



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE MÉXICO**



FACULTAD DE CIENCIAS

**DISTORSIONES AL CORRIMIENTO AL ROJO
PRODUCIDOS EN EL MODELO ALTERNATIVO DE
ENERGÍA OSCURA CPL**

TESIS

Que para obtener el grado de

Físico

PRESENTA

Brian Derek Gutiérrez Espinoza

Asesor Externo:

Jorge Luis Cervantes Cota

Asesor Interno:

Máximo Augusto Agüero Granados

Marzo del 2017

Índice general

1. Introducción	1
2. Elementos de Cosmología y Relatividad General	3
2.1. La expansión del Universo	4
2.2. Radiación de Fondo Cósmica	6
2.3. Ecuaciones de Friedmann	8
2.4. Relatividad General	11
2.4.1. Ecuaciones de Einstein	12
2.5. Constante Cosmológica Λ	15
2.6. Modelo Estándar de Cosmología	22
2.7. Distancias en Cosmología	23
3. Teoría de Perturbaciones del Universo	26
3.1. El Universo Temprano	26
3.2. Teoría de Perturbaciones	29
3.3. Oscilaciones Acústicas de Bariones	36
3.4. Distorsiones del corrimiento al rojo	39
4. Modelos de Energía Oscura	46
4.1. Quintaesencia	46
4.2. k-esencia	48
4.3. Modelo CPL	49
4.4. PPF	50
4.5. Alternativas a la energía oscura	55
5. Resultados de RSD en el modelo CPL	56
5.1. CosmoSIS	56
5.2. Resultados obtenidos de CosmoSIS.	56
5.3. Factor de crecimiento del modelo CPL implementado en CosmoSIS	63
5.4. Resultados CPL en RSD.	66
6. Conclusiones	74
6.1. Perspectivas	76
Bibliografía	77

Notación y Convenciones.

En el presente trabajo se mantiene la notación usual en Cosmología. Se usan las unidades naturales $c = \hbar = k_B = 1$, para la velocidad de la luz, constante de Planck y constante de Boltzmann respectivamente. Todas las velocidades son medidas en fracciones de c , existe una sola unidad mecánica independiente \hbar y para k_B la temperatura es medida en unidades de energía. A continuación se enlistan los símbolos usados frecuentemente.

Símbolo	Descripción
G	Constante Gravitacional ($G = 6.67 \times 10^{-8} g^{-1} seg^{-2}$)
m_{pl}	Masa de Planck ($m_{pl} = \frac{1}{\sqrt{G}} = 1.2211 \times 10^{19} GeV$)
M_{pl}	Masa de Planck reducida ($M_{pl} = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 2.4357 \times 10^{18} GeV$)
a	Factor de escala del Universo (valor hoy en día $a_0 = 1$)
t	Tiempo cósmico
η	Tiempo conforme: $\eta = \int a^{-1} dt$
\cdot	Derivada respecto al tiempo t
$'$	Derivada respecto al tiempo conforme η
z	Corrimiento al rojo: $z = \frac{a_0}{a} - 1$
d_M, d_A, d_L	Distancia comóvil, distancia diametral angular, distancia lumínica
H, \mathcal{H}	Parámetro de Hubble y conforme, respectivamente: $H = \frac{\dot{a}}{a}$, $\mathcal{H} = aH$
H_0	Parámetro de Hubble hoy en día: $H_0 = 100 h km seg^{-1} Mpc^{-1}$
h	Factor de incertidumbre sobre H_0 : $h = \frac{H_0}{100}$
ρ	Densidad de energía
P	Presión
ω	Ecuación de estado: $\omega = \frac{p}{\rho}$
K	Curvatura del Universo
R	Escalar de Ricci
c_s	Velocidad del sonido
Ψ, Φ	Potenciales gravitacionales
k	Número de onda comovil

$P(k)$	Espectro de potencias de perturbaciones
l	Multipolos armónicos esféricos
δ	Contraste de densidad
D	Factor de crecimiento
b	Bias (Tasa de galaxias por materia total perturbada)
Λ	Constante cosmológica
S	Acción
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
$\eta_{\mu\nu}$	Tensor métrico de Minkowski: $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$G_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energía-momento
\mathcal{L}	Densidad lagrangiana
$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$	Símbolos de Christoffel

Capítulo 1

Introducción

Unos de los temas que más ha inquietado a la humanidad es el origen de nuestro Universo. A consecuencia de esto, entre la comunidad científica surge la llamada Cosmología Moderna, la cual comienza a partir de los trabajos de George Gamow. Entre los más destacados, Gamow desarrolló una teoría sobre la creación de los elementos químicos (helio principalmente). Esta teoría se basaba en la explosión originaria de un átomo primitivo, lo que hoy se conoce popularmente como Big Bang. También predijo que el Big Bang había dado lugar a la radiación de fondo de microondas, la cual fue identificada años después por Arno Penzias y Robert Wilson. La Cosmología en muchos aspectos, es la física de los extremos; se encarga de describir la evolución del Universo durante los últimos 13,700 millones de años y del mismo modo maneja escalas de longitud muy grandes mientras describe la dinámica de dicho Universo. De hecho, la mayoría de los cosmólogos actualmente se encuentran trabajando en los acontecimientos que sucedieron a muy temprana edad en el Universo, contemplando temperaturas y densidades extremas, tan extremas que nunca sería posible recrearlas. Dichas condiciones extremas están presentes y se pueden observar hoy en día, por ejemplo; en supernovas, agujeros negros, cuásares y rayos cósmicos altamente energéticos.

El descubrimiento de la aceleración cósmica implica que:

- 1.- El Universo está dominado por la energía oscura, la cual se cataloga como un fluido misterioso con una gran presión negativa.
- 2.- La exitosa teoría de la gravedad de Einstein necesita ser modificada a grandes escalas.

Desde entonces, las pruebas cosmológicas establecen firmemente la imagen de un Universo, en donde la energía oscura representa aproximadamente el 70 % de la densidad energética total. La energía oscura de acuerdo a mediciones que se han observado provoca efectos relevantes en el Universo, se han formulado algunas hipótesis y se sabe que afecta directamente la expansión de éste. Una explicación de Albert Einstein mencionaba que la energía oscura es una propiedad del espacio y que el espacio “vacío” no es vacío como tal. Sin embargo este espacio vacío tiene su propia energía que también ésta no disminuiría con la expansión sino al contrario, habría más espacio con energía propia provocando una expansión acelerada. Si alguna de estas teorías resultara ser correcta, una explicación satisfactoria para la aceleración

cósmica conducirá a nuevas e importantes teorías en física fundamental.

En esta tesis se estudio un modelo de energía oscura conocido como CPL, propuesto por Chevalier, Polarski y Linder, con el objetivo de tener una ecuación de estado cuyos parámetros estén mínimamente correlacionados y que, al mismo tiempo, representen una modificación mínima al modelo Λ CDM. Las parametrizaciones que se proponen son basadas en un método que considera un valor medido de una función dinámica, y otro valor de la misma función que cambien con el tiempo. Estas definiciones y procesos se llevan a cabo en el desarrollo del presente trabajo. Por otra parte se explica cómo usar, de manera óptima, herramientas cosmológicas innovadas y actualizadas a nuestra disposición para conocer más sobre la dinámica de dicha energía oscura a través de estimar el valor de parámetros. Entonces, con esto en mente, a partir de Relatividad General se desarrolla el modelo CPL.

Primero, se presentan conceptos y teorías importantes en Cosmología, tales como los trabajos realizados por Einstein, Friedmann, Hubble, entre otros resultados importantes. Después, se presenta el modelo Λ CDM como el modelo más simple, elegante e importante que se ajusta a las observaciones y datos experimentales. Continuando, se presenta el estudio sobre la importante teoría de perturbaciones cosmológicas en términos de observables cósmicos y también se considera la compleja teoría de las distorsiones del corrimiento al rojo.

Finalmente, se desarrolla el modelo propuesto contemplando tanto la teoría de perturbaciones como las distorsiones del corrimiento al rojo. Por último, se desarrollan y emplean las herramientas computacionales cosmológicas recientes y actualizadas, para probar si dicho modelo de energía oscura CPL es mejor que el modelo Λ CDM (obteniendo resultados interesantes sobre este tipo de modelos).

Capítulo 2

Elementos de Cosmología y Relatividad General

En la antigua Grecia, Ptolomeo creía que la Tierra debería caer en el centro del Cosmos. Además el Sol, la Luna y los planetas girarían alrededor de ésta, y que las estrellas “fijas” estarían aún más lejos. No fue sino hasta el siglo XVI que Copérnico postuló que se debería considerar a la Tierra y los otros planetas girando alrededor del Sol, lo cual lo desacreditó, eliminándolo de la visión del Universo en esa época.

Por otro lado, en la sólida Teoría de la Gravitación, Newton creía que las estrellas eran soles comunes como el nuestro, distribuidos y atravesando el espacio infinito en una configuración estática, por lo cual Newton era consciente de que esta configuración estática era inestable simplemente por la atracción gravitatoria de la materia.

Durante los siguientes 200 años se seguía tratando de entender por qué las estrellas no estaban distribuidas equivalentemente, sino que se localizaban en forma de disco (Vía Láctea). Sólo hasta el año 1918 H. Shapley descubrió que nos situábamos a $\frac{2}{3}$ del radio del centro de la galaxia, y de nuevo argumentó que, típicamente, ésta sería el centro del Universo. En 1952, W. Baade demostró que la Vía Láctea es una galaxia bastante típica, común a las demás descubiertas, lo cual permitió, en un pensamiento moderno fundamentar el Principio Cosmológico (también llamado Principio de Copérnico). El Principio Cosmológico establece que el Universo se ve igual independientemente de dónde se esté situado. En el pasado esto se creía erróneo, ya que como se ha dicho, se consideraba a la Tierra como centro del Universo.

El Principio Cosmológico es la base del Big Bang. El Big Bang es considerado como el modelo cosmológico predominante en el inicio del Universo y en su evolución a gran escala. Se considera que en el inicio del Universo este estaba lleno de una enorme densidad de energía homogénea e isotrópica, que evidentemente se expandiría después de una gran explosión formando los primeros elementos, hidrógeno y helio, para posteriormente dar origen de lo que conocemos y llamamos Universo.

2.1. La expansión del Universo

Una parte fundamental de las observaciones cosmológicas de hace años, ha sido observar que el Universo pareciera moverse alejándose de nosotros aceleradamente. Este hallazgo llevó al Premio Nobel de física del 2011 galardonando a Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt y Adam G. Riess, por sus trabajos sobre la expansión acelerada del Universo a través de observaciones de supernovas distantes. Tal descubrimiento generó demasiadas preguntas, una de las más importantes es: ¿de dónde surge la energía para hacer posible la expansión acelerada?. Se propusieron explicaciones para tal aceleración, y las más interesantes fueron que un tipo de energía del espacio vacío la provocaba y otra que un misterioso fluido con esta energía rellenaba tal espacio. A este fenómeno, los científicos la denominaron como “Energía Oscura”. Esta es una de las teorías más importantes y de las más trascendentes en Cosmología y física de partículas. Las primeras evidencias directas de la energía oscura fueron reportadas por Riess et al. [1] y S. Perlmutter et al. [2], que posteriormente fueron confirmadas por otros autores [3]. El mecanismo para medir esa velocidad de alejamiento es mediante el corrimiento al rojo (red-shift), que es un efecto parecido al efecto Doppler aplicado a ondas de luz. Vesto Slipher en 1912, fue el primero en usar esta técnica para medir velocidades de galaxias; tiempo después fue aplicado sistemáticamente por Edwin Hubble hacia finales de los años 1920’s.

Casi todas las galaxias están en retroceso respecto de nosotros, es decir se alejan debido a la expansión, por lo que el mecanismo para entender este alejamiento es el corrimiento al rojo z definido como:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (2.1)$$

donde λ_{em} y λ_{obs} son las longitudes de onda de la luz emitidas (galaxias) y observadas (nosotros), respectivamente. Si algún objeto se aleja de nosotros a velocidad v , el corrimiento al rojo (2.1) se modificaría como $z = \frac{v}{c}$, con c la velocidad de la luz. Hubble mostró en 1929 [4] que la velocidad de recesión era proporcional a la distancia de un objeto hacia nosotros:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}. \quad (2.2)$$

La expresión (2.2) es la llamada ley de Hubble y H_0 , es la constante de Hubble¹ (el subíndice 0 refiere al valor medido hoy en día). De acuerdo con la Ley de Hubble, las galaxias más lejanas de nosotros, son las más rápidas en su expansión.

Por otra parte, se sabe que en el Universo existen partículas y materia que dominan la cantidad de sustancia en éste, por ejemplo la materia bariónica, que está constituida por bariones y leptones, esta es la materia que nos rodea y que podemos ver hoy en día, incluyéndonos. La radiación también es parte del Universo en forma de paquetes de energía llamados fotones. Los Neutrinos se pueden producir a través de un decaimiento radiactivo. La Materia y la Energía Oscura son dos componentes

¹El valor estimado reciente de H_0 , según la Colaboración Planck [5], es $H_0 = 67.27 \pm 0.66 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$, 1 pársec [pc] = 3.2616 años luz = 3.0857×10^{16} m.

del Universo de los cuales se hablara más adelante. Las proporciones de componentes existentes en el Universo como materia barionica, radiación, materia oscura y energía oscura, están representadas en la figura (2.1).

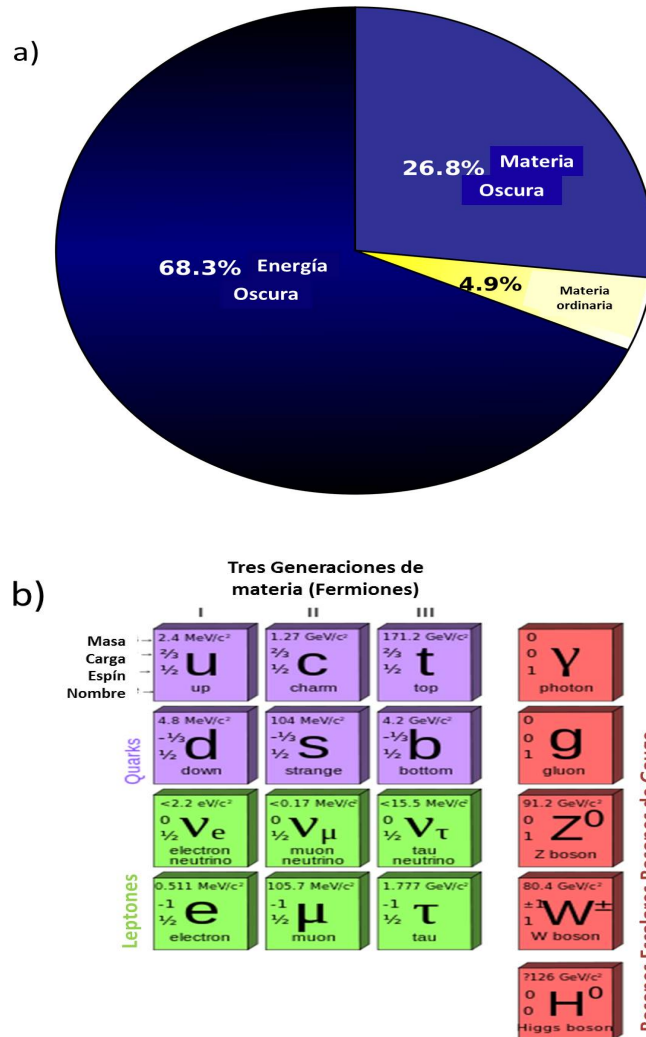


Figura 2.1: a) Porcentaje de materia en el Universo. La Energía Oscura constituye el mayor porcentaje en el Universo seguido por la Materia Oscura, mientras que alrededor del 5% es todo lo que conocemos hoy en día (Átomos, Planetas, Galaxias, Luz, etc.). b) Características de los componentes de la materia bariónica según el modelo estándar de partículas elementales.

Es importante mencionar que el Universo a gran escala cuenta con dos propiedades cosmológicas importantes: *Homogeneidad* e *Isotropía*, estas dos propiedades son la base de lo que se conoce como *Principio Cosmológico*.

Homogeneidad refiere a que en el Universo la distribución de materia tiene densidad similar en cada punto, y esto implica que, si el Universo se expande uniformemente, un observador medirá la misma tasa de expansión en cualquier lugar. Isotropía significa que al mirar en diversas direcciones del Universo, se observa que la distribución de galaxias tiene igual densidad a cualquier distancia.

2.2. Radiación de Fondo Cósmica

La prueba más clara de que el Universo nació de una gran explosión es la Radiación de Fondo Cósmica (RFC) o por sus siglas en inglés Cosmic Microwave Background (CMB), ver figura (2.2). La RFC fué predicha por G. Gamow, la cual casualmente fue descubierta y medida por Arno A. Penzias y Robert W. Wilson en 1964 [6]. Mientras trabajaban con un nuevo tipo de antena en un laboratorio de New Jersey, Penzias y Wilson detectaron que ésta tenía una fuente de ruido que no podían explicar, y después de afinar la recepción de la señal, lograron identificar que se trataba de la RFC. En 1992, el satélite Cosmic Background Explorer (COBE) midió por primera vez las anisotropías en la temperatura de la RFC, las cuales se realizaron posteriormente con mayor precisión por el experimento Balloon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation AND Geophysics (BOOMERanG) mediante las mediciones telescópicas en un globo suborbital en la Antártida. Similarmente pero en diferentes tipos de vuelo, el experimento Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array (MAXIMA) también midió la RFC en 1998. En el 2001 el satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) y en el 2009 el satélite Planck fueron diseñados y lanzados especialmente para medir la RFC con una alta precisión y tecnología, de donde actualmente los científicos usan datos experimentales. Cabe mencionar que COBE midió por primera vez el espectro de la RFC que coincidió exactamente con la radiación de cuerpo negro (Figura 2.3). Se comprobó que la luz es isotrópica en todas direcciones cuyas anisotropías son del orden de $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$.

Los datos observacionales de la RFC obtenidos del satélite WMAP [7] revelan temperaturas alrededor de $2.725K$ viniendo de diferentes partes del Universo. Ésto asume que a escalas muy grandes ($>100Mpc$) se cumple el Principio Cosmológico fundamentando que el Universo es homogéneo a dichas escalas. Por lo que se asumen las siguientes premisas:

1. Las Leyes de la Física fundamentales no cambiarán y serán las mismas en cualquier lugar del espacio.
2. Las constantes existentes en física y sus valores encontrados, son iguales en cualquier parte del universo.
3. A grandes escalas cosmológicas del Universo, la distribución de materia es equivalente.

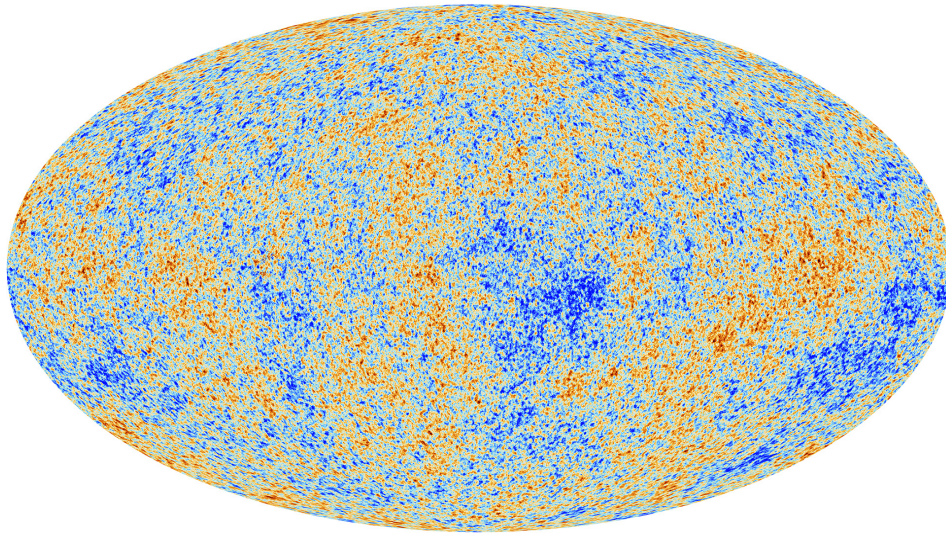


Figura 2.2: Radiación de Fondo Cómica. Es la energía remanente del Big Bang que se generó en el origen del Universo. Las regiones azules (más oscuras) representan mayor energía por ende temperaturas mayores y las amarillas-rojas (más claras) menor temperatura.

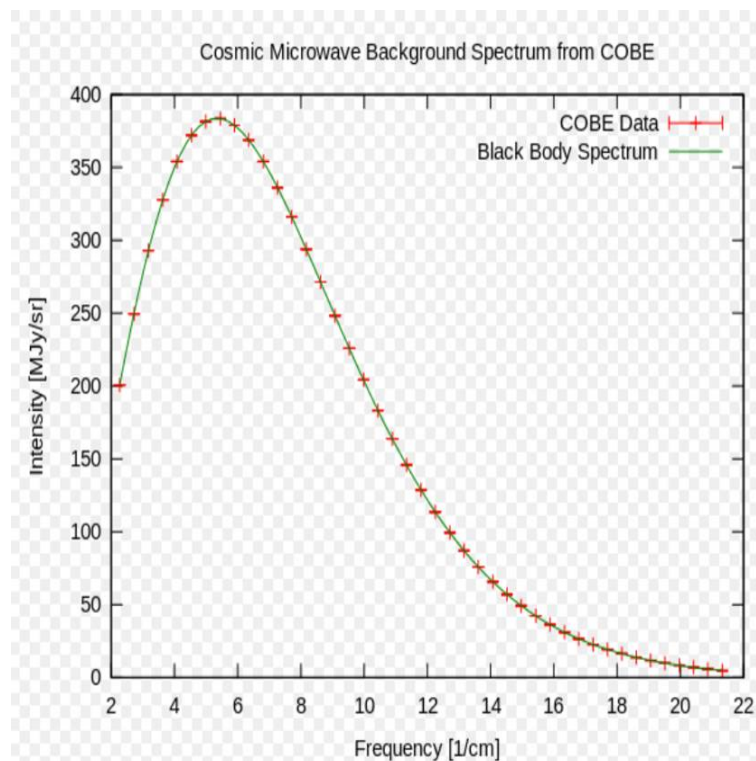


Figura 2.3: Gráfica del espectro de la RFC medido por el instrumento FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) en COBE, es la medición mas precisa del espectro de cuerpo negro en la naturaleza [8].

2.3. Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Friedmann describen la expansión del Universo. Para deducirlas desde un punto de vista Newtoniano, considérese una esfera uniforme de masa total M , y una masa pequeña m en la superficie de esta, ver figura 2.4. Se sabe que toda la materia se atrae y la fuerza que ejerce la masa M sobre la masa m estará determinada por la ley de gravitación Universal de Newton:

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4\pi G\rho r m}{3}, \quad (2.3)$$

donde G es la constante de Gravitación de Newton, ρ la densidad de una distribución esférica asociada a M , considerada constante simulando al Universo que se ve con la misma distribución de masa en todas direcciones y r la distancia entre objetos. La energía total (U) de la masa m es la suma de la energía cinética y la energía potencial representada como: $U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho m r^2}{3}$. Como la fuerza es conservativa el potencial ejercido por la masa uniforme M viene de la expresión $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$.

La homogeneidad nos permite cambiar a un sistema diferente de coordenadas, definiendo éstas como las *coordenadas comóviles* las cuales se representan con la ecuación:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (2.4)$$

donde $a(t)$ es definido como el *factor de escala* del Universo, el cual da información de cómo se expande el Universo al aumentar las distancias entre dos partículas fijas conforme pasa el tiempo, nótese que esta distancia esta dada como vector. Lo que se debe pensar cuando se estudia esta ecuación es en una cuadrícula de coordenadas que se expande con el tiempo, ver figura 2.4.

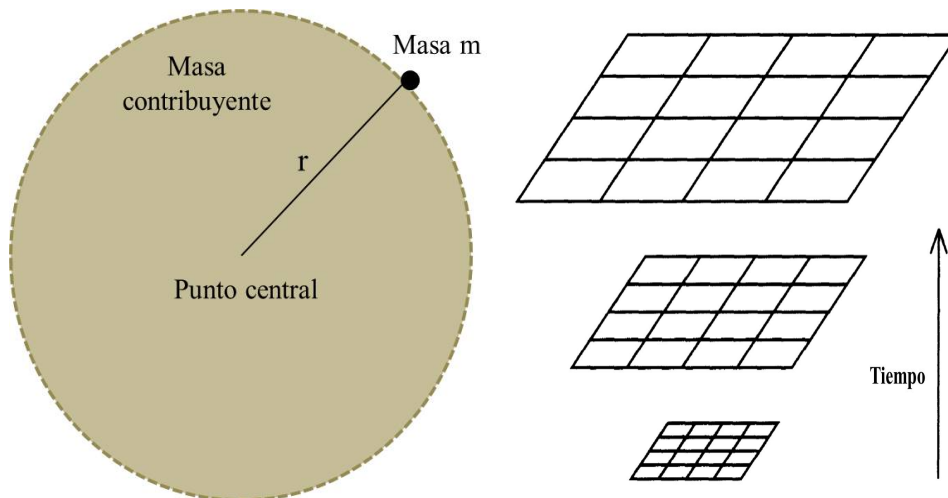


Figura 2.4: A la izquierda, la partícula al radio r sólo siente la atracción gravitacional de la masa contribuyente. A la derecha, el sistema de coordenadas comóviles se lleva junto con la expansión de manera que cualquier objeto permanece con valores de coordenadas fijos.

Introduciendo las coordenadas comóviles en la energía Newtoniana para una partícula, suponiéndose montada en la expansión y reordenando los términos, se obtiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.5)$$

donde $kc^2 = -\frac{2U}{mx^2}$ y k es definida como la constante de curvatura. La ecuación (2.5) es conocida como la *ecuación de Friedmann*. Para considerar un significado sistemático de la constante de curvatura k en la ecuación (2.5), veamos lo siguiente. Dependiendo de los valores de k se considera al Universo como plano, abierto o cerrado con geometría plana, hiperbólica o esférica, respectivamente, este hecho se determina desde el contexto de Relatividad General, mencionando que la gravedad es la causante de la curvatura en el espacio-tiempo. Ahora, tratando el caso en donde $k = 0$, si se proyecta un triángulo en un plano, la suma de sus ángulos es efectivamente 180° y además un círculo dibujado en el plano tendrá circunferencia $2\pi r$ (ver figura 2.5, $k = 0$); pero en el caso de una geometría esférica, correspondiente a k positiva, imagínese que partimos del ecuador pintando dos líneas separadas 90° (ver figura 2.5, $k = 1$), si las líneas tienen la misma longitud de arco y luego se unen entre sí, la suma de sus ángulos siempre será mayor a 180° ; ahora supongamos que dibujamos un círculo en un radio r del Polo Norte y elegiremos a r de tal modo que nuestro círculo sea el ecuador, ese radio medido en la superficie de la esfera corresponde a un cuarto de círculo completo alrededor de la Tierra, de modo que $r = \pi R/2$, donde R es el radio de la Tierra. Sin embargo la circunferencia está dada por $2\pi rR$, por lo que en lugar de la relación usual se tiene $c = 4r$ para un círculo dibujado en el ecuador, por lo tanto la circunferencia es menor que $2\pi Rr$. Por último, para el valor de k negativo la geometría correspondiente es conocida como hiperbólica, y normalmente está representada por una superficie tipo silla (ver figura 2.5, $k = -1$). En una geometría hiperbólica las líneas paralelas nunca se encuentran. En las propiedades del cuadro 2.1 ([9] pag. 25) se resume lo mencionado.

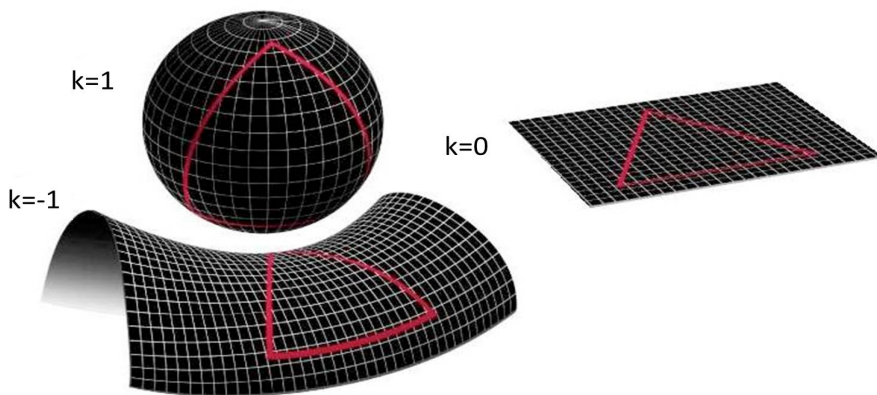


Figura 2.5: Geometría espacial del Universo de acuerdo a los valores del parámetro de curvatura k .

Curvatura	Geometría	Ángulos de triángulo	Circunferencia	Tipo de Universo
$k > 0$	Esférica	> 180	$< 2\pi r$	Cerrado
$k = 0$	Plana	180	$2\pi r$	Plano
$k < 0$	Hiperbólica	< 180	$> 2\pi r$	Abierto

Cuadro 2.1: Resumen de las posibles geometrías de Universo.

Aunque es fundamental, la ecuación de Friedmann (2.5) no sirve de nada sin una ecuación que describa cómo la densidad ρ de la materia existente evoluciona con el tiempo en el Universo, y que además involucre a la presión de ésta, es entonces cuando se necesita la ecuación del fluido que involucre a las cantidades ρ y p (el Universo es tratado como un fluido). Como veremos a continuación, los diferentes tipos de material que pueden existir en nuestro Universo tienen presiones diferentes, y conducen a una evolución diferente de la densidad ρ . Para deducir esta ecuación, comenzamos de la primera ley de la termodinámica aplicada a un volumen de expansión² y con radio comóvil dado por (2.4), entonces se obtiene:

$$dE + pdV = TdS, \quad (2.6)$$

en donde los cambios de la energía, volumen y entropía con respecto al tiempo son:

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2, \quad \frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}, \quad dS = 0. \quad (2.7)$$

Aquí se ha asumido que la expansión del Universo es reversible ($dS = 0$) ya que la entropía es una función de estado que evaluada para todo el Universo aumenta en el inicio con una transformación irreversible y posteriormente permanece constante en una transformación reversible. Introduciendo las ecuaciones (2.7) en (2.6) y reordenando los términos, se obtiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (2.8)$$

donde los puntos denotan derivación respecto a t . Esta es la *ecuación de continuidad* de un elemento de fluido en el Universo.

Se deriva una tercer ecuación importante a partir de las dos deducidas anteriormente (2.5) y (2.8). Esta tercer ecuación dará información acerca de la aceleración del factor de escala, entonces, derivando la ecuación de Friedmann (2.5) con respecto al tiempo, y sustituyendo en la ecuación de continuidad (2.8) se encuentra lo siguiente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (2.9)$$

esta ecuación es conocida como la *ecuación de aceleración*, la cual da información de cómo se expande un Universo acelerado. Las ecuaciones (2.5), (2.8) y (2.9), aunque partieron de una lógica Newtoniana, son las ecuaciones para una descripción correcta de la cosmología de fondo, y además dichas ecuaciones, coinciden con el desarrollo relativista que se demostrará más adelante.

²En este caso, el volumen V seguirá siendo el de la esfera en expansión, ver figura 2.4.

2.4. Relatividad General

La Teoría General de la Relatividad fue postulada por Albert Einstein en noviembre de 1915. La cual cuenta con dos postulados muy importantes:

- 1.- El *Principio de Equivalencia*, que muestra la equivalencia entre masa inercial y masa gravitacional.
- 2.- El *Principio de Covarianza*, el cual establece que las leyes de la física deben tomar los mismos valores en cualquier marco de referencia (inercial-no inercial).

En Relatividad General, una cantidad fundamental es la métrica o también llamado elemento de línea, la cual describe la geometría del espacio-tiempo, dando la distancia entre dos puntos. Cuando se trabaja en el espacio-tiempo plano y con trayectorias rectas la métrica de Minkowski es la indicada, $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, pero eso en realidad depende del sistema o problema que se este estudiando, por ejemplo, un mismo agujero negro curvará la trayectoria de la luz debido a la gravedad, y en tal caso, es necesario una métrica más general. Entonces si la expansión es uniforme y curvada, la distancia en el espacio-tiempo ahora es medida a través de una métrica general denotada como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.10)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico³ y los símbolos cuyos valores son $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ denotan a las coordenadas. Aquí x^0 denota la coordenada temporal y las restantes x^i las coordenadas espaciales. Como lo hemos dicho, la métrica indica como medir en un espacio 4-dimensional, y además, ésta es general para cualquier geometría de interés.

En Cosmología, los físicos consideran una métrica del espacio-tiempo general que contiene homogeneidad e isotropía considerando a la expansión del Universo.

Entonces, se define la métrica de *Friedmann-Robertson-Walker* como [10]:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (2.11)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala mencionado anteriormente, aquí de nuevo k es el parámetro que indica si la geometría del Universo es plana, esférica o hiperbólica (ver figura (2.5)).

El caso $k = 0$ corresponde a la geometría Euclidiana (sólo en la parte espacial) permitiendo escoger las coordenadas cartesianas comóviles, por lo que la métrica (2.11) se reescribe como:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.12)$$

³En relatividad especial la métrica usada es la *métrica de Minkowski* $\eta_{\mu\nu}$, la cual define trayectorias rectas describiendo un Universo plano. Dicha métrica esta representada como:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, suele ser conveniente definir al *tiempo conforme* η como $dt = a d\eta$, por lo tanto:

$$ds^2 = a(\eta)^2 (-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.13)$$

En las siguientes secciones el tiempo conforme será de uso continuo.

2.4.1. Ecuaciones de Einstein

Según la teoría de Einstein la materia genera un campo gravitacional que modifica la geometría del Universo, la geometría le indicará a la materia como desplazarse. Para deducir las ecuaciones que modelen estos comportamientos, se define la densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert como [10]:

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{16\pi G} R + L_m \right) \sqrt{-g}, \quad (2.14)$$

donde R es el escalar de Ricci, G la constante de gravitación de Newton, L_m es el lagrangiano que describe cualquier campo de materia existente y $g = |g_{\mu\nu}|$ el determinante del tensor métrico. Haciendo una variación de la acción con la densidad lagrangiana \mathcal{L} , de tal forma que se aplique el principio de mínima acción que establece que la variación de esta acción con respecto al inverso de la métrica es cero ($\delta S = 0$) obteniendo lo siguiente:

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} R + L_m \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.15)$$

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.16)$$

Como esta ecuación tiene que ser válida para cualquier variación $\delta g^{\mu\nu}$, esto implica que el integrando es cero, entonces obtenemos:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = - \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.17)$$

La expresión (2.17) es denominada la ecuación de movimiento para el campo métrico, en donde el lado derecho es proporcional al tensor de energía-momento que describe a la materia presente (además de ser simétrico $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) definido como:

$$T_{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.18)$$

Para el lado izquierdo de la ecuación (2.17), el proceso es un poco más laborioso, por lo que no se demostrará en este trabajo ya que el desarrollo se encuentra en cualquier libro de Relatividad General, pero es un hecho que la variación del escalar de Ricci es precisamente el tensor de curvatura de Ricci más un término que se anulará al integrar⁴; también es posible obtener la variación del determinante a través de

⁴Es posible demostrar a través de la definición del tensor de Riemann (en términos de los símbolos de Christoffel) que la variación del escalar de Ricci es $\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, en donde el segundo término que contiene la variación del tensor de curvatura de Riemann será igual a la diferencia de dos términos más: $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\sigma)$.

De esta última igualdad, el teorema de Stokes permite obtener un término de frontera, pero cuando la variación de la métrica se anula en el infinito, este término no contribuye, entonces $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$.

una definición⁵. Con las variaciones anteriores, las *Ecuaciones de campo de Einstein* resultan ser:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es definido como el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Ricci y R el escalar de Ricci. Estos términos describirán la curvatura del espacio-tiempo respecto a la métrica que se este tratando.

Si la métrica evoluciona de acuerdo a las ecuaciones de campo de Einstein estas ecuaciones tienen que describir la curvatura del espacio-tiempo en presencia de la materia. En Cosmología se considera que los posibles constituyentes del Universo son representados mediante fluidos perfectos, significando con esto la no existencia de viscosidad y flujo de calor, entonces estos fluidos perfectos tendrán un tensor de energía-momento definido como:

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(-\rho, \vec{p}), \quad (2.20)$$

donde ρ es la densidad de masa y \vec{p} el vector presión con componentes espaciales (p_x, p_y, p_z) , considerando que se trata del sistema del observador comóvil⁶.

Tomando ventaja de la métrica FRW (2.11), es posible obtener dos ecuaciones de Einstein independientes a partir de la ecuación (2.19) con ciertas consideraciones⁷. La primera de estas ecuaciones es precisamente la ecuación de Friedmann que tiene la forma:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (2.21)$$

La expresión (2.21) es exactamente la ecuación desarrollada Newtonianamente excepto por la interpretación de k , ver ec. (2.5). Aquí se ha introducido la definición del parámetro de Hubble como $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. La segunda ecuación independiente es:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = -8\pi G\frac{p}{c^2}, \quad (2.22)$$

intuitivamente esta ecuación no se verá como la de aceleración encontrada anteriormente (ver ecuación (2.9)), pero si consideramos la misma interpretación para k y sustituyendo la ecuación de Friedmann en ésta se obtiene dicha ecuación de aceleración.

Por último, para derivar la ecuación de continuidad del fluido, es posible obtenerla a partir del tensor de energía-momento. Tomando ventaja de que la Relatividad General considera automáticamente la conservación de energía-momento permite que la derivada covariante de $T_{\mu\nu}$ sea:

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0, \quad (2.23)$$

⁵ $\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$

⁶ Además, a escalas cosmológicas, cada galaxia es idealizada como una partícula de prueba.

⁷ Primero se deberá encontrar el tensor métrico y a partir de éste los símbolos de Christoffel, para así deducir tanto el tensor de Riemann, Ricci y el escalar de Ricci.

$$T_{\nu,\mu}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad (2.24)$$

esto es de acuerdo a la definición de derivada covariante en términos de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, denotando con una coma la derivada ordinaria y recordando que T_{ν}^{μ} es diagonal, los símbolos de Christoffel relevantes son $\Gamma_{00}^0 = 0$ y $\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}$. Sustituyendo los símbolos y tomando en cuenta la suma sobre índices repetidos se encuentra la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (2.25)$$

ésta expresión es exactamente la ecuación de continuidad encontrada en la derivación Newtoniana (ver ecuación (2.8)) que mantiene la conservación de energía del fluido en un Universo expandiéndose.

En este sentido, las ecuaciones obtenidas (2.21), (2.22) y (2.25) desde un marco de Relatividad General, coinciden con las ecuaciones (2.5), (2.8) y (2.9) que partieron desde una interpretación Newtoniana.

Cabe resaltar de nuevo que no existen fuerzas debido a la presión en un Universo homogéneo, ya que la densidad y la presión toman los mismos valores en todas partes. Entonces aún no estamos en condiciones de resolver las ecuaciones evolutivas (2.21) y (2.25), sólo sabríamos la evolución de ρ si conociéramos valores fijos de la presión p . Se necesita especificar la presión debida a cada componente que llena nuestro Universo, por lo tanto, en Cosmología se creó que hay una presión única asociada a cada densidad, de modo que $p \equiv p(\rho)$. Tal relación se conoce como la *ecuación de estado*, en donde la posibilidad más simple es la no existencia de presión en absoluto. Existen dos casos para la presión de los componentes de Universo, el primero es para la materia no-relativista⁸, en donde se considera que ésta ejerce una presión insignificante ($p = 0$). Un Universo sin presión es la suposición más simple que se puede hacer para los átomos en el Universo una vez que este se ha enfriado, ya que los átomos están bastante separados y rara vez interactúan, esto es una buena descripción para una colección de galaxias en el Universo ya que éstas no tienen interacciones distintas a las gravitacionales y ocasionalmente se utiliza el término “polvo” en lugar de “materia”. El segundo caso de la presión es para la radiación, en donde las partículas relativistas se mueven naturalmente con velocidades cercanas a la de la luz c , por lo que su energía cinética conllevará a una fuerza de presión. En la teoría estándar de radiación es posible demostrar que $p = \rho c^2/3$. En general, todas las partículas que se mueven a velocidades relativistas y conllevan a definir ésta ecuación de estado. Ahora que conocemos un poco más sobre la introducción de la ecuación de estado, podemos suponer que el sistema de ecuaciones linealmente independientes (2.21) y (2.25) implica tres variables desconocidas. Asumiendo a la ecuación de estado como una tercera ecuación para completar este sistema de

⁸En este contexto, el término materia es utilizado por los cosmólogos como abreviatura de materia no-relativista.

ecuaciones, se define la ecuación de estado barotrópica como:

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{para materia relativista o radiación,} \\ 0 & \text{para polvo cósmico,} \\ 1 & \text{para materia rígida,} \\ -1 & \text{para constante cosmológica.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Una vez especificada la ecuación de estado ω , la ecuación de Friedmann y de continuidad, es todo lo que se necesita para la descripción de la evolución del Universo. Reescribiendo la ecuación (2.25) como:

$$\dot{\rho} + 3H\rho(1 + \omega) = 0, \quad (2.27)$$

con ω constante según la ecuación (2.26), entonces (2.27) también tiene solución de la forma:

$$\rho = Aa^{-3(1+\omega)}, \quad (2.28)$$

donde A es una constante dependiente de los valores iniciales de ρ y a . La solución para la densidad en términos del factor de escala de acuerdo a (2.26) es $\rho = Aa^{-4}$, Aa^{-3} y A para radiación, polvo y constante cosmológica, respectivamente; A es una constante diferente para cada caso.

Por último, para cada valor de ρ y considerando un Universo con geometría plana ($k = 0$), de la ecuación de Friedmann se obtiene una solución para el factor de escala de la siguiente manera:

$$a = \begin{cases} Bt^{\frac{1}{2}} & \text{para materia relativista o radiación,} \\ Bt^{\frac{2}{3}} & \text{para polvo cósmico,} \\ Bt^{\frac{1}{3}} & \text{para materia rígida,} \\ Be^{At} & \text{para constante cosmológica,} \end{cases} \quad (2.29)$$

donde B también será una constante diferente para cada caso.

Con lo expuesto en las dos últimas secciones, se demuestra como las ecuaciones de la cosmología de fondo pueden ser tratadas desde un punto de vista Newtoniano y a partir de Relatividad General. En la siguiente sección se abordara a la constante cosmológica.

2.5. Constante Cosmológica Λ

Einstein creía que el Universo era estático, pero rechazó esta idea ya que la Relatividad General no se lo permitía, simplemente por el hecho de que la materia se atraía gravitacionalmente, llevando a un Universo inicialmente en equilibrio dinámico a contraerse. Einstein propuso un cambio en sus ecuaciones, algo que después él lo denominó como “el peor error de su carrera” o “la mayor metedura de pata”, ya que en un principio trató de balancear con un término nuevo a la densidad de energía ρ y permitir su Universo estático. Esta nueva contribución la denominó como

constante cosmológica Λ . La idea se centraba de cierta forma para que el parámetro de Hubble fuese nulo ($H(t) = 0$). Sin embargo, después de desarrollar su solución estática, Einstein terminó rechazando esta idea ya que el corrimiento al rojo observado por Georges Lemaitre en 1929 sugirió que el Universo no era estático. Este equilibrio estático resulta ser inestable a pequeñas perturbaciones y por lo tanto presumiblemente no podría surgir en la práctica.

La introducción de la constante cosmológica es añadida como un término extra en la acción de Einstein-Hilbert como se muestra en (2.30). Si se aplican de nuevo las variaciones como se hizo anteriormente, es posible encontrar las ecuaciones de campo de Einstein considerando a la constante cosmológica⁹:

$$S = \int \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + L_m \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.30)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Aunque Einstein introdujo la constante cosmológica como un término independiente en las ecuaciones de campo gravitatorio, éste término puede ser interpretado como una energía o presión negativa del vacío, modificando el lado derecho de la ecuación de campo (2.31) de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(vac)}, \quad (2.32)$$

en donde $T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$. A partir de esta última interpretación, se considera que Λ es equivalente a una densidad de energía intrínseca del vacío, $\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$, asociada con una presión idéntica pero de signo opuesto. En Cosmología es frecuente citar los valores de esta densidad de energía directamente como constante cosmológica.

Una vez introducida la constante cosmológica Λ en las ecuaciones de campo gravitatorio, es posible obtener la ecuación de Friedmann considerando a Λ como se obtuvo para (2.21), obteniendo lo siguiente:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.33)$$

El efecto de la constante cosmológica es más relevante en la ecuación de aceleración. Siguiendo la derivación de la ecuación (2.33) con respecto al tiempo, y reordenando los términos, se obtiene de nuevo la ecuación de aceleración con la contribución de Λ :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.34)$$

en donde una constante cosmológica positiva dará una contribución positiva a \ddot{a} y actuará como una fuerza repulsiva, satisfaciendo de cierta forma la expansión y si Λ es suficientemente grande puede superar la atracción gravitatoria representada por el primer término permitiendo un Universo en aceleración.

⁹A partir de ahora se usaran las unidades naturales descritas en las notaciones y convenciones, para las cuales la velocidad de la luz es $c = 1$.

Partiendo de la ecuación (2.33), es conveniente definir una densidad crítica con base al principio cosmológico, ya que cualquier punto del Universo es bueno para ser considerado como un supuesto “centro”, pues desde cualquier lugar tendremos las mismas observaciones en cuanto a expansión y densidad. Para decidir si un Universo es de un tipo u otro se necesita caracterizar el contenido energético del mismo. Para un Universo con geometría plana ($k = 0$) y parámetro de Hubble H_0 hoy en día, se define a la *densidad crítica* ρ_{c0} del Universo de la siguiente manera:

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \sim 0.94 \times 10^{-26} \frac{kg}{m^3}. \quad (2.35)$$

Esta densidad crítica es utilizada frecuentemente en Cosmología. En el mismo sentido, es conveniente expresar la densidad total del Universo como la relación de la densidad actual u observada ρ con respecto a la densidad crítica ρ_c del Universo de Friedmann. La expresión para dicha densidad (2.35) se encontró asumiendo que la constante cosmológica Λ es cero (como es para todos los Universos de Friedmann básicos), estableciendo que la curvatura k es igual a cero. Entonces se define el *parámetro de densidad* Ω , que es útil para comparar diferentes modelos cosmológicos, como:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho, \quad (2.36)$$

en donde el valor $\Omega = 1$ representa la condición de densidad crítica. De aquí se tienen tres posibles casos de Ω . Primero, para $\Omega > 1$ el Universo se contraerá en un futuro (Big Crunch); segundo, para $\Omega < 1$ el Universo deberá expandirse indefinidamente (Big Rip); y por último, para $\Omega = 1$ el Universo se deberá expandir pero deteniendo su expansión asintóticamente. El parámetro de densidad Ω esencialmente se descompone en una contribución debida a la materia Ω_m , conteniendo a la materia bariónica, partículas relativistas, neutrinos y la materia oscura fría, ésta última como principal contribuyente. Las otra descomposiciones principales son debidas a la constante cosmológica Ω_Λ , en representación de la densidad de energía del vacío, y una más debida a la curvatura Ω_k . Entonces, a partir de la ecuación (2.33) se definen los parámetros de densidad como:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad \Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m. \quad (2.37)$$

La última expresión del lado derecho de (2.37) también se descompone de la forma $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_\nu + \Omega_{CDM}$. A partir de estas definiciones la ecuación de Friedmann (2.33) se reescribe como:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (2.38)$$

esta expresión es conocida como la *ecuación del triangulo cósmico* y es de suma importancia en Cosmología, es una restricción que se debe cumplir en todo momento y que determina a los diferentes modelos cosmológicos como aceptables.

La relación entre el parámetro de densidad Ω y la curvatura k para los diferentes tipos de geometrías están determinados como:

- Universo abierto: $0 < \Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$.

- Universo plano: $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.
- Universo cerrado: $\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$.

Veamos ahora como surge la constante cosmológica de las mediciones astronómicas. Las supernovas se consideraban como eventos extraños en el Universo, pero en los años noventa se hizo posible el estudio sistemático de supernovas distantes, comparando imágenes de telescopios que contenían un gran número de galaxias tomadas en diferentes semanas. Dos equipos en particular el “Supernova Cosmology Project” (SCP) y el “High-z Supernova Search Team” (HZSNST), ensamblaron muestras que contenían decenas de supernovas con un corrimiento al rojo z que se aproximaba al valor de $z = 1$, y por lo tanto, mapearon la distancia lumínica d_L a esos corrimientos al rojo (se explicara más adelante el término d_L). Estos resultados dieron gran sorpresa a los cosmólogos, ninguno de los modelos cosmológicos habituales sin una constante cosmológica fueron capaces de explicar la curvatura de la distancia luminosa observada (usualmente llamada el diagrama del corrimiento al rojo de magnitud aparente).

Debido a diferentes observaciones de supernovas tipo Ia (Sn Ia), se demuestra que los valores actuales de estos parámetros son [5]:

$$\Omega_\Lambda \approx 0.685, \quad \Omega_k \approx 0, \quad \Omega_m \approx 0.315. \quad (2.39)$$

La Figura (2.6) muestra el método de obtención de dichos parámetros a partir de las regiones permitidas de los modelos cosmológicos en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_m$. Con los resultados de las dos colaboraciones se muestran las regiones de confianza. La línea continua indica los resultados de el proyecto HZSNST y la discontinua para el proyecto SCP. La contribución del parámetro Ω_k es despreciable; por lo que $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

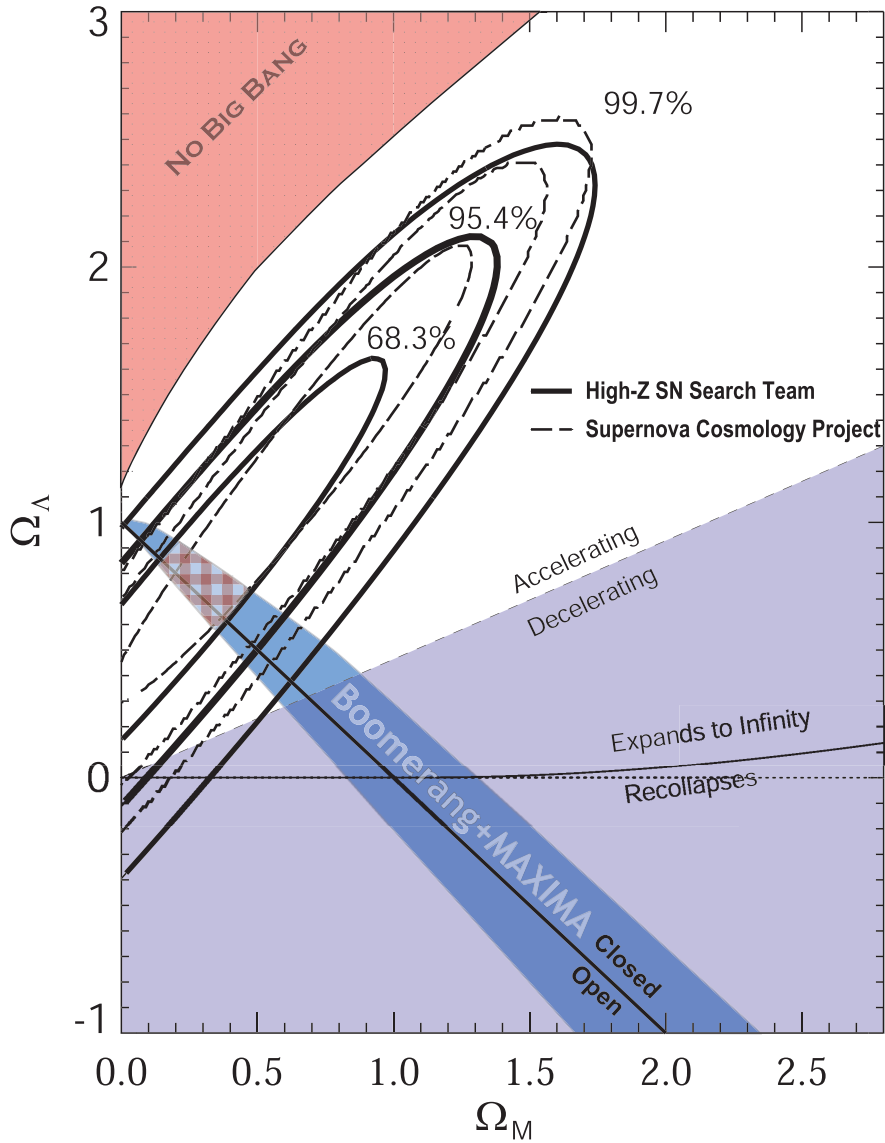


Figura 2.6: Los contornos muestran las restricciones observacionales del diagrama del corrimiento al rojo de la luminosidad de la supernova en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_m$. Se muestran los resultados de dos programas de observación por separado. Además, la región sombreada oscura muestra la parte del plano permitida por los datos de la RFC obtenidos por los experimentos BOOMERANG y MAXIMA [9].

Límite Newtoniano de Relatividad General

La Relatividad General considera a la gravedad Newtoniana como una aproximación, y como en toda buena teoría se deberán recuperar las ecuaciones clásicas bajo algún límite. Empezaremos recordando que la *métrica de Schwarzschild* se presentó como una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein. Esta describe el campo generado por una estrella, alguna masa esférica o agujeros negros, este último con cierta complejidad. Los cosmólogos resaltan que la solución de Schwarzschild debería ser considerada como el logro más importante de la Relatividad General en cuanto a la mecánica celeste se tratase. La métrica de Schwarzschild se considera el medio por el cual se retoman las ecuaciones clásicas Newtonianas bajo ciertas consideraciones. La métrica de Schwarzschild se define como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.40)$$

donde G es la constante de gravitación y M se interpreta como la masa aparente del objeto que crea el campo gravitacional. Es conveniente tratar al potencial gravitacional¹⁰ V como un potencial por unidad de masa m designado como ϕ . Entonces, para un campo gravitacional suficientemente débil la métrica de Schwarzschild se reescribe como [10]:

$$ds^2 = -(1 + 2\phi) dt^2 + (1 - 2\phi) \delta_{ij} dr^i dr^j, \quad \phi = -\frac{GM}{r}, \quad (2.41)$$

donde $|\phi| \ll 1$. Entonces, en el límite clásico, si se introduce la métrica (2.41) en la ecuación de Einstein (2.19), la única componente no nula del tensor de Ricci es la componente temporal R_{00} . Suponiendo que para campos gravitatorios débiles la métrica de Schwarzschild se reduce a una métrica del espacio tiempo, en donde esta puede escribirse como una perturbación de la métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ donde $h_{00} = -2\phi$. Entonces, la componente temporal del tensor de Ricci resulta ser:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 h_{00}}{\partial^2 x^i} = 4\pi G\rho, \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (2.42)$$

en donde ρ es la densidad de masa siendo posible demostrar que el tensor de energía-momento representativo es $T_{00} = \rho$. Con lo anterior se demuestra la derivación de la ecuación Newtoniana de Poisson en el límite relativista.

Evalutando la ecuación de la geodésica con $v \ll 1$, es posible encontrar la ecuación Newtoniana de aceleración para una partícula libre cayendo de la forma:

$$\frac{dv}{dt} = -\nabla\phi. \quad (2.43)$$

En el uso de estas ecuaciones se considera que el espacio-tiempo es casi plano ($k \approx 0$), entonces, si la presión p es mucho menor que la densidad ρ y considerando un marco

¹⁰El potencial gravitacional V de algún cuerpo de masa M que lo produce, por la Ley de Gravitación Universal tiene la forma: $V = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r}$.

en el cual $v \ll 1$, se puede obtener la ecuación de continuidad (2.8):

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = -(\nabla \cdot \vec{v}) \rho(x, t), \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \quad (2.44)$$

donde \vec{v} es el campo de velocidad del fluido. Manteniendo un estrés pequeño distinto de cero asumido isotrópico, la aceleración de un elemento de fluido viene dado por la ecuación de Euler Newtoniana:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi, \quad (2.45)$$

Con este tipo de desarrollo se demuestra como a partir de Relatividad General se recuperan las ecuaciones clásicas en el límite Newtoniano.

2.6. Modelo Estándar de Cosmología

El modelo estándar de Cosmología, conocido como Lambda-Cold Dark Matter (Λ CDM), es el modelo más simple y elegante donde el valor de los parámetros cosmológicos importantes se ajustan a las observaciones y datos experimentales tanto de la RFC, de supernovas tipo Ia y de las oscilaciones acústicas de bariones (BAO), entre otras. En Cosmología se considera que en el Universo temprano, posterior a la *Nucleosíntesis*¹¹, son necesarios dos componentes más para la descripción del fluido cósmico. El primer componente es un tipo de materia no bariónica y sin interacción con el medio (ni consigo misma) denominada materia oscura fría (CDM), y la segunda una densidad de *energía oscura* que en un principio se asume constante en el tiempo (ver figura 3.1).

Parámetro	Valor	Definición y medida
H_0	67.27 ± 0.66	Tasa de expansión actual en $kms^{-1}Mpc^{-1}$
h	0.6727 ± 0.0066	H_0 reducida $h = H_0/(100kms^{-1}Mpc^{-1})$
ρ_0	$0.94 \pm 0.06 \times 10^{-26}$	Densidad crítica $\frac{kg}{m^3}$
$\Omega_b h^2$	0.02225 ± 0.00016	Densidad física de materia bariónica actual
$\Omega_{mo} h^2$	0.1198 ± 0.0015	Densidad física de materia oscura actual
Ω_Λ	0.685 ± 0.018	Densidad de energía oscura actual ($\div \rho_c$)
Ω_m	0.3156 ± 0.0091	Densidad de materia actual ($\div \rho_c$)
τ	0.079 ± 0.017	Profundidad óptica
t_0	13.817 ± 0.048	Edad del Universo actual (en <i>Gyr</i>)
n_s	0.9645 ± 0.0049	Índice espectral escalar
σ_8	0.831 ± 0.013	Amplitud de fluctuación de galaxias
ω_0	$-1,006 \pm 0,045$	Ecuación de estado para la energía oscura

Cuadro 2.2: Parámetros cosmológicos del modelo Λ CDM [5].

En cuanto a las medidas de temperatura en la RFC el modelo Λ CDM necesita en principio sólo tres parámetros para describir el Universo no perturbado, los cuales son: el parámetro de Hubble hoy en día H_0 , la densidad de bariones relacionado con Ω_m y la densidad de materia total Ω .

Por otro lado, en Cosmología se consideraban a los cúmulos o conjunto de galaxias como los sistemas astronómicos más grandes, e incluso en algún tiempo se cuestionaba acerca de la existencia de estructuras aun más grandes que este conjunto de galaxias, como supercúmulos. En los años setenta esta controversia se resolvió debido al verdadero significado de estos supercúmulos. Se trataba de que verdaderamente existían regiones observadas de mayor densidad, situadas entre una escala más grande que los conjuntos de galaxias (de pocos *Mpc*) hasta regiones de aproximadamente 100 *Mpc*. Entonces, la forma de especificar la amplitud de las fluctuaciones

¹¹A tiempos tempranos del Universo, protones y neutrones se combinaron para formar núcleos de deuterio y helio, tal evento se le denomina Nucleosíntesis, se explicarán tales acontecimientos en el capítulo 3.

en la densidad de estos supercúmulos, es dar una escala en ese punto de partida, que usualmente tiene un tamaño de 8 Mpc (ver [11]). Por esta razón, la amplitud de las fluctuaciones en el espectro de potencias se da comúnmente por σ_8 , refiriéndose precisamente como una escala de 8 Mpc . El parámetro σ_8 proporciona una importante restricción en la distribución de la masa y la luz en el Universo, que sigue siendo uno de los problemas centrales no resueltos en Cosmología. Además, el parámetro cosmológico definido como *índice espectral* n_s , da información de la luz recibida a través de la ley de potencias¹². El índice espectral se usa fundamentalmente en radioastronomía dando una idea de la forma de emisión y por lo tanto características físicas de los supercúmulos (forma, tamaño, densidad, etc.) [12]. Se necesita un último parámetro para caracterizar el efecto de la reionización del medio cósmico. En términos generales, se define a la *profundidad óptica* como una medida adimensional que sirve para darnos una idea de que tan transparente es un medio, como lo puede ser una atmósfera estelar. Debido a las fluctuaciones a escalas pequeñas, $e^{-\tau}$ determinará la probabilidad de que un fotón antes de la época de reionización sea redispersado, en donde τ es la profundidad óptica. En la tabla (2.2) se muestran los parámetros cosmológicos fundamentales del modelo estándar, así como sus características y valores medidos recientemente.

2.7. Distancias en Cosmología

Medir distancias es de vital importancia en Cosmología, sin embargo sus resultados no son triviales. Como ya se ha mencionado, el corrimiento al rojo z de una galaxia es el desplazamiento hacia el rojo de todas las líneas de emisión del espectro, definido como:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_{em}} = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a}, \quad (2.46)$$

donde $a_0 = 1$, es el factor de escala hoy en día. Aquí, $z = 0$ corresponde a la época actual, en donde el factor de escala es igual a 1. Por lo tanto, z debe crecer en el pasado y el factor de escala a toma valores de entre 0 y 1.

Haciendo referencia de nuevo a la rejilla en expansión de la figura 2.4, podemos pensar de inmediato dos maneras posibles de medir distancia, la distancia que permanece fija a medida que el Universo se expande o la distancia física que crece debido a la expansión.

La distancia comóvil es la distancia existente entre una fuente emisora y nosotros, esta es una medida fundamental ya que como se verá a continuación, las demás distancias cosmológicas tales como la distancia por luminosidad y la distancia diametral angular se pueden deducir en términos de la distancia comóvil. En ese caso,

¹²El espectro observado de alguna fuente radiante, fotones generados debido al movimiento de electrones por ejemplo, es caracterizado por la ley de potencias $I = K\nu^\alpha$, donde I es la intensidad de flujo, K la constante de proporcionalidad, ν la frecuencia de radiación y α el índice espectral. En Cosmología la ley de potencias se determina a través del espectro de potencias:

$$P(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0} \right)^{n_s - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dn_s}{d \ln k} \right) \ln \left(\frac{k}{k_0} \right)}.$$

empezaremos definiendo a la *distancia comóvil* d_C como:

$$d_C = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.47)$$

En la expresión (2.47), si $z \ll 1$ se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \sim \frac{z-0}{H(0)} = \frac{z}{H_0} \quad \longrightarrow \quad d_C \sim \frac{z}{H_0}, \quad (2.48)$$

demostrando que es posible recuperar la ley de Hubble (ecuación (2.2)) en donde $r = d_c$ y $v = z$.

Otra manera o método clásico para medir distancias en astronomía, es mediante la medición de un ángulo subtendido θ de algún objeto cuya longitud l se conoce. La distancia a ese objeto (asumiendo pequeño al ángulo subtendido) es entonces:

$$d_A = \frac{l}{\theta} \quad (2.49)$$

donde el subíndice $_A$ denota a la *distancia diametral angular*. El tamaño comóvil del objeto debe ser l/a y el ángulo subtendido es $\theta = (l/a)d_C$. Comparando con la ecuación 2.49, la distancia diametral angular se modifica como:

$$d_A = a d_C = \frac{d_C}{1+z}. \quad (2.50)$$

Nótese que la distancia diametral angular es igual a la distancia comóvil a z pequeñas, pero actualmente decrece a z grandes. Este resultado se mantiene sólo para un Universo plano. Para un Universo abierto o cerrado el resultado es diferente, ya que si la densidad de curvatura se define como $\Omega_k = 1 - \Omega_0$ (donde Ω_0 es la tasa de la densidad crítica actual, incluyendo contribuciones de materia, radiación, y a la energía oscura como constante cosmológica y además para curvatura distinta de cero), la distancia diametral angular se generaliza como:

$$d_A = \frac{a}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \begin{cases} \sinh(\sqrt{\Omega_k} H_0 d_C) & \text{para } \Omega_k > 0 \\ \sin(\sqrt{-\Omega_k} H_0 d_C) & \text{para } \Omega_k < 0 \end{cases}. \quad (2.51)$$

En ambas expresiones de (2.51) es posible ver que en el límite donde la densidad de curvatura Ω_k es cero se reduce a un Universo plano.

Otra manera de inferir distancias en astronomía es mediante la distancia por luminosidad ó distancia lumínica d_L , cuyo método es medir el flujo de un objeto con luminosidad conocida. Recordando que el flujo total F de la luz observada a una distancia d de una fuente de luminosidad L es:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad \longrightarrow \quad F = \frac{L(d_C)}{4\pi d_C^2}, \quad (2.52)$$

siempre y cuando la luminosidad total que atraviesa un cascarón esférico de área $4\pi d^2$ sea constante. En la expresión derecha de la ecuación (2.52) es trivial notar

que se ha tomado al radio de la esfera como la distancia comóvil. Si suponemos que todos los fotones de la fuente se emiten a la misma energía, en un intervalo fijo, los fotones recorren más distancia en la rejilla comóvil por lo tanto el flujo y la energía serán menores, esto es debido a la expansión. Entonces, la energía por unidad de tiempo de los fotones que atraviesan la esfera en expansión será un factor a^2 menor que la luminosidad de la fuente. El flujo entonces será:

$$F = \frac{La^2}{4\pi d^2}, \quad (2.53)$$

a partir de la expresión (2.53), se define a la *distancia lumínica* d_L en términos de la distancia comóvil como:

$$d_L \equiv (1 + z)d_C. \quad (2.54)$$

En la experimentación, conociendo el brillo real de alguna fuente es posible hallar esta distancia.

Para concluir, existen dos definiciones más relacionadas con la distancia lumínica, la magnitud aparente y la magnitud absoluta. La magnitud aparente de una estrella es un número que indica que tan brillante es esta estrella, y además, las magnitudes más grandes corresponderán a las estrellas con menos brillo. El brillo es otra manera de definir el flujo de la luz y se mide en vatios por metro cuadrado. Por otro lado, la magnitud absoluta es la magnitud aparente de una estrella si estuviera situada a una distancia de 10 parsecs de la tierra. Entonces, la relación entre la *magnitud aparente* m , la *magnitud absoluta* M y la distancia por luminosidad está determinada como [11]:

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10}\left(\frac{d_L}{Mpc}\right) + 25, \quad (2.55)$$

en la ecuación (2.55), μ se conoce como *módulo distancia*.

El brillo de las supernovas tipo Ia son de las más importantes e interesantes, ya que es posible calibrar su brillo a altos corrimientos al rojo y a partir de esto obtener información cosmológica importante. La información que se obtiene a partir del brillo de las supernovas ha sido de gran interés para poner en debate la existencia de la energía oscura desde finales del siglo XX.

Capítulo 3

Teoría de Perturbaciones del Universo

En el presente capítulo se hablarán sobre aspectos que sucedieron en los primeros instantes del Universo hasta nuestros tiempos. Del mismo modo, se tratarán aspectos importantes de la teoría de perturbaciones, la formación de estructura en un régimen lineal, las oscilaciones acústicas de bariones (BAO), y por último, las distorsiones del corrimiento al rojo (RSD).

3.1. El Universo Temprano

En los primeros instantes del Universo, existió una energía bastante densa debida a un fluido que contenía partículas elementales interactuando fuertemente situadas en alguna región del espacio (como una sopa), sin embargo la temperatura y la presión estaban extremadamente altas, provocando la expansión de esta región que conllevaba a una disminución considerable en la temperatura. Aproximadamente en un tiempo de $10^{-35}s$, ocurrió el Big Bang, que llevó a un cambio de fase del fluido y el cual causó una expansión exponencial, este acontecimiento es conocido como *Inflación Cósmica*. Al concluir dicha inflación, se produjo un plasma de quarks-gluones, los cuales tenían un movimiento relativista ($v \sim c$). Dichos quarks y gluones se combinaron para formar a los bariones, tales como el protón y neutrón, produciendo de algún modo la asimetría materia-antimateria, este suceso es conocido como Bariogénesis. Tiempo después, protones y neutrones se combinaron para formar núcleos de deuterio y helio, dicho proceso es llamado *Nucleosíntesis Primordial*. A partir de entonces y durante miles de años, la materia oscura se encontraba acoplada a los demás componentes del Universo. Las partículas de materia oscura que causaban fluctuación, se dispersaron libremente por el Universo e interactuaban sólo gravitacionalmente, provocando el desacoplamiento de la materia oscura. Es entonces cuando los componentes no relativistas dominaron sobre los relativistas. Esta época es denominada como la *época de igualdad radiación-materia* ($\rho_r = \rho_m$), en donde la densidad de energía de materia bariónica y oscura domina gravitacionalmente sobre la densidad de energía de la radiación. Posteriormente, cuando el Universo tenía 380,000 años, la temperatura cayó por debajo de los $3000K$ y fue posible que

los protones atraerán electrones formando átomos neutros de hidrógeno durante un período de tiempo razonable. Los fotones altamente energéticos de la radiación electromagnética, interactuarán débilmente con los átomos neutros. Para ilustrar esto, pensemos en que podemos ver la Luna con claridad a través de muchos kilómetros de atmósfera, debido a que los fotones que dispersa la Luna pueden pasar casi sin obstáculos en su recorrido por la atmósfera. Por otra parte, no sería posible ver a través de un plasma caliente, debido a la fuerte interacción de los fotones con la inmensidad de partículas que contiene el plasma.

A medida que el Universo continúa enfriándose, las longitudes de onda del campo de radiación aumentan proporcionalmente hacia lo que ahora conocemos como la radiación de fondo cósmica, cuya temperatura efectiva oscila alrededor de los $2.7K$. Finalmente, con el paso del tiempo, ciertas regiones de materia ligeramente más densas crecieron debido a la atracción gravitacional de más materia, lo cual, a través de los años y hasta nuestra época, llevó a la formación de nubes, estrellas, galaxias y el resto de lo que actualmente se conoce. En la figura 3.1 se muestran las épocas en donde dominaba la densidad de energía los principales componentes del Universo.

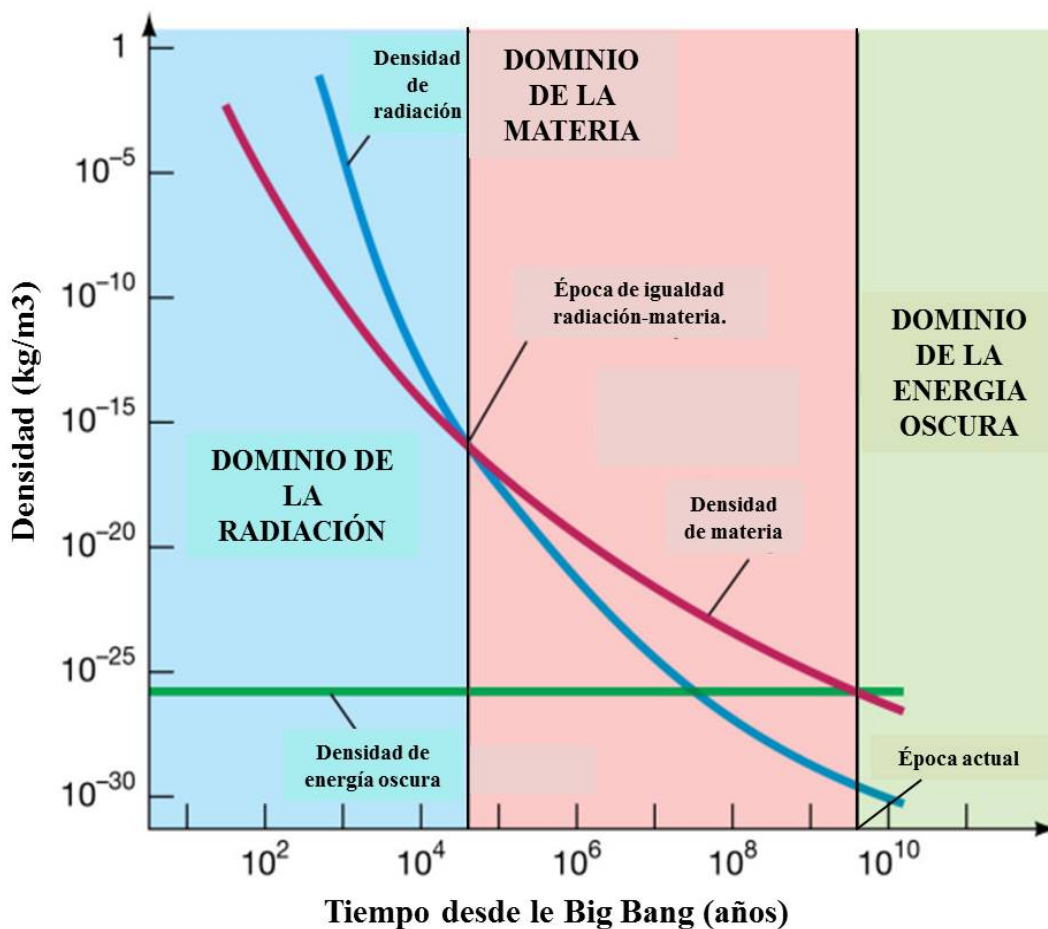


Figura 3.1: Épocas del Universo en donde se representa la evolución de la densidad de energía ρ de los principales componentes del Universo.

Como se ha mencionado, cuando el Universo tenía tan sólo un segundo de edad, su temperatura era aproximadamente de 1 Mev . Los fotones tenían distribución de cuerpo negro y no había creación de éstos cuando la temperatura fue menor a 1 Mev . Como resultado se obtiene que $T \sim \frac{1}{a}$, sabiendo que actualmente $T_0 = 2,725 \text{ K}$. La época de $T \sim 1 \text{ Mev}$ corresponde a $\frac{1}{a} \sim 10^{10}$. Cuando se estudia al Universo temprano es conveniente usar la temperatura en lugar del tiempo.

Cada proceso en el “Equilibrio Térmico” se da gracias a una colisión de dos o más partículas, o al decaimiento de una sola. En un Universo temprano, cada proceso puede considerarse en equilibrio térmico si la tasa de interacción por partícula es mucho mayor que H , por lo que la función de distribución de cada especie viene determinada como:

$$f_a(p) = \frac{1}{e^{p/T} \pm 1}, \quad (3.1)$$

denotando con “+” para fermiones y “-” para bosones.

Al integrar esta distribución de cuerpo negro generalizada, obtenemos la densidad de número n_a :

$$n_a = \frac{g_a}{2\pi^2} \int_0^\infty f_a(p) p^2 dp = \frac{\zeta(3) g_a T^3}{\pi^2} \times \begin{cases} 1 & \text{para bosones} \\ 3/4 & \text{para fermiones} \end{cases}, \quad (3.2)$$

donde g_a es el número de estados del espín, evaluando la función zeta de Riemann $\zeta(3) = 1.202$, nos dará la densidad de energía:

$$\rho_a = \frac{g_a}{2\pi^2} \int_0^\infty f_a(p) p^3 dp = \frac{\pi^2 g_a T^4}{30} \begin{cases} 1 & \text{para bosones} \\ 7/8 & \text{para fermiones} \end{cases}. \quad (3.3)$$

Entonces, la densidad de energía total de todas las especies con la distribución general de cuerpo negro viene dada como:

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4, \quad (3.4)$$

donde:

$$g_*(T) \equiv \sum_{\text{bosones}} g_a + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g_a. \quad (3.5)$$

La densidad ρ_r contiene todas las contribuciones de las diferentes componentes en el Universo temprano.

3.2. Teoría de Perturbaciones

La teoría de perturbaciones relatará las condiciones iniciales para describir la evolución del Universo.

Empezaremos considerando una región con simetría esférica y radio comóvil aR , la cual se expande con el Universo, la masa M de esta región será la masa de toda la materia no relativista (incluyendo materia bariónica y materia oscura) contenida en la región en expansión inicial. Esta masa entonces será:

$$M = \frac{4\pi R^3 \Omega_m \rho_c}{3}, \quad (3.6)$$

donde ρ_c es la densidad crítica del Universo.

Pensemos ahora que, existiría un colapso gravitacional si en una sección pequeña o corte de la esfera de radio comóvil aR es ligeramente más densa que sus alrededores, lo cual provocaría el incremento en la densidad de dicha sección, a este suceso lo denominaremos por lo pronto sobredensidad. Como veremos más adelante, estos colapsos gravitacionales son de gran interés ya que la física extraída provee una vista clara de los sucesos del Universo temprano, además de ser el punto clave de la RFC.

En particular, como ya se ha dicho, la densidad de energía total esta dada por:

$$\rho = \rho_\nu + \rho_\gamma + \rho_b + \rho_{mo}, \quad (3.7)$$

donde los subíndices, ν, γ, b, mo , denotan los componentes para neutrinos, fotones, bariónes y materia oscura, respectivamente.

Si retomamos la región esférica y homogénea de radio comóvil aR , imaginemos que el centro de ésta esfera tiene posición x y coordenada temporal t . Ahora en cada punto, la cantidad ρ_a (donde $a = \nu, \gamma, b, mo$) se reemplazará por una densidad local $\rho_a(R, x, t)$. Por lo que, el colapso gravitacional o sobredensidad es representado por una perturbación en dicha esfera homogénea, la cual se denotará como $\delta\rho_a(R, x, t)$. Entonces, la relación entre la densidad de energía total y la perturbación queda determinada de la siguiente forma:

$$\rho_a(R, x, t) = \rho_a(t) + \delta\rho_a(R, x, t), \quad (3.8)$$

donde $\rho_a(t)$ es el valor de la densidad no perturbada. Cabe mencionar que la densidad de número $n_a(R, x, t)$ se puede definir de la misma manera que la densidad de energía considerando la perturbación:

$$n_a(R, x, t) = n_a(t) + \delta n_a(R, x, t). \quad (3.9)$$

A continuación, se consideran los siguientes tres aspectos cruciales acerca de la naturaleza de las perturbaciones primordiales en la densidad a escalas cosmológicas.

1. Primero, es importante mencionar que la composición del Universo no afectará (según las incertidumbres observacionales recientes) a la densidad de energía ρ , ya que cada una de éstas es función única de ρ (análogo para n), esto es:

$$\rho_a = \rho_a(\rho), \quad n_a = n_a(\rho), \quad (3.10)$$

la expresión (3.10) se denomina *condición adiabática* de las cantidades ρ_a y n_a . La condición (3.10) sostiene que la evolución en el tiempo de una región del espacio tomada se mantiene adiabática ya que no hay flujo de partículas y por lo tanto tampoco de calor. En general, se dice que cualquier cantidad cosmológica satisface la condición adiabática si es una función única de ρ .

2. El segundo aspecto está relacionado con la perturbación $\delta\rho_a(R, x, t)$, y se refiere a la posible correlación entre las componentes de Fourier de $\delta\rho_k$. No habrá correlación entre medir una componente en un punto y otra en punto distinto, excepto (de acuerdo con observaciones) por la condición de realidad $\delta\rho_{k^*} = \delta\rho_{-k}$. Se dirá que $\delta\rho$ es *gausiana*, debido a que $\delta\rho(x)$ es una distribución de probabilidad gaussiana. Cabe mencionar que en el estudio se considerarán perturbaciones lineales, es decir a primer orden.
3. Finalmente, el valor RMS ¹ (Root Mean Square) de $\delta\rho(R, x)$ es independiente de la escala suavizada, de lo que se puede decir que la perturbación primordial en la densidad es casi un *escalar invariante*. El RMS de $\delta\rho(R, x)$ es un parámetro fundamental en la cosmología.

Formación de estructura lineal

Como se ha mencionado, el Universo a gran escala cumple el principio cosmológico, y está muy bien descrito por la métrica FRW (2.11) y las ecuaciones de Friedmann (2.21, 2.9, 2.8). Todas las estrellas, galaxias, cúmulos y demás estructuras a gran escala, se desarrollaron debido a las fluctuaciones gravitacionales que afectaron principalmente a la densidad $\rho(\mathbf{x})$ de la materia bariónica y no bariónica. Dicha sobredensidad la llamaremos *densidad contraste* $\delta \equiv \delta\rho/\rho$, la cual estará definida como:

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} - 1, \quad (3.11)$$

donde ρ_0 denotará el promedio de la densidad de materia por unidad de volumen de la región considerada homogénea a gran escala. Para hacer uso de dicha teoría de perturbaciones cosmológica es necesario considerar que $|\delta(\mathbf{x})| \ll 1$.

Ahora, considerando a $\delta(\mathbf{x})$ como una variable aleatoria y continua, se dirá que dicha variable define un campo aleatorio. Si δ es una función continua, los valores (aleatorios) de dos puntos cercanos (\mathbf{x}' y $\mathbf{x}' + \mathbf{x}$) deben estar relacionados, y aún más, el campo aleatorio debe ser continuo. Conociendo el valor de $\delta(\mathbf{x}')$, el marco en el cual $\delta(\mathbf{x}')$ y $\delta(\mathbf{x}' + \mathbf{x})$ están relacionados, es a través de la *función de correlación* ξ de la siguiente forma:

$$\xi(\mathbf{x}) = \langle \delta(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \rangle, \quad (3.12)$$

donde los paréntesis angulares indican que se toma el valor de expectación. De nuevo, por la isotropía del Universo, ξ no puede depender de la dirección de desplazamiento

¹La media cuadrática para un conjunto de N valores $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ de una variable discreta x es: $x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$, en el fondo es la varianza $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ salvo las desviaciones.

\mathbf{x} (solo en su magnitud $x = |\mathbf{x}|$). En la figura 3.2-a, se presenta el comportamiento de la función de correlación respecto de la distancia comóvil. Por simplicidad, se restringe el uso de un elemento de volumen finito (un cubo de lado $V^{1/3}$). Aplicando las condiciones de frontera periódicas² precisamente para que la sobredensidad sea periódica y pueda ser expandida en series de Fourier, se tiene:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{donde} \quad \delta_{\mathbf{k}} = \int_V d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.13)$$

y $\mathbf{k} = 2\pi\mathbf{n}/V^{1/3}$ (con $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ números enteros, y la suma es sobre todo \mathbf{n}). Incluyendo \mathbf{k} y $-\mathbf{k}$ en la suma se asegura la realidad de $\delta(\mathbf{x})$ con el punto dos de los aspectos mencionados arriba para la cosmología perturbacional ($\delta_{-\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}}^*$).

Por último, introduciendo (3.13) en la función de correlación (3.12), considerando que no depende de la dirección de movimiento, se tiene que:

$$\xi(x) = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \langle \delta_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}} \rangle e^{i(\mathbf{k}'+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (3.14)$$

donde $\langle \delta_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}} \rangle = 0$, si $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$. Finalmente la ecuación (3.14) queda simplificada de la forma:

$$\xi(x) = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle \delta_{-\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.15)$$

donde $P(\mathbf{k}) \equiv \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle / V$ es llamado el *espectro de potencias* del campo aleatorio.

El espectro de potencias es una cantidad muy importante en la teoría de perturbaciones y esta representado en la figura 3.2-b. En la práctica astronómica, para describir las fluctuaciones a gran escala, la variación en la densidad es representada como suma de ondas, donde el espectro de potencias es la amplitud cuadrada de estas ondas como función de la longitud de onda [11]. Retomando lo obtenido, la ecuación (3.15) indica que el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación (Figura 3.2-a).

²Un objeto pasa a través de una cara de una celda unitaria, vuelve a aparecer en la cara opuesta con la misma velocidad, como imágenes.

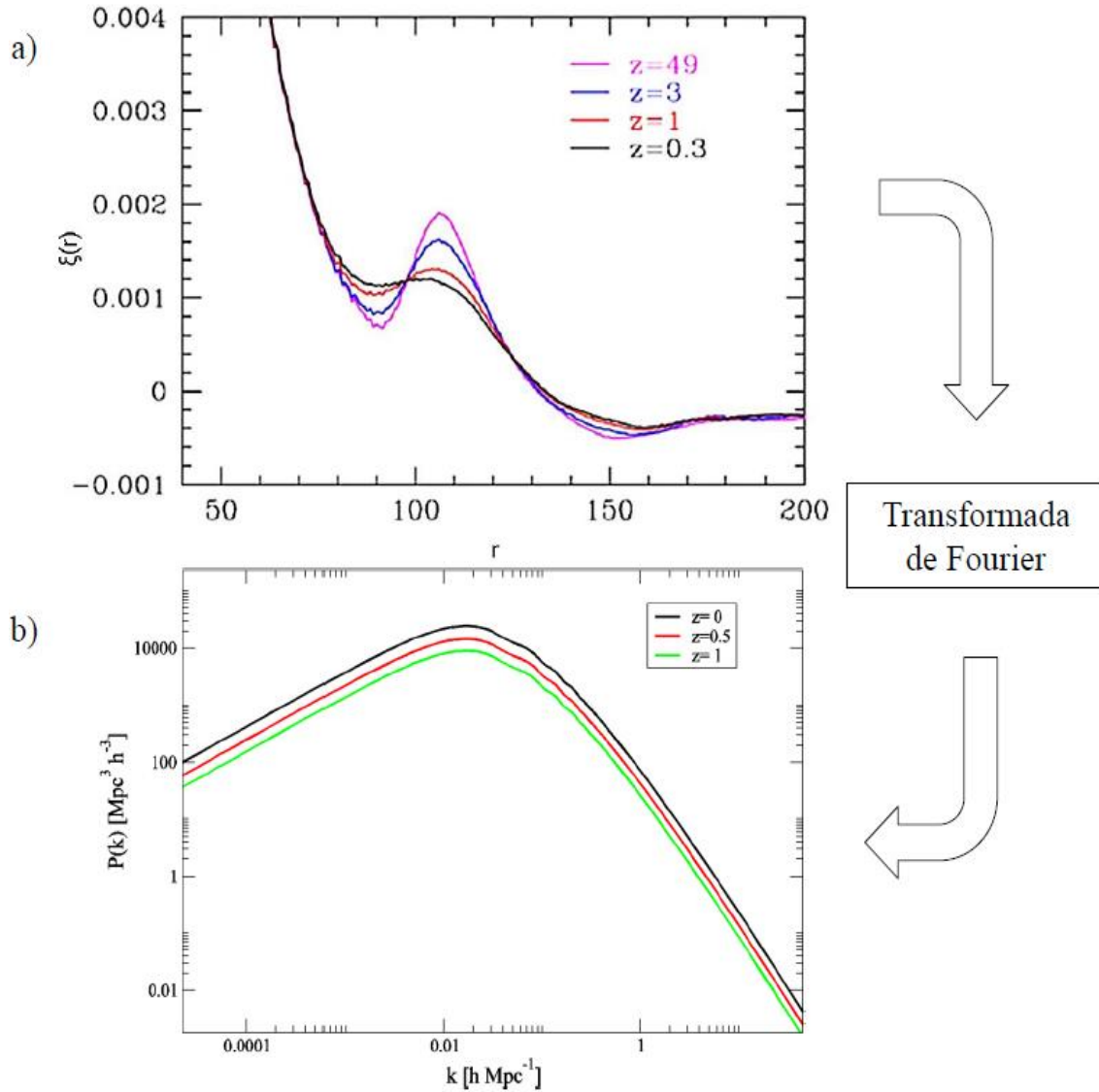


Figura 3.2: a) Función de correlación para distintos valores de z en coordenadas comóviles, las BAO representan la sobredensidad de materia. b) Espectro de potencias para las fluctuaciones de materia en diferentes corrimientos al rojo z , notando en la parte derecha para valores de $k > 0.02$ las BAO. Se hablará en la siguiente sección sobre BAO. Hecha en [31].

Campos aleatorios gaussianos

Para abordar el segundo aspecto mencionado sobre la naturaleza de la teoría de perturbaciones, se considera a $\delta(\mathbf{x})$ como un *campo aleatorio gaussiano* si $\delta_{\mathbf{k}}$, de la condición de realidad del aspecto dos son variables independientes³. Entonces, la ecuación (3.13) se reescribe como:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \sum'_{\mathbf{k}} \left(\delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \delta_{-\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right), \quad (3.16)$$

donde \sum' es la suma sobre la mitad del espacio \mathbf{k} . Cada argumento en la suma de la ecuación (3.16) es una variable aleatoria independiente, por lo que la suma de una larga cantidad de variables independientes aleatorias tendrá una distribución gaussiana (teorema del limite central⁴), entonces la probabilidad de que $\delta(\mathbf{x})$ esté en un intervalo $(\delta, \delta + d\delta)$ es:

$$dp = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)} d\delta, \quad (3.17)$$

donde $\sigma^2 = \langle \delta^2(\mathbf{x}) \rangle$ es la varianza (independiente de la posición) del campo de la sobredensidad.

Las posiciones de alguna cantidad que sea función lineal de los valores tomados del campo de sobredensidad, también tendrán distribución gaussiana. El teorema del limite central se usa para establecer un resultado más detallado, haciendo una extensión de la ecuación (3.16), la distribución de probabilidad estaría dada por [13]:

$$dp = \frac{d\delta_1 \dots d\delta_d}{(2\pi)^{d/2} |\mathbf{C}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \delta_i C_{ij}^{-1} \delta_j\right), \quad (3.18)$$

donde $d\delta_1 \dots d\delta_d$ son las componentes de algún vector que describe la sobredensidad $\delta_i \equiv \delta(\mathbf{x}_i)$ en las posiciones $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_d$, \mathbf{C}^{-1} es el inverso de la matriz de covarianza \mathbf{C} , la cual está definida como:

$$C_{ij} = \langle \delta(\mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{x}_j) \rangle = \xi \langle (|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|) \rangle, \quad (3.19)$$

donde $|\mathbf{C}|$ es el determinante de dicha matriz. Finalmente, de la función de correlación (3.12) en términos del espectro de potencias, se obtiene una relación entre la matriz \mathbf{C} y el espectro de potencias. Lo anterior es importante dado que todas las propiedades estadísticas del campo aleatorio gaussiano están determinados por su espectro de potencias.

³Si $\delta_{\mathbf{k}} = a + ib$ con a, b reales, y sea la probabilidad $p_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}})dadb$ de que $\delta_{\mathbf{k}}$ caiga en el área del plano complejo $dadb$, entonces la probabilidad para $\delta_{\mathbf{k}}, \delta_{\mathbf{k}'}$ es $p_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}})p_{\mathbf{k}'}(\delta_{\mathbf{k}'})dadbda'db'$ es tan grande como para que $\mathbf{k} \neq \pm\mathbf{k}'$.

⁴Para detalles ver Binney, G. Dynamics [13] página 783.

Perturbaciones Newtonianas

El estudio mencionado en las secciones anteriores de la sobredensidad $\delta(\mathbf{x})$ aún necesita profundizar más, por lo que ahora se observará cómo evoluciona dicha perturbación en el tiempo. Para lograrlo, es necesario escribir las ecuaciones de movimiento para el fluido newtoniano. En este caso, se usarán las ecuaciones no relativistas para un flujo de fluido newtoniano. Pero antes, es necesario establecer y condicionar a las perturbaciones con propiedades para dicho fluido, es decir, para un Universo perturbado se tiene lo siguiente:

- El potencial gravitacional perturbado se define como:

$$\phi_{gr}(\mathbf{x}, t) = \phi_{gr}^{(0)}(x, t) + \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.20)$$

donde $\phi_{gr}^{(0)} = -\frac{4\pi G}{3}(ax)^2\rho(t)$ y Φ representa la perturbación, la cual se conoce como *potencial gravitacional peculiar*.

- La velocidad perturbada se expresa de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = H(t)\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ se denomina *velocidad peculiar*.

- Análogamente, se definen las cantidades perturbadas, de la densidad de energía y la presión del fluido cósmico, de la siguiente manera:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho(t)[1 + \delta(\mathbf{x}, t)], \quad (3.22)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = P(t) + \delta P(\mathbf{x}, t), \quad (3.23)$$

donde las perturbaciones $\delta\rho$ y δP serán tratadas a primer orden (requiriendo que $|\delta| \ll 1$).

En la sección del límite newtoniano mencionado anteriormente, se escribieron las ecuaciones hidrodinámicas (2.42),(2.44),(2.45):

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad \text{Poisson}, \quad (3.24)$$

$$\frac{d\rho(x, t)}{dt} = -(\nabla \cdot \vec{v})\rho(x, t) \quad \text{Continuidad}, \quad (3.25)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\phi \quad \text{Euler}. \quad (3.26)$$

Estas ecuaciones son de gran importancia en la descripción del fluido, y una vez introduciendo la teoría de perturbaciones, se encontraran las ecuaciones perturbadas.

Al sustituir las perturbaciones (3.20-3.23) en las ecuaciones hidrodinámicas (3.24-3.26), en el espacio de Fourier, se encuentran las ecuaciones hidrodinámicas perturbadas a primer orden:

$$-\frac{k^2}{a^2}\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi G\rho\delta_{\mathbf{k}} \quad \text{Poisson}, \quad (3.27)$$

$$a\dot{\delta}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \quad \text{Continuidad}, \quad (3.28)$$

$$a\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}} + aH\mathbf{v}_{\mathbf{k}} + i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\delta P_{\mathbf{k}}/\rho \quad \text{Euler}. \quad (3.29)$$

Haciendo uso de los modos escalares y vectoriales⁵, la velocidad peculiar vendrá dada como:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^{\text{es}} + \mathbf{v}_k^{\text{vec}}. \quad (3.30)$$

Los modos escalar y vectorial cuentan con las siguientes propiedades:

$$\mathbf{v}_k^{\text{es}} = -\frac{i\mathbf{k}}{k}V_k, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_k^{\text{vec}} = 0, \quad (3.31)$$

donde $|V_k|$ es la magnitud de \mathbf{v}_k^{es} . Otra característica es que la perturbación en la expansión depende sólo de la parte escalar de \mathbf{v} , esto es:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_k = (\nabla \cdot \mathbf{v}^{\text{es}})_k = \frac{k}{a}V_k. \quad (3.32)$$

Por último, insertando la descomposición del vector \mathbf{v}_k en las ecuaciones (3.27-3.29), para la parte vectorial $\mathbf{v}_k^{\text{vec}}$, se obtiene:

$$a\dot{\mathbf{v}}_k^{\text{vec}} + aH\mathbf{v}_k^{\text{vec}} = 0, \quad (3.33)$$

donde la solución de la ecuación (3.33) decae como $1/a$, lo cual corresponde a la conservación del momento angular del elemento de fluido. Escribiendo \mathbf{v}_k^{es} en términos de V_k , las ecuaciones del modo escalar son:

$$-\frac{k^2}{a^2}\Phi_k = \frac{3}{2}H^2\Omega_m(t)\delta_k \quad \text{Poisson}, \quad (3.34)$$

$$\dot{\delta}_k = -\frac{k}{a}V_k \quad \text{Continuidad}, \quad (3.35)$$

$$\dot{V}_k + HV_k - \frac{k}{a}\Phi_k = \frac{k}{a}\frac{\delta P_k}{\rho} \quad \text{Euler}, \quad (3.36)$$

donde se ha expresado a Ω_m en términos de la ecuación (2.37). Finalmente, de las ecuaciones anteriores, la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la perturbación δ es:

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k - \frac{3}{2}H^2\Omega_m(t)\delta_k = -\left(\frac{k^2}{a^2}\right)\frac{\delta P_k}{\rho}. \quad (3.37)$$

A escalas cosmológicas, δP_k es despreciable y la ecuación (3.37) tendría una solución creciente ($D_1 \sim t^{2/3}$) y otra decreciente ($D_2 \sim t^{-1}$). En este estudio, sólo analizamos la solución creciente.

Ahora, si se quisiera saber como evoluciona la materia, por ejemplo, la materia oscura o barionica, de la ecuación (3.37) se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{\delta}_{\text{mo}} + 2H\dot{\delta}_{\text{mo}} - \frac{3}{2}H^2\delta = 0 \quad \text{Materia oscura}, \quad (3.38)$$

$$\ddot{\delta}_{\text{b}} + 2H\dot{\delta}_{\text{b}} - \frac{3}{2}H^2\delta + \left(\frac{k^2}{a^2}\right)c_s^2\delta_{\text{b}} = 0 \quad \text{Materia barionica}, \quad (3.39)$$

donde $c_s^2 \equiv \delta P_{\text{b}}/\delta\rho_{\text{b}}$ es la *velocidad del sonido* al cuadrado. En cada ecuación, δ es la densidad de contraste de materia total que representa el efecto de la gravedad en la evolución de δ_{mo} y/o δ_{b} .

⁵El vector \mathbf{v}_k se descompone en su parte escalar \mathbf{v}_k^{es} (éste será paralelo al vector \mathbf{k}) y su parte vectorial $\mathbf{v}_k^{\text{vec}}$ (perpendicular a \mathbf{k}).

3.3. Oscilaciones Acústicas de Bariones

Las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO, siglas de Baryonic Acoustic Oscillations) en la distribución de galaxias, son una de las predicciones más importantes del modelo Λ CDM.

Hablando de los orígenes de BAO, según el modelo estándar de cosmología, en el periodo de *inflación* posterior al Big Bang, se produjo un crecimiento en las fluctuaciones cuánticas existentes en el Universo temprano, cuando éste tenía apenas alrededor de 10^{-34} s de edad y con temperatura aproximadamente de 10^{27} K. Tras el período de inflación la materia estaba totalmente ionizada y acoplada a la radiación. Dicha combinación cayó a los potenciales gravitacionales creados por las sobredensidades de materia oscura, y al mismo tiempo, la presión de radiación tendió a dispersar a los bariones. Este acontecimiento físico de atracción y repulsión generó ondas acústicas en dicho plasma que se propagaron hasta el momento de desacople materia-radiación. Estas ondas se fueron denominadas como BAO.

Tiempo después, cuando el Universo disminuyó a una temperatura aproximadamente de 3000 K, fue el instante donde ocurrió la formación de átomos neutros, es decir, el desacoplamiento entre radiación y materia. En éste instante las ondas sonoras que se propagaban en el plasma se congelaron, como si se hubiesen quedado en una sola frecuencia a una distancia dada por el horizonte acústico⁶. Esta escala se puede utilizar como una regla estándar, ya que su tamaño sólo es afectado por la expansión del Universo. En el espacio real las BAO se muestran como una sobredensidad, ver figura 3.2-a. En el espacio de Fourier las BAO se observan como oscilaciones en el espectro de potencias representadas en la figura 3.2-b.

Las BAO tuvieron su origen físico en las oscilaciones acústicas del plasma fotón-barión. Como se ha mencionado, la temperatura es una medida fundamental en la RFC a una dirección dada ($T(\theta, \phi)$)⁷. Llevando a cabo una expansión en armónicos esféricos (el análogo a las series de Fourier para la superficie de una esfera) se tiene:

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (3.40)$$

Se define *el espectro de potencias angular* como $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l a_{lm} a_{lm}^*$, donde C_l sólo dependerá de l , ya que las propiedades estadísticas son independientes del origen elegido de las coordenadas $\theta - \phi$ (invarianza rotacional), y entonces, la temperatura asociada a un valor determinado de C_l sera $\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}} = \sqrt{D_l^{TT}}$.

⁶En coordenadas comóviles, el horizonte acústico se expresa como [5], [15]:

$r_s(z_{dec}) = \frac{c}{\sqrt{3}} \int_0^{1+z_{dec}} \frac{da}{a^2 H(a) \sqrt{1+(3\Omega_b/4\Omega_\gamma)a}} Mpc h^{-1} \approx 147.36 Mpc$, donde z_{dec} es el corrimiento al rojo en el momento del desacople.

⁷El experimento DASI [17] detectó que la radiación también predice tener pequeños niveles de polarización, la cual puede ser descrita de manera similar a la temperatura.

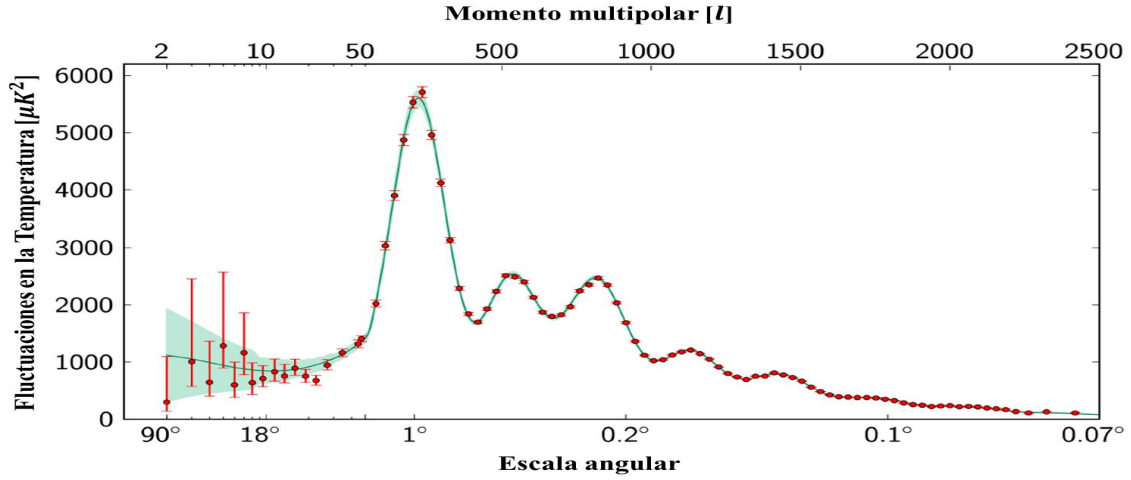


Figura 3.3: Espectro de potencias angular observado a partir de las fluctuaciones D_l^{TT} de la RFC por Planck. El modelo Λ CDM (línea verde) describe los datos con precisión. La banda azul corresponde a la incertidumbre debido a la varianza cósmica. Tomado de [5].

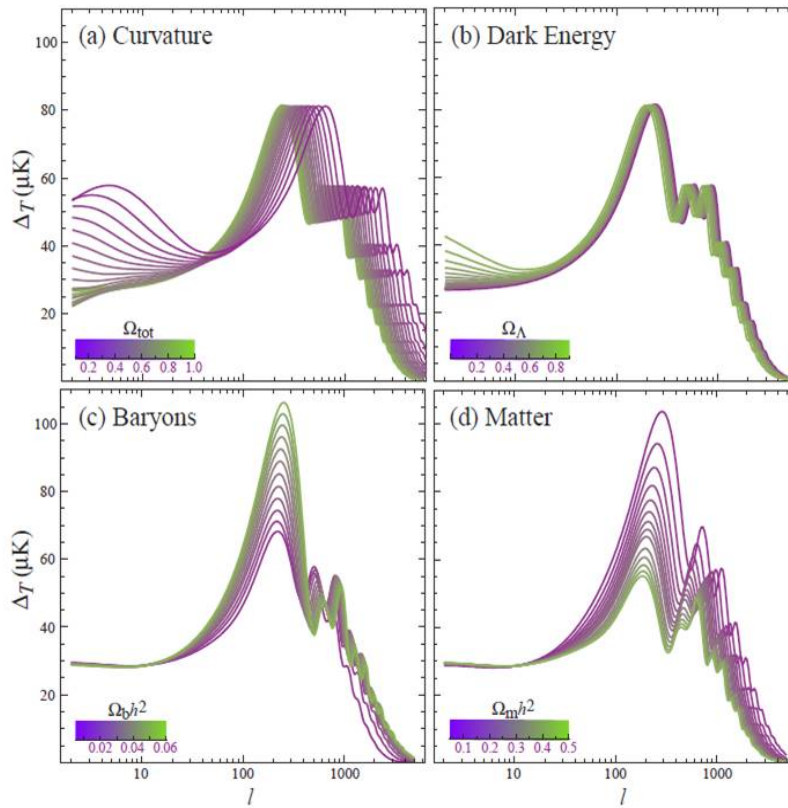


Figura 3.4: Variación de los cuatro parámetros cosmológicos fundamentales en el espectro de potencias, (a) la curvatura cuantificada por Ω_{tot} , (b) energía oscura cuantificada por la constante cosmológica Ω_Λ , (c) densidad física de bariones $\Omega_b h^2$ y (d) la densidad física de materia $\Omega_m h^2$. Tomado de [16].

Lo importante radica en que al modificar los parámetros descritos en los picos del espectro de potencias (Cuadro 3.1), obviamente éste cambiara de diferentes maneras (Figura 3.4) para ajustarse a los datos precisos de Planck, ver figura 3.3.

Es posible identificar efectos independientes principales en el espectro de potencias, los cuales se resumen en el Cuadro (3.1). Se muestra qué parámetros gobiernan en cada efecto colocando una breve explicación.

	Efecto	Cantidad relativa	Parámetros
(C1)	Escala del pico	$\theta = \frac{d_s(\eta_{ls})}{d_a(\eta_{ls})}$	$\omega_m, \omega_b, \Omega_\Lambda$
(C2)	Proporción del primer al segundo pico	$\frac{\omega_b}{\omega_\gamma}$	ω_b
(C3)	Tiempo de igualdad	$z_{eq} = \frac{\omega_m}{\omega_\gamma}$	ω_m
(C4)	Amplitud global	A_s	A_s
(C5)	Inclinación global	n_s	n_s
(C6)	Amplitud relativa solo para $l \gg 40$	τ_{reio}	τ_{reio}

Cuadro 3.1: Principales efectos independientes que controlan la forma de la RFC a través del espectro de potencias ($\omega_x \equiv \Omega_x h^2$).

- **(C1)** El ángulo de difusión θ , dependerá de la distancia diametral angular, esto a partir de la época de superficie de última dispersión⁸. Los parámetros ω_m y ω_b se obtienen a través de las ecuaciones de Friedmann, a partir de la velocidad del sonido proveniente de la superficie de última dispersión. Por otro lado, Ω_Λ dependerá también de las ecuaciones de Friedmann y de la geometría del Universo, esto después de la superficie de última dispersión.
- **(C2)** La proporción entre las amplitudes del primer y segundo pico en la superficie última dispersión, es gobernada por el parámetro base ω_b .
- **(C3)** Las fluctuaciones de la densidad en la etapa de igualdad radiación-materia afectan la amplitud de todos los picos. Estas fluctuaciones controlan la duración de la etapa intermedia entre la igualdad y última dispersión.
- **(C4)** La amplitud global de los valores del espectro de potencias C_l , dependerá de algo conocido como espectro primordial⁹ [14].
- **(C5)** La inclinación global de los valores C_l dependerá también del espectro primordial.
- **(C6)** La amplitud de C_l es menor si la reionización es temprana (si τ_{reio} no afecta a gran escala y es grande, se tendrán pequeñas l).

⁸Se le denomina *superficie de última dispersión* a la región del espacio en donde se emitió la radiación electromagnética más antigua del Universo, unos 380 mil años después del Big Bang, debido a la absorción y emisión de fotones por parte de los electrones y demás componentes en esa etapa del Universo. Actualmente, la superficie de última dispersión es observada en la RFC.

⁹El espectro primordial representa la perturbación en la curvatura espacial de una superficie ortogonal al flujo de energía del fluido cósmico total en cada punto.

Notemos que los parámetros controlan distintos efectos físicos reflejados en C_l , por lo que una medición suficientemente precisa del espectro de temperatura fijaría dichos parámetros para después compararlos con el modelo Λ CDM (Cuadro 2.2), ver figura 3.4.

3.4. Distorsiones del corrimiento al rojo

Como se ha mencionado, la velocidad de recesión (ecuación 2.2) propuesta por Hubble no es del todo perfecta y completa ya que las galaxias tienen velocidades peculiares relativas a la expansión de Hubble. Para lo cual, es necesario distinguir entre la distancia real r (expresada en unidades de velocidad) y la distancia al corrimiento al rojo s (también expresada en unidades de velocidad) de las galaxias, entonces definiendo estas distancias, tenemos:

$$r \equiv H_0 d, \quad (3.41)$$

$$s \equiv cz. \quad (3.42)$$

La distancia del corrimiento al rojo s , de cierta galaxia, difiere de la distancia real r por su velocidad peculiar $v \equiv \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}$ a lo largo de la línea de visión, por lo tanto:

$$s = r + v. \quad (3.43)$$

Las velocidades peculiares de galaxias aparentan estar desplazadas a lo largo de la línea de visión en el espacio del corrimiento al rojo. Dicho desplazamiento se conoce como *distorsiones del corrimiento al rojo* (RSD) (en inglés, redshift space distortion). Mientras las distorsiones complican la interpretación del mapeo del corrimiento al rojo de las galaxias, éstas distorsiones contienen información importante acerca de la dinámica de galaxias.

La amplitud de las distorsiones a gran escala permite medir el *parámetro lineal de distorsión del corrimiento al rojo* β , el cual está relacionado con Ω_0 (proporción de densidad de materia hoy en día) de la forma $\beta = \frac{f(\Omega_0)}{b} \approx \frac{\Omega_0^{0.6}}{b}$, siendo b el *factor bias* explicado más adelante, y f es el factor de crecimiento de las perturbaciones $f \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln a}$, ver (3.55).

Para dar una idea de como se verían las RSD, la figura 3.5 muestra cómo una sobredensidad esférica parece distorsionarse por su velocidad peculiar a lo largo de la línea de visión, cuando son observadas en el espacio del corrimiento al rojo (en sí los puntos muestran la densidad de galaxias en un colapso sobredenso). La perturbación inicial de dicha sobredensidad es tomada como una ley de potencias (radio $\delta \propto r^{-1}$) situada en un Universo en expansión con densidad media crítica $\Omega = 1$.

Para entrar en más detalle, la figura 3.6 muestra cómo las velocidades peculiares producen el patrón ilustrado en la figura 3.5. La contracción aumenta a escalas más pequeñas debajo de los puntos alrededor, además que la propia velocidad peculiar cancela exactamente la expansión general de Hubble.

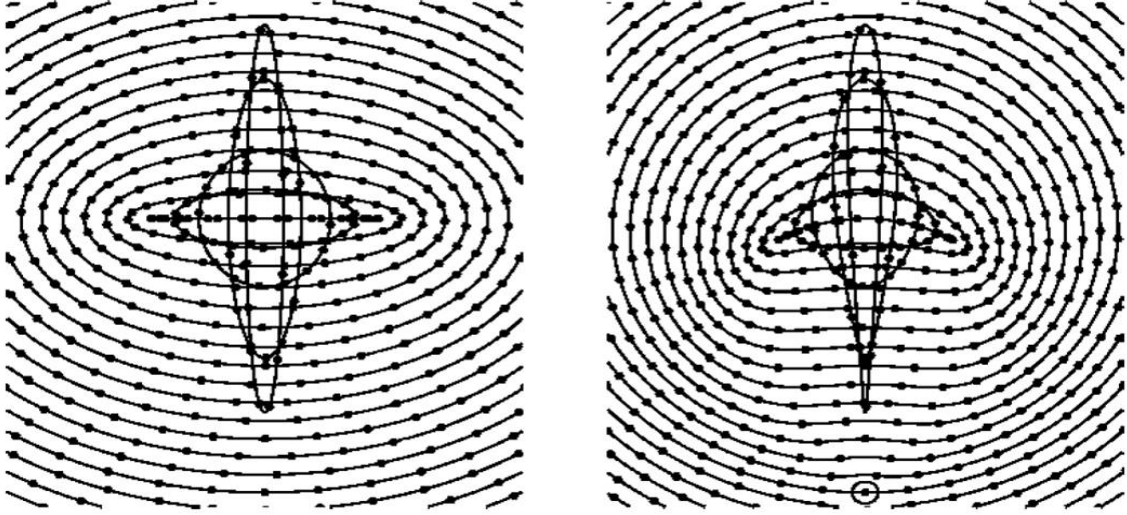


Figura 3.5: La sobredensidad esférica (figura izquierda) se ve distorsionada por las velocidades peculiares cuando se observan en el espacio del corrimiento al rojo (figura derecha). A gran escala, la sobredensidad aparece contraída a lo largo de la línea de visión. Por otro lado, a escalas pequeñas aparecen los llamados dedos de dios. Tomado de [18].

Las combinaciones entre colapsos y regiones de cúmulos de galaxias dan lugar a lo que se conoce como *dedos de dios* [18].

Espacio del corrimiento al rojo s

Las cantidades en el espacio del corrimiento al rojo (distinguidas por el subíndice s) son definidas análogamente a las cantidades en el espacio real. Hay dos alternativas para definir la sobredensidad en s análogo a la ecuación (3.11). La primera es definir una sobredensidad de galaxias en el espacio s ($\delta_{obs}^s(s)$), donde la posición en s es relativa a la función de selección¹⁰ en el espacio real ($\bar{n}(s)$ evaluado en la misma posición del espacio s), ésto es:

$$\delta_{obs}^s(s) \equiv \frac{n^s(s)}{\bar{n}(s)} - 1. \quad (3.44)$$

Ésta definición fue adoptada por Kaiser (1987). La segunda posibilidad es definir la sobredensidad observada $\delta_{obs}^{ss}(s)$ (denotando con el superíndice ss para distinguir de la definición $\delta_{obs}^s(s)$) en el espacio s relativa a la función de selección $\bar{n}^s(s)$ en el espacio del corrimiento al rojo, de la forma:

$$\delta_{obs}^{ss}(s) \equiv \frac{n^s(s)}{\bar{n}^s(s)} - 1. \quad (3.45)$$

Con esto se puede llegar a encontrar el espectro de potencias análogamente como se realizó en las secciones anteriores.

¹⁰Típicamente la examinación de galaxias no incluye todas éstas en una región seleccionada del espacio (sólo las más brillantes de algún flujo), por lo que se denomina función de selección $\bar{n}(r)$ como el número esperado principal de galaxias en la posición r de alguna examinación.

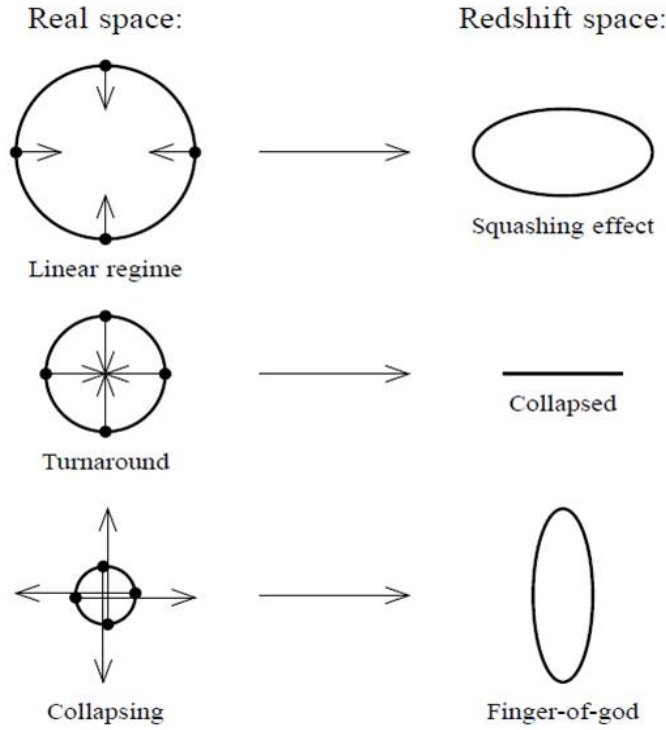


Figura 3.6: Detalle de cómo las velocidades peculiares provocan las distorsiones del corrimiento al rojo. Los puntos representan galaxias cayendo al centro de una sobredensidad esférica, y las velocidades están representadas mediante flechas. La esfera de mayor tamaño (parte superior), corresponde a observaciones a grandes escalas, en donde las velocidades peculiares son pequeñas comparadas con el radio de la esfera, además de aparecer contraídas horizontalmente. En la esfera mediana (figura central), el radio y la velocidad peculiar son análogos, por lo que se interpreta como un colapso de galaxias. Por último, a escalas menores, correspondiente a la esfera pequeña (parte inferior), tanto el radio de la esfera como la propia velocidad peculiar de las galaxias tienden a crecer, por lo que aparecen contraídas verticalmente formando los dedos de dios. Tomado de [18].

Teoría lineal de distorsiones del corrimiento al rojo

La teoría lineal de las distorsiones del corrimiento al rojo se aclaró en gran medida en un trabajo fundamental de Kaiser (1987) [38]. Esta teoría dará una interpretación del parámetro de distorsión lineal β . Además, a partir de dichas distorsiones se puede medir el parámetro Ω_0 . La ecuación de continuidad (3.25), en términos de β y a nivel lineal es:

$$\beta\delta + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.46)$$

Es conveniente trabajar con un sistema de coordenadas comóviles que se expanda con la misma expansión general del Universo de Hubble. Por lo que, se define la propia velocidad peculiar \mathbf{v} (de una galaxia) en dichas coordenadas comóviles:

$$\mathbf{v} \equiv \frac{a d\mathbf{r}}{H_0 a_0 dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \quad (3.47)$$

donde de nuevo t es el tiempo propio y τ el tiempo conforme.

Las ecuaciones hidrodinámicas para materia oscura (sin presión y con subíndice m_o) en un Universo perturbado FRW, expresadas en un sistema de coordenadas comóviles son:

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi G \bar{\rho}_{m_o} a^2 \delta_{m_o}}{H_0^2 a_0^2} = \frac{3\Omega_{m_o} H^2 a^2 \delta_{m_o}}{2H_0^2 a_0^2} \quad \text{Poisson,} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \delta_{m_o}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (1 + \delta_{m_o}) \mathbf{v}_{m_o} = 0 \quad \text{Continuidad,} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial a \mathbf{v}_{m_o}}{a \partial \tau} + \mathbf{v}_{m_o} \cdot \nabla \mathbf{v}_{m_o} = -\nabla \phi \quad \text{Euler,} \quad (3.50)$$

donde $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ es el gradiente comóvil y $\bar{\rho}_{m_o} \propto a^{-3}$ es la densidad de materia propia. En el régimen lineal, $|\delta_{m_o}| \ll 1$, por lo que las ecuaciones de continuidad y Euler se reducen a la forma:

$$\frac{\partial \delta_{m_o}}{\partial \tau} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{m_o} = 0 \quad \text{Continuidad,} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial a \mathbf{v}_{m_o}}{a \partial \tau} = -\nabla \phi \quad \text{Euler.} \quad (3.52)$$

De nuevo, es posible descomponer a la velocidad peculiar, análogamente a la ecuación (3.30), en su parte escalar y vectorial, es decir, $\mathbf{v}_{m_o} = \mathbf{v}_{m_o}^{es} + \mathbf{v}_{m_o}^{vec}$, donde $\mathbf{v}_{m_o}^{es} = \nabla \psi$ es el gradiente de algún potencial escalar ψ , y $\mathbf{v}_{m_o}^{vec} = \nabla \times \mathbf{A}$, es el rotacional de algún potencial vectorial \mathbf{A} . Entonces, la ecuación de Euler linealizada queda como:

$$\frac{\partial a \mathbf{v}_{m_o}^{es}}{a \partial \tau} = \nabla \phi, \quad \frac{\partial a \mathbf{v}_{m_o}^{vec}}{a \partial \tau} = 0. \quad (3.53)$$

Cuando las ecuaciones linealizadas (3.48, 3.51, 3.52) son combinadas se encuentra una forma similar a la ecuación (3.38), una ecuación diferencial de segundo orden para δ_{m_o} , la cual tiene la forma [19]:

$$\ddot{\delta}_{m_o} + 2H \dot{\delta}_{m_o} \cong 4\pi G \rho_{m_o} \delta_{m_o}. \quad (3.54)$$

Dicha ecuación, cuando se combina con la solución no perturbada del factor de escala $a(\tau)$, conducen de nuevo a las soluciones creciente y decreciente $\delta_{m_o}(\mathbf{r}, \tau) \propto D(\tau)$. Por lo que, la ecuación de continuidad linealizada se reescribe como:

$$\frac{H a f}{H_0 a_0} \delta_{m_o} + \nabla \cdot \mathbf{v}_{m_o} = 0, \quad f \equiv \frac{H_0 a_0}{H a} \frac{d \ln D}{d \ln a}, \quad (3.55)$$

donde f es definida como la *función de crecimiento lineal adimensional*, además de ser una función analítica de Ω_{m_o} .

En la cosmología estándar, el factor de crecimiento adimensional f , es una función analítica del parámetro Ω_m , y suele representarse como una aproximación a la ley de potencias [43]:

$$f(\Omega) \approx \Omega_m^{0.6}. \quad (3.56)$$

En una teoría alternativa, Kaiser propuso una aproximación para la función de crecimiento f , considerando a la constante cosmológica y la densidad de materia total de la siguiente manera [38]:

$$f(\Omega_m, \Omega_\Lambda) \approx \Omega_m + \frac{\Omega_\Lambda}{70} \left(1 + \frac{\Omega_m}{2}\right). \quad (3.57)$$

Como se sabe, actualmente la materia oscura domina en mayor cantidad sobre cualquier cúmulo de galaxias, esto en cuanto a masa. Entonces en base a esto es necesario un modelo simple de *bias* (sesgo, en español) para relacionar a las sobredensidades de cada especie. El modelo de bias postula que la sobredensidad de galaxias δ está linealmente sesgada por un factor constante llamado el factor de sesgo lineal b , relativo a la densidad de masa subyacente δ_M , que se relaciona como:

$$\text{Sobredensidad de galaxias} \rightarrow \delta = b\delta_M \leftarrow \text{Sobredensidad de materia}, \quad (3.58)$$

Se asume que las velocidades de galaxias son similares a las velocidades de materia $v = v_M$. Estos modelos predicen que la función de correlación de galaxias ($\xi(r_{12}) = \langle \delta(r_1)\delta(r_2) \rangle$) debe ser amplificada sobre la función de correlación de materia ($\xi_M(r_{12}) = \langle \delta_M(r_1)\delta_M(r_2) \rangle$) de la forma:

$$\xi(r_{12}) \approx b^2 \xi_M(r_{12}). \quad (3.59)$$

La linealización de la ecuación de continuidad (3.55) junto con el modelo de sesgo lineal b (ec. 3.58), permiten definir el factor adimensional β :

$$\beta = \frac{f_0}{b}, \quad (3.60)$$

con f_0 el factor lineal de crecimiento hoy en día. La linealización de la ecuación de continuidad (3.46) también implica que la velocidad peculiar de las galaxias v está relacionada con la sobredensidad de galaxias δ como:

$$v = -\beta \nabla \nabla^{-2} \delta, \quad (3.61)$$

donde ∇^{-2} es el Laplaciano inverso. Las mediciones de β en el régimen lineal son también mediciones de la proporción entre velocidad peculiar v y la sobredensidad de galaxias δ .

Para relacionar la sobredensidad δ en el espacio real con una sobredensidad δ^s en el espacio del corrimiento al rojo (denotando con el superíndice s), se define el *operador lineal de distorsión del corrimiento al rojo*¹¹ \mathbf{S} de la forma:

$$\delta^s = \mathbf{S}\delta, \quad (3.62)$$

¹¹Es útil considerar a este operador conceptualmente análogo a los operadores de la mecánica cuántica, como una matriz en el espacio de Hilbert. Dicho operador es válido en el marco de referencia de un observador estático (los que están en reposo respecto a la radiación de fondo cósmica), siempre y cuando la sobredensidad δ^s esté definida como la ecuación (3.44).

donde \mathbf{S} en el espacio real se define como un operador integro-diferencial [18]:

$$\mathbf{S} = 1 + \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha(r)\partial}{r\partial r} \right) \nabla^{-2}, \quad (3.63)$$

siendo $\alpha(r)$ la derivada logarítmica de r^2 multiplicada por la función de selección en el espacio real $\bar{n}(r)$:

$$\alpha(r) \equiv \frac{\partial \ln(r^2 \bar{n}(r))}{\partial \ln r}. \quad (3.64)$$

Efectivamente, el operador \mathbf{S} describe la dinámica de grupos de galaxias un tanto distantes, pero llega a un límite cuando se consideran grupos de galaxias a gran escala, debido a que la línea de visión es muy grande y las galaxias parecen como si se situaran en un plano. Por lo que es necesario redefinir a \mathbf{S} por el *operador lineal plano-paralelo de distorsión de corrimiento al rojo* \mathbf{S}^p (indicando con el superíndice p plano-paralelo) de la forma:

$$\mathbf{S}^p = 1 + \beta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2}, \quad (3.65)$$

donde z es la distancia a lo largo de la línea de visión. Por último, considerando el espacio de Fourier, se define:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2} = \frac{k_z^2}{k^2} = \mu_{\mathbf{k}}^2, \quad (3.66)$$

donde $\mu_{\mathbf{k}}^2 \equiv \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ es el coseno del ángulo que forma el vector de onda \mathbf{k} y la línea de visión \mathbf{z} . Entonces, el operador lineal plano-paralelo se reescribe como:

$$\mathbf{S}^p = 1 + \beta \mu_{\mathbf{k}}^2. \quad (3.67)$$

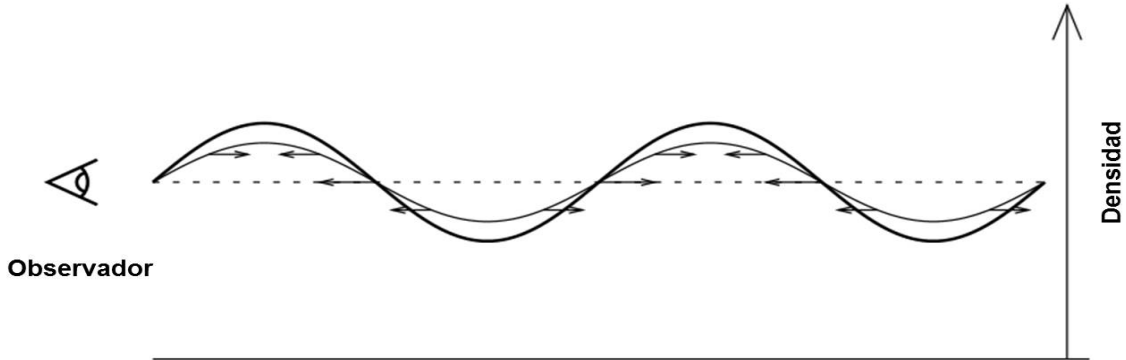


Figura 3.7: La onda con amplitud $\delta(k)$ en el espacio real (línea delgada) aparece como una onda de amplitud mayor $\delta^s(k)$ en el espacio del corrimiento al rojo (línea gruesa) debido a las velocidades peculiares (flechas). [18].

En la Figura (3.7), un modo de Fourier $\hat{\delta}^s(\mathbf{k})$ en el espacio s , es simplemente el modo $\hat{\delta}_{\mathbf{k}}$ en el espacio real amplificado por un factor $(1 + \beta \mu_{\mathbf{k}}^2)$ de la forma:

$$\hat{\delta}^s(\mathbf{k}) = (1 + \beta \mu_{\mathbf{k}}^2) \hat{\delta}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}). \quad (3.68)$$

Así mismo la ecuación (3.68) para un plano-paralelo en particular, se permite de manera análoga definir la relación entre el espectro de potencias $P^s(\mathbf{k})$ en el espacio del corrimiento al rojo y $P(\mathbf{k})$ en el espacio real, donde este último ya está definido en la ecuación (3.15), entonces:

$$P^s(\mathbf{k}) = (1 + \beta\mu_{\mathbf{k}}^2)^2 P(\mathbf{k}). \quad (3.69)$$

Esta última ecuación fue propuesta por N. Kaiser en 1987 ([38], ecuación (3.5)), y es un resultado importante par este trabajo, ya que se probará con el modelo CPL. Este desarrollo se tratará en el capítulo siguiente y se hará a través del espectro de potencias de materia definido anteriormente (Figura 3.2-b).

Capítulo 4

Modelos de Energía Oscura

Hoy en día existen muchos modelos que intentan explicar la naturaleza de la energía oscura, nombre que se ha dado al agente causante de la aceleración en la expansión del Universo. Hasta el momento, todas las observaciones basadas en Relatividad General del modelo Λ CDM son casi compatibles de que la energía oscura sea la constante cosmológica Λ , cuya ecuación de estado es $w = \frac{p}{\rho} = -1$ (ec. 2.26). Si la constante cosmológica Λ es la responsable de la presente aceleración del Universo se necesita un mecanismo para obtener el valor preciso de Λ y que sea consistente con los datos observacionales, ya que ésta es cerca de 123 órdenes de magnitud más pequeña que su valor “natural”¹ [39].

Si el origen de la energía oscura no es la constante cosmológica se deben recurrir a modelos alternativos. Básicamente existen dos maneras para construir modelos alternativos de energía oscura aparte de la constante cosmológica. La primera consiste en modificar el lado derecho de la ecuación de Einstein (2.19), considerando formas específicas del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ con presión negativa, es decir:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eo}). \quad (4.1)$$

En este capítulo se hablará sobre modelos de energía oscura existentes y el modelo con la parametrización CPL, el cual se prueba en este trabajo.

4.1. Quintaesencia

Uno de los modelos más destacados es el llamado *Quintaesencia*² y es considerada como una forma hipotética de la energía oscura, o más preciso, es un campo escalar causante de la aceleración del Universo. La idea del ente hipotético fue introducido inicialmente por Ratra y Peebles en 1998 [20], que diez años después, R. Caldwell,

¹El valor teórico de la constante cosmológica en términos de la masa de Planck es de $\Lambda_{teo} = m_{pl}^2$, mientras que el valor de las observaciones es de $\Lambda_{obs} = 10^{-120}m_{pl}^2$.

²De acuerdo con la ciencia antigua de Grecia, la *quintaesencia* (del latín “quinto elemento”) denota el quinto elemento cósmico después de la tierra, agua, aire y fuego. En el caso presente, representa el quinto elemento cósmico, aparte de los cuatro ya conocidos: materia bariónica, materia oscura, fotones y neutrinos.

Rahul Dave y P. Steinhardt, expandieron la idea a más tipos de energía oscura variantes en el tiempo, denominándola por primera vez como quintaesencia [21]. La quintaesencia consiste en un campo escalar canónico ϕ con potencial $V(\phi)$ responsable de la aceleración cósmica. El modelo de la quintaesencia es descrito por la acción:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + \mathcal{L}_\phi + S_M \right], \quad \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (4.2)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$, R el escalar de Ricci y S_M es la acción de la materia. Considerando un fluido perfecto (denotado con subíndice $M \rightarrow \rho_M, p_M, w_M$) el cual satisface la ecuación de continuidad (2.25), el tensor de energía momento de la quintaesencia es:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (4.3)$$

En FLRW, la densidad de energía ρ_ϕ y la presión p_ϕ del campo son:

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{3} T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (4.4)$$

los cuales dan como resultado una ecuación de estado:

$$\omega_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (4.5)$$

Entonces, en un Universo plano, las ecuaciones de movimiento son:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho_M \right], \quad \dot{H} = -\frac{\kappa^2}{2} \left(\dot{\phi}^2 + \rho_M + p_M \right). \quad (4.6)$$

Variando la acción con respecto a ϕ , se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0, \quad (4.7)$$

donde $V_{,\phi} \equiv dV/d\phi$. Esta ecuación se obtiene de manera análoga derivando la ecuación de continuidad o combinando las expresiones (4.6).

Durante las épocas de dominación de materia, se considera que el fluido dominaba sobre la quintaesencia, es decir $\rho_M \gg \rho_\phi$. Si se satisface la condición $\dot{\phi}^2/2 \gg V(\phi)$ en la ecuación (4.5), la ecuación de estado será $\omega_\phi \simeq 1$. En este caso la densidad de energía evoluciona como $\rho_\phi \propto a^{-6}$ que decae mucho más rápido que la densidad del fluido de polvo ó radiación, encontrada anteriormente (ver ecuación (2.28)).

Por esta razón se requiere que $\omega_\phi < 1/3$ y por consecuencia que $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, entonces el potencial escalar necesita ser bastante plano para que el campo evolucione lentamente a lo largo del potencial. Reescribiendo la ecuación (4.7) en términos de ω_ϕ , se obtiene lo siguiente:

$$1 + \omega_\phi = \frac{V_{,\phi}^2}{9H^2(\xi_s + 1)^2 \rho_\phi}, \quad (4.8)$$

donde $\xi_s \equiv \ddot{\phi}/(3H\dot{\phi})$. Esta ecuación muestra que ω_ϕ es más grande que -1 para un potencial positivo, dicha desviación es caracterizada por los parámetros *slow-roll*³ [22].

Hasta ahora muchos potenciales se han propuesto para quintaesencia, a grandes rasgos se clasifican en dos tipos [22]:

- (i) **Modelos congelados:** Son los modelos en los que la energía oscura evoluciona tal que ω_ϕ tiende a -1 .
 - $V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n}$ ($n > 0$),
 - $V(\phi) = M^{4+n}\phi^{-n}e^{\alpha\phi^2/m_{pl}^2}$.
- (ii) **Modelos derretidos:** Modelos en los que la energía oscura evoluciona tal que ω_ϕ es igual a -1 y lentamente se “descongela” a valores mayores $\omega_\phi > -1$.
 - $V(\phi) = V_0 + M^{4+n}\phi^{-n}$ ($n > 0$),
 - $V(\phi) = M^4 \cos^2(\phi/f)$.

Para mayores detalles de estos potenciales, consultar el libro de Amendola [22] (pag. 137).

4.2. k-esencia

En la sección anterior se discutió a grandes rasgos la quintaesencia como un ejemplo básico de modelo alternativo de energía oscura. El modelo llamado *k-esencia*, a diferencia de quintaesencia, tiene una acción de la forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} R + P(\phi, X) \right] + S_m, \quad (4.9)$$

donde $P(\phi, X)$ es una función en términos del campo escalar ϕ y su energía cinética $X = -(1/2)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \equiv -(1/2)(\nabla\phi)^2$. El tensor de energía-momento para k-esencia es:

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}P)}{\delta g^{\mu\nu}} = P_{,X}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g_{\mu\nu}P, \quad (4.10)$$

donde los subíndices con coma representan derivadas respectivas. Dicho tensor de k-esencia, tiene densidad de energía y presión:

$$\rho_\phi = 2XP_{,X} - P, \quad P_\phi = P. \quad (4.11)$$

Por lo que la ecuación de estado para k-esencia es:

$$\omega_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{P}{2XP_{,X} - P}. \quad (4.12)$$

³Los parámetros slow-roll se definen como: $\epsilon_s \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2$ y $\eta_s \equiv \frac{V_{,\phi\phi}}{\kappa^2 V}$. Si las condiciones $\epsilon_s \ll 1, |\eta_s| \ll 1$ se satisfacen, la evolución del campo es suficientemente lenta, $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$ y $|\dot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$, en las ec.(4.6) y (4.7).

Si se satisface la condición $|2XP_{,X}| \ll |P|$, ω_ϕ se acerca a -1 . De nuevo, en un Universo FLRW, en presencia de un fluido de materia con densidad ρ_M y presión p_M las ecuaciones de Einstein distintas no nulas y análogas a (4.6) y (4.7) son [23]:

$$3H^2 = \kappa^2(\rho_\phi + \rho_M), \quad (4.13)$$

$$2\dot{H} = -\kappa^2(2XP_{,X} + \rho_M + p_M), \quad (4.14)$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0. \quad (4.15)$$

Los modelos correspondientes a k-esencia, a grandes rasgos y sin desarrollo, dan diferentes propuestas para la función P , por lo que algunos de ellos son:

- (i) Teoría de cuerdas efectiva a energía baja con términos derivativos de mayor orden que X .
 - $P = K(\phi)X + L(\phi)X^2$.
- (ii) Modelo condensado fantasma.
 - $P = -X + X^2/M^4$.
- (iii) Campo Tachyon.
 - $P = -V(\phi)\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)}$.
- (iv) Teorías Dirac-Born-Infeld (DBI).
 - $P = -f(\phi)^{-1}\sqrt{1 - 2f(\phi)X} + f(\phi)^{-1} - V(\phi)$.

Para conocer más detalles de cada modelo, ver el libro Amendola [22] pag. 173.

Así como estos modelos existen muchos más con una fundamentación teórica desarrollada ampliamente, los cuales se pueden consultar en el artículo de revisión [24].

4.3. Modelo CPL

En el estudio de modelos alternativos de energía oscura se han propuesto un gran número de modelos dinámicos, de los cuales mencionamos algunos, por lo que se considera útil clasificarlos en función de parametrizaciones simples de la ecuación de estado ω . La manera trivial sería considerar a ω constante en el tiempo, pero a raíz de esto surgen varios problemas. Para el caso $\omega = -1$, este valor no surge de manera natural en el contexto de la mayoría de los modelos motivados físicamente; además asumir ω constante puede proporcionar resultados muy imprecisos, de hecho, se puede considerar que ω evoluciona en el tiempo [25].

Entonces, el siguiente nivel de complejidad es proponer un modelo de dos parámetros en función del factor de escala a , o equivalentemente de z , algo como $\omega(a) = (\omega_0, \omega_a)$. De este modo, el modelo más usado para este tipo de parametrizaciones, es la *parametrización Chevallier-Polarski-Linder* (CPL), donde en la ecuación de estado se

involucra a un valor medido en alguna época (ω_0) y otro valor medido que cambie respecto del factor de escala⁴ (ω_a). Entonces se define la parametrización CPL como:

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a(1 - a) = \omega_0 + \omega_a \frac{z}{1 + z}, \quad (4.16)$$

donde ω_0 y ω_a son parámetros libres constantes. La ventaja de la parametrización CPL es que describe gradualmente una evolución a partir de un valor $\omega = \omega_0 + \omega_a$ a tiempos tempranos ($a = 0$), y $\omega = \omega_0$ en tiempo actual ($a = 1$). Para una variedad de modelos (ω_0, ω_a), CPL puede producir cantidades observables (distancia o parámetro H en función de z) con precisión extraordinaria. A pesar de la variedad de parametrizaciones propuestas, vale la pena examinar la aplicabilidad de CPL con más detalle debido a su importancia.

Es interesante determinar precisamente qué modelos físicos son descritos por CPL y cuáles no lo son. Existe un gran número de posibles potenciales para quintaesencia, pero la pregunta sigue siendo ¿cuál es el mejor ajuste para la ecuación (4.16)? Este enfoque tiene la ventaja de que en un sentido sistemático se exploran todos los posibles valores de ω_0 y ω_a para buscar patrones de los modelos físicos correspondientes.

Estudiando los efectos posibles de la parametrización CPL para la energía oscura, la ecuación (4.16) introduce en general las perturbaciones para la energía oscura (con una velocidad del sonido efectiva distinta de cero) que ocurren a escalas que son completamente diferentes a los modelos de gravedad modificada.

4.4. PPF

La **Parametrización Post Friedmaniana (PPF)** [26] es un enfoque en el cual se contemplan varias teorías como un paso intermedio entre éstas y los observables. Es bien entendido que, para abordar el uso de cualquier modelo se necesitan dejar a las cantidades teóricas en términos de observables cósmicos, lo cual conlleva a redoblar esfuerzos y tiempo. Es por eso que se emplea PPF como alternativa para abarcar varios modelos al menos en las perturbaciones de orden cero y uno. En este trabajo el modelo Λ CDM se considerará a orden cero, y a partir de este, los modelos propuestos abarcarán perturbaciones sólo a primer orden.

El esquema PPF en un principio, fue introducido sólo para describir teorías de gravedad modificada bajo una métrica con estricta conservación local de energía y momento [26]. También se aplica a modelos de energía oscura [27], y en particular, la clase de modelos que tienen una escala bien definida. Este marco también tiene el beneficio de dar una descripción exacta de la evolución de la métrica, y con ello proporcionar una aproximación muy bien controlada que es relativamente fácil de implementar en un código de perturbaciones lineales Einstein-Boltzmann (en el siguiente capítulo se abordarán algunos códigos como CAMB y CosmoSIS).

⁴Las dos características básicas de la función dinámica ω , son emplear el valor presente (ω_0) y la derivada logarítmica con respecto a la escala ($\omega' \equiv d\omega/d\ln a$):
 $\omega(a) = \omega_0 - 2\omega'(1 - a) = \omega_0 + \omega_a(1 - a)$

Para empezar a tratar el modelo utilizaremos *la norma Newtoniana*⁵, de la cual, con la métrica resultante de esta norma se obtienen las ecuaciones de Einstein. Para derivar las ecuaciones perturbadas de Einstein a primer orden a partir de la ecuación (2.19), se hace de la forma $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(0)} + \delta G_{\mu\nu}$ para el tensor de Einstein, y para el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + \delta T_{\mu\nu}$. Desarrollando y tomando en cuenta ciertas consideraciones⁶ se tiene que:

$$R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(0)}R = 8\pi GT_{\mu\nu}^{(0)}, \quad (4.17)$$

$$\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta R = 8\pi G\delta T_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

donde el índice superior (0) nos indica que (4.17) es una ecuación no perturbada. Mientras que la ecuación (4.18) perturbada a orden uno.

Análogamente perturbando la cuadrivelocidad con el fin de definir el tensor de energía-momento para el modelo y tomando sólo a primer orden, se obtiene:

$$u^\mu = \left[\frac{1}{a}(1 - \Psi), \frac{v^i}{a} \right], \quad \text{donde} \quad v^i = \frac{dx^i}{d\eta} = a \frac{dx^i}{dt}. \quad (4.19)$$

Para un fluido perfecto el tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

La notación para las cantidades perturbadas son:

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad \Theta \equiv \nabla_i v^i, \quad (4.21)$$

donde δ es la densidad de contraste definida en la ecuación (3.11) y Θ es la divergencia de velocidades. Introduciendo la densidad de contraste δ y la divergencia de velocidades Θ en la ecuación (4.20), además de considerar las componentes distintas de cero y tomando en cuenta la ecuación de estado $w = P/\rho$, las ecuaciones resultantes de Einstein perturbadas (4.18) son:

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Psi - \Phi') + \nabla^2\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (4.22)$$

$$\nabla^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 (1 + w) \rho\Theta, \quad (4.23)$$

$$\Psi = -\Phi, \quad (4.24)$$

$$\Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi - \mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Psi = -4\pi G a^2 c_s^2 \delta\rho, \quad (4.25)$$

⁵En *la norma (gauge) Newtoniano* la métrica perturbada general se escribe esquemáticamente como $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}$, con $\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & 0 \\ 0 & 2\Phi\delta_{ij} \end{pmatrix}$, donde las entradas de $\delta g_{\mu\nu}^{(0)}$ son pequeñas a comparación del orden cero y además Ψ, Φ son escalares espaciales, entonces se encuentra la métrica $ds^2 = a^2(\eta) [-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j]$ en dicha norma [[22], pag. 42].

⁶Los símbolos de Christoffel perturbados se definen en este caso como:
 $\delta\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) + \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(\delta g_{\alpha\nu,\lambda} + \delta g_{\alpha\lambda,\nu} - \delta g_{\nu\lambda,\alpha})$.

donde $\mathcal{H} = aH$ es el parámetro de Hubble conforme y la coma superior $'$ denota la derivada respecto de N ⁷. Combinando la ecuación (4.16) con las ecuaciones de Einstein (4.22-4.25), se obtienen las ecuaciones que describen el comportamiento de δ y Θ para la energía oscura⁸:

$$\delta'_{eo} = -(1 + \omega_{eo}) (\Theta_{eo} + 3\Phi') + 3\mathcal{H} \left(\omega_{eo} - \frac{\delta p_{eo}}{\delta \rho_{eo}} \right) \delta_{eo}, \quad (4.26)$$

$$\Theta'_{eo} = -\mathcal{H} (1 - 3\omega_{eo}) \Theta_{eo} - \frac{\dot{\omega}_{eo}}{1 + \omega_{eo}} \Theta_{eo} + \frac{\frac{\delta p_{eo}}{\delta \rho_{eo}}}{1 + \omega_{eo}} k^2 \delta_{eo} + k^2 \Psi, \quad (4.27)$$

donde ω_{eo} esta representada por la ecuación (4.16). Hay dos ecuaciones de más utilidad a partir de los modos de Fourier:

$$k^2 \Phi + 3\mathcal{H}(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \rho \delta, \quad (4.28)$$

$$k^2(\Phi' - \mathcal{H}\Psi) = -4\pi G a^2 (1 + \omega) \rho \Theta. \quad (4.29)$$

Nótese que las ecuaciones anteriores son validas para $\omega \neq -1$. A partir de (4.28) y (4.29), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Phi = 3 \frac{a^2 H^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} \delta_{eo} + \Psi - \Phi' \right), \quad (4.30)$$

$$\Phi' = \Psi - \frac{3a^2 H^2}{2k^2} \Theta_{eo} (1 + \omega_{eo}), \quad (4.31)$$

Por otro lado, para simplificar de manera más fácil las ecuaciones perturbativas de la energía oscura (4.26) y (4.27), es conveniente definir una velocidad del sonido efectiva, c_s , como:

$$\frac{\delta p_{eo}}{\delta \rho_{eo}} \delta_{eo} \equiv \frac{\delta p_{eo}}{\delta \rho_{eo}} = c_s^2 \delta_{eo} + 3\mathcal{H} (1 + \omega_{eo}) \left(c_s^2 - c_a^2 \right) \frac{\Theta}{k}, \quad (4.32)$$

donde c_a es una velocidad del sonido adiabática, dada como:

$$c_a^2 = \frac{\dot{p}_{eo}}{\dot{\rho}_{eo}} = \omega_{eo} - \frac{\dot{\omega}_{eo}}{3\mathcal{H}(1 + \omega_{eo})}. \quad (4.33)$$

Una vez tomadas en cuenta estas definiciones, diferenciando (4.26) respecto de N y usando las ecuaciones (4.27) y (4.30), se obtienen un par de ecuaciones útiles:

$$\delta''_m + \frac{1}{2}(1 - 3\omega_{eo})\delta'_m = \frac{k^2 \Phi}{a^2 H^2}, \quad (4.34)$$

$$\frac{k^2 \Phi}{a^2 H^2} = \frac{3}{2} (\Omega_m \delta_m + \Omega_{eo} \delta_{eo}). \quad (4.35)$$

⁷Ahora se introduce la variable N que denotará $\frac{d}{dN} = \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d}{dt}$.

⁸Se han considerado de nuevo los modos escalares y vectoriales, además de representar las ecuaciones en el espacio de Fourier. Un modo de Fourier significa exactamente que se ha tomado un parámetro estático k .

A partir de estas dos últimas ecuaciones, se define la ecuación de evolución para δ como:

$$\delta_m'' + \frac{1}{2}(1 - 3\omega_{eo})\delta_m' - \frac{3}{2}(\Omega_m\delta_m + \Omega_{eo}\delta_{eo}) = 0, \quad (4.36)$$

donde la coma superior ' representa la derivada respecto de N . De nuevo, para el modelo Λ CDM ($\omega = -1$) es posible demostrar que se recuperan la ecuación perturbativa (3.37). Aquí se representa un resultado importante ya que la ecuación (4.36) ahora contiene la perturbación de la energía oscura representada por el término $\Omega_{eo}\delta_{eo}$.

En una teoría alternativa de energía oscura, se necesitan dos ecuaciones más para describir las 4 cantidades independientes ($\delta, \Theta, \Phi, \Psi$) y completar el sistema de ecuaciones (4.26) y (4.27). Dado que en el estudio del modelo Λ CDM a tiempos tempranos ($z < 30$) es necesario parametrizar funciones que relacionen a δ, Φ y Ψ . La primera de estas parametrizaciones se hace a través de la ecuación de Poisson, ya que relaciona la densidad de contraste total δ a través de la densidad de energía ρ y el potencial escalar Φ . La segunda, es una ecuación anisotrópica que relaciona los potenciales escalares y al estrés anisotrópico⁹. Entonces, estas dos ecuaciones son:

$$-k^2\Phi = \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\mu(k, a)\delta, \quad (4.37)$$

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \gamma(k, a), \quad (4.38)$$

donde $\mu(k, a), \gamma(k, a)$ son dependientes del tiempo debido al factor de escala a y se introducen para codificar la ecuación de Poisson, recuperando el modelo Λ CDM cuando $\mu = \gamma = 1$. Actualmente existen diferentes parametrizaciones equivalentes para μ y γ , tanto en modelos de gravedad modificada como de energía oscura. Para conocer detalles de diferentes modelos μ y γ , ver [27] y [28].

La elección específica de la parametrización de μ adoptada en este trabajo¹⁰, está motivada por el hecho de que μ se restringe directamente a caracterizar el crecimiento de la estructura. La contribución de μ se vera reflejada directamente en la ecuación de evolución para δ . Para empezar, retomando la ecuación (4.35) y factorizando el término $\Omega_m\delta_m$, se obtiene lo siguiente:

$$-k^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\delta_m\Omega_m + \delta_{eo}\Omega_{eo}) = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta_m \left(1 + \frac{\delta_{eo}\Omega_{eo}}{\Omega_m\delta_m}\right). \quad (4.39)$$

Si agregamos la contribución de las perturbaciones de la energía oscura en la ecuación de Poisson como se hizo en (4.39), es posible comparar con la ecuación (4.37) e identifica una función para μ , de la siguiente manera:

$$\mu = 1 + \frac{\Omega_{eo}\delta_{eo}}{\Omega_m\delta_m}. \quad (4.40)$$

⁹Para consultar a más detalle esta teoría, ver el artículo de revisión [34].

¹⁰En el presente trabajo sólo se desarrollo la teoría para μ , por lo que nosotros nos restringimos a tomar a $\gamma = 1$.

Para analizar o estudiar a μ , se ha mencionado anteriormente que la ecuación de Friedmann (2.21) suele expresarse en términos del corrimiento al rojo z mediante $H^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_i (1+z)^{3(1+\omega_i)}$. En general, la energía oscura debe ser una función del corrimiento al rojo representada en el último término de la siguiente ecuación:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 + \Omega_\gamma^{(0)}(1+z)^4 + \Omega_k^{(0)}(1+z)^2 + \Omega_{eo}^{(0)}\mathcal{F}(z), \quad (4.41)$$

donde $\Omega_i^{(0)}$ ($i = m, \gamma, k, eo$), son los valores de las densidades hoy en día (ver ecuación (2.39) y el artículo [5]). Las funciones $\Omega_m(z)$ y $\mathcal{F}(z)$ son de gran interés para dejar a μ dependiente sólo de parámetros observables, entonces, estas se definen como [29]:

$$\Omega_m(z) = \frac{(1+z)^3}{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}}}, \quad (4.42)$$

$$\mathcal{F}(z) = e^{3 \int_0^z \frac{1+\omega(z')}{1+z'} dz'}. \quad (4.43)$$

Introduciendo la parametrización CPL (4.16) en la ecuación (4.43), se encuentra una solución para $\mathcal{F}(z)$ de la forma¹¹:

$$\mathcal{F}(z) = e^{\frac{-3\omega_a z}{1+z}} (1+z)^{3(\omega_0+\omega_a+1)}. \quad (4.44)$$

Finalmente, de la ecuación (4.36), la evolución de δ_m se modifica como:

$$\delta_m'' + \frac{1}{2}(1-3\omega_{eo})\delta_m' - \frac{3}{2}\Omega_m\mu(a)\delta_m = 0, \quad (4.45)$$

Incluso si la contribución δ_{eo} no se considera, es decir $\delta_{eo} = 0$, la formación de estructura en el sector materia se vería alterada hacia una evolución totalmente diferente. Por lo que imponiendo la condición adiabática se tiene una simplificación de la forma:

$$\frac{\delta\rho_m}{\delta_m'} = \frac{\delta\rho_{eo}}{\delta_{eo}'} \quad \rightarrow \quad \delta_m = \frac{\delta_{eo}}{1+\omega_{eo}}, \quad (4.46)$$

esta condición garantiza que la velocidad del sonido efectiva está dada por la ecuación (4.33). Para ver detalles de dicha condición adiabática impuesta ver [22] página 298. Cabe mencionar que esta condición adiabática es válida fuera del horizonte, cuando el modo k es grande. Entonces, sustituyendo (4.46) en (4.40) se obtiene:

$$\mu(a) = 1 + \frac{\Omega_{eo}}{\Omega_m} (1 + \omega_{eo}), \quad (4.47)$$

$$\mu(a) = 1 + \Omega_\Lambda^{(0)} \left(a^{-3} + \frac{\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}} \right) e^{-3\omega_a(1-a)} a^{-3(\omega_0+\omega_a+2)} (1 + \omega_0 + \omega_a(1-a)). \quad (4.48)$$

En la ecuación (4.48) se sustituyeron las definiciones (4.42) y (4.44), donde se puede notar que μ sólo es dependiente de los parámetros CPL y de las cantidades de fondo $\mu = \mu(a)$.

Dicha μ de la ecuación (4.48) con la contribución CPL se utilizará para probar la cosmología en el espacio del corrimiento al rojo (RSD) a través del espectro de potencias de la ecuación (3.69).

¹¹Se usó el software Mathematica para encontrar la solución.

4.5. Alternativas a la energía oscura

La segunda manera para proponer modelos alternativos de energía oscura consiste en modificar el lado izquierdo de la ecuación de Einstein (2.19). Modelos de este tipo son denominados modelos de gravedad modificada, para los cuales se considera que el origen de la energía oscura viene identificada como una modificación a la gravedad.

Uno de los modelos más simples son los llamados *gravedad $f(R)$* , en donde el análogo a los modelos de energía oscura, de la acción 4-dimensional de Einstein-Hilbert se incluye una función general dependiente del escalar de Ricci R de la forma:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \Psi_m), \quad (4.49)$$

donde S_m es una acción con campo de materia Ψ_m . De nuevo aquí se proponen aproximaciones, como el *formalismo métrico* para el cual variando esta acción con respecto a $g_{\mu\nu}$ se obtiene:

$$F(R)R_{\mu\nu}(g) - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (4.50)$$

donde $F(R) \equiv \frac{\partial f}{\partial R}$ y \square es el operador D'Alembertiano. Derivando las ecuaciones cosmológicas, en analogía con RG, se encuentra una ecuación de estado ω para $f(R)$ de la forma:

$$\omega^{(f)} = \frac{p^{(f)}}{\rho^{(f)}} = \frac{f(R) - RF(R) + 2(\ddot{R}F'(R) + \dot{R}^2 F''(R) + 2H\dot{R}F'(R))}{RF(R) - f(R) - 6H\dot{R}F'(R)}, \quad (4.51)$$

donde $p^{(f)}$ y $\rho^{(f)}$ están determinadas como [22]:

$$\rho^{(f)} = \frac{Rf'(R) - f(R)}{16\pi G} - \frac{3H\dot{R}f''(R)}{8\pi G}, \quad (4.52)$$

$$p^{(f)} = \frac{f(R) - Rf'(R)}{16\pi G} + \frac{\ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) + 2H\dot{R}f''(R)}{8\pi G}. \quad (4.53)$$

A partir de las ecuaciones (4.52) y (4.53) es posible encontrar una relación similar para la ecuación de continuidad (2.8).

Otros modelos de teorías de gravedad modificada más destacados son el de *Brans-Dicke* ó el de *tensor-escalar generalizados*, entre otros (ver [37] y [22]).

Cabe mencionar que en esta tesis no se considerarán modelos de gravedad modificada sino modelos de energía oscura, en particular el modelo CPL. Los modelos de gravedad modificada, sin embargo, muestran cierta analogía con los de energía oscura alternativa (distintos al modelo con constante cosmológica Λ), lo cual se puede observarse a través del formalismo PPF ya que para ambos modelos se definen μ y γ , dados por expresiones diferentes.

Capítulo 5

Resultados de RSD en el modelo CPL

5.1. CosmoSIS

El código utilizado en el presente trabajo es **CosmoSIS** [30] (descrito con detalle en la ref. [31]), el cual es un código de estimación de parámetros cosmológicos (escrito en Python, Fortran, c++, etc.). CosmoSIS es un código que sirve para estructurar cosmologías basadas en diferentes modelos y obtener parámetros cosmológicos de interés en un sentido de fácil uso y veracidad, además, este programa comparte códigos en forma de módulos de cálculo. **CosmoSIS** se consolida y se conecta con códigos existentes tales como CAMB [32] o MGCAMB [33] entre los más importantes, de este último se proponen parametrizaciones PPF ya implementadas, tales como teorías $f(R)$ entre otras, [34], [35], [36]. Dicho código se utiliza para predecir observables cósmicos, y así mismo, mapear datos experimentales con una alta precisión.

5.2. Resultados obtenidos de CosmoSIS.

Empleando la teoría y metodología descrita en los capítulos anteriores, se estudiaron diferentes resultados en CosmoSIS al implementar el modelo CPL propuesto en este trabajo, tales como el espectro de potencias angular de la RFC, el espectro de potencias de materia y el factor de crecimiento, entre otros.

Mediante el estudio de los espectros de materia, se construye el mismo espectro de materia pero contemplando la corrección para RSD a través del modelo empleado para construir el factor de crecimiento f de una manera análoga.

Finalmente, se comparan resultados específicos y valores para cantidades de interés.

En un principio, se implemento en el código sólo la lectura de la ecuación de estado CPL (4.16) para obtener las funciones de la teoría cosmológica Λ CDM estándar. A partir de lo antes dicho, se observan efectos de CPL en diferentes cálculos de CosmoSIS como veremos a continuación.

El primero de estos efectos se refleja en la figura 5.1, el espectro de potencias angular

de la radiación de fondo cósmica (RFC), se ve afectado debido a la variación de los parámetros ω_0 y ω_a tal y como lo argumenta Wayne Hu en el artículo [16] de la figura 3.4-b. Entonces, manteniendo fijo el parámetro $\omega_a = 0$ en la figura superior y variando ω_0 , se crea un efecto de desplazamiento de izquierda ($\omega_0 > -1$) a derecha ($\omega_0 < -1$), y análogamente en la figura inferior se fijó $\omega_0 = -1$ para variar ω_a y el efecto va de nuevo de izquierda ($\omega_a > 0$) a derecha ($\omega_a < 0$). En ambas variaciones el valor central es el modelo Λ CDM.

Por otra parte (en la figura 5.2) para el espectro de potencias de materia, el efecto producido por variar ω_0 y ω_a sobre dichas fluctuaciones de materia es relevante, ya que afecta directamente a éste. La gráfica superior corresponde a $\omega_a = 0$ y el efecto es un desplazamiento de abajo ($\omega_0 > -1$) hacia arriba ($\omega_0 < -1$) al variar ω_0 . Posteriormente, en la gráfica inferior se fijó $\omega_0 = -1$, permitiendo ver el mismo efecto de abajo ($\omega_a > 0$) hacia arriba ($\omega_a < 0$) al variar ω_a . Aquí de nuevo el valor central es el modelo Λ CDM.

Con la información expuesta en las figuras 5.1 y 5.2, se pretende ajustar tanto el espectro de potencias angular de la RFC como el espectro de potencias de materia, realizando ciertas mediciones y cálculos. Después se analizará si la contribución del modelo de energía CPL se ajusta mejor que el modelo Λ CDM a las mediciones que se presentaran más adelante.

Como complemento y enriquecimiento de este trabajo, en las figuras 5.3, 5.4 y 5.5, se muestran las distintas distancias cosmológicas definidas en la sección 2.7. A partir de las ecuaciones (2.47), (2.50), y (2.52) se varían los parámetros ω_a y ω_0 de la ecuación CPL en CosmoSIS.

Espectro de potencias angular

Variando w_0 y w_a .

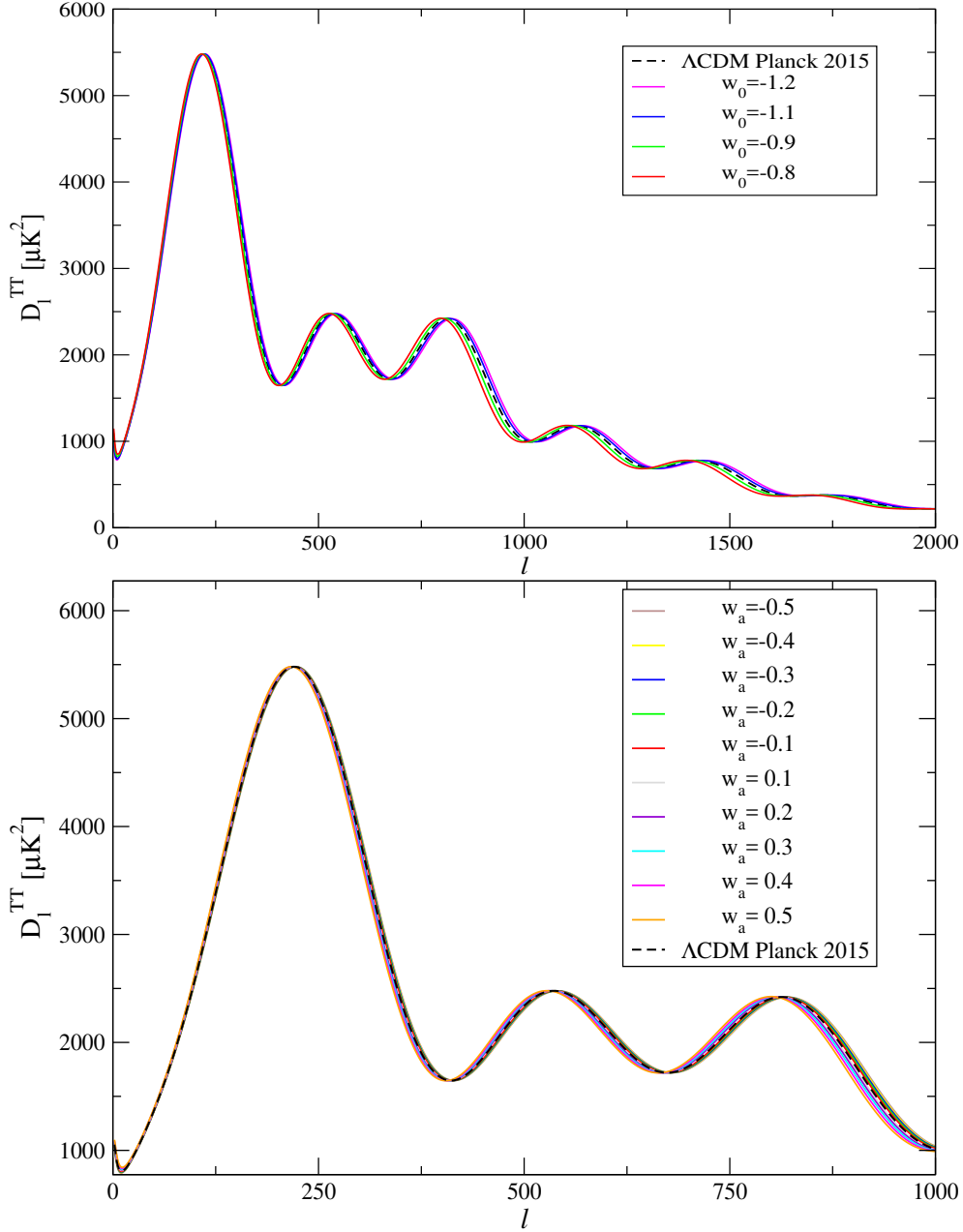


Figura 5.1: Efecto sobre el espectro de potencias angular de la radiación c3smica de fondo a partir de la variaci3n de los par3metros ω_0 y ω_a al implementar CPL en CosmoSIS. En la gr3fica superior, se mantiene fijo $\omega_a = 0$. En la gr3fica inferior se consider3 $\omega_0 = -1$, y se observa que el comportamiento es similar al descrito por Wayne y Dodelson [16] mostrado en la figura 3.4-b.

Espectro de potencias de materia

Variando w_0 y w_a .

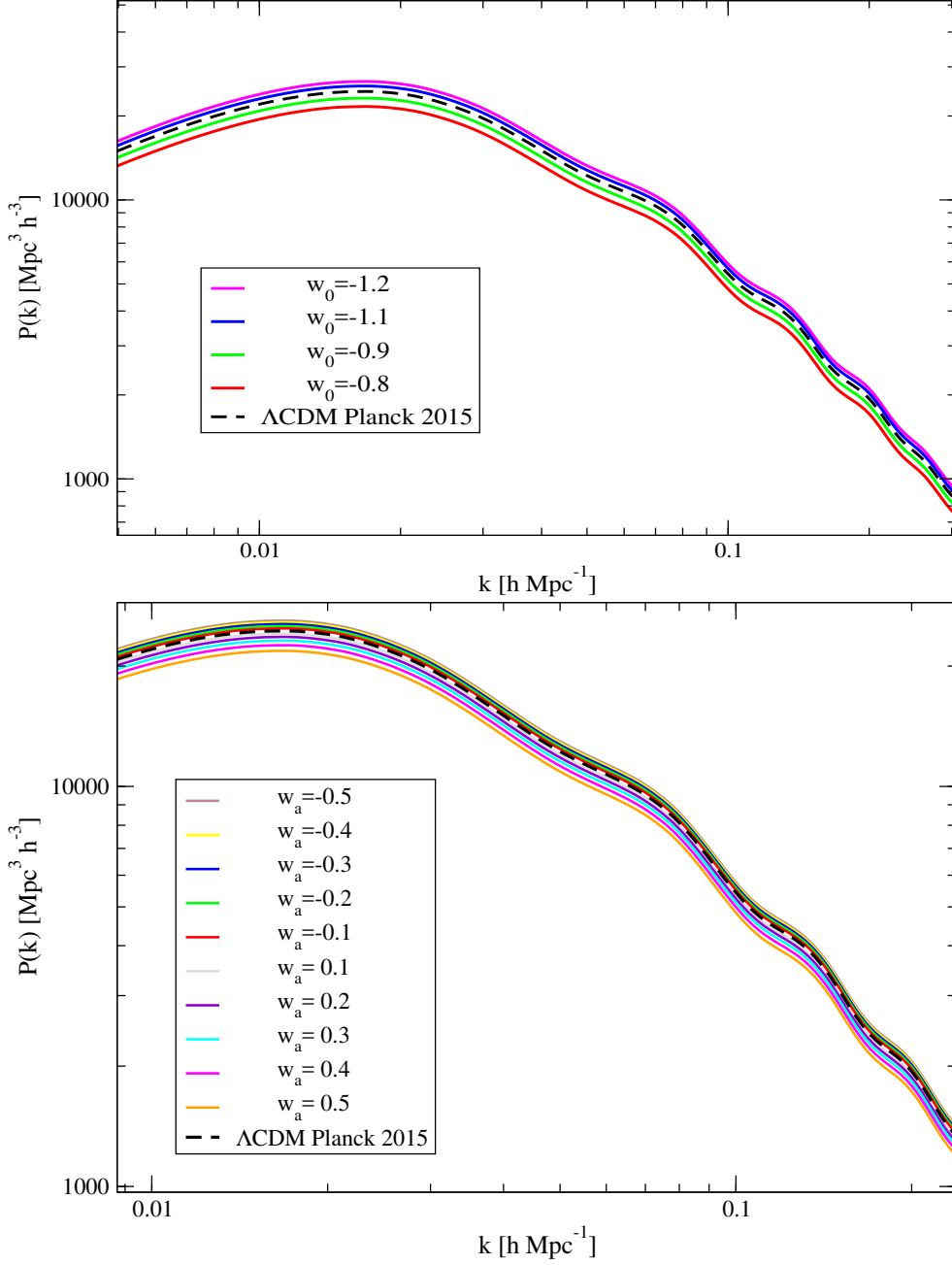


Figura 5.2: Espectro de potencias de materia fijando $\omega_a = 0$ en la gráfica superior. Para la gráfica inferior se mantuvo $\omega_0 = -1$. En ambas gráficas se varían los parámetros w_0 y w_a del modelo CPL. En ambos espectros, a partir de un valor de $k > 0.02$ hacia la derecha, se aprecian las oscilaciones acústicas de bariones descritas en el capítulo 3.

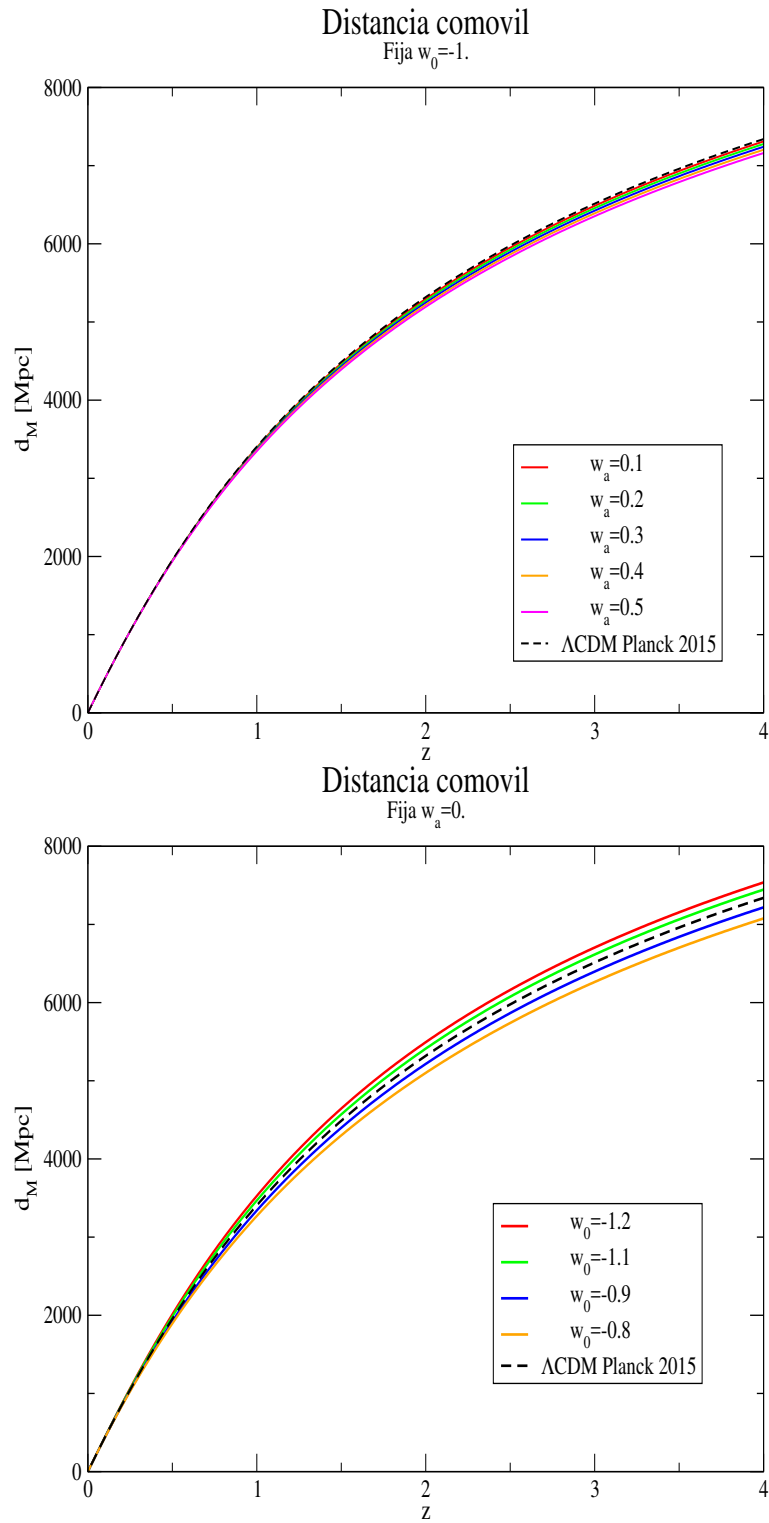


Figura 5.3: Variación de la distancia comóvil (2.47) a través del modelo CPL.

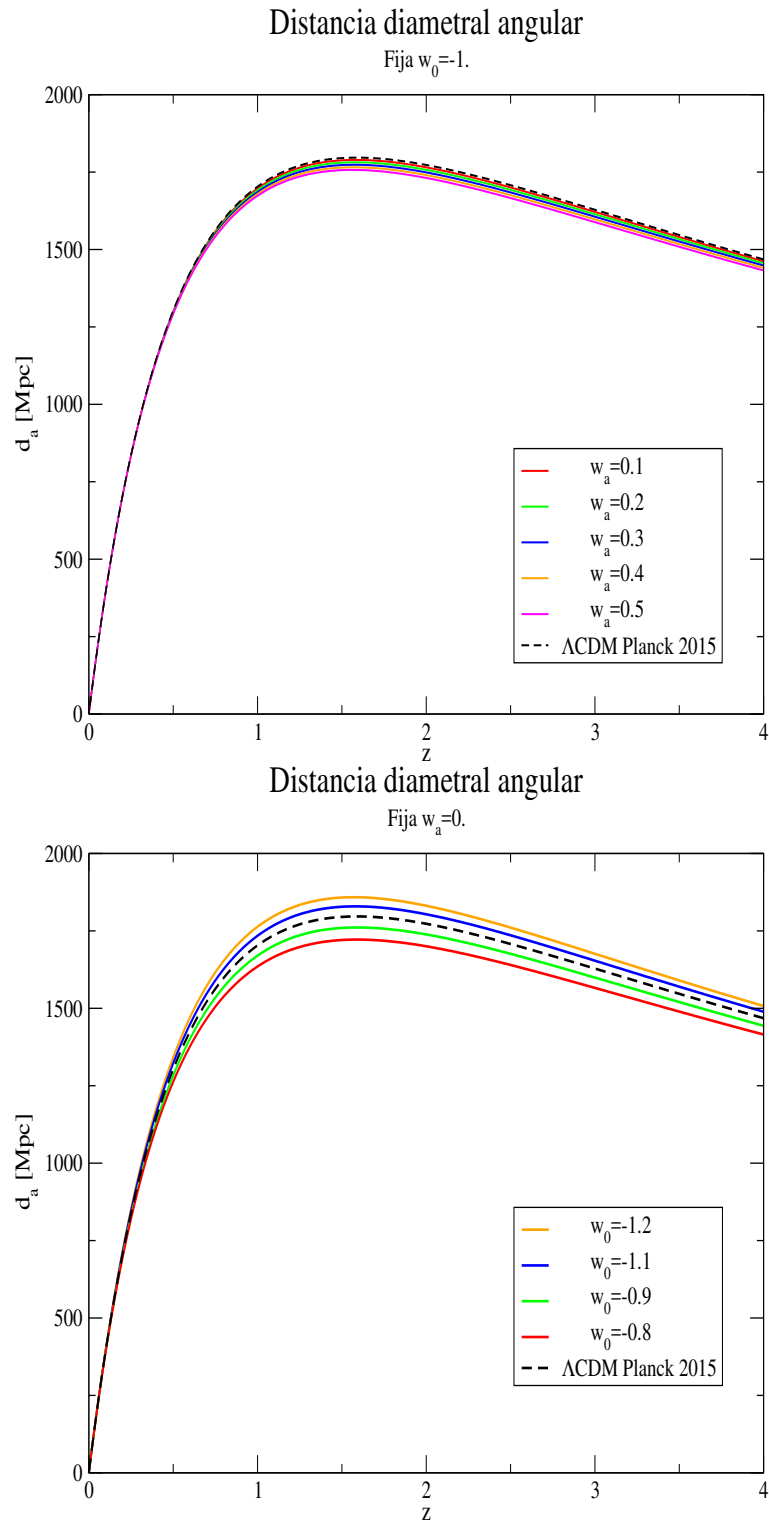


Figura 5.4: Variación de la distancia diametral angular (2.50) con base al modelo CPL.

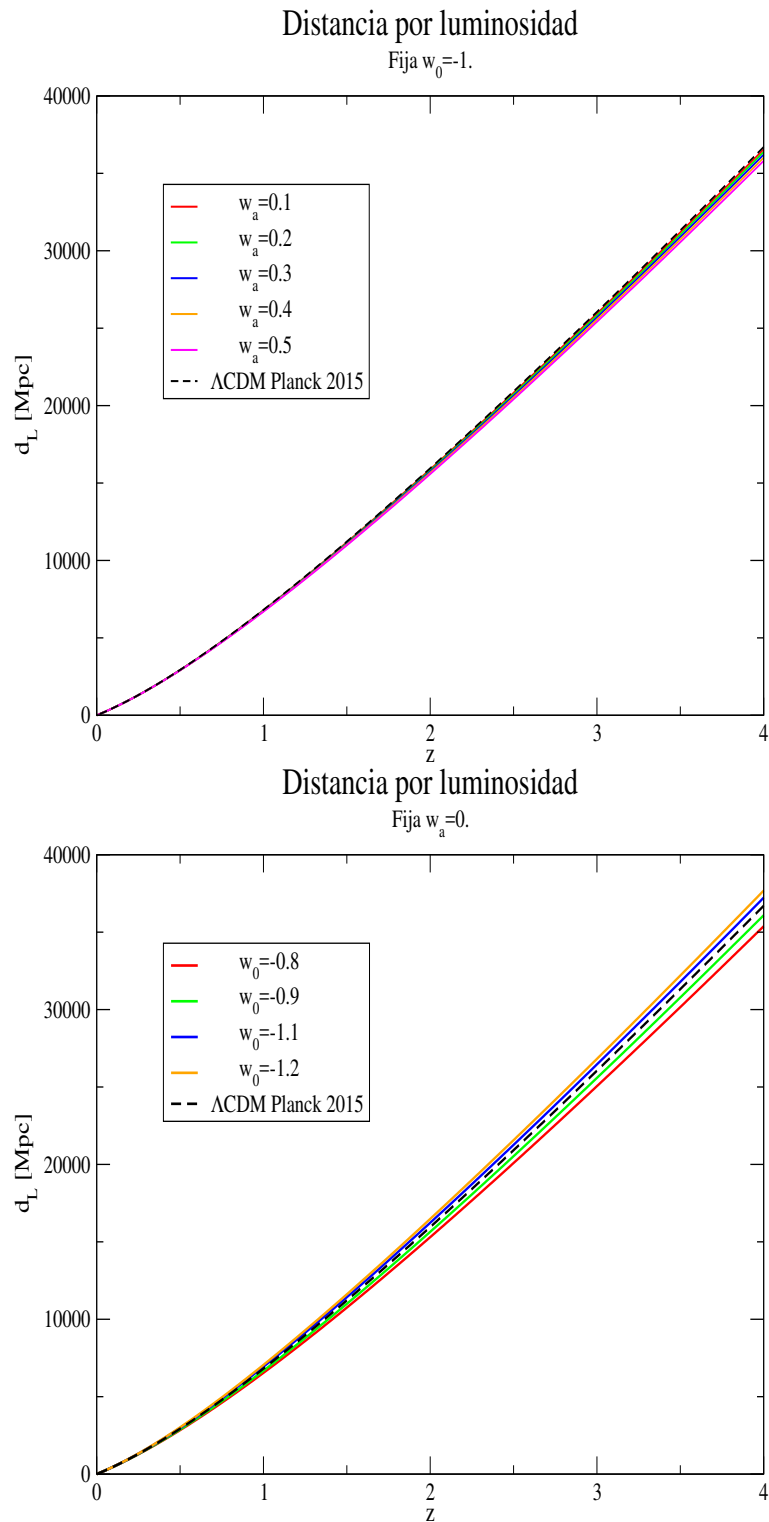


Figura 5.5: Variación de la distancia lumínica (2.52) a través del modelo CPL.

5.3. Factor de crecimiento del modelo CPL implementado en CosmoSIS

Una vez que se implementó el modelo de energía oscura CPL en CosmoSIS a través del módulo CAMB que realiza la parametrización de la ecuación de estado para la energía oscura propuesta (4.16), al mismo tiempo se implementa la ecuación de evolución para δ (4.45) (en este caso se modifica el modulo *growth_factor*¹ para implementar la evolución de δ). CosmoSIS implementa dicha evolución de δ propuesta por E. Linder [40] de una manera alternativa, es decir:

$$G'' + \left[\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega(a)}{1+X(a)} \right] \frac{G'}{a} + \frac{3}{2} \frac{1-\omega(a)}{1+X(a)} \frac{G}{a^2} = 0. \quad (5.1)$$

Para llegar a una forma análoga a la ecuación (5.1), iniciamos tomando el resultado obtenido en PPF a partir de la ecuación (4.45), además de contemplar a μ dependiente de a , ver (4.48), es decir:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - \frac{3}{2}H^2\Omega_m\mu(a)\delta_m = 0, \quad (5.2)$$

de la cual, podemos simplificar fácilmente:

$$\delta_m'' + [2 - q] \frac{\delta_m'}{a} - \frac{3}{2}\Omega_m\mu(a) \frac{\delta_m}{a^2} = 0, \quad (5.3)$$

donde ' indica la derivada respecto del factor de escala a y q es identificado como el parámetro de desaceleración [40]:

$$q \equiv -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{\delta H^2}{H^2} - \frac{1}{2} \frac{(\delta \dot{H}^2)}{H^3}, \quad (5.4)$$

donde se relaciona al término $\frac{\delta H^2}{H^2}$ mediante la ecuación (4.41) de la forma:

$$\frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_m a^{-3} + \frac{\delta H^2}{H_0^2}. \quad (5.5)$$

Escribiendo la ecuación (5.3) en términos de la ecuación de estado $\omega(a)$ (en este caso la parametrización CPL), se llega a:

$$D'' + \frac{3}{2} \left[1 - \frac{w(a)}{1+X(a)} \right] \frac{D'}{a} - \frac{3}{2} \frac{X(a)}{1+X(a)} \mu(a) \frac{D}{a^2} = 0, \quad (5.6)$$

donde $D = \frac{\delta_m(a)}{\delta_m(a_i)}$, $\delta_m(a_i)$ es un valor inicial a un factor de escala fijo, y $X(a)$ está definido de la forma:

$$X(a) = \frac{\Omega_m}{1-\Omega_m} e^{-3 \int_a^1 d \ln a' \omega(a')} = \Omega_m \frac{a^{-3}}{\frac{\delta H^2}{H_0^2}}, \quad (5.7)$$

¹Una vez instalado CosmoSIS, en su librería estándar contiene un módulo para resolver la evolución de δ .

y para la ecuación de estado CPL, $X(a)$ se identifica como:

$$X(a) = \frac{\Omega_m^{(0)}}{1 - \Omega_m^{(0)}} a^{3(\omega_0 + \omega_a + 1)} e^{3\omega_a(1-a)}. \quad (5.8)$$

A partir de las ecuaciones anteriores se puede verificar que para X grandes se recupera el comportamiento de la dominación de materia, $D \sim a$. Es conveniente eliminar esta tendencia que es común para todos los modelos cosmológicos a grandes z , y con ello definir una nueva variable $G = \frac{D}{a}$. Entonces, la ecuación de evolución para este crecimiento es²:

$$G'' + \left[\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \frac{\omega(a)}{1 + X(a)} \right] \frac{G'}{a} + \frac{3}{2} \left[\frac{1 - \omega(a) + X(a)(1 - \mu(a))}{1 + X(a)} \right] \frac{G}{a^2} = 0. \quad (5.9)$$

La ecuación (5.9) es análoga a la ecuación (5.1) que se obtiene de manera similar, excepto por el parámetro $\mu(a)$. De nuevo, podemos notar con esto que, para $\mu = 1$ se recupera el modelo Λ CDM.

Analizando en CosmoSIS la ecuación deducida de este trabajo (5.9), la cual describe la función de crecimiento f que se había estudiado en el capítulo 3 (ver ecuación (3.55)), se observaría un comportamiento al variar los parámetros ω_0 y ω_a similar al modelo Λ CDM que se detallara enseguida. De tal forma, se obtendría el resultado de imponer la condición adiabática, ec. (3.10), y la teoría PPF con el parámetro $\mu(a)$ impuesto sobre los cálculos para la función de crecimiento f .

Para notar la diferencia entre modelos, en la figura 5.6 se considera la aproximación al modelo Λ CDM, esto es si $\mu(a) = 1$. Se puede observar que al implementar CPL en CosmoSIS considerando las perturbaciones de la energía oscura, ver ecuación (4.39), la función de crecimiento f (3.55) varía a través del efecto de los parámetros ω_0 y ω_a . Para dicha variación de la figura 5.6, en la gráfica superior se mantuvo fijo $\omega_a = 0$ y se varía ω_0 en donde la función f va de abajo ($\omega_0 > -1$) hacia arriba ($\omega_0 < -1$). En la gráfica inferior se mantiene $\omega_a = 0$ y el efecto va nuevamente de abajo ($\omega_a > 0$) hacia arriba ($\omega_a < 0$). En ambas figuras el valor central es el modelo Λ CDM, observando que el valor máximo de f es menor a 1.

La finalidad de las variaciones de los distintos modelos (ω_0 , ω_a) para la función de crecimiento, es encontrar un buen ajuste a dichos parámetros y con esto, en principio estudiar la aproximación de Hamilton para los monopolos, cuadrupolos y hexadecapolos, comparando con datos experimentales de BOSS, y estimar el valor aproximado de γ a partir de la función $f = \Omega_m^\gamma$ a través de la ley de potencias (ver ecuación (3.56)). Estos análisis se tratarán en la siguiente sección.

²En todo instante, denominamos como ecuación de evolución el crecimiento de δ , a través de las ecuaciones (3.37), (4.36), (4.45), (5.2) y (5.9), ya que se puede demostrar que estas ecuaciones en el fondo son las mismas y todas terminan siendo dependientes del tiempo.

Factor de crecimiento

Variando w_0 y w_a .

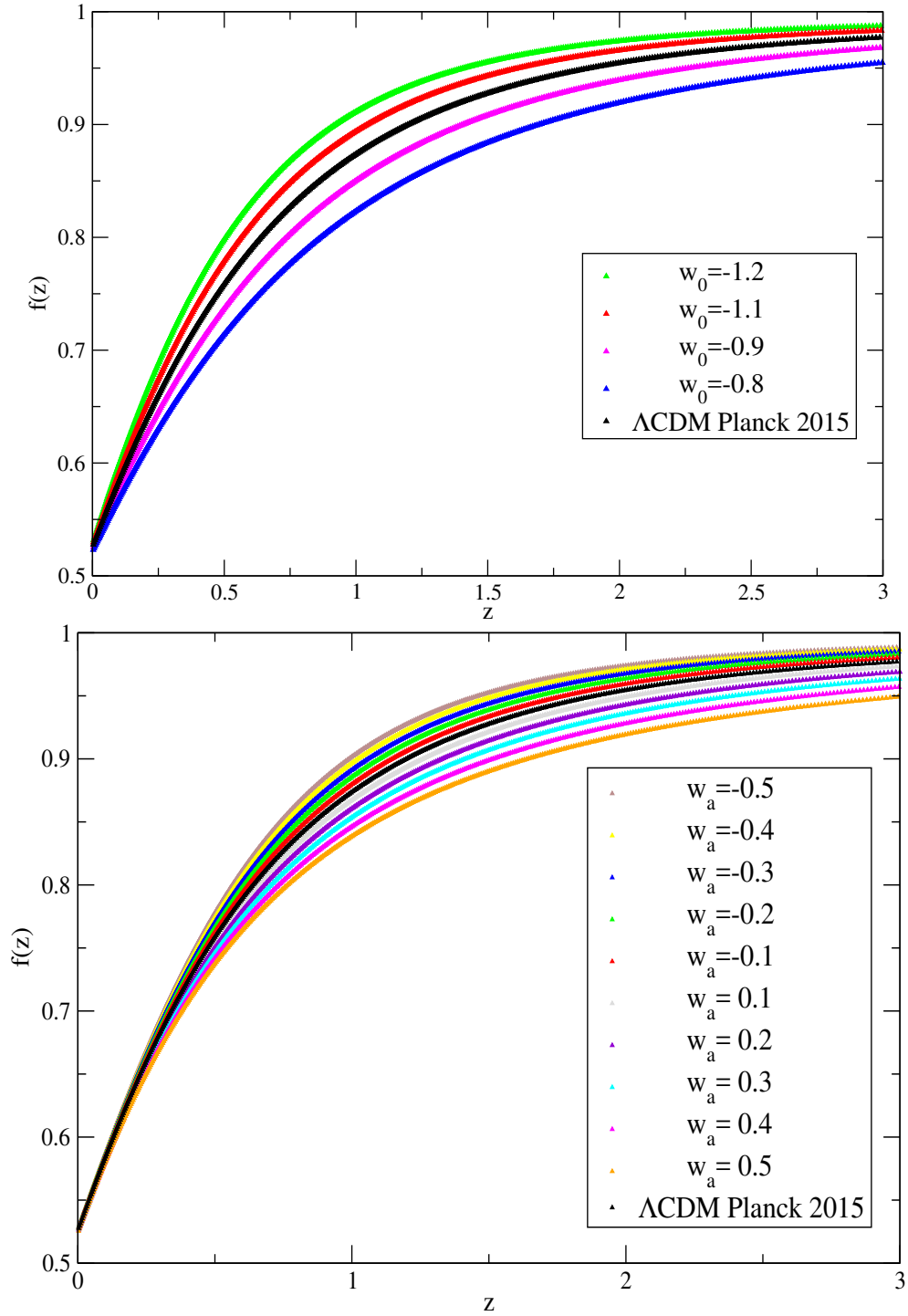


Figura 5.6: Efecto de variar los parámetros ω_0 y ω_a sobre la función de crecimiento f resuelto por CosmoSIS a partir de la ecuación (4.39), que considera la perturbación de la energía oscura. En la gráfica superior se fija $\omega_a = 0$ y en la gráfica inferior $\omega_0 = -1$. Lo importante radica en que a través de un software de cálculo, es posible ajustar la función f a las ecuaciones (5.14) y (5.15), encontrando valores de ω_0 y ω_a que se ajusten al modelo Λ CDM, como veremos más adelante.

5.4. Resultados CPL en RSD.

Para implementar RSD, antes de todo, deben existir métodos para medir β del resultado obtenido por N. Kaiser en la ecuación (3.69). Esencialmente existen tres maneras. La primera de estas asume la aproximación plano-paralelo, en donde las estructuras están suficientemente alejadas de tal forma que las velocidades peculiares de la línea de visión son efectivamente planas-paralelas, como se mostró en la figura 3.5. La fórmula de Kaiser (3.69) predice que en el régimen lineal, el ángulo promedio del espectro de potencias del corrimiento al rojo³ $P_0^s(k)$, es amplificado por un factor constante dividido por el espectro de potencias en el espacio real⁴ análogo al monopolo $P_0^s(k)$ que se describirá más adelante. El segundo es un enfoque de algo que se conoce como *máxima verosimilitud*⁵ (maximum likelihood), en donde los datos son las amplitudes individuales de muchos modos k , además los parámetros β y $P(k)$ son parametrizados en forma específica. Para conocer a detalle estos dos métodos de debe consultar el artículo de Kaiser [38]. En este trabajo se detalla y trabaja con el tercer método, que como se menciono el método también fue propuesto a partir del trabajo de Kaiser y ampliado por J. S. Hammilton [38]. Empezando con la fórmula de Kaiser (3.69), Hammilton propuso la idea de descomponer la función de correlación del espacio s en armónicos [38]. Escribiendo el espectro de potencias de las distorsiones del corrimiento al rojo en términos de la suma de los armónicos, se obtiene lo siguiente:

$$P^s(k) = \sum_{l-\text{par}} P_l(\mu_k) P_l^s(k), \quad P_l^s(k) \equiv (2l+1) \int P_l(\mu_k) P^s(k) do_k / (4\pi), \quad (5.10)$$

donde $P_l(\mu_k)$ son los polinomios de Legendre y do_k denota un intervalo de un ángulo sólido en el espacio de Fourier. Los armónicos impares se descartan por la simetría entre pares. Entonces, de la fórmula de Kaiser (3.69) se muestra que el espectro de potencias del corrimiento al rojo se reduce a la suma de los armónicos monopolar ($l=0$), cuadrupolar ($l=2$) y hexadecapolar ($l=4$):

$$P_0^s(k) = \left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right) P(k) \quad \text{Monopolo} \quad (5.11)$$

$$P_2^s(k) = \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right) P(k) \quad \text{Cuadrupolo} \quad (5.12)$$

$$P_4^s(k) = \left(\frac{8}{35}\beta^2\right) P(k) \quad \text{Hexadecapolo.} \quad (5.13)$$

En las ecuaciones (5.11), (5.12) y (5.13), el factor $\beta = \frac{f}{b}$ se obtendrá a partir de una aproximación tanto para f y b , esto a través de los resultados arrojados por CosmoSIS en la figura 5.6, como veremos mas adelante.

³El ángulo promedio del espectro de potencias del corrimiento se define como:

$P^s(k) \equiv \int P^s(k) do_k / (4\pi)$, [38].

⁴ $\frac{P^s(k)}{P(k)} = 1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2$.

⁵La máxima verosimilitud (maximum likelihood) es un método habitual para ajustar un modelo y estimar sus parámetros, conteniendo una muestra de n observaciones independientes y distribuidas equivalentemente extraídas de una función de distribución [41].

Pero antes, como toda buena teoría, es necesario hacer un comparativo con observaciones e información experimental. Para hacer un comparativo con datos experimentales se descargaron los resultados obtenidos del proyecto BOSS de su página oficial⁶ [42]. Dichos datos consideran mediciones del espectro de materia monopolar y cuadrupolar en el espacio del corrimiento al rojo relativos a la línea de visión. Esto con el fin de graficarlos y poder comparar que modelo se acerca a estos datos. Los datos experimentales están representados en la figura 5.8. El catálogo LOWZ contiene 361,762 galaxias con un parámetro efectivo de $z_{lowz} = 0.32$, y el catálogo CMASS contiene 777,202 galaxias con un parámetro efectivo $z_{cmass} = 0.57$. Cabe mencionar que la teoría realizada por el proyecto BOSS para obtener dichos monopolos y cuadrupolos es totalmente diferente [42], pero la teoría de Kaiser empleada en este trabajo es bastante cercana a lo experimental. Con esto en mente se intenta introducir el modelo CPL a través del espectro de potencias del espacio real, contemplando los resultados obtenidos en el capítulo 4, veamos lo siguiente.

Para empezar el método, nos restringimos a sólo considerar el término cuadrupolar $P_2^s(k)$ de la ecuación (5.12), en donde se hizo una aproximación para β de esta ecuación, a través de los datos arrojados por CosmoSIS en la figura 5.6, esto se detallará más adelante.

En el segundo paso consideramos que, actualmente hay un debate sobre el valor del exponente γ , que se obtiene a través de una ley de potencias [43], [44]. Dicho exponente es un nuevo parámetro cosmológico en la historia del crecimiento de estructuras, el cual es llamado *índice de crecimiento*. Entonces, en una primera aproximación teórica, se encontró que $f \approx \Omega_m^{0.55}$, y que además este valor corresponde al modelo Λ CDM, ver [43]. Finalmente, obtuvimos que el factor de crecimiento f , en términos de los parámetros Ω_m y γ , se puede definir de la siguiente forma:

$$f = \Omega_m^\gamma = \left(\frac{(1+z)^3}{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}}} \right)^\gamma. \quad (5.14)$$

En donde hemos considerado una aproximación para γ que involucra a la ecuación de estado CPL. Esta aproximación para γ la propuso E. Linder [44] argumentando que encuentra excelentes ajustes para dicho parámetro. Entonces, involucrando el modelo CPL, γ tendrá una nueva aproximación de la siguiente forma:

$$\gamma = 0.55 + 0.05 [1 + \omega_0 + \omega_a(1 - a)], \quad (5.15)$$

donde $\gamma = 0.55$ corresponde al modelo Λ CDM. Esta aproximación nos es útil para ajustar aun más nuestro modelo.

⁶BOSS publica en su sitio web los resultados de las mediciones del proyecto SDSS-III para el espectro de materia monopolar y cuadrupolar. CMASS que es una muestra del catalogo de BOSS es calculado para $z = 0.57$ y LOWZ otro catalogo para $z = 0.32$.
https://www.sdss3.org/science/boss_publications.php

Mediciones+Bestfit CMASSDR12

Monopolo y cuadrupolo.

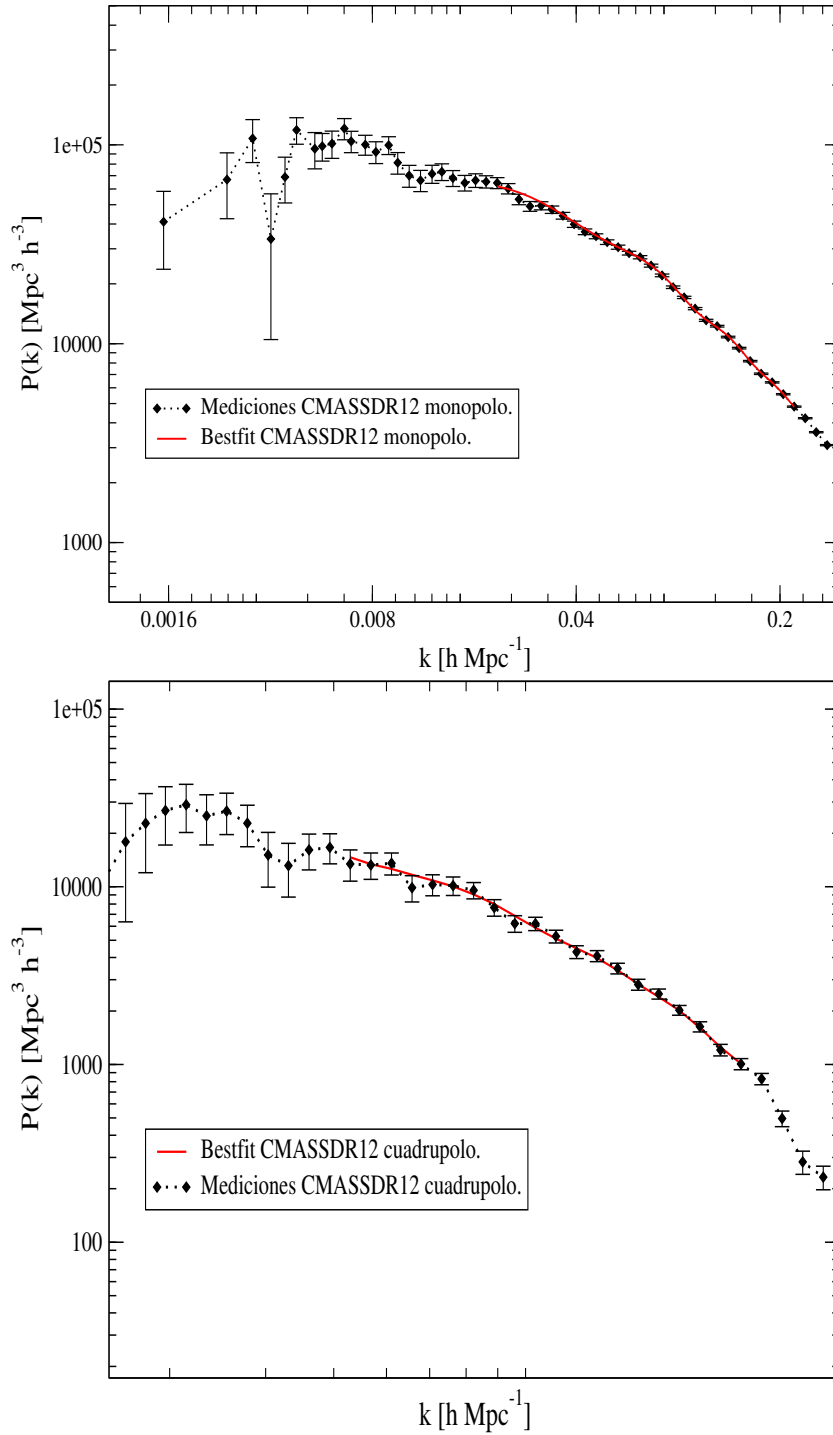


Figura 5.7: Gráficos realizados en el software Grace a partir de los datos descargados del sitio de BOSS, los cuales contemplan el monopolo y cuadrupolo relativos a la línea de visión, además, se muestra el mejor ajuste (bestfit) de estas mediciones. El catálogo CMASS contiene 777,202 galaxias con un parámetro efectivo $z_{cma\text{ss}} = 0.57$. A partir de estas gráficas, se pretende comparar sólo el cuadrupolo $P_2^s(k)$ con los modelos ΛCDM y CPL a través del espectro de potencias de materia (ecuación (5.12)).

Mediciones+Bestfit LOWZDR12

Monopolo y cuadrupolo.

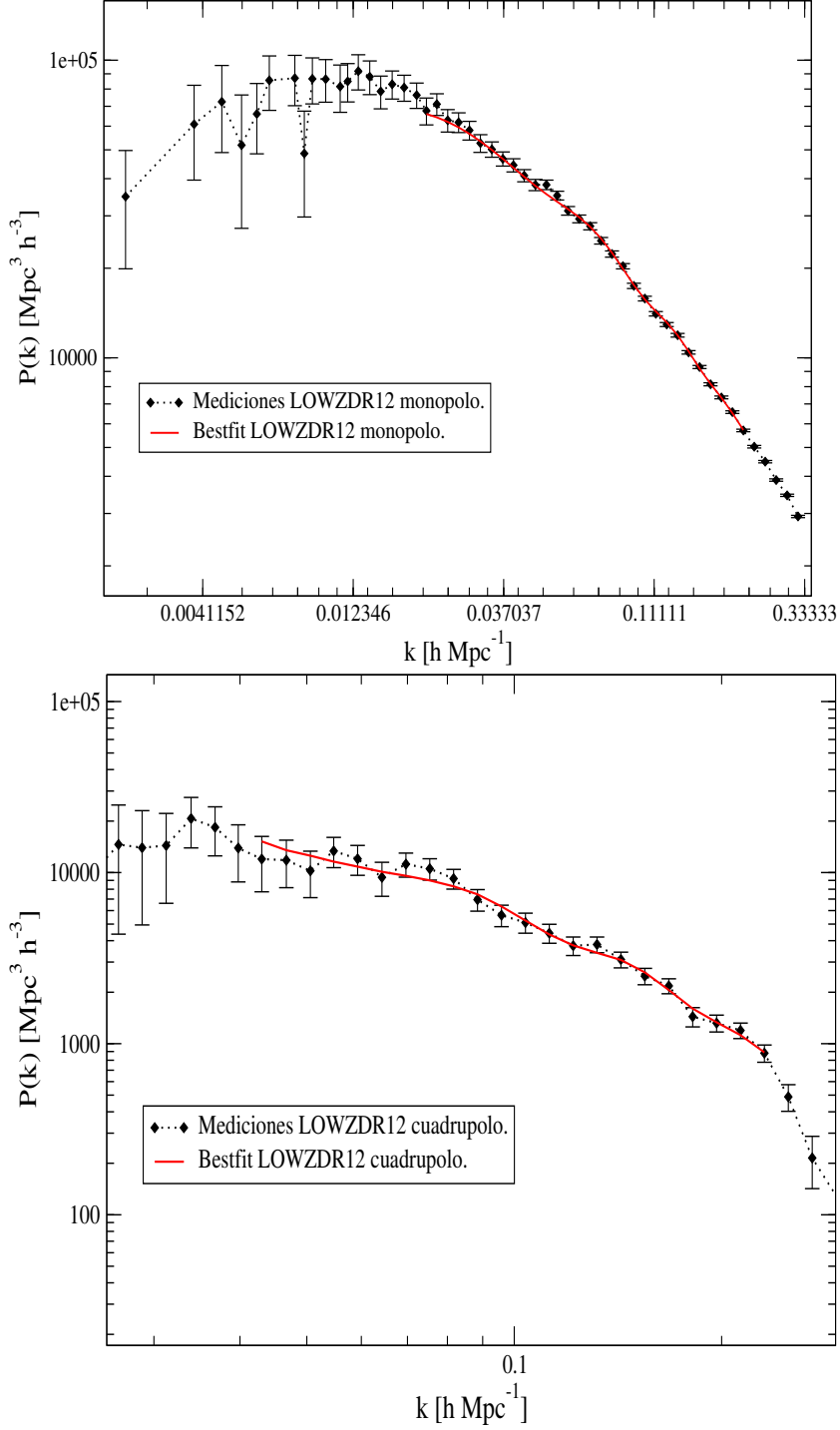


Figura 5.8: Análogo a las gráficas de la figura 5.7, pero diferenciando que se trata de las mediciones del catálogo LOWZ, que contiene 361,762 galaxias con un parámetro efectivo de $z_{lowz} = 0.32$. La diferencia entre ambos catálogos radica en el ajuste de las lentes observacionales para distintos corrimientos al rojo efectivos z , ver [42]. Nos restringimos a comparar sólo con el catálogo CMASS, pero es posible hacer una comparación con este catálogo como se vera más adelante.

Una vez realizado los gráficos a partir de los datos observacionales obtenidos del sitio web de BOSS, se describen los cálculos encontrados. En primer lugar, se tomó el valor de $\gamma \approx 0.55$ que corresponde al modelo Λ CDM y se introdujo en la ecuación (5.14), con la finalidad de obtener el factor de crecimiento f para los términos cuadrupolar, en donde nos hemos restringido a tomar el valor de bias $b = 1$. Entonces, para CMASS y LOWZ, los valores de la corrección RSD están dados como:

$$\Lambda\text{CDM} \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_2^s(k) \approx 1.3931P(k) & \text{CMASS } (z = 0.57) \\ P_2^s(k) \approx 1.1992P(k) & \text{LOWZ } (z = 0.32) \end{array} \right\} \quad \text{para } \gamma \approx 0.55. \quad (5.16)$$

A partir de las correcciones obtenidas del modelo Λ CDM, en la ecuación (5.16) para los corrimientos al rojo efectivos $z = 0.57$ y $z = 0.32$, se tomaron los datos arrojados por CosmoSIS para este mismo modelo (Λ CDM). Por lo que, se obtuvieron resultados interesantes al implementar RSD, los cuales se muestran en la figura 5.9.

Como una primera aproximación de los cálculos realizados por CosmoSIS, en la figura 5.9 CMASSDR12 (gráfica superior), se observa que el modelo Λ CDM se aproxima ligeramente a los datos de BOSS, desviándose para la descripción de las BAO, correspondiente a valores de k grandes ($k > 0.1 Mpc^{-1} h^{-1}$).

Como segunda aproximación, en la figura 5.9 LOWZDR12 (gráfica inferior), el valor del ajuste para Λ CDM se encuentra ligeramente desviado. En ambas gráficas de la figura (5.9), se encuentra que el comportamiento de los cuadrupolos esta desviado de las mediciones, por lo que podrían deberse a varios casos: Primero, a que estrictamente los términos cuadrupolares en distintas etapas del Universo ($z_{mass} = 0.57$, $z_{lowz} = 0.32$) no deberían describir los mismos comportamientos (el valor de b depende del modo k , por lo que definitivamente debe ser una función y no una constante). Segundo, el valor de γ de la ley de potencias en distintas etapas del Universo cambie. Tercero, a que las perturbaciones de la energía oscura fueran más o menos relevantes en distintas etapas del Universo, es decir a diferentes z .

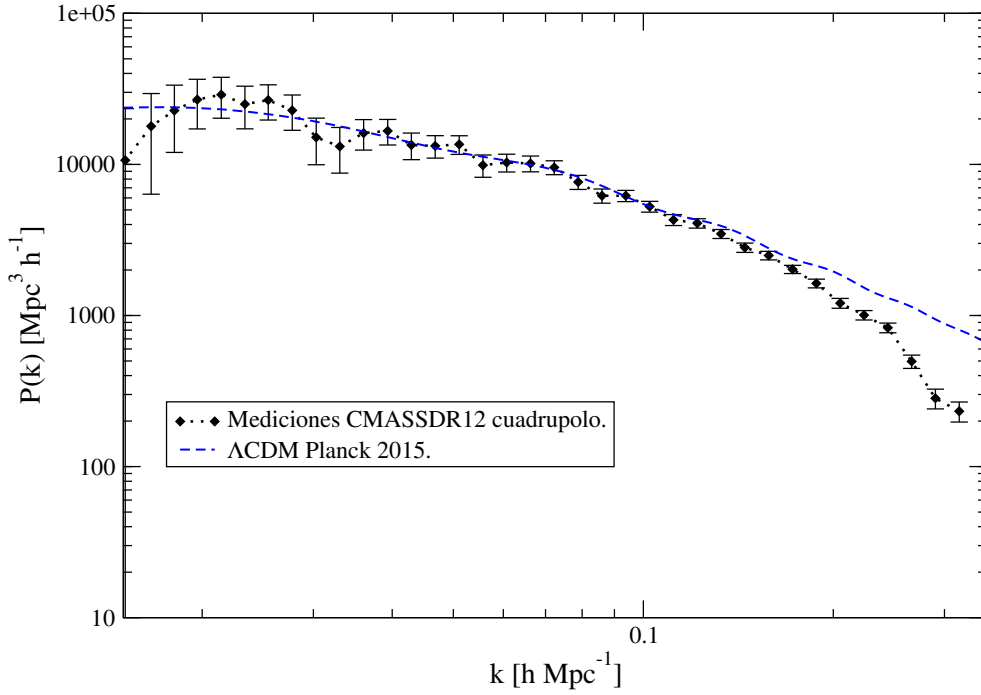
Como último paso, se propone encontrar un ajuste para el valor de γ a partir de la ecuación (5.15) y sustituirla en la ecuación (5.14), en donde se pretende de nuevo variar el espectro de potencias de materia considerando el mejor ajuste del modelo CPL a través de la figura CMASSDR12 5.9, veamos lo siguiente.

Tomando el modelo CPL de CosmoSIS, se ajusto aún más el espectro de potencias de materia. En la figura 5.2 se observó que el espectro de potencias se modificaba de acuerdo a la contribución de los modelos (ω_0, ω_a). Por lo que, aplicando esta idea, se encuentra una corrección para RSD, que como lo dijimos antes, es sólo para CMASS y de manera análoga como se realizó con el modelo Λ CDM, ver ecuación (5.16). Entonces obtuvimos el siguiente resultado:

$$\text{CPL} \quad P_2^s(k) \approx 1.3812P(k) \quad \text{CMASS } (z = 0.57) \quad \text{para } \gamma \approx 0.5654. \quad (5.17)$$

Como se menciona, el índice de crecimiento γ fue obtenido a partir de la ecuación (5.15) y con base a la figura 5.6 obtenida en CosmoSIS. Este resultado está representado en la figura 5.10.

Resultados Λ CDM+CosmoSIS CMASSDR12



Resultados Λ CDM+CosmoSIS LOWZDR12

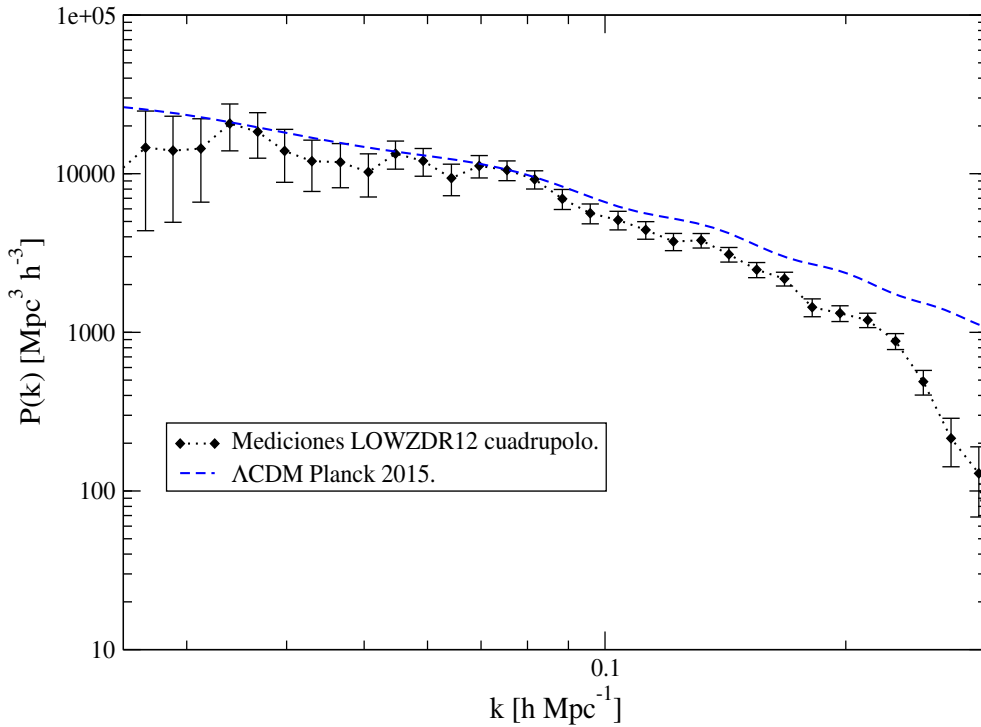


Figura 5.9: Resultados obtenidos del modelo Λ CDM implementado en CosmoSIS con la corrección para RSD. Los cálculos encontrados de la corrección RSD están representados en la ecuación (5.16). El principal argumento de estas gráficas es comparar los cálculos del modelo Λ CDM de CosmoSIS con las gráficas realizadas a partir de los datos de BOSS. En general, la teoría de Hamilton para los cuadrupolos esta cercana a las mediciones, pero el modelo con z_{mass} se ajusta aún más que z_{lowz} .

Finalmente, se pudo encontrar que el mejor ajuste del modelo CPL de CosmoSIS, a la corrección RSD de la ecuación (5.17), esta representado por el modelo: $\omega_0 = -0.8$ y $\omega_a = 0.3$. En la figura 5.10, el modelo CPL con corrección RSD esta representado mediante triángulos verdes⁷. Los cálculos también se hicieron sólo para CMASSDR12, correspondiente a una z_{mass} efectiva. En principio, si se quisieran hacer los cálculos para LOWZDR12, el método es similar a los realizados en las ecuaciones (5.16) y (5.17).

Resultados CPL+CosmoSIS CMASSDR12

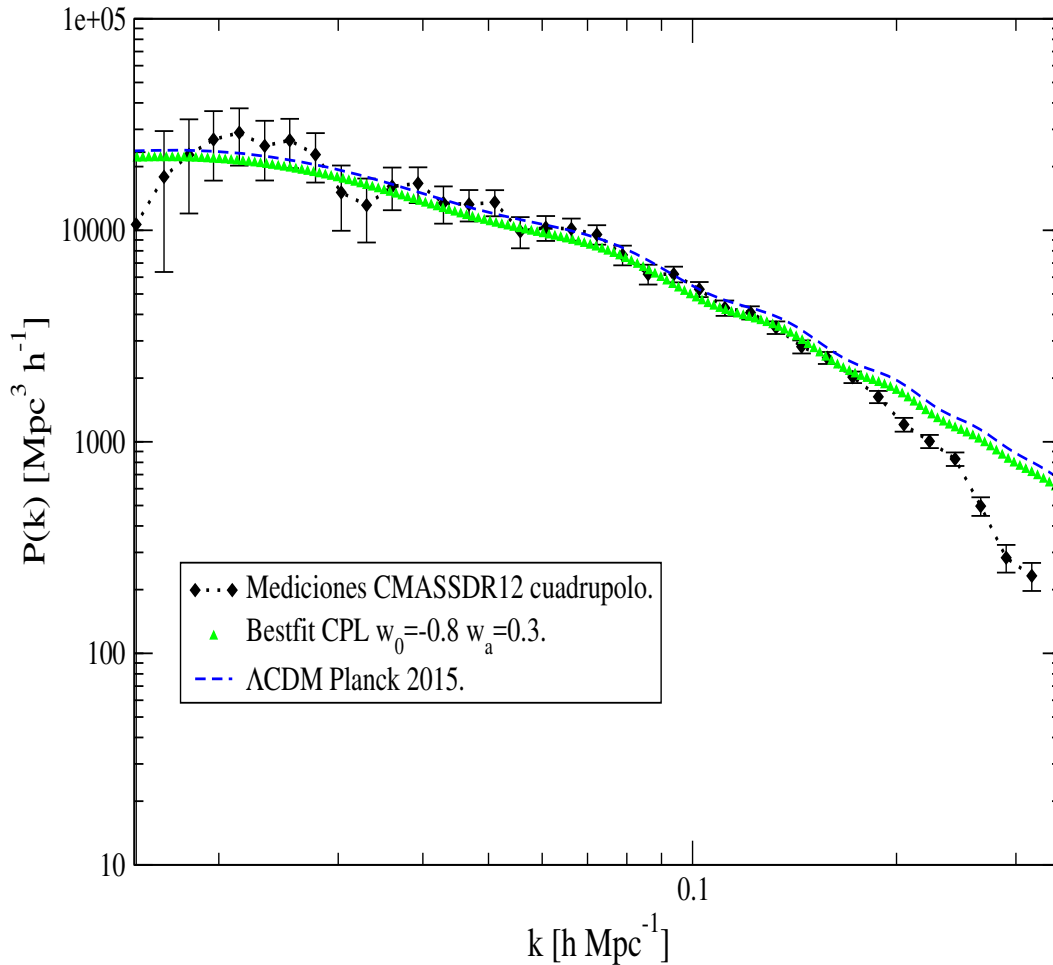


Figura 5.10: Resultados obtenidos de este trabajo. Se comparan tanto las mediciones CMASSDR12, el modelo Λ CDM y el modelo CPL. A partir de perturbar el modelo Λ CDM mediante el modelo CPL, observamos que el ajuste a los parámetros ω_0 y ω_a mediante la ecuación (5.14) y la figura 5.6, tambien se acerca a las mediciones de BOSS. Esto es trivial ya que simplemente se esta perturbando el modelo Λ CDM recordando que la teoría propuesta es sólo a primer orden.

⁷El mejor ajuste de los parámetros ω_0 y ω_a se realizó con el software Gnuplot, mediante la programación de la función (5.14) y los datos arrojados por CosmoSIS en la figura 5.6. El método de ajuste de Gnuplot es mediante mínimos cuadrados.

El ajuste de los parámetros ω_0 y ω_a , se refleja en el comportamiento de los cuadrupolos en la figura 5.10. El modelo Λ CDM es perturbado por el modelo CPL, por lo que en esta última aproximación, ambos modelos se proyectan cerca de las mediciones de BOSS. Para concluir, veamos los siguientes errores. El índice de crecimiento encontrado del modelo CPL (5.17) en comparación con el índice de Λ CDM tiene un error de la forma:

$$\Delta\gamma = \left\| \frac{0.55 - 0.5654}{0.55} \right\| \times 100\% = 2.8\%. \quad (5.18)$$

En la ecuación (5.18), un error del 2.8% es mínimo en comparación con el modelo Λ CDM, entonces la aproximación realizada por Linder para el índice de crecimiento, ecuación (5.15), es de confianza en esta teoría.

Por otra parte, la colaboración Planck [5] estima una ecuación de estado cercana a la constante cosmológica, $\omega = -1$, por lo que, el ajuste encontrado a los parámetros del modelo CPL en este trabajo, tienen un error del 20% a tiempo actual ($a = 1$) y un error aun más grande a tiempos tempranos ($a = 0$). Esto se debe a que la densidad de energía oscura siempre tuvo un valor específico y fue constante en el tiempo (ver figura 3.1). Además, se deben considerar a los parámetros del modelo CPL mínimamente alejados de su valor central $(\omega_0, \omega_a) = (-1, 0)$. Entonces el ajuste del modelo encontrado aquí se debe corregir de tal forma que se aproxime al valor central. Esto se deberá realizar a través de CosmoSIS y Gnuplot. Finalmente, cabe mencionar que en todos estos cálculos la teoría es válida sólo a primer orden, y esto se refleja en las mediciones y comparaciones de las figuras 5.9 y 5.10. La teoría sólo se desarrolla para valores $k \leq 0.1$, ya que para valores mayores a éste la teoría cambia, y se tendrían que considerar perturbaciones de orden superior para describir las BAO, como lo hacen en diferentes teorías [45].

Capítulo 6

Conclusiones

Efectivamente, hablar de la energía oscura genera controversia ya que se considera un motivo para que el Universo se acelere en la época actual. La fundamentación de que la posible causante de esta aceleración sea la energía oscura, es fuertemente apoyada por pruebas astronómicas como supernovas tipo Ia, datos de la RFC, estructura a gran escala, entre otras. Es por eso que se necesitan nuevas teorías para ayudar a entender más la naturaleza cosmológica de la energía oscura, ya que no se tiene un entendimiento certero de ésta. Como se ha dicho el candidato más simple para la energía oscura es la constante cosmológica Λ considerada como una energía del vacío, cuya ecuación de estado tiene un valor de -1 . Sin embargo, ésta sufre de un problema teórico como lo es el ajuste fino. A consecuencia de esto, la parametrización CPL de la ecuación de estado ω ha sido frecuentemente usada y restringida con datos observacionales para el estudio de éste ente oscuro.

En la tesis presente, estudiamos la cosmología moderna desde Relatividad General hasta las distorsiones del corrimiento al rojo, pasando por diferentes consideraciones un tanto complejas. Los cálculos se hicieron a través del código numérico CosmoSIS, con la finalidad de proponer un ajuste para los parámetros ω_0 y ω_a , que definen la parametrización CPL vía $\omega_{eo} = \omega_0 + \omega_a(1 - a)$. Se obtuvieron efectos relevantes sobre los espectros de potencias angulares de la RFC y los espectros de potencias de las fluctuaciones de materia, en donde cada modelo CPL contribuía específicamente en la modificación de los espectros. Por otro lado, la función de crecimiento f tuvo que ser reajustada de acuerdo a la teoría desarrollada, que también involucró y re definió el índice de crecimiento γ . Los cálculos hechos para la corrección RSD a través del espectro de potencias $P(k)$ y la teoría de Hamilton, se aproximaron a las mediciones de los diferentes catálogos de BOSS, sin embargo, el ajuste de los parámetros CPL se desvían demasiado del valor central Λ CDM, por lo que es necesario refinar la teoría empleada, y si es posible, considerar perturbaciones de orden mayor a 1 y codificarlas en CosmoSIS.

Finalmente, concluimos que el ajuste del modelo CPL encontrado sufre de un error bastante grande respecto al modelo Λ CDM. La teoría es buena, pero creemos que hace falta trabajar en el ajuste, es decir, en la codificación de CosmoSIS. También consideramos que los parámetros del modelo CPL deben estar mínimamente alejados de su valor central $(-1, 0)$, como lo argumentan los resultados de la colaboración

Planck. A continuación se describen un listado de conclusiones generales a partir de los resultados obtenidos en los capítulos 4 y 5:

- ◇ Considerando el modelo CPL propuesto cuya ecuación de estado ω está parametrizada, se tuvo que emplear la teoría PPF como una corrección a la ecuación de Poisson, con la finalidad de incorporar las perturbaciones de la energía oscura y con esto analizamos la dinámica evolutiva de ésta perturbación.
- ◇ Actualmente trabajamos en modelos específicos de energía oscura para implementarlos en los programas CAMB, MGCAMB y CosmoSIS.
- ◇ Desde nuestro punto de vista, CosmoSIS es un proyecto excelente además de unificar códigos tanto de CAMB, MGCAMB, cosmoMC, entre otros; estos se encuentran integrados en CosmoSIS y al mismo tiempo su plataforma está en constante actualización.
- ◇ Implementando el modelo de energía oscura CPL en CosmoSIS, se observó que el espectro de potencias angular de la RFC varía de acuerdo a cada modelo CPL, en donde el comportamiento es de izquierda (para valores de $\omega_0 > -1$ y $\omega_a > 0$) a derecha (para valores $\omega_0 < -1$ y $\omega_a < 0$). Análogamente a cada modelo, el espectro de potencias de materia varía de abajo ($\omega_0 > -1, \omega_a > 0$) hacia arriba ($\omega_0 < -1, \omega_a < 0$). La finalidad de estas variaciones es manipular y ajustar el espectro de potencias de materia a las mediciones astronómicas, tomando como referencia el modelo Λ CDM.
- ◇ A partir de los resultados obtenidos en la teoría PPF, encontramos una ecuación diferencial de segundo orden para G en términos de la función μ , que tendrá como solución a la función de crecimiento f . Dicha ecuación para G , queda determinada ya sea para modelos de energía oscura como para gravedad modificada, recuperando con $\mu = 1$ el modelo Λ CDM.
- ◇ Se propone implementar y resolver en CosmoSIS la ecuación para G , considerando tanto a la función μ estrictamente en términos de la parametrización CPL y a la condición adiabática.
- ◇ Para considerar las distorsiones del corrimiento al rojo, se usó la aproximación de Hamilton a partir de los trabajos hechos por N. Kaiser. Para hacer un comparativo con datos reales, se usó dicha aproximación de Kaiser sólo para los cuadrupolos del espectro de potencias de materia a un corrimiento al rojo efectivo $z = 0.57$, mostrando los cálculos para dichas correcciones.
- ◇ Se construyó teóricamente la función de crecimiento f en términos del índice de crecimiento γ . También se tomó el valor de γ a partir de la propuesta de E. Linder, en donde es posible recuperar el valor central ($\gamma = 0.55$) para el modelo Λ CDM.
- ◇ El mejor ajuste para los parámetros ω_0, ω_a se realizó a través de Gnuplot mediante mínimos cuadrados y programando la función de crecimiento f , en donde se encuentra que dicho modelo lo representa ($\omega_0 = -0.8, \omega_a = 0.3$),

sin embargo el error de estos ajustes respecto del modelo Λ CDM es bastante grande y es necesario reajustar los cálculos en CosmoSIS. Además, para el índice de crecimiento γ , el error con respecto al modelo Λ CDM es del 2.8%, por lo que la propuesta de Linder es confiable.

- ◇ La teoría empleada es sólo a primer orden en teoría perturbativa, y esto se refleja en el espectro de potencias de las fluctuaciones de materia, que sólo para valores de $k \leq 0.1$ la teoría funciona correctamente.

Me atrevo a decir que el modelo CPL es una buena propuesta para el ajuste de la ecuación de estado de la energía oscura, ya que con este modelo pudimos darnos cuenta que las ecuaciones terminan devolviendo en cierto límite a las ecuaciones del modelo Λ CDM y la física extraída no viola ningún principio. Creo firmemente que dándole seguimiento a este proyecto desarrollando nuevos códigos, es posible encontrar una aproximación cercana para el ajuste fino de la constante cosmológica.

6.1. Perspectivas

- ◇ Reajustar finamente los modelos de interés empleados en el programa CosmoSIS.
- ◇ Programar detalladamente en CosmoSIS la evolución de δ en términos de la función G encontrada en el capítulo 5, y con esto, refinar la función de crecimiento f para proponer modelos más certeros de los parámetros CPL.
- ◇ Considerar perturbaciones de orden mayor a 1 y emplearlas en CosmoSIS, con la finalidad de considerar la teoría no lineal, y al mismo tiempo tener una mejor descripción del espectro de potencias de materia.
- ◇ Considerar modelos realistas de bias, ya que actualmente se considera que $b(z)$ es una función y no una constante. Este hecho afectaría directamente la descripción del espectro de materia.

Bibliografía

- [1] Supernova Search Team Collaboration, A. G. Riess et al., “*Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*,” (Astron. J. 116 1998 1009 1038, arXiv:astro-ph/9805201).
- [2] Supernova Cosmology Project, Saul Perlmutter et al., “*Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*,” (Astrophysical J. 517: 565 86, arXiv:astro-ph/9812133).
- [3] S. Perlmutter et. al., *Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae*, Ap. J. 517 (1999) : 565-586.
- [4] E. Hubble, “*A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*,” Proceedings of the National Academy of Sciences 15 (1929) 168 173.
- [5] Planck Colaboration, *Planck 2015 results. XII. Cosmological parameters*, (Planck Coll. XII. 2015, ArXiv e-prints, arXiv:1502.01589v3).
- [6] A. A. Penzias and R. W. Wilson, *A measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s*, Astrophys. J. 142 (1965), 419.
- [7] WMAP Collaboration, C. L. Bennett et al., “*First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results*,” Astrophys.J.Suppl. 148 (2003) 1, arXiv:astro-ph/0302207 [astro-ph].
- [8] White, M., “*Anisotropies in the CMB*,” Proceedings of the Los Angeles Meeting, DPF 99. UCLA. arXiv:astro-ph/9903232, (1999).
- [9] Andrew Liddle, *An Introduction To Modern Cosmology*, Second Edition, University of Sussex, UK.
- [10] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, 1972, by John Wiley and Sons, Inc, page 412.
- [11] H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner, *Fundamental Astronomy*, 5th Edition, Springer Berlin Heidelberg, New York.
- [12] Hale Bradt, *Astronomy Methods, A Physical Approach to Astronomical Observations*, 1a Edition, Cambridge University Press 2004.

- [13] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, (Princeton Series in Astrophysics, 2008, 2. edicion).
- [14] J. Lesgourgues, *Cosmological perturbations*, astro-ph., arXiv:1302.4640v1, Feb. 2013.
- [15] E. Komatsu et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, Astrophys. J. Suppl., arXiv:1001.4538, 2011.
- [16] Wayne Hu, Scott Dodelson, *Cosmic Microwave Background Anisotropies*, Annu. Rev. Astron. and Astrophys. 2002.
- [17] Leitch, E.M., et al., *Measurement of polarization with the Degree Angular Scale Interferometer*, Nature. 420 (6917): 763-771, 2002, arXiv:astro-ph/0209476.
- [18] A. J. S. Hamilton, *Linear Redshift Distortions: a review*, JILA, Dept. of Astrophysical and Planetary Sciences, U. Col. USA; box 440, arXiv:astro-ph/9708102.
- [19] Padmanabhan, T. (1993), *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [20] P. Ratra, L. Peebles, *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*, Physical Review D., 37 (12): 3406, 1998.
- [21] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, *Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state*, Phys. Rev. Lett. 80 (1998), 1582.
- [22] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy Theory and Observations*, Cambridge University Press, 2010.
- [23] Josue-de-Santiago and Jorge L. Cervantes-Cota, *On the dynamics of unified k-essence cosmologies*, arXiv:1206.2036 [astro-ph.CO].
- [24] Kazuya Koyama, *Cosmological Tests of Modified Gravity*, Rept. Prog. Phys.,79(4):046902, 2016.
- [25] I. Maor, R. Brustein, J. McMahon, and P.J. Steinhardt, *Measuring the Equation-of-state of the Universe: Pitfalls and Prospects*, Phys. Rev. D 65, 123003 (2002), arXiv:astro-ph/0112526v1.
- [26] W. Hu and I. Sawicki, *A Parameterized Post-Friedmann Framework for Modified Gravity*, Phys. Rev. D76, 104043 (2007), [arXiv:0708.1190].
- [27] W. Hu, *Parameterized Post-Friedmann Signatures of Acceleration in the CMB*, Phys. Rev. D77, 103524 (2008), [arXiv:0801.2433].
- [28] Wenjuan Fang, Wayne Hu, Antony Lewis, *Crossing the Phantom Divide with Parameterized Post-Friedmann Dark Energy*, arXiv:0808.3125 [astro-ph].

- [29] Jorge L. Cervantes-Cota and George Smooth, *Cosmology today-A brief review*, AIP Conf. Proc. 1396, 28 (2011); doi: 10.1063/1.3647524.
- [30] <https://bitbucket.org/joezuntz/cosmosis/wiki/Home>
- [31] Joe Zuntz et al., *CosmoSIS: Modular cosmological parameter estimation*, arXiv:1409.3409v1 [astro-ph.CO], 2014.
- [32] <http://camb.info/>
- [33] <http://aliojjati.github.io/MGCAMB/>
- [34] Alireza Hojjati, Levon Pogosian, Gong-Bo Zhao, *Testing gravity with CAMB and CosmoMC*, arXiv:1106.4543 [astro-ph.CO].
- [35] Philippe Brax et. al., *arXiv:1203.4812v2 [astro-ph.CO] 28 Mar 2012 A Unified Description of Screened Modified Gravity*, arXiv:1203.4812 [astro-ph.CO].
- [36] Edmund Bertschinger, Phillip Zukin, *Distinguishing Modified Gravity from Dark Energy*, arXiv:0801.2431 [astro-ph].
- [37] Timothy Clifton, et al., *Modified Gravity and Cosmology*, Phys. Rept., 513:1-189, 2012.
- [38] N. Kaiser. *Clustering in real space and in redshift space*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 227:1-27, 1987.
- [39] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikava, *Int. J. Mod. Phys. D* 15, 1753 (2016) [arXiv:hep-th/0603057v3].
- [40] E. V. Linder, *Cosmic Structure Growth and Dark Energy*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 1 11 (2002), arXiv:astro-ph/0305286v2.
- [41] Anderson, Erling B., *Asymptotic Properties of Conditional Maximum Likelihood Estimators*, Journal of the Royal Statistical Society, 283-301, 1970.
- [42] Héctor Gil-Marín, Will J. Percival, Licia Verde, Joel R. Brownstein, Chia-Hsun Chuang, Francisco-Shu Kitaura, Sergio A. Rodríguez-Torres and Matthew D. Olmstead, *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the LOS-dependent power spectrum of DR12 BOSS galaxies*, arXiv:1509.06386 [astro-ph.CO].
- [43] Paul L. Lightman, Alan P. Schechter, *The Omega dependence of peculiar velocities induced by spherical density perturbations.*, Astrophysical Journal Supplement Series (ISSN 0067 0049), vol. 74, Dec. 1990, p. 831, 832., pages 1 & 2, 1990.
- [44] Eric V. Linder, *Cosmic Growth History and Expansion History*, arXiv:astro-ph/0507263.

- [45] Suresh Kumar and Lixin Xu, *Observational constraints on variable equation of state parameters of dark matter and dark energy after Planck*, arXiv:1207.5582 [gr-qc].