable es una propiedad hereditaria.*

**Demostración**. Sean $(X, \tau)$ un espacio de estrechez numerable y $A \subset X$. Sea $W \subset A$ tal que $\bigcup\{Cl_A(K) : K \in \mathbf{N}(W)\} \subset W$. De la estrechez numerable de $(X, \tau)$ y del Corolario 3.8 tenemos que $\bigcup\{Cl_X(L) : L \in \mathbf{N}(W)\} = Cl_X(W)$. Notemos que

$$\begin{aligned}\bigcup\{Cl_A(K) : K \in \mathbf{N}(W)\} &= \bigcup_{K \in \mathbf{N}(W)} (Cl_X(K) \cap A) \\ &= A \cap \left( \bigcup_{K \in \mathbf{N}(W)} Cl_X(K) \right) \\ &= A \cap Cl_X(W).\end{aligned}$$

Luego $A \cap Cl_X(W) \subset W$. Además, como $W \subset A$ y $W \subset Cl_X(W)$ entonces $W \subset A \cap Cl_X(W)$, esto implica que $A \cap Cl_X(W) = W$. Por lo tanto $W$ es cerrado en $A$. Entonces $(A, \tau_A)$ tiene estrechez numerable. □

**Definición 3.10.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $D \subset X$. Decimos que $D$ es **denso** en $X$ si $Cl_X(D) = X$, y será **separable** si existe $W \subset X$ denso y numerable.

**Proposición 3.11.** *Cada espacio hereditariamente separable tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico hereditariamente separable. Sea $A \subset X$ tal que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} \subset A$. Como $(X, \tau)$ es un espacio topológico hereditariamente separable, entonces existe $\Gamma \in \mathbf{N}(A)$ tal que $Cl_A(\Gamma) = A$. De la igualdad $Cl_A(\Gamma) = Cl_X(\Gamma) \cap A$ obtenemos que $A = Cl_X(\Gamma) \cap A$. Dado que $Cl_X(\Gamma) \cap A \subset Cl_X(\Gamma)$, se sigue que $A \subset Cl_X(\Gamma)$. De que $\Gamma \in \mathbf{N}(A)$ y la suposición sobre $A$ se tiene que $Cl_X(\Gamma) \subset A$. Por lo tanto $A = Cl_X(\Gamma)$. Esto implica que $A$ es cerrado en $X$, es decir, $(X, \tau)$ tiene estrechez numerable. □

## 3.1. Estrechez numerable y funciones continuas.

**Teorema 3.12.** *La imagen cociente de un espacio de estrechez numerable tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico que tiene estrechez numerable y $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función cociente. Mostraremos que $(Y, \tau_Y)$ tiene estrechez numerable. Tomemos $A \subset Y$ tal que $Cl_Y(W) \subset A$ para cada $W \in \mathbf{N}(A)$. Como $f$ es cociente basta mostrar que $f^{-1}(A)$ es cerrado en $X$. Sea $C \in N(f^{-1}(A))$. Entonces $f(C) \in \mathbf{N}(A)$. Así, $Cl_Y(f(C)) \subset A$. Como $f$ es continua, el Teorema 1.15 asegura que $Cl_X(C) \subset Cl_X(f^{-1}(f(C))) \subset f^{-1}(Cl_Y(f(C))) \subset f^{-1}(A)$. Esto significa que $Cl_X(G) \subset f^{-1}(A)$ para cada $G \in \mathbf{N}(f^{-1}(A))$. Dado que $(X, \tau_X)$ tiene estrechez numerable, obtenemos que $f^{-1}(A)$ es cerrado en $X$. Por lo tanto $(Y, \tau_Y)$ tiene estrechez numerable. □

**Corolario 3.13.** *La imagen pseudo-abierta de un espacio de estrechez numerable tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. La Proposición 1.61 garantiza que cada función pseudo-abierta es una función cociente. El resultado es inmediato del Teorema 3.12. □

**Corolario 3.14.** *La imagen abierta o cerrada de un espacio de estrechez numerable tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. La Proposición 1.57 implica que toda función suprayectiva cerrada ó abierta es una función pseudo-abierta. La prueba es inmediata del Corolario 3.13. □

## 3.2. Estructuras topológicas y estrechez numerable

**Teorema 3.15.** *La suma topológica de espacios topológicos de estrechez numerable tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos de estrechez numerable ajenos dos a dos. Verificaremos que $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha$ tiene estrechez numerable. Recordemos que $\bigoplus_{\alpha\in I} X_\alpha = (X, \tau)$ donde $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ y $\tau = \{U \subset \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha, \forall\alpha \in I\}$. Sea $A \subset X$ tal que $Cl_X(C) \subset A$ para cada $C \in \mathbf{N}(A)$. Demostraremos que $A$ es cerrado en $X$ probando que $X - A \in \tau$. Sea $\beta \in I$. Para probar que $(X - A) \cap X_\beta \in \tau_\beta$ veremos que $X_\beta - ((X - A) \cap X_\beta)$ es cerrado en $X_\beta$. Para ello observaremos primero que $X_\beta - ((X - A) \cap X_\beta) = X_\beta \cap A$. Posteriormente, mostraremos que $X_\beta \cap A$ es cerrado en $X_\beta$ viendo que $Cl_{X_\beta}(K) \subset X_\beta \cap A$ para cada $K \in \mathbf{N}(X_\beta \cap A)$. Tenemos que $X_\beta - ((X - A) \cap X_\beta) = (X_\beta - (X - A)) \cup (X_\beta - X_\beta) = X_\beta - (X - A) = X_\beta \cap A$. Ahora, sean $F \in \mathbf{N}(X_\beta \cap A)$ y $x \in Cl_{X_\beta}(F)$. Dado que $Cl_{X_\beta}(F) = Cl_X(F) \cap X_\beta$, entonces $x \in Cl_X(F) \cap X_\beta \subset Cl_X(F)$. Por lo que $F \in \mathbf{N}(A)$ tal que $x \in Cl_X(F)$. Deducimos que $x \in A$ por la suposición sobre $A$. Así, $x \in X_\beta \cap A$. De la elección arbitraria del conjunto $F$ se tiene que $Cl_{X_\beta}(K) \subset X_\beta \cap A$ para cada $K \in \mathbf{N}(X_\beta \cap A)$. Concluimos que $X_\beta \cap A$ es cerrado en $X_\beta$ pues $(X_\beta, \tau_\beta)$ es un espacio de estrechez numerable. Como $\beta$ fue elegido arbitrario, entonces $(X - A) \cap X_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, luego $X - A \in \tau$. Se sigue que $A$ es cerrado en $X$. Por lo tanto la suma topológica de espacios topológicos de estrechez numerable tiene estrechez numerable. □

El siguiente ejemplo muestra que el producto de espacios de estrechez numerable no necesariamente tiene estrechez numerable.

**Ejemplo 3.16.** El espacio $(S(\omega) \times S(\omega^\omega), \tau_{S(\omega)\times S(\omega^\omega)})$ no tiene estrechez numerable (ver Proposición 1.21). Sea $A = \bigcup_{f\in\omega^\omega} A_f$, donde $A_f = \{(x, y) \in S(\omega) \times S(\omega^\omega) : x = (n, f(n)), y = (f, j), n, j \in \omega\}$ para cada $f \in \omega^\omega$. Mostraremos que $(\omega, c) \in$

$Cl_{S(\omega)\times S(\omega^\omega)}(A)$. Sea $U \in \tau_{S(\omega)\times S(\omega^\omega)}$ tal que $(\omega, c) \in U$ entonces existe $h \in \omega^\omega$ y existe $F \in \omega^{\omega^\omega}$ tales que $B_h \times B_F \subset U$. Como $((n, h(n)), (h, F(h))) \in B_h \times B_F \cap A_h$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $(\omega, c) \in Cl_{S(\omega)\times S(\omega^\omega)}(A)$.

Probaremos que para cada $C \in \mathbf{N}(A)$ se cumple que $(\omega, c) \notin Cl_{S(\omega)\times S(\omega^\omega)}(C)$. Sea $C \in \mathbf{N}(A)$. Existen $\{f_i : i \in \omega\} \subset \omega^\omega$ de modo que $C = \bigcup_{i\in\omega} A_{f_i}$. Definiremos una función $g \in \omega^\omega$ mediante $g(0) = f_0(0) + 1$. Para cada $n > 0$ será $g(n) =$ máx $\{f_n(j) : j = 0, 1, \cdots, n\} + 1 + g(n-1)$, de esta manera tenemos que $g(n) > g(n-1)$ para cada $n \in \omega$. Sea $W = B_g \times S(\omega^\omega)$, entonces $W \in \tau_{S(\omega)\times S(\omega^\omega)}$ tal que $(\omega, c) \in W$ pero $W \cap C = \emptyset$ por construcción. Esto muestra que este espacio no es de estrechez numerable.

**Definición 3.17.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que $\mathcal{C} \subset \tau$ es una **cubierta abierta** de $X$ si $X = \bigcup \mathcal{C}$.

**Definición 3.18.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de $X$. Decimos que $\mathcal{F}$ es una **subcubierta** de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ y $X = \bigcup \mathcal{F}$.

**Definición 3.19.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que $(X, \tau)$ es un espacio topológico **compacto** si toda cubierta abierta de $X$ contiene una subcubierta finita.

La prueba del siguiente lema puede consultarse en [5, Lema 26.8, p. 168].

**Lema 3.20.** *Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Supongamos que $(Y, \tau_Y)$ es compacto. Sea $x_0 \in X$. Si $U \in \tau_{X\times Y}$ es tal que $\{x_0\} \times Y \subset U$, entonces existe $W \in \tau_X$ de modo que $\{x_0\} \times Y \subset W \times Y \subset U$.*

**Proposición 3.21.** *Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Si $(Y, \tau_Y)$ es compacto, entonces la función proyección $\pi_X$ es cerrada.*

**Demostración**. Sea $C \subset X \times Y$ cerrado. Probaremos que $\pi_X(C)$ es cerrado en $X$ mostrando que $X - \pi_X(C) \in \tau_X$. Sea $x \in X - \pi_X(C)$. Así, $(x, y) \notin C$ para toda $y \in Y$. Se deduce que $\{x\} \times Y \subset (X \times Y) - C$. El Lema 3.20 asegura que existe $W \in \tau_X$ tal que $\{x\} \times Y \subset W \times Y \subset (X \times Y) - C$. De lo anterior $W \cap \pi_X(C) = \emptyset$. Por lo tanto $x \in W \subset X - \pi_X(C)$. Es decir, $X - \pi_X(C) \in \tau_X$. Concluimos que $\pi_X$ es cerrada. □

**Teorema 3.22.** *Sean $(X, \tau_X)$, $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos de Hausdorff con estrechez numerable. Si $(Y, \tau_Y)$ es compacto, entonces $(X \times Y, \tau_{X\times Y})$ tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $A \subset X\times Y$ tal que $\bigcup\{Cl_{X\times Y}(K) : K \in \mathbf{N}(A)\} \subset A$. Mostraremos que $A$ es cerrado en $X \times Y$. Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que $A$ no es cerrado en $X \times Y$. Entonces $A \neq \emptyset$. Como $A \subset Cl_{X\times Y}(A)$ se sigue que $Cl_{X\times Y}(A) - A \neq \emptyset$. Así, existe $(x, y) \in Cl_{X\times Y}(A) - A$. Por otro lado, como $(X, \tau_X)$ es un espacio de Hausdorff, entonces $\{x\}$ es cerrado en $X$. Esto implica que $\{x\} \times Y$ es cerrado en $X \times Y$. Dado que $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a $Y$, tenemos que $\{x\} \times Y$

tiene estrechez numerable. Sea $B = (\{x\} \times Y) \cap A$. Si $G \in \mathbf{N}(B)$, entonces $G \in \mathbf{N}(A)$ así que $Cl_{X\times Y}(G) \subset A$, de donde se sigue que $Cl_{\{x\}\times Y}(G) = (\{x\} \times Y) \cap Cl_{X\times Y}(G) \subset (\{x\} \times Y) \cap A$, por lo que $B$ es cerrado en $\{x\} \times Y$, más aún, $B$ es cerrado en $X \times Y$. Dado que $B$ es cerrado y $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a $Y$ entonces $\pi_Y(B)$ es cerrado en $Y$. Como $(x, y) \notin A$, entonces $y \notin \pi_Y(B)$, y de que $(Y, \tau_Y)$ es compacto y $T_2$, entonces existen $U, V \in \tau_X$ tales que $y \in U$, $\pi_Y(B) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Notemos que $Cl_Y(U) \cap V = \emptyset$, así que $Cl_Y(U) \cap \pi_Y(B) = \emptyset$. Tenemos que $Cl_Y(U)$ es un conjunto cerrado en $Y$ tal que $y \in Cl_Y(U)$ y que $X \times Cl_Y(U)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$ tal que $(x, y) \in X \times Cl_Y(U)$. Ahora, sea $W = A \cap (X \times Cl_Y(U))$, como $(x, y) \in Cl_{X\times Y}(A)$ y $Cl_{X\times Cl_Y(U)}(A) = (X \times Cl_Y(U)) \cap Cl_{X\times Y}(A)$ se sigue que $(x, y) \in Cl_{X\times Cl_Y(U)}(A)$. Sea $P \in \tau_{X\times Y}$ tal que $(x, y) \in P$. Dado que $(x, y) \in P \cap (X \times Cl_Y(U))$, entonces $P \cap (A \cap (X \times Cl_Y(U))) \neq \emptyset$. Concluimos que $(x, y) \in Cl_{X\times Y}(W)$. Ahora sea $R \in \mathbf{N}(W)$. Tenemos que $R \in \mathbf{N}(A)$, de donde se sigue que $Cl_{X\times Y}(R) \subset A$ y como $R \subset X \times Cl_Y(U)$ deducimos que $Cl_{X\times Y}(R) \subset X \times Cl_Y(U)$, esto garantiza que $Cl_{X\times Y}(R) \subset A \cap (X \times Cl_Y(U))$, esto es $Cl_{X\times Y}(R) \subset W$. Por lo tanto $\bigcup\{Cl_{X\times Y}(Q) : Q \in \mathbf{N}(W)\} \subset W$. Mostraremos que $\pi_X(W)$ es cerrado en $X$ utilizando la hipótesis de que $(X, \tau_X)$ tiene estrechez numerable. Sea $T \in \mathbf{N}(\pi_X(W))$, entonces existe $S \in \mathbf{N}(W)$ tal que $\pi_X(S) = T$. Así, $Cl_{X\times Y}(S) \subset W$. Esto implica que $\pi_X(Cl_{X\times Y}(S)) \subset \pi_X(W)$. Como $(Y, \tau_Y)$ es compacto, la Proposición 3.21 implica que la función $\pi_X$ es cerrada. Del Teorema 1.55 se deduce que $Cl_X(\pi_X(S)) \subset \pi_X(Cl_{X\times Y}((S))$. Así, $Cl_X(T) \subset \pi_X(W)$. Obtenemos que $\pi_X(W)$ contiene a la cerradura de sus subconjuntos numerables. De que $(X, \tau_X)$ tiene estrechez numerable se tiene que $\pi_X(W)$ es cerrado en $X$. Recordemos que $(x, y) \in Cl_{X\times Y}(W)$, de esto se sigue que $x \in \pi_X(Cl_{X\times Y}(W))$. Como $\pi_X$ es una función continua, el Teorema 1.14 asegura que $\pi_X(Cl_{X\times Y}(W)) \subset Cl_X(\pi_X(W))$. Por lo tanto $x \in \pi_X(W)$. Entonces existe algún punto $z \in Y$ tal que $(x, z) \in W$, de donde se concluye que $z \in Cl_Y(U)$ y $(x, z) \in B$, por lo que $z \in \pi_Y(B) \cap Cl_Y(U)$, esto no es posible. $\square$

### 3.2.1. Compacidad numerable

**Definición 3.23.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es **numerablemente compacto** si cada cubierta abierta numerable de $X$ tiene una subcubierta finita.

**Proposición 3.24.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico. Si $X$ es numerablemente compacto, entonces cada sucesión $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de $X$ tal que $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ tiene intersección no vacía.*

**Demostración**. Supongamos que $X$ es numerablemente compacto. Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que existe una sucesión $\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de $X$ tal que $C_{i+1} \subset C_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ de tal modo que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i = \emptyset$. De aquí que $X - \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i = X$. Por lo que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X - C_i = X$, esto es, $\{X - C_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta numerable de $X$. Entonces existe $A \in \mathbf{F}(\mathbb{N})$ tal que $X - \bigcap_{i\in\mathbf{F}} C_i = X$.

Tenemos que $\bigcap_{i\in\mathbf{F}} C_i = \emptyset$, esto no es posible. Por lo tanto $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$. $\square$

**Definición 3.25.** Sean $(X,\tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que $A$ es un conjunto $G_\delta$ si existe una familia $\{U_n \in \tau : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Se dice que $A$ es un conjunto $F_\sigma$ si existe una familia $\{K_n \in \mathcal{CL}(X) : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Con la Definición 3.25 se demuestra inmediatamente el siguiente lema.

**Lema 3.26.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico y $M \subset X$. Entonces $M$ es un conjunto $G_\delta$ si y sólo si $X - M$ es un conjunto $F_\sigma$.*

**Definición 3.27.** Un espacio topológico $(X,\tau)$ es **perfecto** si para cada $U \in \tau$, se tiene que $U$ es $F_\sigma$.

**Lema 3.28.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. Entonces $X$ es perfecto si y sólo si cada cerrado en $X$ es $G_\delta$.*

**Demostración**. Supongamos que $X$ es perfecto. Probaremos que cada cerrado en $X$ es $G_\delta$. Sea $K \in \mathcal{CL}(X)$. Entonces $X - K \in \tau$. Por hipótesis, $X - K$ es $F_\sigma$. De Lema 3.25 se deduce que $K$ es $G_\delta$. Ahora, supongamos que cada cerrado en $X$ es $G_\delta$. Mostraremos que $X$ es perfecto. Sea $U \in \tau$. Así, $X - U \in \mathcal{CL}(X)$. Por hipótesis, $X - U$ es $G_\delta$. De Lema 3.25 se deduce que $U$ es $F_\sigma$. $\square$

**Teorema 3.29.** *Sea $(X,\tau_X)$ un espacio perfecto y numerablemente compacto. Si $(Y,\tau_Y)$ es un subespacio discreto de $(X,\tau_X)$ entonces $Y$ es numerable.*

**Demostración**. Supongamos que $Y$ es no numerable. Supongamos que $|Y| = \omega_1$. Vamos a indizar a $Y = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como $(Y,\tau_Y)$ es un subespacio discreto de $(X,\tau_X)$ entonces para cada $\alpha < \omega_1$ existe $U_\alpha \in \tau$ tal que $\{x_\alpha\} = Y \cap U_\alpha$. Sea $U = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$. Entonces $U \in \tau$, esto implica que $U$ es un conjunto $F_\sigma$. Sea $\{F_j : j \in \mathbb{N}\}$ una sucesión creciente de conjuntos cerrados tales que $U = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j$. Observemos que $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(F_j \cap Y) = U \cap Y = (\bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha) \cap Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} (U_\alpha \cap Y) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{x_\alpha\} = Y$, de esta manera existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_k \cap Y$ es un conjunto no numerable. Sea $\alpha < \omega_1$ tal que $x_\alpha \in F_k$. Entonces $H_\alpha = \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ es un conjunto numerable. Así que $H_\alpha \neq F_k \cap Y$. Podemos considerar una sucesión estrictamente creciente de números ordinales $\alpha_i$ menores que $\omega_1$ tales que $x_{\alpha_i} \in F_k$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Para cada $l \in \mathbb{N}$, sean $A_l = \{x_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}$ con $i \geq l\}$ y $E_l = Cl_X(A_l)$, entonces $\{E_l : l \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados. La Proposición 3.24 asegura que $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} E_l \neq \emptyset$. Sea $E = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} E_l$. Sea $x \in E$. Tenemos que $F_k \subset U$ y como $F_k$ es cerrado, entonces $E \subset F_k \subset U = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$. Así existe $\gamma < \omega_1$ tal que $x \in U_\gamma \in \tau$. Tenemos dos casos:

i. si $\gamma \geq \alpha_l$ para cada $l \in \mathbb{N}$, como la sucesión es estrictamente creciente entonces $\gamma > \alpha_l$ para cada $l \in \mathbb{N}$, y por la definición de $A_l$ deducimos que $x_\gamma \notin A_1$. Luego, $U_\gamma \cap Y = \{x_\gamma\}$ y como $A_1 \subset Y$ se sigue que $U_\gamma \cap A_1 = \emptyset$, esto contradice el hecho de que $x \in Cl_X(A_1)$.

ii. si $\gamma < \alpha_l$ para algún $l \in \mathbb{N}$ entonces $x_\gamma \notin A_l$, de donde se sigue que $x_\gamma \notin A_1$, así que $U_\gamma \cap Y = \{x_\gamma\}$. Como $A_l \subset U$ entonces $U_\gamma \cap A_l = \emptyset$, lo cual no es posible porque $x \in Cl_X(A_l) = E_l$.

Entonces $Y$ es numerable. □

**Teorema 3.30.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio regular y numerablemente compacto sin estrechez numerable. Entonces $(X, \tau_X)$ tiene un subespacio discreto no numerable.*

**Demostración**. Como $(X, \tau_X)$ es un espacio sin estrechez numerable entonces existe $A \subset X$ tal que $Cl_X(W) \subset A$ para cada $W \in \mathbf{N}(A)$ y $A$ no es cerrado en $X$. Así, existe $x \in Cl_X(A) - A$. Sea $Q \subset X$ un conjunto $G_\delta$ tal que $x \in Q$. Mostraremos que $Q \cap A \neq \emptyset$ observando que $Q \cap Cl_X(W) \neq \emptyset$ para algún $W \in \mathbf{N}(A)$. Sea $\{U_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X$ una familia abierta de $X$ tal que $Q = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i$ y que satisface que $U_{i+1} \subset U_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $X$ es regular entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $V_i \in \tau_X$ tal que $x \in V_i \subset Cl_X(V_i) \subset U_i$. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^{k} V_j : k \in \mathbb{N} \right\}$, y sea $P = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Cl_X(V_i) \subset Q$. Así, $x \in P$ y $\mathcal{B}$ es numerable. Tenemos que $\mathcal{B} \subset \tau_X$ y $x \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. De que $x \in Cl_X(A)$ obtenemos que $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathcal{B}$. De este modo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $z_k \in A \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{k} V_j \right)$. Sea $\mathcal{C} = \{z_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{C}$ es numerable y $\mathcal{C} \subset A$. Probaremos que $Q \cap Cl_X(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ viendo que $x \in Cl_X(\mathcal{C})$. Sea $M \in \tau_X$ tal que $x \in M$. Observemos que $\{X - Cl_X(V_i) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{M\}$ es una cubierta abierta para $X$. Luego, existe $F \in \mathbf{F}(\mathbb{N})$ tal que $\{X - Cl_X(V_i) : i \in F\} \cup \{M\}$ cubre a $X$. Sea $m = \text{máx}\ (F)$. Así, $X = M \bigcup \left( \bigcup_{i=1}^{m} X - Cl_X(V_i) \right)$. Sea $R = \bigcup_{i=1}^{m} X - Cl_X(V_i))$. Como $z_m \in X$ se obtiene que $z_m \in M$ ó $z_m \in R$. Dado que $z_m \in \bigcap_{i=1}^{m} Cl_X(V_i)$ se sigue que $z_m \in M$. Esto implica que $z_m \in M \cap \mathcal{C}$. De donde se tiene que $x \in Cl_X(\mathcal{C})$ y así $Cl_X(\mathcal{C}) \cap Q \neq \emptyset$. Por lo tanto $Q \cap A \neq \emptyset$.

Por otro lado, sea $y_p \in A$ y $W_p = X$. Sea $\beta < \omega_1$ y supongamos inductivamente que para todo $\alpha < \beta$ existe un punto $y_\alpha \in A$ y $W_\alpha \in \tau_X$ tal que satisface las siguientes propiedades:

i. $x \in W_\alpha$

ii. $Cl_X(W_\alpha) \cap \{y_\gamma : \gamma < \alpha\} = \emptyset$

iii. $y_\alpha \in W_\gamma$, para cada $\gamma \leq \alpha$

Sea $Y_\beta = \{y_\alpha : \alpha < \beta\}$. Entonces $Y_\beta$ es un subconjunto numerable de $A$, de donde $Cl_X(Y_\beta) \subset A$. Entonces $x \notin Cl_X(Y_\beta)$. Así, existe $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $U \cap Y_\beta = \emptyset$. De la regularidad de $X$ existe $W_\beta \in \tau_X$ tal que $x \in W_\beta \subset Cl_X(W_\beta) \subset U$. Por lo que $Cl_X(W_\beta) \cap Y_\beta = \emptyset$. Sea $Q_\beta = \cap\{W_\alpha : \alpha \leq \beta\}$. Entonces $Q_\beta$ es un conjunto $G_\delta$ tal que $x \in Q_\beta$, así que $Q_\beta \cap A \neq \emptyset$. Sea $y_\beta \in Q_\beta \cap A$. De esta manera tenemos que $x \in W_\beta$ y $y_\beta \in W_\alpha$ para cada $\alpha \leq \beta$. Lo anterior muestra que $y_\beta$ y $W_\beta$ satisfacen i, ii y iii. Por el principio de inducción transfinita existe $Y = \{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $y_\alpha \neq y_\beta$ si $\alpha \neq \beta$. Además $Y \subset A$ y para cada $\alpha < \omega_1$ existe $W_\alpha \in \tau_X$ tal que i, ii, y iii son ciertas. Así, $Y \subset X$ es no numerable. Sea $\alpha < \omega_1$. Por construcción $y_\alpha \in W_\beta$ para cada $\alpha \geq \beta$ pero $y_\alpha \notin Cl_x(W_\beta)$ si $\alpha < \beta$. Entonces $y_\alpha \in X - Cl_x(W_\beta)$ si $\alpha < \beta$, de esto se sigue que $y_\alpha \in W_\alpha - Cl_X(W_{\alpha+1})$. Sea $P = W_\alpha - Cl_X(W_{\alpha+1})$. Entonces $P \in \tau_X$. Mostraremos que $P \cap Y = \{y_\alpha\}$. Sea $y \in P \cap Y$. Entonces $y = y_\alpha$. Sea $\gamma < \omega_1$ tal que $y_\gamma \in P$. Veremos que $\gamma = \alpha$. Si $\alpha < \gamma$ entonces $\alpha + 1 < \gamma$, utilizando iii. tenemos que $y_\gamma \in W_{\alpha+1}$. Esto es una contradicción. Si $\gamma < \alpha$ entonces por ii. tenemos que $y_\gamma \notin Cl_X(W_\alpha)$ y $y_\gamma \in W_\alpha$, esto no es posible. Por lo tanto $\alpha = \gamma$. Entonces $P \cap Y = \{y_\alpha\}$. Con esto conluimos que $Y$ es discreto y no numerable. □

**Definición 3.31.** Si $(X, \tau)$ es un espacio topológico perfecto y regular, decimos que $(X, \tau)$ es un espacio topológico perfectamente regular.

**Corolario 3.32.** *Cada espacio perfectamente regular y numerablemente compacto tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau)$ un espacio perfectamente regular y numerablemente compacto. Supongamos que $(X, \tau)$ no tiene estrechez numerable. El Teorema 3.30 implica que $(X, \tau)$ tiene un subespacio discreto no numerable $(Y, \tau_Y)$. El Teorema 3.29 garantiza que $(Y, \tau_Y)$ es numerable, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(X, \tau)$ tiene estrechez numerable. □

# Capítulo 4

# Espacios topológicos Secuenciales

En este capítulo se estudiará el concepto de convergencia de sucesiones en espacios topológicos secuenciales. Se inicia con propiedades básicas derivadas de la definición de espacio secuencial. Luego, se exponen algunos resultados útiles para decidir si un espacio topológico dado es o no secuencial. Posteriormente se describe la relación que hay con los espacios de estrechez numerable y se finaliza con un breve análisis de la compacidad secuencial.

**Definición 4.1.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que $A$ es **secuencialmente abierto** si para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ que converge a un punto $w \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in A$ para cada $n \geq m$. Decimos que $A$ es **secuencialmente cerrado** si para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $A$ que converge a un punto $w \in X$, se cumple que $w \in A$.

**Proposición 4.2.** *En un espacio topológico $(X, \tau)$ todo conjunto abierto es secuencialmente abierto y todo conjunto cerrado es secuencialmente cerrado.*

**Demostración**. Para la primera afirmación sean $A \in \tau$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $X$ que converge a un punto $w \in A$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in A$ para cada $n \geq N$. Así, $A$ es secuencialmente abierto.

Para la segunda afirmación, sean $B \subset X$ cerrado y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ una sucesión convergente a un punto $z \in X$. Entonces $z \in Cl_X(B)$. Dado que $B$ es cerrado, $B = Cl_X(B)$, de lo anterior $z \in B$. Por lo tanto, $B$ es secuencialmente cerrado. $\square$

**Proposición 4.3.**

*Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $A$ es secuencialmente abierto si y sólo si $X - A$ es secuencialmente cerrado.*

**Demostración**. Supongamos que $A$ es secuencialmente abierto. Veremos que $X - A$ es secuencialmente cerrado. Sea $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $X - A$ que converge a un punto $w \in X$. Supongamos que $w \in A$. De la hipótesis sobre $A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in A$ para cada $n \geq m$. Así que $A \cap (X - A) \neq \emptyset$, lo cual no es posible. Entonces

$w \in X - A$, es decir, $X - A$ es secuencialmente cerrado.

Ahora, supongamos que $X - A$ es secuencialmente cerrado y que $A$ no es secuencialmente abierto. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ que converge a un punto $x \in A$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \geq n$ tal que $x_{N_n} \notin A$. Definamos $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mediante $h(1) = N_1$ y $h(n+1) = \text{mín}\,\{N_s > h(n),\ s \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{x_{h(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X - A$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de donde $x_{h(n)} \to x$. Dado que $X - A$ es secuencialmente cerrado se sigue que $x \in X - A$. Esto es una contradicción. Por lo tanto $A$ es secuencialmente abierto. □

**Teorema 4.4.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico.*
*Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i. Todo subconjunto de $X$ secuencialmente abierto es abierto.*

*ii. Todo subconjunto de $X$ secuencialmente cerrado es cerrado.*

**Demostración**. Para ver que i) implica ii) tomemos $W \subset X$ secuencialmente cerrado, entonces $X - W$ es secuencialmente abierto, luego $X - W \in \tau$ y, por lo tanto $W$ es cerrado. Para ver que ii) implica i) sea $V \subset X$ secuencialmente abierto, entonces $X - V$ es secuencialmente cerrado, así que $X - V$ es cerrado y, por lo tanto $V \in \tau$. □

**Definición 4.5.** En un espacio topológico $(X, \tau)$ si todo subconjunto de $X$ secuencialmente abierto es abierto, decimos que $(X, \tau)$ es un **espacio secuencial.**

**Ejemplo 4.6.** Los espacios métricos son secuenciales. Sea $(X, \rho)$ un espacio métrico. Supongamos que $(X, \tau_\rho)$ no es secuencial. Así, existe $A \subset X$ secuencialmente abierto que no es abierto. Por lo que existe $a \in A$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a) \nsubseteq A$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ con $x_n \in X - A$. Tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X - A$ tal que $x_n \to a$. Como $A$ es secuencialmente abierto, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para cada $n \geqslant M$, esto es una contradicción. Por lo tanto $(X, \tau_\rho)$ es secuencial.

**Ejemplo 4.7.** El espacio conumerable $(\mathbb{R}, \tau_{con})$ es un espacio que no es secuencial. Tenemos que $\{2\} \subset \mathbb{R}$ es secuencialmente abierto porque las sucesiones convergentes son eventualmente constantes (ver Ejemplo 6.17) pero $\{2\} \notin \tau_{con}$.

**Teorema 4.8.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\tau_{sec} = \{W \subset X : W$ es secuencialmente abierto$\}$. Entonces $(X, \tau_{sec})$ es una topología para $X$ y $\tau \subset \tau_{sec}$.*

**Demostración**. Dado que $\emptyset, X$ son subconjuntos secuencialmente abiertos se obtiene que $\emptyset, X \in \tau_{sec}$. Ahora, sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de elementos de $\tau_{sec}$. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $X$ convergente a $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, entonces $x \in U_j$ para algún $j \in I$. De manera que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U_j$ para todo $n \geq N$. Así, $x_n \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ para todo $n \geq N$, es decir, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ es secuencialmente abierto y, por lo tanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau_{sec}$. Finalmente sean $A, B \in \tau_{sec}$ y una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente a $z \in A \cap B$. Tenemos que $z \in A$ y $z \in B$, de manera que existen $N_A, N_B \in \mathbb{N}$ tales que $z_n \in A$ para cada $n \geq N_A$ y $z_n \in B$ para cada $n \geq N_B$. Sea $N =$máx $\{N_A, N_B\}$. Entonces $z_n \in A \cap B$ para cada $n \geq N$. Concluimos que $A \cap B$ es un subconjunto secuencialmente abierto de $X$ y por lo tanto $A \cap B \in \tau_{sec}$. Entonces $\tau_{sec}$ es una topología para $X$. Si $P \in \tau$, por la Proposición 4.2 $P$ es un subconjunto de $X$ secuencialmente abierto, es decir $\tau \subset \tau_{sec}$. □

La topología $\tau_{sec}$ se llama topología secuencial generada por la topología $\tau$.

**Lema 4.9.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, entonces $(X, \tau)$ es un espacio topológico secuencial si y sólo si $\tau_{sec} = \tau$.*

**Demostración**. Supongamos que $(X, \tau)$ es un espacio topológico secuencial. Entonces $\tau_{sec} \subset \tau$. Por la Proposición 4.2 tenemos que $\tau \subset \tau_{sec}$. Así, $\tau_{sec} = \tau$. Ahora, supongamos que $\tau_{sec} = \tau$. Entonces $\tau_{sec} \subset \tau$, es decir, todo subconjunto de $X$ secuencialmente abierto es abierto, por lo tanto $(X, \tau)$ es un espacio topológico secuencial. □

**Proposición 4.10.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces $(X, \tau)$ es un espacio secuencial si y sólo si para cualquier $W \subset X$ que no sea cerrado, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$ con $a \in X - W$.*

**Demostración**. Primero, supongamos que $(X, \tau)$ es un espacio secuencial. Sea $A \subset X$ que no sea cerrado. Por Teorema 4.4, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow x$ con $x \in X - A$.
Ahora, supongamos que para cualquier $W \subset X$ que no sea cerrado, existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$ con $a \in X - W$. Mostraremos que $(X, \tau)$ es un espacio secuencial. Sea $A \subset X$ secuencialmente cerrado y supongamos que $A$ no es cerrado. Por hipótesis, existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow p$ con $p \in X - A$, esto no es posible porque $A$ es secuencialmente cerrado. Entonces $A$ es cerrado. Por lo tanto $(X, \tau)$ es un espacio secuencial. □

**Proposición 4.11.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico secuencial y $A \subset X$ abierto o cerrado, entonces $(A, \tau_A)$ también es un espacio topológico secuencial.*

**Demostración**. Supongamos que $A \in \tau$. Entonces $A$ es secuencialmente abierto en $X$. Sea $W \subset A$ secuenciamente abierto en $A$. Mostraremos que $W \in \tau$. Sea $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $X$ que converge a un punto $w \in W$. Como $A$ es secuencialmente abierto en $X$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in A$ para cada $n \geq m$. La hipótesis de que $W$ es secuencialmente abierto en $A$, garantiza que existe $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq m$ tal que $w_n \in W$ para cada $n \geq k$. Esto implica que $W$ es secuencialmente abierto en $X$. Así $W \in \tau$. Como $W = A \cap W$, $W \in \tau_A$.

Supongamos que $A$ es cerrado. Sea $W \subset A$ secuencialmente cerrado en $A$. Veremos que $W$ es cerrado en $X$. Sea $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $W$ que converge a un

punto $w \in X$. Como $W \subset A$ entonces $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, y así $w \in A$ porque $A$ es cerrado, es decir, $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ y $w \in A$, entonces $w \in W$ porque $W$ es secuencialmente cerrado en $A$. Así, $W$ es secuencialmente cerrado en $X$, entonces $W$ es cerrado en $X$ pues $(X, \tau)$ es un espacio topológico secuencial. Finalmente, observemos que $W = A \cap W$ pues $W \subset A$, entonces $W$ es cerrado en $A$.
En cualquier caso podemos concluir que $(A, \tau_A)$ es un espacio topológico secuencial. $\square$

**Teorema 4.12.** *Todo espacio secuencial tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico secuencial. Mostraremos que $(X, \tau)$ tiene estrechez numerable. Sea $A \subset X$ tal que $\bigcup\{Cl_X(K) : K \in \mathbb{N}(A)\} \subset A$. Demostraremos que $A$ es cerrado en $X$ probando que $A$ es secuencialmente cerrado en $X$. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$ con $x \in X$. El conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es numerable, así $Cl_X(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset A$. Dado que $x \in Cl_X(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ obtenemos que $x \in A$. Por lo tanto $A$ es secuencialmente cerrado y, como $(X, \tau)$ es un espacio topológico secuencial se tiene que $A$ es cerrado, es decir, $(X, \tau)$ tiene estrechez numerable. $\square$

## 4.1. Espacios secuenciales y funciones continuas

**Proposición 4.13.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico arbitrario y $f : X \to Y$ una función. Entonces $f$ es una función continua si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $x_n \to x$ implica que $f(x_n) \to f(x)$.*

**Demostración**. Para demostrar la primera parte supongamos que $f$ es una función continua y que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$. Sea $W \in \tau_Y$ tal que $f(x) \in W$. Entonces $x \in f^{-1}(W)$ y, dado que $f^{-1}(W) \in \tau_X$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(W)$ para cada $n \geq M$. Se deduce que $f(x_n) \in W$ para todo $n \geq M$. Es decir, $f(x_n) \to f(x)$.
Recíprocamente, supongamos que para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$. Sea $U \in \tau_Y$. Demostraremos que $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Para esto verificaremos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en $X$. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión tal que $z_n \to z$ para algún $z \in f^{-1}(U)$. Entonces $f(z) \in U$ y, como $f(z_n) \to f(z)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(z_n) \in U$ para cada $n \geq N$, por lo tanto $z_n \in f^{-1}(U)$ para todo $n \geq M$. Esto implica que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en $X$. De la secuencialidad de $(X, \tau_X)$ se concluye que $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Entonces $f$ es una función continua. $\square$

**Teorema 4.14.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $f \circ g = Id_Y$. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico secuencial.*

**Demostración**. Sea $W \subset Y$ secuencialmente abierto. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una sucesión tal que $x_n \to x$ para algún $x \in f^{-1}(W)$ entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $Y$ tal que $f(x_n) \to f(x)$ porque $f$ es una función continua, y además $f(x) \in W$, así que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in W$ para cada $n \geq M$, por lo que $x_n \in f^{-1}(W)$ para cada $n \geq M$, esto es $f^{-1}(W)$ es secuencialmente abierto en $X$. Dado que $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial entonces $f^{-1}(W) \in \tau_X$ y como $g$ es una función continua tenemos que $g^{-1}(f^{-1}(W)) \in \tau_Y$, pero $g^{-1}(f^{-1}(W)) = (g^{-1} \circ f^{-1})(W) = (f \circ g)^{-1}(W) = Id_Y(W) = W$, así que $W \in \tau_Y$. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico secuencial. $\square$

**Teorema 4.15.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial y $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico. Si $f : X \to Y$ es una función cociente, entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico secuencial.*

**Demostración**. Sean $U \subset Y$ secuencialmente abierto. Veremos que $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión que converge a un punto $x \in f^{-1}(U)$. Entonces $f(x) \in U$, y como $f$ es continua, entonces $f(x_n) \to f(x)$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in U$ para cada $n \geq N$. Así que $x_n \in f^{-1}(U)$, para cada $n \geq N$. Entonces $f^{-1}(U)$ es secuencialmente abierto en $X$. Del hecho que $(X, \tau_X)$ es secuencial, se sigue que $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Entonces $U \in \tau_Y$ pues $f$ es una función cociente. Así que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico secuencial. $\square$

La condición que $A$ es abierto o cerrado en Proposición 4.11 es esencial, esto se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.16.** Consideremos el espacio $(M, \tau_\rho)$ definido en la Proposición 1.41. El Teorema 4.15 y la Proposición 1.60 aseguran que $(M, \tau_\rho)$ es un espacio secuencial. Mostraremos que el espacio $(M, \tau_\rho)$ tiene un subespacio que no es secuencial. Sea $W = M - \{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}\}$. Por inciso $i)$ de la Proposición 2.6, cada sucesión en $W$ convergente a $(0,0)$ es eventualmente constante, entonces $\{(0,0)\}$ es secuencialmente abierto en $W$. Probaremos que $\{(0,0)\}$ no es abierto en $W$. Supongamos que $\{(0,0)\}$ es abierto en $W$. Entonces $W - \{(0,0)\}$ es cerrado en $W$, es decir $Cl_W(W - \{(0,0)\}) = W - \{(0,0)\}$. Como $Cl_W(W - \{(0,0)\}) = Cl_M(W - \{(0,0)\}) \cap W$, entonces $W - \{(0,0)\} = Cl_M(W - \{(0,0)\}) \cap W$. Esto es una contradicción porque $(0,0) \in Cl_M(W - \{(0,0)\}) \cap W$. Por lo tanto $\{(0,0)\}$ no es abierto en $W$. Entonces $(W, \tau_W)$ es un subespacio de $(M, \tau_\rho)$ que no es secuencial.

**Teorema 4.17.** *Sea $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio secuencial si y sólo si existe un espacio métrico $(X, \tau_X)$ y una función cociente $f : X \to Y$.*

**Demostración**. Sea $S(Y) = \{\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} : x_n \to x\}$. Notemos que $S(Y) \neq \emptyset$ pues contiene a las sucesiones constantes. Para cada $A \in S(Y)$, definimos $S_A = A \times \{A\}$. Sea $\mathcal{F} = \{S_A : A \in S(Y)\}$. Si $A, B \in S(Y)$ y $A \neq B$, entonces $S_A \cap S_B = \emptyset$ y $S_A$ y$A$ son homeomorfos. La Proposición 2.8 garantiza que cada $A \in S(Y)$ es un subespacio metrizable de $(Y, \tau_Y)$. Entonces $S_A$ es un espacio métrico. La Proposición 1.73 garantiza que $X = \bigoplus_{A \in S(Y)} S_A$ es un espacio metrizable. Definimos la función $f : X \to Y$ mediante $f(x, A) = x$. Demostraremos que $f$ es una función cociente. Sea $y \in Y$, como $S(Y) \neq \emptyset$ existe $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w_n \to w$, para algún $w \in Y$. Sea $B = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{w, y\}$, así $(y, B) \in X$ y es tal que $f(y, B) = y$. Esto muestra que $f$ es suprayectiva. Sea $U \in \tau_Y$.

Mostraremos que $f^{-1}(U) \in \tau_X$. Sea $(x, A) \in f^{-1}(U)$ tal que $A \in S(Y)$ y $x \in A$.
Caso I. $x$ es un punto aislado de $A$.
Entonces $\{x\} \in \tau_X$ tal que $(x, A) \in \{x\} \times \{A\} \subset f^{-1}(U)$.
Caso II. $x$ es un punto límite de $A$.
Supongamos que $A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, dado que $x \in U$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $x_s \in U$ para cada $s \geq r$, así que $\{x_s : s \geq r\} \cup \{x\} \in \tau_X$. Sea $F = \{x_s : s \geq r\} \cup \{x\}$. Entonces $F \in \tau_A$ y $x \in F \times \{A\} \subset f^{-1}(U)$.
Esto muestra que $f$ es continua.
Ahora, sea $V \subset Y$ tal que $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Queremos ver que $V \in \tau_Y$. Es suficiente mostrar que $V$ es secuencialmente abierto en $Y$. Así que sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ una sucesión infinita tal que $y_n \to y$ para algún $y \in V$, es decir, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{y\} \in S(Y)$. Sea $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$. Como $f^{-1}(V) \in \tau_X$ y $(y, B) \in f^{-1}(V)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(y_t, B) \in f^{-1}(V)$ para cada $t \geq k$, de donde deducimos que $y_t = f(y_t, B) \in V$ para cada $t \geq k$. Esto significa que $V$ es secuencialmente abierto en $Y$. Como $(Y, \tau_Y)$ es un espacio secuencial se tiene que $V \in \tau_Y$. Esto muestra que $f$ es una función cociente.
El recíproco se sigue del Teorema 4.15. $\square$

**Corolario 4.18.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial y $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico. Si $f : X \to Y$ es una función pseudo-abierta, entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico secuencial.*

**Demostración**. La Proposición 1.61 garantiza que $f$ es una función cociente. Utilizando el teorema 4.15 concluimos que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio secuencial. $\square$

**Corolario 4.19.** *La imagen abierta o cerrada de un espacio secuencial es secuencial.*

**Demostración**. Por la Proposición 1.57, toda función suprayectiva abierta o cerrada es pseudo-abierta. Entonces el resultado es inmediato del Teorema 4.15. $\square$

**Corolario 4.20.** *Ser "secuencial" es una propiedad topológica.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico tal que existe un homeomorfismo $f : X \to Y$. Entonces $f$ es una función cociente. Por lo tanto $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico secuencial. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que ser secuencial no es una propiedad hereditaria.

**Ejemplo 4.21.** El espacio $(\mathbb{R}, \tau_f)$ (ver Proposición 1.37) es un espacio secuencial por Teorema 4.15 y por Proposición 1.60 y mostraremos que tiene un subespacio que no es secuencial. Consideremos el conjunto $P = \mathbb{R} - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. La Proposición 2.5 implica que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ tal que $x_n \to 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para cada $n \geq M$. Luego, $x_n \in \{0\}$ para cada $n \geq M$. Entonces $\{0\}$ es secuencialmente abierto en $P$. Pero, $\{0\} \notin \tau_P$. De lo contrario, existe $U \in \tau_f$ tal que $\{0\} = P \cap U$, así $0 \in U$. Como $\mathcal{U}$ es base para $\tau_f$, existe $Q \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in Q \subset U$. Entonces $0 \in Q \cap P \subset U \cap P$. Es decir, $\{0\} \subset Q \cap P$ y $\{0\} \supset Q \cap P$. Por lo tanto, $\{0\} = Q \cap P$.

Caso I. Si $Q \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$.
Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset Q$. Luego $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap P \subset Q \cap P$. Como $(-\varepsilon, 0] \subset (-\varepsilon, \varepsilon) \cap P$. Entonces $(-\varepsilon, 0] \subset \{0\}$, lo cual no es posible.

Caso II. Si $Q \in \mathcal{W}$.
Entonces existe $F \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$ tal que $Q = \{0\} \cup F$. De que $F \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$ tenemos que $F \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ y que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in F$, para cada $n \geq M$. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que $K \geq M$, entonces $\frac{1}{K} \in F$, y dado que $F \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \subset F$, y como $F \subset Q$, entonces $\left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \subset Q$, luego $\left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \cap P \subset Q \cap P$, entonces $\left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \cap P \subset \{0\}$, lo cual no es posible porque debido a la propiedad de densidad de los números irracionales, existe $a \in \mathbb{I}$ tal que $a \in \left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \cap P$ y $a \neq 0$. Por lo tanto $\{0\} \notin \tau_P$. Entonces $(P, \tau_P)$ es un subespacio de $(\mathbb{R}, \tau_f)$ que no es secuencial. Más aún, tenemos que $P - \{0\}$ es secuencialmente cerrado en $P$ y $P - \{0\}$ no es cerrado en $P$, porque de lo contrario, es decir, si $P - \{0\}$ es cerrado en $P$, entonces $\{0\}$ es abierto en $P$, lo cual no es posible.

## 4.2. Estructuras topológicas y ser secuencial

**Teorema 4.22.** *La suma topológica de espacios secuenciales es secuencial.*

**Demostración**. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos secuenciales ajenos dos a dos. Mostraremos que $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ es secuencial. Ahora, tomemos $W \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ secuencialmente abierto en $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ y veamos que $W \in \tau$. Para ello, sea $\sigma \in I$, queremos ver que $W \cap X_\sigma \in \tau_\sigma$ y dado que $X_\sigma$ es un espacio secuencial basta probar que $W \cap X_\sigma$ es secuencialmente abierto en $X_\sigma$. Entonces consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_\sigma$ tal que $x_n \to x$ para algún $x \in W \cap X_\sigma$ en $X_\sigma$, de aquí tenemos que $x_n \to x$ en $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ pues si $U \in \tau$ tal que $x \in U$ entonces $U \cap X_\sigma \in \tau_\sigma$ y $x \in U \cap X_\sigma$. De que $x_n \to x$ en $X_\sigma$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U \cap X_\sigma$ para cada $n \geq N$ y como $U \cap X_\sigma \subset U$, entonces $x_n \in U$ para cada $n \geq N$. Así, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ tal que $x_n \to x$ en $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Dado que $x \in W$ y utilizando el hecho de que $W$ es secuencialmente abierto en $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ tenemos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in W$ para cada $n \geq M$, y dado que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_\sigma$ entonces $x_n \in W \cap X_\sigma$ para cada $n \geq M$, esto significa que efectivamente $W \cap X_\sigma$ es secuencialmente abierto en $X_\sigma$, entonces $W \cap X_\sigma \in \tau_\sigma$. Como $\sigma$ fue elegido arbitrario entonces $W \cap X_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Entonces $W \in \tau$. Por lo tanto la suma topológica de espacios secuenciales es secuencial. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el producto de dos espacios secuenciales no necesariamente es secuencial.

**Ejemplo 4.23.** Consideremos al espacio secuencial $(\Xi, \tau_\eta)$ definido en la Proposición 1.46. Es fácil ver que $(\Xi, \tau_\eta)$ no es un espacio de Hausdorff porque cualquier abierto básico de $(0,0)$ intersecta a cualquier abierto básico de $(0,1)$ (ver incisos *iii*) y *iv*) de Proposición 1.46). Mostraremos que el espacio producto $(\Xi \times \Xi, \tau_{\Xi\times\Xi})$ no es secuencial. Sea $D = \{(y,y) : y \in \Xi\}$. Tenemos que $(\Xi, \tau_\eta)$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si $D$ es un subconjunto cerrado en $(\Xi \times \Xi, \tau_{\Xi\times\Xi})$. Entonces $D$ no es cerrado en $(\Xi \times \Xi, \tau_{\Xi\times\Xi})$. Dado que $(\Xi, \tau_\eta)$ tiene límites secuenciales únicos entonces $D$ es secuencialmente cerrado en $(\Xi \times \Xi, \tau_{\Xi\times\Xi})$.

## 4.3. Compacidad secuencial

**Definición 4.24.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es **secuencialmente compacto** si y sólo si cada sucesión en $X$ tiene una subsucesión convergente.

**Teorema 4.25.** *Si $(X, \tau)$ es un espacio secuencialmente compacto, entonces $(X, \tau)$ es numerablemente compacto.*

**Demostración**. Supongamos que $(X, \tau)$ es secuencialmente compacto y que no es numerablemente compacto. Entonces existe una cubierta abierta numerable $\mathcal{C} \subset \tau$ sin subcubiertas finitas, digamos $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ finito, así $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F \subsetneq X$, así existe $x_{\mathcal{F}} \in X$ tal que $x_{\mathcal{F}} \notin F$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $\mathcal{F}_k = \{C_1, \cdots, C_k\}$. Sean $L = \{x_{\mathcal{F}_k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $L$. Supongamos que $y_n \to y$ y que $y_n = x_{\mathcal{F}_{k_n}}$ se sigue que $k_n < k_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $y_n \notin C_j$ para cada $j \in \{1, \cdots, k_n\}$. Por otro lado, como $y \in \bigcup \mathcal{C}$, deducimos que $y \in C_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, de donde existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in C_m$ para cada $n \geq N$. De esta manera, existe $k_p > m$ y $p > N$ de modo que $y_p \in C_m$, esto no es posible porque $y_p \notin C_m$. Por lo tanto $(X, \tau)$ es numerablemente compacto. $\square$

**Teorema 4.26.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico secuencial y de Hausdorff. Entonces $(X, \tau)$ numerablemente compacto si y sólo si $(X, \tau)$ es secuencialmente compacto.*

**Demostración**. Supongamos que $(X, \tau)$ es numerablemente compacto. Probaremos que $(X, \tau)$ es secuencialmente compacto. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$ tal que si $x_k = x_r$ entonces $r = k$. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Primero veamos que $A$ tiene un punto de acumulación en $X$. Para la prueba de esta afirmación supongamos que $A$ no tiene puntos de acumulación en $X$. En particular, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_i$ no es punto de acumulación de $A$, entonces existe $U_i \in \tau$ tal que $x_i \in U_i$ y de modo que $A \cap U_i = \{x_i\}$. Como $A'_X = \emptyset$ y $Cl_X(A) = A \cup A'_X$, entonces $Cl_X(A) = A$, es decir, $A$ es cerrado en $X$ y por lo tanto $X - A \in \tau$. Por otro lado, dado que $(X - A) \cup A = (X - A) \bigcup \left( \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \right)$, entonces $\{X - A\} \cup \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta numerable para $X$. Del hecho que $X$ es numerablemente compacto existe $W \subset \mathbb{N}$ finito tal que $X = (X - A) \bigcup \left( \bigcup_{j\in W} U_j \right)$. Sea $k \in \mathbb{N} - W$. Se tiene que $x_k \in U_r$ para algún $r \in W$, de donde se deduce que $x_k \in A \cap U_r$. Dado que $A \cap U_r = \{x_r\}$, se sigue que $x_k = x_r$, por lo que $k = r$, lo cual no es posible. Entonces $A$ tiene puntos de acumulación en $X$. Sea $x$ un punto de acumulación de $A$ entonces $x \in Cl_X(A - \{x\})$ y así tenemos que $A - \{x\}$ no es cerrado en $X$. Dado que $(X, \tau)$ es secuencial deducimos que $A - \{x\}$ no es secuencialmente cerrado en $X$, por lo que existe una sucesión $\{y_t\}_{t \in \mathbb{N}} \subset A - \{x\}$ tal que $y_t \to y$ para algún $y \in Cl_X(A - \{x\}) - (A - \{x\})$. Luego para cada $t \in \mathbb{N}$ existe $p_t \in \mathbb{N}$ tal que $y_t = x_{p_t}$. Entonces $\{y_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. La proposición recíproca es inmediata del Teorema 4.25. □

**Definición 4.27.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $X$. Se dice que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $X$ es un **refinamiento** de $\mathcal{A}$ si para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos, llamamos a $\mathcal{B}$ un **refinamiento abierto** de $\mathcal{A}$. Si los elementos de $\mathcal{B}$ son cerrados, llamamos a $\mathcal{B}$ un **refinamiento cerrado** de $\mathcal{A}$.

**Definición 4.28.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ es **localmente finita** si para cada $x \in X$ existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U$ intersecta sólo a un número finito de elementos de $\mathcal{A}$.

**Definición 4.29.** Un espacio topológico de Hausdorff $(X, \tau)$ es **paracompacto** si toda cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento abierto localmente finito que cubre a $X$.

La prueba del siguiente lema puede consultarse en [5, Lema 41.3, p. 254].

**Lema 4.30.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio regular. Entonces $(X, \tau_X)$ es paracompacto si y sólo si cada cubierta abierta de $X$ tiene un refinamiento cerrado localmente finito que cubre a $X$.*

La demostración del siguiente lema se encuentra en [5, Lema 39.1, p. 245].

**Lema 4.31.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $X$ localmente finita. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

*a) Cualquier subcolección de $\mathcal{A}$ es localmente finita.*

*b)* $Cl_X\left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} Cl_X(A)$.

**Proposición 4.32.** *Todo espacio regular, paracompacto y numerablemente compacto es compacto.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau_X)$ un espacio regular, paracompacto y numerablemente compacto. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta para $X$. El Teorema 4.30 asegura que existe $\mathcal{E}$ un refinamiento cerrado localmente finito para $X$ que cubre a $X$. Tenemos dos casos.

i. Supongamos que $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{E}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}$ entonces para cada $E \in \mathcal{E}$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $E \subset C$, de donde existen $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $E_i \subset C_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. De que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$ se deduce que $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, esto significa que $\{C_i : i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$ es una subcubierta abierta finita para $X$. Por lo tanto $X$ es compacto.

ii. Supongamos que $\mathcal{E}$ es infinito. Entonces existe $W \subset \mathcal{E}$ tal que $W$ es numerable, digamos $W = \{F_i \in \mathcal{E} : i \in \mathbb{N}\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definamos $E_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} F_i$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $E_{k+1} \subset E_k$. Además, del Lema 4.31 se deduce que $E_k$ es cerrado en $X$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Por otro lado, supongamos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \neq \emptyset$, así existe $w \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Así, existe $U \in \tau$ tal que $w \in U$ y $U$ intersecta sólo a una cantidad finita de elementos de $W$, digamos $\{F_{i_1}, F_{i_2}, \cdots, F_{i_j}\}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $i_1 < i_2 < \cdots, < i_{j-1} < i_j$. Como $w \in E_{1+i_j}$, tenemos que $w \in \bigcup_{k=1+i_j}^{\infty} F_k$. Se sigue que $w \in F_k$ para algún $k \geq 1 + i_j$. Luego, $w \in F_k \cap U$, lo cual no es posible. Se concluye que $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$, esto es una contradicción con la Proposición 3.24 pues $X$ es numerablemenete compacto. Este caso no pasa.

$\square$

**Corolario 4.33.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio secuencial, paracompacto y regular. Entonces $(X, \tau_X)$ es compacto si y sólo si $(X, \tau_X)$ es secuencialmente compacto.*

**Demostración**. Supongamos que $(X, \tau_X)$ es secuencialmente compacto, el Teorema 4.25 garantiza que $(X, \tau_X)$ es numerablemente compacto. La Proposición 4.32 implica que $(X, \tau_X)$ es compacto.
Recíprocamente, supongamos que $(X, \tau_X)$ es compacto. Se deduce que $(X, \tau_X)$ es numerablemente compacto y de Hausdorff. Del Teorema 4.26 tenemos que $(X, \tau_X)$ es secuencialmente compacto. $\square$

# Capítulo 5

# Espacios topológicos de Fréchet

En este capítulo se presentan las propiedades básicas derivadas de la definición de espacio de Fréchet. Incluye resultados útiles para decidir si un espacio topológico dado es o no de Fréchet. Se describirán algunas estructuras topológicas de Fréchet como la suma topológica y el producto de espacios de Fréchet y finalmente studiaremos la relación que hay con los espacios secuenciales y los de estrechez numerable.

**Definición 5.1.** Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que $(X, \tau)$ es un **espacio de Fréchet** si para cada $A \subset X$ se satisface que $x \in Cl_X(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$.

**Proposición 5.2.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico, $A \subset X$ y $x \in X$. Si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$, entonces $x \in Cl_X(A)$ .*

**Demostración**. Sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq N$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, se tiene que $x_n \in A \cap U$ para cada $n \geq N$, es decir, $A \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in Cl_X(A)$. $\square$

Nótese que por la Proposición 5.2, si se quiere mostrar que un espacio topológico $(X, \tau)$ es de Fréchet, bastará probar para cada $A \subset X$, si $x \in Cl_X(A)$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \to x$.

**Proposición 5.3.** *Los espacios métricos son espacios de Fréchet (ver Proposición 2.4).*

**Ejemplo 5.4.** El espacio $(\mathbb{R}, \tau_f)$ definido en Proposición 1.37 no es de Fréchet. Para mostrarlo consideremos el conjunto $A = \mathbb{R} - (\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\})$. Probaremos primero que $0 \in Cl_{\mathbb{R}}(A)$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $0 \in U$. Si $U \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$, existe $\delta > 0$ tal que $0 \in (-\delta, \delta) \subset U$. Como $(-\delta, 0) \subset U \cap A$ concluimos que $A \cap U \neq \emptyset$. Si $U \in \mathcal{W}$, existe $F \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$ tal que $U = \{0\} \cup F$. De que $F \in \mathbb{P}(\tau_{(u,\mathbb{R})})$ tenemos que $F \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$ y que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in F$, para cada $n \geq M$. Luego $\frac{1}{n} \in U$, para cada $n \geq M$. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que $K \geq M$, entonces $\frac{1}{K} \in F$, y dado que $F \in \tau_{(u,\mathbb{R})}$, existe $\delta > 0$ tal que $\left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \subset F \subset U$. Debido a la propiedad de densidad de los números irracionales con la topología usual de $\mathbb{R}$, existe $a \in \mathbb{I}$ tal que $a \in \left(\frac{1}{K} - \delta, \frac{1}{K} + \delta\right) \cap A$, es decir $A \cap U \neq \emptyset$. En cualquier caso se concluye que $0 \in Cl_{\mathbb{R}}(A)$. Pero ninguna sucesión de elementos de $A$ puede converger a 0 (ver Proposición 2.5). Por lo tanto $(\mathbb{R}, \tau_f)$ no es de Fréchet.

**Teorema 5.5.** *Ser de Fréchet es una propiedad hereditaria.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico de Fréchet y $A \subset X$. Mostraremos que $(A, \tau_A)$ también es de Fréchet. Sea $W \subset A$ y $x \in A$ tal que $x \in Cl_A(W)$. Como $Cl_A(W) = Cl_X(W) \cap A$ entonces $x \in Cl_X(W)$. Por ser $(X, \tau_X)$ un espacio topológico de Fréchet, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $x_n \to x$ en $X$. Sea $P \in \tau_A$ tal que $x \in P$. Entonces $P = A \cap V$ para algún $V \in \tau_X$. Así que $x \in V$. De esta manera existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq m$, y dado que $W \subset A$, entonces $x_n \in V \cap A = P$ para cada $n \geq m$, es decir, $x_n \to x$ en $A$. En conclusión $(A, \tau_A)$ es de Fréchet. □

**Teorema 5.6.** *Los espacios topológicos de Fréchet son secuenciales.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau_X)$ un espacio topológico de Fréchet. Mostraremos que $(X, \tau_X)$ es secuencial utilizando el Teorema 4.4. Sea $W \subset X$ secuencialmente cerrado. Veremos que $W$ es cerrado en $X$ probando que $W = Cl_X(W)$. El inciso *ii*) de la Proposición 1.13 asegura que $W \subset Cl_X(W)$ falta ver que $W \supset Cl_X(W)$. Sea $x \in Cl_X(W)$. Dado que $(X, \tau_X)$ es un espacio topológico de Fréchet, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W$ tal que $x_n \to x$. Puesto que $W$ es secuencialmente cerrado, tenemos que $x \in W$. Entonces $Cl_X(W) \subset W$. Así, $W = Cl_X(W)$. Por lo tanto $(X, \tau_X)$ un espacio topológico secuencial. □

La siguiente proposición es inmediata de la Proposición 5.3 y del Teorema 5.6.

**Proposición 5.7.** *Los espacios métricos son secuenciales.*

El siguiente ejemplo muestra que un espacio secuencial no necesariamente es un espacio de Fréchet.

**Ejemplo 5.8.** El espacio $(M, \tau_\rho)$ es secuencial (ver Proposición 1.41 y Ejemplo 4.16) y no es de Fréchet. Sea $A$ el conjunto de puntos aislados de $M$. La Proposición 2.6 asegura que ninguna sucesión de puntos de $A$ converge a $(0,0)$. Probaremos que $(0,0) \in Cl_M(A)$. Sea $U \in \tau_\rho$ tal que $(0,0) \in U$. Por inciso *vi*) de Proposición 1.41 existen $m \in \mathbb{N}$ y $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $(0,0) \in Q_h^m \subset U$ Como $Q_h^m \cap A \neq \emptyset$ entonces $U \cap A \neq \emptyset$. Así que $(0,0) \in Cl_M(A)$. Concluimos que el espacio $(M, \tau_\rho)$ no es de Fréchet.

**Corolario 5.9.** *Todo espacio de Fréchet tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau)$ es un espacio de Fréchet. El Teorema 5.6 asegura que $(X, \tau)$ es un espacio secuencial. El Teorema 4.12 garantiza que $(X, \tau)$ tiene estrechez numerable. □

**Teorema 5.10.** *Sea $(X, \tau_X)$ un espacio secuencial. Cada subespacio de $X$ es secuencial si y sólo si $(X, \tau_X)$ es un espacio de Fréchet.*

**Demostración**. Supongamos que cada subespacio de $X$ es secuencial. Sean $A \subset X$ y $x \in X$ tal que $x \in Cl_X(A)$. Supongamos que $x \notin A$. Por hipótesis el subespacio $A \cup \{x\}$ es secuencial. Veremos que $A$ no es secuencialmente cerrado en $A \cup \{x\}$. Supongamos lo contrario, que $A$ es secuencialmente cerrado en $A \cup \{x\}$. Entonces $A$ es cerrado en $A \cup \{x\}$, por lo que existe $C \subset X$ cerrado en $X$ tal que $A = C \cap (A \cup \{x\}) = (C \cap A) \cup (C \cap \{x\})$. Notemos que $x \notin C$, porque de lo contrario se tiene que $C \cap \{x\} = \{x\}$, entonces $A = (C \cap A) \cup \{x\}$ y por lo tanto $x \in A$, lo cual no es posible. Entonces $A = C \cap A$. Esto implica que $A \subset C$. De esta manera se satisface que $Cl_X(A) \subset C$ y luego $x \in C$, contradicción. Así, $A$ no es secuencialmente cerrado en $A \cup \{x\}$. Se deduce que existe una sucesión $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $w_n \to x$ en $A \cup \{x\}$ (ver Proposición 4.10). Más aún, $w_n \to x$ en $X$. De cualquier caso se puede concluir que $(X, \tau_X)$ es un espacio de Fréchet.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \tau_X)$ es un espacio de Fréchet. Sea $W \subset X$, $(W, \tau_W)$ es un espacio de Fréchet por el Teorema 5.5. El Teorena 5.6 garantiza que los espacios de Fréchet son secuenciales. Así, $(W, \tau_W)$ es un espacio secuencial. Por lo tanto cada subespacio de $X$ es secuencial. $\square$

## 5.1. Espacios de Fréchet y funciones continuas

**Proposición 5.11.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio de Fréchet, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función. Entonces $f$ es continua si y sólo si para cada sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, se tiene que $f(x_n) \to f(x)$.*

**Demostración**. El Torema 5.6 asegura que $(X, \tau_X)$ es un espacio secuencial. De la Proposición 4.13 obtenemos inmediatamente la prueba de este resultado. $\square$

**Teorema 5.12.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico de Fréchet, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico arbitrario, $f : X \to Y$ una función continua y $g : Y \to X$ una función continua tales que $f \circ g = Id_Y$. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es de Fréchet.*

**Demostración**. Sean $B \subset Y$ y $b \in Cl_Y(B)$. Entonces $g(b) \in g(Cl_Y(B))$. Como $g$ es una función continua, el Teorema 1.14 garantiza que $g(Cl_Y(B)) \subset Cl_X(g(B))$. Esto implica que $g(b) \in Cl_X(g(B))$. Dado que $(X, \tau_X)$ es un espacio topológico de Fréchet, existe una sucesión $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset g(B)$ tal que $w_n \to g(b)$. Así, $f(\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \subset f(g(B)) = B$. Tenemos que $f$ es una función continua. La Proposición 5.11 asegura que $\{f(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $B$ tal que $f(w_n) \to f(g(b))$. De que $f(g(b)) = Id_Y(b) = b$ se tiene que $f(w_n) \to b$. Por lo tanto $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Fréchet. $\square$

**Teorema 5.13.** *La imagen pseudo-abierta de un espacio de Fréchet es de Fréchet.*

**Demostración**. Sean $(X, \tau_X)$ y $(Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Supongamos que $(X, \tau_X)$ es de Fréchet y que existe $f : X \to Y$ una función pseudo-abierta. Sean $W \subset Y$ y $w \in Y$ tal que $w \in Cl_Y(W)$. Veremos que $f^{-1}(\{w\}) \cap Cl_X(f^{-1}(W)) \neq \emptyset$ por contradicción. Si $f^{-1}(\{w\}) \cap Cl_X(f^{-1}(W)) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(\{w\}) \subset X - Cl_X(f^{-1}(W)) \in \tau_X$.

Así, $w \in int_Y(f(X - Cl_X(f^{-1}(W))))$ porque $f$ es una función pseudo-abierta. De que $w \in Cl_Y(W)$ y $w \in int_Y(f(X - Cl_X(f^{-1}(W))))$, $int_Y(f(X - Cl_X(f^{-1}(W)))) \cap W \neq \emptyset$. De la inclusión $int_Y(f(X - Cl_X(f^{-1}(W)))) \cap W \subset f(X - Cl_X(f^{-1}(W))) \cap W$ se tiene que $f(X - Cl_X(f^{-1}(W))) \cap W \neq \emptyset$, esto no es posible por la Proposición 1.16. Por lo tanto $f^{-1}(\{w\}) \cap Cl_X(f^{-1}(W)) \neq \emptyset$. Así, existe algún punto $p \in f^{-1}(\{w\}) \cap Cl_X(f^{-1}(W))$. Como $(X, \tau_X)$ es un espacio de Fréchet existe una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f^{-1}(W)$ tal que $q_n \to p$. Dado que $f$ es una función continua, la Proposición 5.11 asegura que $\{f(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $W$ tal que $f(q_n) \to f(p)$. Más aún, como $p \in f^{-1}(\{w\})$ tenemos que $f(p) = w$, es decir, $\{f(q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $W$ tal que $f(q_n) \to w$. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Fréchet. □

**Ejemplo 5.14.** El espacio $S(\omega)$ (ver Proposición 1.44) es de Fréchet. Tenemos que $(S \times \mathbb{N}, \tau_{S \times \mathbb{N}})$ es un subespacio del espacio métrico $(\mathbb{R}^2, \tau_{(u, \mathbb{R}^2)})$, la Proposición 1.70 asegura que $(S \times \mathbb{N}, \tau_{S \times \mathbb{N}})$ es un espacio métrico. La Proposición 5.3 garantiza que $(S \times \mathbb{N}, \tau_{S \times \mathbb{N}})$ es un espacio de Fréchet. La Proposición 1.58 implica que $g : S \times \mathbb{N} \to S(\omega)$ es una función pseudo-abierta. Del Teorema 5.13 se deduce que $S(\omega)$ es de Fréchet.

**Corolario 5.15.** *La imagen abierta o cerrada de un espacio de Fréchet es de Fréchet.*

**Demostración**. La Proposición 1.57 asegura que toda función suprayectiva abierta o cerrada es una función pseudo-abierta. El Teorema 5.13 concluye la prueba. □

**Proposición 5.16.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico de Fréchet y de Hausdorff y $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico de Hausdorff. Si $f : X \to Y$ es una función cociente, entonces $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Fréchet si y sólo si $f$ es una función pseudo-abierta.*

**Demostración**. Supongamos que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Fréchet. Mostraremos que $f$ es una función pseudo-abierta. Por hipótesis tenemos que $f$ es una función cociente, esto significa $f$ es una función continua y suprayectiva. Ahora, sean $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. Supongamos que $y \notin int_Y(f(U))$. Entonces $y \in Cl_Y(Y - f(U))$. De donde existe una sucesión $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y - f(U)$ y que satisface que $w_n \to y$. Sean $A = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = f^{-1}(A)$. Demostraremos que $B$ es un subconjunto cerrado de $X$ viendo que $Cl_X(B) \subset B \cup f^{-1}(\{y\})$ y $Cl_X(B) \cap f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Primero, como $f^{-1}(\{y\}) \subset U$, se tiene que $y \in f(U)$. Dado que $A \subset Y - f(U)$, $y \notin A$. Puesto que $w_n \to y$, $y$ es un punto límite de $A$. Sabemos que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Hausdorff por hipótesis. La Proposición 6.16 garantiza que $y$ es el único punto límite de $A$. El Teorema 1.30 asegura que $Cl_Y(A) = A \cup \{y\}$. Debido a que $f$ es una función continua, del Teorema 1.15 tenemos que $Cl_X(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(Cl_Y(A))$. Entonces $f^{-1}(Cl_Y(A)) = f^{-1}(A \cup \{y\}) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(\{y\}) = B \cup f^{-1}(\{y\})$. Por lo tanto $Cl_X(f^{-1}(A)) \subset B \cup f^{-1}(\{y\})$, es decir, $Cl_X(B) \subset B \cup f^{-1}(\{y\})$. Recordemos que $A \subset Y - f(U)$, entonces $f(U) \subset Y - A$, luego $f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(Y - A)$. Como $U \subset f^{-1}(f(U))$, $f^{-1}(Y - A) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(Y) = X$, obtenemos $f^{-1}(A) \subset X - U$, es decir, $B \subset X - U$. Como $X - U$ es un conjunto cerrado en $X$, entonces $Cl_X(B) \subset Cl_X(X - U) = X - U$. Así deducimos que $Cl_X(B) \cap U = \emptyset$. De que $f^{-1}(\{y\}) \subset U$ se sigue que $Cl_X(B) \cap f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Tenemos que $Cl_X(B) \subset B \cup f^{-1}(\{y\})$

y $Cl_X(B) \subset X - f^{-1}(\{y\})$, por lo que $Cl_X(B) = B$. Finalmente, observemos que $X - B = X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$, así que $f^{-1}(Y - A) \in \tau_X$. De la hipótesis sobre $f$ se concluye que $Y - A \in \tau_Y$. Por lo que $A$ es cerrado en $Y$, es decir, $Cl_Y(A) = A$. Puesto que $Cl_Y(A) = A \cup \{y\}$, entonces $y \in Cl_Y(A)$. Así, $y \in A$, de donde $y \in Y - f(U)$, contradiciendo la elección $f^{-1}(\{y\}) \subset U$. Esta contradicción surgió de suponer que $y \notin int_Y(f(U))$. Concluimos que $y \in int_Y(f(U))$. Por lo tanto $f$ es una función pseudo-abierta.
La segunda parte de esta proposición es inmediata del Teorema 5.13. □

**Teorema 5.17.** *Sea $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico de Hausdorff. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es de Fréchet si y sólo si existen un espacio métrico $(X, \tau_X)$ y una función pseudo-abierta $f : X \to Y$.*

**Demostración**. Supongamos que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Fréchet y de Hausdorff. Del Teorema 5.6 se deduce que $(Y, \tau_Y)$ es secuencial. Entonces por el Teorema 4.17 existe un espacio métrico $(X, \tau_X)$ y una función cociente $f : X \to Y$. Como $(X, \tau_X)$ es métrico, la Proposición 5.3 y la Proposición 1.69 garantizan que $(X, \tau_X)$ es Fréchet y de Hausdorff. De la Proposición 5.16 de deduce que $f$ es una función pseudo-abierta.

Recíprocamente, supongamos que existen un espacio métrico $(X, \tau_X)$ y una función pseudo - abierta $f : X \to Y$. Como $(X, \tau_X)$ es un espacio métrico, la Proposición 5.3 y la Proposición 1.69 aseguran que $(X, \tau_X)$ es un espacio de Fréchet y de Hausdorff. Además, como $f$ es una función pseudo-abierta, del Teorema 5.13 se deduce que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio de Fréchet. □

## 5.2. Estructuras topológicas y ser Fréchet

**Teorema 5.18.** *La suma topológica de espacios de Fréchet es de Fréchet.*

**Demostración**. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos de Fréchet ajenos dos a dos. Mostraremos que $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ es de Fréchet. Sean $W \subset X$ y $x \in Cl_X(W)$. Entonces existe $\kappa \in I$ tal que $x \in X_\kappa$. Probaremos que $x \in Cl_{X_\kappa}(W)$. Sea $U \in \tau_{X_\kappa}$ tal que $x \in U$. Entonces $U \in \tau$ tal que $x \in U$. De esta manera tenemos que $U \cap W \neq \emptyset$, por lo que $x \in Cl_{X_\kappa}(W \cap X_\kappa)$. De que cada espacio de la familia es de Fréchet se deduce que existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W \cap X_\kappa$ tal que $a_n \to x$ en $(X_\kappa, \tau_\kappa)$. Verificaremos que $a_n \to x$ en $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$. Sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$. Así, $V \cap X_\kappa \in \tau_\kappa$ tal que $x \in V \cap X_\kappa$ de donde deducimos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in V \cap X_\kappa$ para cada $n \geq r$. Por lo tanto $a_n \to x$ en $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$. □

El siguiente ejemplo muestra que el producto de dos espacios topológicos de Fréchet no necesariamente es de Fréchet.

**Ejemplo 5.19.** Consideremos el espacio $S(\omega)$ definido en la Proposición 1.44, el subespacio $(S, \tau_S)$ de $(\mathbb{R}, \tau_{(u,\mathbb{R})})$ y el espacio topológico $(S(\omega) \times S, \tau_{S(\omega)\times S})$. El Ejemplo 5.14 asegura que $S(\omega)$ es un espacio de Fréchet. De que $(\mathbb{R}, \tau_{(u,\mathbb{R})})$ es un espacio métrico y de la Proposición 1.70 se tiene que $(S, \tau_S)$ es métrico. De la Proposición 5.3 se deduce que $(S, \tau_S)$ es un espacio de Fréchet. Consideremos al conjunto $Z$ definido en el Ejemplo 2.7. Probaremos que $((0,0),0) \in Cl_{S(\omega)\times S}(Z)$. Sea $U \in \tau_{S(\omega)\times S}$ tal que $((0,0),0) \in U$. Por inciso $iv)$ de Proposición 1.44 y por Lema 1.35 existen una función $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $M \in \mathbb{N}$ tales que $\Psi_e \times S_M \subseteq U$. El hecho de que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{nM}) \in E_M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ garantiza que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{nM}) \in \Psi_e \cap E_M$ si $n \geq e(M)$. Como $U \cap (E_M \times \{\frac{1}{M}\}) = (\Psi_e \times S_M) \cap (E_M \times \{\frac{1}{M}\}) = (\Psi_e \cap E_M) \times (S_M \cap \{\frac{1}{M}\}) = (\Psi_e \cap E_M) \times \{\frac{1}{M}\}$ se sigue que $((\frac{1}{e(M)}, \frac{1}{e(M)M}), \frac{1}{M}) \in (\Psi_e \cap E_M) \times \{\frac{1}{M}\}$. Esto implica que $U \cap (E_M \times \{\frac{1}{M}\}) \neq \emptyset$. Puesto que $E_M \times \{\frac{1}{M}\} \subset Z$ se tiene que $U \cap (E_M \times \{\frac{1}{M}\}) \subset U \cap Z$. Se concluye que $Z \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $((0,0),0) \in Cl_{S(\omega)\times S}(Z)$. Pero ninguna sucesión de elementos de $Z$ converge a $((0,0),0)$ (ver Ejemplo 2.7).

# Capítulo 6

# Espacios topológicos Primero Numerables

Este capítulo presenta un breve estudio de los espacios primero numerables. Incluye resultados útiles para decidir si un espacio topológico dado es o no primero numerable. Describe algunas funciones que preservan la primero numerabilidad. Expone algunas estructuras topológicas primero numerables como la suma topológica y el producto de espacios topológicos primero numerables. Finalmente, analiza la relación que hay con los espacios de estrechez numerable, secuenciales y de Fréchet.

**Definición 6.1.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es **primero numerable**, si cada $x \in X$ tiene una base local a lo más numerable.

**Ejemplo 6.2.** Sea $X$ un conjunto a lo más numerable. El espacio topológico cofinito $(X, \tau_{cof})$ es primero numerable. Sean $x \in X$ y $\mathcal{B} = \{X - F : F \in \mathbf{F}(X - \{x\})\}$. Por definición del conjunto $\mathcal{B}$, deducimos que $x \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$.

Si $W \in \mathcal{B}$, entonces existe $G \in \mathbf{F}(X - \{x\})$ tal que $W = X - G$, luego $W \subset X$ es tal que $X - W = G$, de donde se concluye que $W \in \tau_{cof}$. Por lo tanto $\mathcal{B} \subset \tau_{cof}$.

Para cada $V \in \tau_{cof}$ tal que $x \in V$, tenemos que $\{x\} \subset V$, de donde $X - V \subset X - \{x\}$, entonces $X - V \in \mathbf{F}(X - \{x\})$. Dado que $V = X - (X - V)$, entonces $V \in \mathcal{B}$.

Finalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $E_n = \{X - F : F \in \mathbf{F}_n(X - \{x\})\}$. Así, $E_n$ es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, es decir, $\mathcal{B}$ es unión numerable de conjuntos numerables. Entonces $\mathcal{B}$ es numerable. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base local a lo más numerable de $x$. Y como $x$ fue arbitrario, podemos concluir que $(X, \tau_{cof})$ es primero numerable.

**Ejemplo 6.3.** Sea $X$ un conjunto infinito no numerable, es decir, tal que $|X| > \omega$. Entonces el espacio topológico $(X, \tau_{cof})$ no es primero numerable. Supongamos que

$(X, \tau_{cof})$ sí es primero numerable. Sea $x_0 \in X$. Entonces $x_0$ tiene una base local a lo más numerable, digamos $\mathcal{H}$. Tenemos que $X - H$ es finito para cada $H \in \mathcal{H}$, luego $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} X - H$ es a lo más numerable. Sea $\mathcal{L} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} X - H$, entonces $\mathcal{L} \subsetneq X$, de este modo existe $w \in X$ tal que $w \notin \mathcal{L}$, es decir, $X - \mathcal{L} \neq \emptyset$. Notemos que $x_0 \in X - \mathcal{L}$ porque $x_0 \in H$ para cada $H \in \mathcal{H}$. La infinidad no numerable de $X$ permite escoger $\alpha \in X - \mathcal{L}$ tal que $\alpha \neq x_0$. Como $\{\alpha\}$ es un conjunto finito, entonces $X - \{\alpha\} \in \tau_{cof}$ tal que $x_0 \in X - \{\alpha\}$, así que, existe $F \in \mathcal{H}$ tal que $x_0 \in F$ y $F \subset X - \{\alpha\}$, de donde se deduce que $\{\alpha\} \subset X - F$ y, dado que $X - F \subset \bigcup_{H \in \mathcal{H}} X - H$, se tiene que $\alpha \in \mathcal{L}$, lo cual es una contradicción.

**Observación 6.4.** Del Ejemplo 6.2 y del Ejemplo 6.3 se deduce que $(X, \tau_{cof})$ es primero numerable si y sólo si $X$ es a lo más numerable.

**Lema 6.5.** *Sean $(X, \tau)$ un espacio primero numerable y $x \in X$. Si $\mathcal{B}$ es una base local de $x$ en $X$, entonces existe una subfamilia numerable $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}'$ es base local de $x$ en $X$.*

**Demostración**. Como $(X, \tau)$ es espacio primero numerable, entonces $x$ tiene una base local $\mathcal{D}$ a lo más numerable. Para cada $D \in \mathcal{D}$ existe $B_D \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_D \subset D$. Sea $\mathcal{B}' = \{B_D \in \mathcal{B} : D \in \mathcal{D}\}$. Entonces $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es a lo más numerable. Ahora, sea $U \in \tau$ tal que $x \in U$, entonces existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D \subset U$. Así, $x \in B_D \subset D \subset U$. Por lo tanto $\mathcal{B}'$ es base local de $x$ en $X$. □

**Teorema 6.6.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces $(X, \tau)$ es primero numerable si y sólo si para cada $x \in X$ existe $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$ tal que $\mathcal{U}$ es base local de $x \in X$ y $U_{n+1} \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

**Demostración**. Supongamos que $(X, \tau)$ es primero numerable y sea $x \in X$, entonces $x$ tiene una base local a lo más numerable, sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicha base. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $U_n = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ y consideremos el conjunto $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $W \in \mathcal{U}$. Entonces $W = U_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathcal{B} \subset \tau$, se sigue que $B_n \in \tau$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $W \in \tau$, por lo tanto $\mathcal{U} \subset \tau$. Dado que $x \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea $V \in \tau$ tal que $x \in V$, entonces existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_z \subset V$. De que $U_z \subset B_z$ se tiene que $x \in U_z \subset V$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es base local de $x$. Finalmente, como $\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $U_{n+1} \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, supongamos que para cada $x \in X$ existe $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$ tal que $\mathcal{U}$ es base local de $x \in X$ y $U_{n+1} \subset U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(X, \tau)$ es primero numerable, porque $\mathcal{U}$ es a lo más numerable. □

**Proposición 6.7.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces $(X, \tau)$ es primero numerable si y sólo si $(Y, \tau_Y)$ es primero numerable para cada $Y \subset X$.*

**Demostración**. Supongamos que $(X, \tau)$ es primero numerable. Sean $Y \subset X$ y $y \in Y$. Entonces $y \in X$, luego $y$ tiene una base local a lo más numerable, digamos $\mathcal{B}$. Consideremos el conjunto $\mathbb{B}_0 = \{Y \cap B : B \in \mathcal{B}\}$. Vamos a demostrar que $\mathbb{B}_0$ es una base local de $y$ en $(Y, \tau_Y)$. En primer lugar observemos que si $W \in \mathbb{B}_0$, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $W = Y \cap A$, es decir, existe $A \in \tau$ tal que $W = Y \cap A$. Así, $W \in \tau_Y$. Por lo tanto $\mathbb{B}_0 \subset \tau_Y$. Por otro lado, sea $U \in \tau_Y$ tal que $y \in U$, existe $G \in \tau$ tal que $U = Y \cap G$ y $y \in G$. Dado que $\mathcal{B}$ es base local a lo más numerable de $y$ en $(X, \tau)$, existe $P \in \mathcal{B}$ tal que $y \in P \subset G$. Esto implica que $y \in P \cap Y \subset G \cap Y$. Sea $V = Y \cap P$, entonces $V \in \mathbb{B}_0$ es tal que $y \in V \subset U$. Finalmente, de que $\mathcal{B}$ es base local a lo más numerable de $y$ en $(X, \tau)$, se tiene que $y \in B$ para cada $B \in \mathcal{B}$. Se sigue que $y \in Y \cap B$ para todo $B \in \mathcal{B}$. De esta manera, $y \in \beta$ para cada $\beta \in \mathbb{B}_0$. Además, como $\mathcal{B}$ es a lo más numerable, aseguramos que $\mathbb{B}_0$ es a lo más numerable. Deducimos que $\mathbb{B}_0$ es una base local a lo más numerable de $y$ en $(Y, \tau_Y)$. Concluimos que $(Y, \tau_Y)$ es primero numerable.

Recíprocamente, supongamos que $(Y, \tau_Y)$ es primero numerable para cada $Y \subset X$. Como $X \subset X$, entonces $(X, \tau_X)$ es primero numerable. Por lo tanto $(X, \tau)$ es primero numerable. $\square$

**Teorema 6.8.** *Todo espacio primero numerable es de Fréchet.*

**Demostración**. Sean $(X, \tau)$ un espacio topológico primero numerable, $E \subset X$ y $x \in Cl_X(E)$. Vamos a demostrar que existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \to x$. Como $(X, \tau)$ es primero numerable, entonces por el Teorema 6.6 existe $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau$ tal que $\mathcal{U}$ es base local de $x \in X$ y $U_{n+1} \subset U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in Cl_X(E)$, se deduce que $U_n \cap E \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $z_n \in U_n \cap E$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $E$. Probaremos que $z_n \to x$. Si $V \in \tau$ tal que $x \in V$, nuestra elección de $\mathcal{U}$ asegura que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k \subset V$ y, si $n \geq k$ entonces $U_n \subset U_k$, por lo tanto $z_n \in U_k$ para cada $n \geq k$, se deduce que $z_n \in V$ para cada $n \geq k$. Es decir, $z_n \to x$. Concluimos que $(X, \tau)$ es un espacio de Fréchet. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la proposición recíproca del Teorema 6.8 no siempre se satisface.

**Ejemplo 6.9.** El espacio $S(\omega)$ (ver Proposición 1.44) no es primero numerable. De lo contrario, el Lema 6.5 implica que existe $\mathcal{F} \in \mathbf{N}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ tal que $\{\Psi_h : h \in \mathcal{F}\}$ es base local de $(0, 0)$ en $S(\omega)$(ver inciso *iv*) de Proposición 1.44). Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{F} = \{h_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : h_n \text{ es función}, n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos la función $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida mediante $H(n) = h_n(n) + 1$. Entonces $\Psi_H \in \tau_g$ tal que $(0, 0) \in \Psi_H$. Así, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $(0, 0) \in \Psi_{h_j} \subset \Psi_H$. Por lo que $\left(\frac{1}{h_j(j)}, \frac{1}{h_j(j)j}\right) \in \Psi_H$, de este modo existen $s, r \in \mathbb{N}$ con $r \geq H(s)$ tales que $\left(\frac{1}{h_j(j)}, \frac{1}{h_j(j)j}\right) = (\frac{1}{r}, \frac{1}{rs})$, de esto deducimos que $r = h_j(j)$ y que $j = s$. Entonces $h_j(j) \geq H(j)$, esto no es posible. Por lo tanto $S(\omega)$ no es primero numerable.

**Teorema 6.10.** *Todo espacio métrico es primero numerable.*

**Demostración**. Sean $(X, \rho)$ un espacio métrico y $x \in X$. Entonces la familia $\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de $x$. □

**Corolario 6.11.** *Todo espacio metrizable tiene estrechez numerable.*

**Demostración**. Sea $(X, \tau)$ un espacio metrizable. Por el Ejemplo 5.3, $(X, \tau)$ es un espacio de Fréchet. El Corolario 5.9 implica que $(X, \tau)$ tiene estrechez numerable. □

La siguiente proposición es inmediata de los Teoremas 5.6 y 6.8.

**Proposición 6.12.** *Los espacios topológicos primero numerable son secuenciales.*

**Corolario 6.13.** *Los espacios metrizables son espacios secuenciales.*

**Demostración**. Los espacios metrizables son espacios primero numerables. La Proposición 6.12 implica que son espacios secuenciales. □

**Ejemplo 6.14.** Sean $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, $A \subset \mathbb{R}$ y $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \in Cl_{\mathbb{R}}(A)$.
CASO I. $A$ es finito.
Entonces $A$ es cerrado en $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, es decir, $A = Cl_{\mathbb{R}}(A)$, así que $w \in A$ y así basta considerar la sucesión constante $\{w\}_{n\in\mathbb{N}}$, esta es una sucesión en $A$ que converge a $w$.
CASO II. $A$ es infinito.
Entonces existe $W \subset A$ infinito numerable, digamos $W = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$. Entonces $w_n \to r$ para cada $r \in \mathbb{R}$. En particular, $w_n \to w$.
Por lo tanto $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ es un espacio de Fréchet que no es primero numerable.

**Ejemplo 6.15.** El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{con})$ no es primero numerable. Supongamos sí lo es, entonces cada número real tiene una base local a lo más numerable. En particular 0 tiene una base local a lo más numerable, digamos $\mathcal{B}_0 = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. De esto se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R} - B_n$ es a lo más numerable. Así, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n$ es a lo más numerable. Se sigue que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n \subsetneq \mathbb{R}$. Por lo que existe $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n$. Sabemos que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n = \mathbb{R} - \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y que $0 \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Deducimos que $0 \notin \mathbb{R} - \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Debido a que $\mathbb{R}$ es no numerable podemos elegir $w \neq 0$. Tomemos que $\mathbb{R} - \{w\} \in \tau_{con}$. Es claro que $0 \in \mathbb{R} - \{w\}$. El hecho de que $\mathcal{B}_0$ es base local a lo más numerable de 0, implica que existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $0 \in B_m \subset \mathbb{R} - \{w\}$. Equivalentemente $\{w\} \subset \mathbb{R} - B_m$ . Dado que $\mathbb{R} - B_m \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n$ se tiene que $\{w\} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n$. Luego, $w \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} - B_n$, lo cual no es posible. Por lo tanto el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{con})$ no es primero numerable.

**Proposición 6.16.** *Sean $(X,\tau_X)$ un espacio topológico de Hausdorff, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X$ y $x,\ y\in X$ tales que $x_n\to x$ y $x_n\to y$. Entonces $x=y$.*

**Demostración**. Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que $x\neq y$. Por ser $(X,\tau_X)$ un espacio topológico de Hausdorff, existen $U,V\in\tau_X$ tales que $x\in U$, $y\in V$ y $U\cap V=\emptyset$. Como $x_n\to x$ y $x\in U$, existe $N_u\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in U$ para cada $n\geq N_u$ y análogamente, como $x_n\to y$ y $y\in V$, existe $N_v\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in V$ para cada $n\geq N_v$. Sea $N=\text{máx}\{N_u,N_v\}$. Entonces $x_n\in U\cap V$ para cada $n\geq N$, así que $U\cap V\neq\emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x=y$. □

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la Proposición 6.16 no siempre se cumple.

**Ejemplo 6.17.** Existe un espacio con límites secuenciales únicos que no es $T_2$.
Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología conumerable. Sean $x\in\mathbb{R}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_n\to x$. Como $U=\{x\}\cup(\mathbb{R}-\{x_n:n\in\mathbb{N}\})\in\tau_{con}$ es tal que $x\in U$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $x_n\in U$ para cada $n\geq m$, de esto tenemos que $x_n=x$ para cada $n\geq m$. Entonces las sucesiones convergentes son eventualmente constantes. Así, los límites secuenciales son únicos. Por otro lado, supongamos que $(\mathbb{R},\tau_{con})$ es de Hausdorff. Sean $x,y\in\mathbb{R}$ tales que $x\neq y$. Entonces existen $U_x,U_y\in\tau_{con}$ de manera que $x\in U_x$, $y\in U_y$ y $U_x\cap U_y=\emptyset$. De aquí se tiene que $U_x\subset\mathbb{R}-U_y$. Dado que $\mathbb{R}-U_y$ es a lo más numerable deducimos que $U_x$ es a lo más numerable. Como $\mathbb{R}-U_x$ es un conjunto a lo más numerable, entonces $\mathbb{R}=U_x\cup(\mathbb{R}-U_x)$ es a lo más numerable, lo cual es falso. Por lo tanto $(\mathbb{R},\tau_{con})$ no es de Hausdorff.

**Proposición 6.18.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico primero numerable. Entonces $(X,\tau)$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si los límites secuenciales en $X$ son únicos.*

**Demostración**. De la Proposición 6.16 tenemos que si $(X,\tau)$ es un espacio de Hausdorff entonces los límites secuenciales en $X$ son únicos.
Ahora, supongamos que $(X,\tau)$ es un espacio topológico primero numerable y que los límites secuenciales en $X$ son únicos. Mostraremos que $(X,\tau)$ es un espacio de Hausdorff. Supongamos que no lo es, entonces existen $x,y\in X$ tales que $x\neq y$ y para cada $U\in\tau$ tal que $x\in U$ se tiene que $U\cap V\neq\emptyset$ para cada $V\in\tau$ tal que $y\in V$.
Como $(X,\tau)$ es un espacio topológico primero numerable, entonces por el Teorema 6.6 existe $\mathcal{U}_x=\{U_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\tau$ tal que $\mathcal{U}_x$ es base local de $x\in X$ y $U_{n+1}\subset U_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Análogamente, existe $\mathcal{V}_y=\{V_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\tau$ tal que $\mathcal{V}_y$ es base local de $y\in X$ y $V_{n+1}\subset V_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Entonces para cada $n\in\mathbb{N}$ se satisface que $U_n\cap V_n\neq\emptyset$. Así que para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $z_n\in U_n\cap V_n$, más aún, la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene las siguientes características:

i. $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to x$
   En efecto, sea $P\in\tau$ tal que $x\in P$, como $\mathcal{U}_x$ es base local de $x$ entonces existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $x\in U_j\subset P$, dado que $U_{n+1}\subset U_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y que $z_n\in U_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos que $z_m\in P$ para cada $m\geq j$.

ii. $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to y$
Sea $Q \in \tau$ tal que $y \in Q$, como $\mathcal{V}_y$ es base local de $y$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \in V_k \subset Q$, dado que $V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y que $z_n \in V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $z_n \in Q$ para cada $n \geq k$.

Como los límites secuenciales en $X$ son únicos deducimos que $x = y$, lo cual no es posible. Por lo tanto $(X, \tau)$ es un espacio de Hausdorff. $\square$

## 6.1. Espacios primero numerables y funciones continuas

La imagen continua de un espacio primero numerable no es primero numerable y lo mostramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6.19.** La función $f : (\mathbb{R}, \tau_{dis}) \to (\mathbb{R}, \tau_{cof})$ definida mediante $f(r) = r$ tiene las siguientes propiedades:

a) $f$ es continua, porque si $U \in \tau_{cof}$, como $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ entonces $f^{-1}(U) \in \tau_{dis}$.

b) $f$ es suprayectiva pues es la función identidad.

c) $f$ no es abierta, notemos que $\{2\} \in \tau_{dis}$ pero $f(\{2\}) = \{2\} \notin \tau_{cof}$ porque $\mathbb{R} - \{2\}$ no es finito.

Pero el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$ no es primero numerable (ver Ejemplo 6.3).

El siguiente ejemplo muestra la existencia de una función abierta de un espacio primero numerable en un espacio que no lo es.

**Ejemplo 6.20.** La función $f : (\mathbb{R}, \tau_{ind}) \to (\mathbb{R}, \tau_{con})$ definida mediante $f(r) = r$ tiene las siguientes propiedades:

a) $f$ es abierta, $f(\emptyset) = \emptyset$ y $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) $f$ es suprayectiva pues es la función identidad.

c) $f$ no es continua, porque $\mathbb{R} - \mathbb{N} \in \tau_{con}$ pero $f^{-1}(\mathbb{R} - \mathbb{N}) = \mathbb{R} - \mathbb{N} \notin \tau_{ind}$.

Sin embargo, el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{con})$ no es primero numerable (ver Ejemplo 6.15).

**Teorema 6.21.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico primero numerable, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico arbitrario, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones continuas tales que $f \circ g = Id_Y$. Entonces $(Y, \tau_Y)$ es primero numerable.*

**Demostración**. Sea $y \in Y$. Dado que $(X, \tau_X)$ es primero numerable, existe una base local a lo más numerable para $g(y)$, digamos $\mathcal{B}_{g(y)} = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$. Consideremos el conjunto $\mathcal{B}_y = \{g^{-1}(V_i) : i \in \mathbb{N} \text{ y } V_i \in \mathcal{B}_{g(y)}\}$. Veremos que $\mathcal{B}_y$ es base local de $y$ en $Y$. La continuidad de $g$ garantiza que $\mathcal{B}_y \subset \tau_Y$. Además, $y \in U$ para cada $U \in \mathcal{B}_y$. Finalmente, sea $V \in \tau_Y$ tal que $y \in V$, como $f$ es una función continua se sigue que $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Como $y = Id_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ entonces $g(y) \in f^{-1}(V)$, de donde existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g(y) \in V_r \subset f^{-1}(V)$, así que $y \in g^{-1}(V_r) \subset g^{-1}(f^{-1}(V))$. Como $g^{-1}(f^{-1}(V)) = (g^{-1} \circ f^{-1})(V) = (f \circ g)^{-1}(V) = Id_Y^{-1}(V) = Id_Y(V) = V$, entonces $y \in g^{-1}(V_r) \subset V$ y, dado que $g^{-1}(V_r) \in \mathcal{B}_y$, concluimos que $(Y, \tau_Y)$ es primero numerable. $\square$

**Teorema 6.22.** *Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico primero numerable, $f : X \to Y$ una función tal que $\{f(U) : U \in \tau_X\} \subset \tau_Y$ y $g : Y \to X$ una función que satisface que $\{g(V) : V \in \tau_Y\} \subset \tau_X$ tales que $g \circ f = Id_X$. Entonces $(X, \tau_X)$ es primero numerable.*

**Demostración**. Sea $x \in X$. De la primero numerabilidad de $Y$ existe una base local a lo más numerable de $f(x)$ digamos $\mathcal{B}_{f(x)} = \{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos la colección $\mathcal{B} = \{g(\beta_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos que $\mathcal{B}$ es una base local a lo más numerable de $x$ en $X$. Nuestra suposición sobre la función $g$ garantiza que $\mathcal{B} \subset \tau_X$. Ahora, sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Así, $f(x) \in f(U) \in \tau_Y$. Por lo tanto existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \in \beta_s \subset f(U)$. Entonces $g(f(x)) \in g(\beta_s) \subset g(f(U))$, es decir, $(g \circ f)(x) \in g(\beta_s) \subset (g \circ f)(U)$. Luego, $Id_X(x) \in g(\beta_s) \subset Id_X(U)$. Por lo que $x \in g(\beta_s) \subset U$. Finalmente, como $f(x) \in \beta_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ deducimos que $g(f(x)) \in g(\beta_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(g \circ f)(x) \in g(\beta_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $Id_X(x) \in g(\beta_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $x \in g(\beta_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\mathcal{B}_{f(x)}$ es a lo más numerable, $\mathcal{B}$ es una base local a lo más numerable de $x$ en $X$. Esto significa que $(X, \tau_X)$ es primero numerable. $\square$

**Teorema 6.23.** *La imagen abierta de un espacio primero numerable es primero numerable.*

**Demostración**. Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico primero numerable, $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico arbitrario y $f : X \to Y$ una función abierta y sobreyectiva. Sea $y \in Y$, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ pues $f$ es suprayectiva. Como $(X, \tau_X)$ es primero numerable, entonces existe $\mathcal{W}_x$ una base local a lo más numerable de $x$. Consideremos el conjunto $\mathcal{P} = \{f(W) : W \in \mathcal{W}_x\}$, observemos que:

1. Si $K \in \mathcal{P}$, entonces existe $U \in \mathcal{W}_x$ tal que $K = f(U)$, como $\mathcal{W}_x$ es una base local a lo más numerable de $x$ tenemos que $U \in \tau_X$, luego $f(U) \in \tau_Y$ pues $f$ es una función abierta, es decir, $K \in \tau_Y$. Por lo tanto $\mathcal{P} \subset \tau_Y$.

2. Sea $V \in \tau_Y$ tal que $y \in V$, entonces $x \in f^{-1}(V)$. Como $f$ es una función abierta se tiene que también es una función continua, así que $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Como $\mathcal{W}_x$ es base local de $x$, existe $G \in \mathcal{W}_x$ tal que $x \in G$ y $G \subset f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in f(G)$ y $f(G) \subset V$, es decir, existe $G \in \mathcal{W}_x$ tal que $y \in f(G) \subset V$.

Por lo tanto $\mathcal{P}$ es una base local a lo más numerable de $y$. La elección arbitraria de $y$ permite concluir que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico primero numerable. $\square$

**Proposición 6.24.** *Ser primero numerable es una propiedad topológica.*

**Demostración**. Sean $(X, \tau_X)$ un espacio topológico primero numerable y $(Y, \tau_Y)$ un espacio topológico arbitrario tal que existe un homeomorfismo $f : X \to Y$. Entonces $f$ es una función abierta. El Teorema 6.23 garantiza que $(Y, \tau_Y)$ es un espacio topológico primero numerable. Por lo tanto, ser primero numerable es una propiedad topológica. $\square$

## 6.2. Estructuras topológicas y primero numerabilidad

**Proposición 6.25.** *El producto a lo más numerable de espacios primero numerables es primero numerable.*

**Demostración**. Sea $I$ un conjunto numerable de índices. Supongamos que $(X_\alpha, \tau_\alpha)$ es un espacio topológico primero numerable para cada $\alpha \in I$. Sea $\tau_p$ la topología producto sobre $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$. Sea $x \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, entonces $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Así, $x_\alpha \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Se sigue que para cada $\alpha \in I$, existe $\mathcal{B}_{x_\alpha}$ base local a lo más numerable de $x_\alpha$ en $X_\alpha$. Sea $\mathcal{B}_x = \left\{ \bigcap\limits_{\alpha \in J} \pi_\alpha^{-1}(B_\alpha) : J \in \mathbf{F}(I),\ B_\alpha \in \mathcal{B}_{x_\alpha}\ \forall \alpha \in J \right\}$. Demostraremos que $\mathcal{B}_x$ es base local a lo más numerable de $x$ en el espacio producto.

i. Dado que $\mathcal{B}_{x_\alpha} \subset \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\mathcal{B}_x \subset \tau_p$.

ii. Sea $U \in \tau_p$ tal que $x \in U$. Existe $L \in \mathbf{F}(I)$ de modo que $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in L} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset U$ y donde $U_\alpha \in \tau_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Luego, para cada $\alpha \in L$, existe $B_\alpha \in \mathcal{B}_{x_\alpha}$ tal que $x_\alpha \in B_\alpha \subset U_\alpha$. Tenemos que $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in L} \pi_\alpha^{-1}(B_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in L} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$. Podemos escribir que existe $Q \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in Q \subset U$.

iii. Sea $R \in \mathcal{B}_x$. Existe $W \in \mathbf{F}(I)$ de manera que $R = \bigcap\limits_{\alpha \in W} \pi_\alpha^{-1}(B_\alpha)$, donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_{x_\alpha}$ para cada $\alpha \in W$. De que $x_\alpha \in B_\alpha$ para cada $\alpha \in W$ y $x_\alpha \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in I - W$ deducimos que $x \in R$. Como $R$ fue elegido arbitrario podemos concluir que $x \in A$ para cada $A \in \mathcal{B}_x$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_x$ es una base local a lo más numerable de $x$ en el espacio producto. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la condición de ser una familia numerable es esencial en el Teorema anterior.

**Ejemplo 6.26.** El espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no es primero numerable.
Tenemos que $(\mathbb{R}, \tau_u)$ es un espacio primero numerable. Vamos a demostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dotado de la topología producto $\tau$ no es primero numerable. Supongamos lo contrario, que $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \tau)$ es primero numerable. Sea $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base local de $\overline{0}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $J_n \in \mathbf{F}(\mathbb{R})$ y $\{V_m^n : m \in J_n\} \subset \tau_u$ tales que $\overline{0} \in \bigcap_{m \in J_n} \pi_m^{-1}(V_m^n) \subset B_n$.

Por otro lado, tenemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ es un subconjunto a lo más numerable de $\mathbb{R}$. Esto implica que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n \subsetneq \mathbb{R}$. Es decir, existe $r \in \mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

Ahora, notemos que $\overline{0} \in \pi_r^{-1}((-1,1)) \in \tau$. Dado que $\mathcal{B}$ es base local de $\overline{0}$ en $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \tau)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{0} \in B_n \subset \pi_r^{-1}((-1,1))$. De aquí que $\bigcap_{m \in J_n} \pi_m^{-1}(V_m^n) \subset \pi_r^{-1}((-1,1))$.

Esta última contensión garantiza que $\mathbb{R} = \pi_r\left(\bigcap_{m \in J_n} \pi_m^{-1}(V_m^n)\right) \subset (-1,1)$, esto es una contradicción.

**Teorema 6.27.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de $X$ tal que cada elemento de $\mathcal{C}$ es primero numerable. Entonces $(X, \tau)$ es primero numerable.*

**Demostración**. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de $X$, entonces $\mathcal{C} \subset \tau$ tal que $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$. Sea $x \in X$, entonces existe $C_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C_x$. Se deduce que existe una base local a lo más numerable $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $x$ en el subespacio $(C_x, \tau_{C_x})$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $V_n \in \tau$ tal que $B_n = C_x \cap V_n$. Entonces $B_n \in \tau$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base local a lo más numerable de $x$ en $(X, \tau)$, es decir $(X, \tau)$ es primero numerable. $\square$

**Corolario 6.28.** *La suma topológica de espacios topológicos primero numerables es primero numerable.*

**Demostración**. Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos primero numerables ajenos dos a dos. Mostraremos que $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ es primero numerable. Recordemos que $\bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha = (X, \tau)$ donde $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ y $\tau = \{U \subset X : U \cap X_\alpha \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in I\}$. Notemos que $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de $X$. Además $(X_\alpha, \tau_\alpha) = (X_\alpha, \tau_{X_\alpha})$ para cada $\alpha \in I$. El Teorema 6.27 garantiza que $\oplus_{\alpha \in I} X_\alpha$ es primero numerable. $\square$

# Referencias

[1] J. Dugundji, *Topology*, primera edición, Allyn and Bacon, USA, 1966.

[2] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fundamenta Mathematicae 1 (1965), volume 57, págs. 107 - 115.

[3] S. P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice II*, Fundamenta Mathematicae 61 (1967), volume 1, págs. 51 - 56.

[4] A. Goreham, *Sequential convergence in topological spaces*, Topology Atlas preprint 547.

[5] J. R. Munkres, *Topología*, segunda edición, Prentice Hall, Madrid, 2002.

[6] S. Willard, *General Topology*, segunda edición, Addison Wesley, USA, 1970.