Universidad Autónoma de Estado de México
Facultad de Economía

Probabilidad

Temas

1. Probabilidad y Eventos
2. Variables Aleatorias
3. Distribuciones de Probabilidad y
4. Distribuciones muestrales.

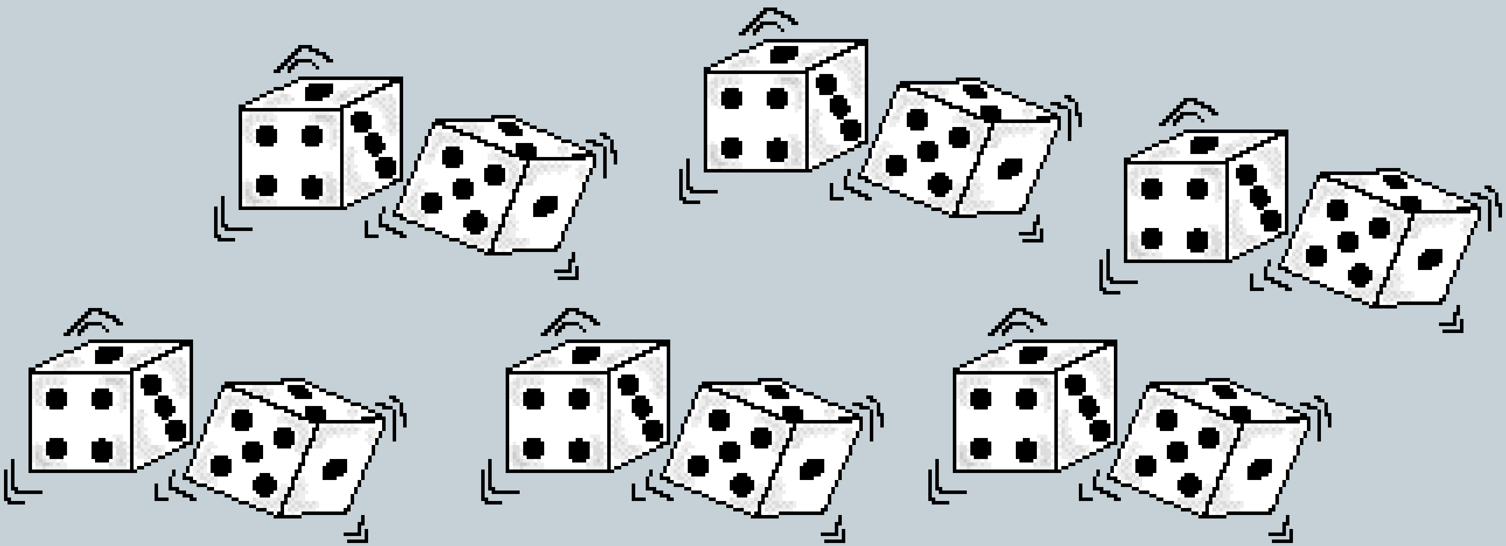
Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Universidad Autónoma de Estado de México

Facultad de Economía

Nomenclatura básica de Probabilidad

PROBABILIDAD Y EVENTOS



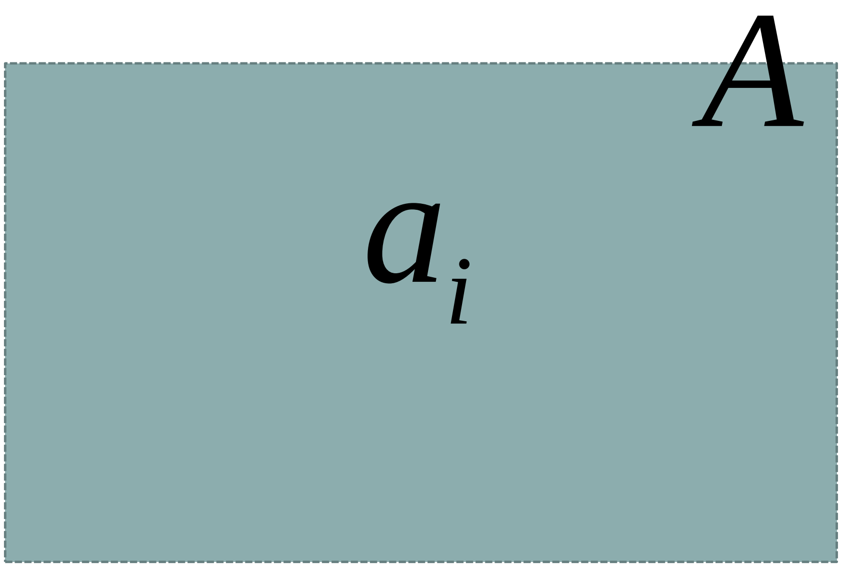
Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Conjuntos

Generalidades

1. Conjuntos y Elementos
2. Determinación por Extensión
3. Determinación por Comprensión
4. Conjunto Universal
5. Conjunto Vacío
6. Axioma de Extensión .

Cualquier colección de objetos que pueda tratarse como una entidad.



$$a_{i=} \forall i = 1,2,\ldots,n$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

$$a_1 \in A \text{ pero } a_{n+1} \notin A$$

Sin ambigüedades

Se especifican todos los elementos que forman el mismo.

El conjunto de las vocales del alfabeto.

A = {a, e, i, o, u}

El conjunto formado por los números enteros pares no negativos y menores que diez.

B = {0, 2, 4, 6, 8}

Se especifica una propiedad que caracteriza a todos los elementos del mismo.

El conjunto de los enteros mayores que diez.

$$A = \{x \mid \in Z \wedge x > 10\}$$

El conjunto de los enteros pares.

$$B = \{x \mid \in Z \wedge \exists y \in Z \wedge x = 2y\}$$

El conjunto {1, 2, 3, 4, 5}

$$C = \{x \mid \in Z \wedge 1 \leq x \leq 5\}$$

Algunos conjuntos de uso frecuente usan símbolos especiales para designarlos.

Z: Conjunto de los números enteros.

$N = Z^{+}$: Conjunto de los números naturales o enteros positivos.

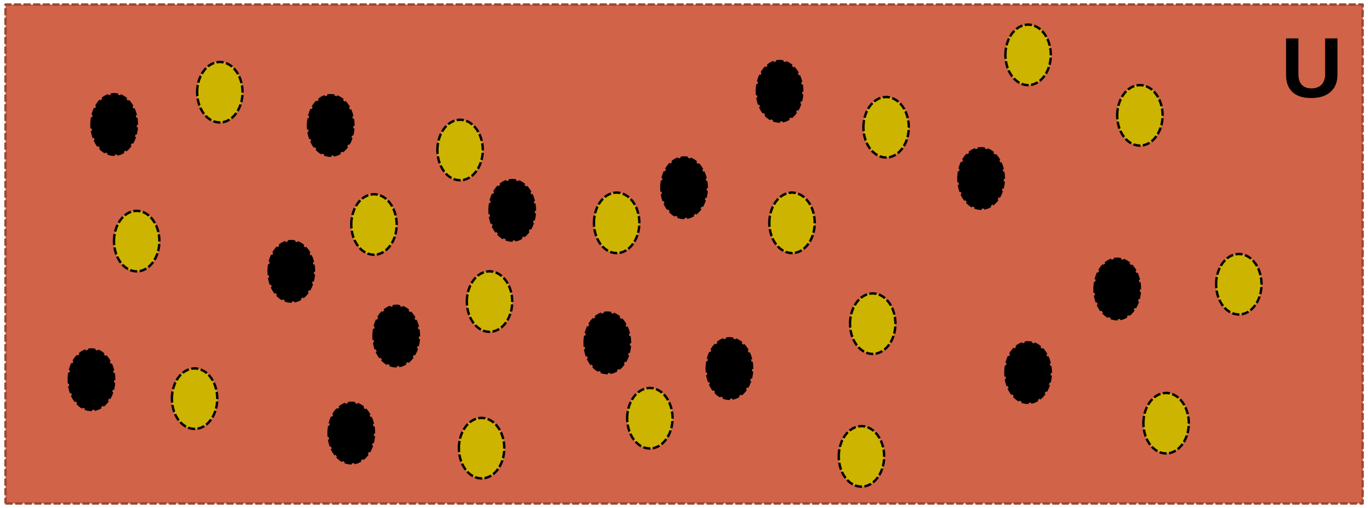
Z_0^{+} : Conjunto de los enteros no negativos.

Q: Conjunto de los números racionales.

R: Conjunto de los números reales.

C: Conjunto de los números complejos.

Los elementos de todos los conjuntos en consideración pertenecen a un gran conjunto fijo llamado conjunto universal. Lo notaremos por U .



Conjunto único que no contiene elementos. Lo denotamos por $\phi = \{ \ \}$

Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos. Es decir, cada elemento del conjunto A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A. $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$$A = \{1,2,3\} \quad B = \{3,2,3,1\}$$

$$A = B$$

Inclusión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que

$$A \subseteq B$$

si cada elemento de A es un elemento de B, es decir,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

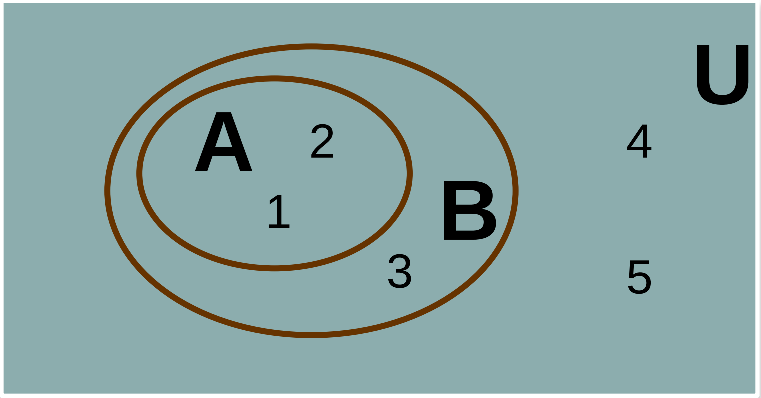
También puede decirse que $B \supseteq A$

$$\text{Sean } A \text{ y } B \text{ dos conjuntos:}$$

$$A = \{1,2\};\, B = \{1,2,3\}$$

$$\rightarrow A \subseteq B : 1 \in A \wedge 1 \in B; 2 \in A \wedge 2 \in B$$

$$\text{Pero } B \not\subset A : 3 \notin A$$



Si $A \subseteq B$ y además B tiene un elemento que no está en A, diremos que A está estrictamente incluido en B o que A es un subconjunto propio de B y lo notaremos por $A \subset B$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \left[\exists x : (x \in B \wedge x \notin A)\right]$$

Se sigue que $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Los conjuntos también son objetos, luego pueden ser elementos de otros conjuntos

$$A = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b\},\{c\}\}$$

$$B = \{A\}$$

$$C = \{A, B\} = \{A, \{A\}\}$$

Un caso curioso ocurre con el conjunto vacío

$$\phi \neq \{\phi\} \because \phi \in \{\phi\} \wedge \phi \subset \{\phi\} \text{ pero } \phi \neq \{\phi\}$$

1. Sea **U** el conjunto universal y **A** un conjunto cualquiera. Entonces

$$A \subseteq U$$

2. Sea **A** un conjunto cualquiera, entonces:

$$\phi \subseteq A$$

Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A=\{a,b\}$

$A_s=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

Observa que: $\{a\}\subseteq\{a,b\}\wedge a\in\{a,b\}$, pero

$a\not\subset\{a,b\}\wedge\{a\}\notin\{a,b\}$

También $\phi\subseteq\{a,b\}$, pero $\phi\notin\{a,b\}$

Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A=\{\{a\}\}$

$A_s=\{\phi,\{a\}\}$

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U. Entonces

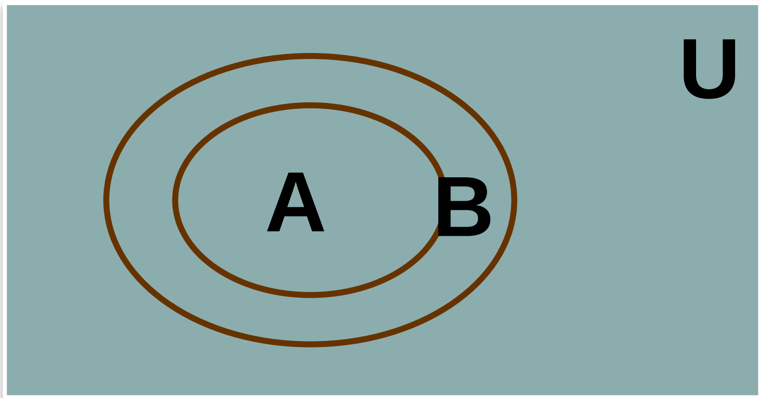
$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

De la caracterización anterior se sigue que para cualquier conjunto A, se verifica que: $A \subseteq A$

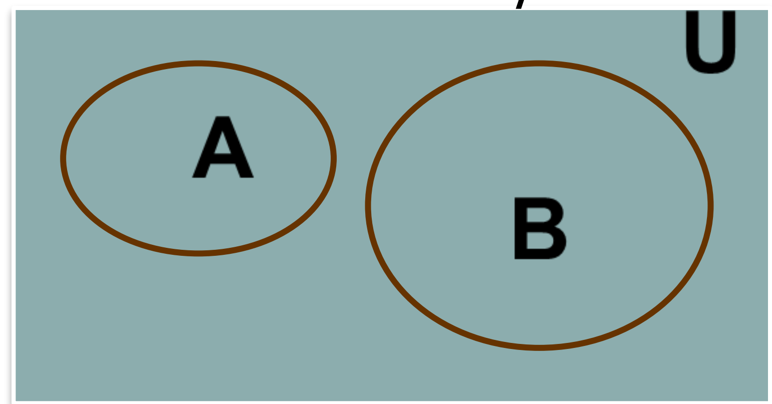
Sean A,B y C tres conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U. Si

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

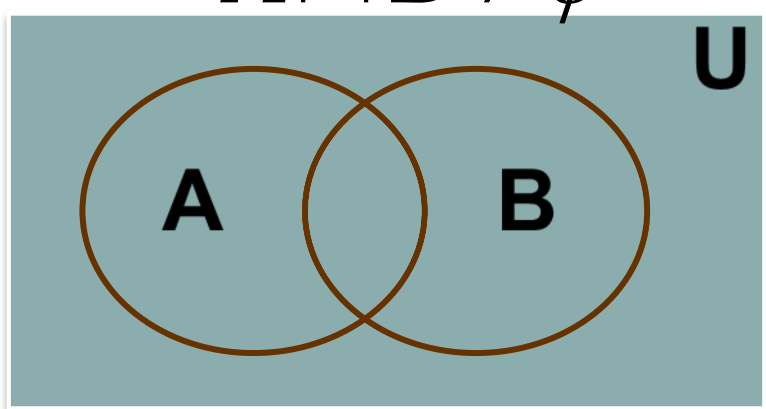
$$A \subseteq B$$



$$A \cap B = \phi$$



$$A \cap B \neq \phi$$



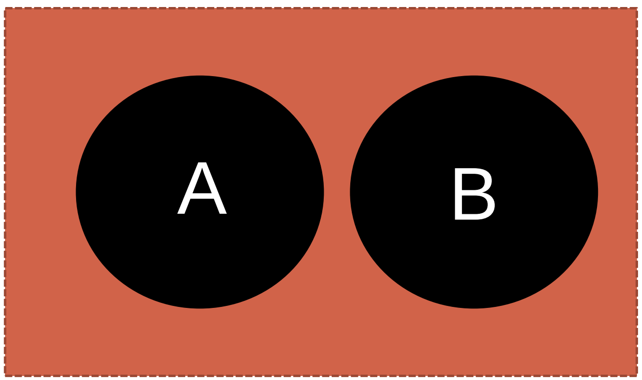
Operaciones con Conjuntos

Definiciones

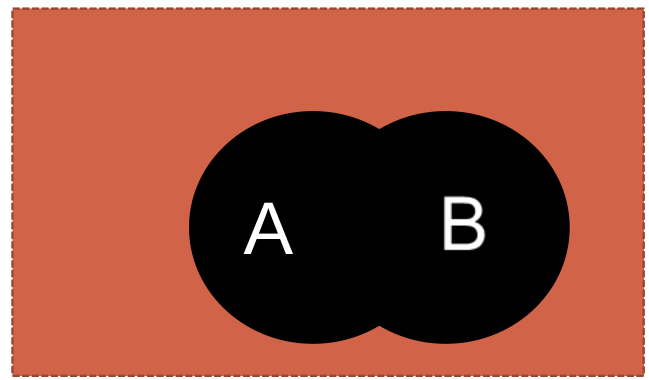
1. Unión
2. Intersección
3. Diferencia
4. Complementario
5. Diferencia Simétrica

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



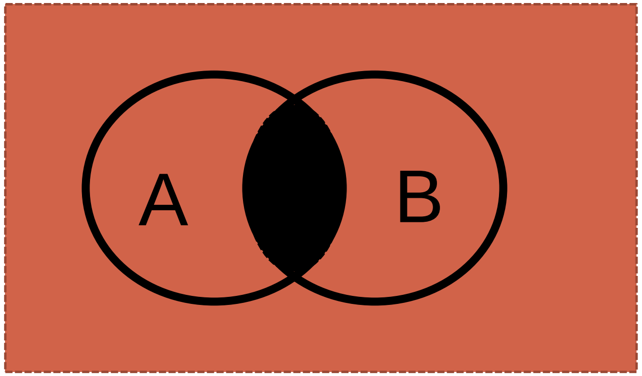
■ $A \cup B$



La disyunción, v, se utiliza en el sentido inclusivo, es decir, significa "y/o".

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B.

$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \wedge x \in B \right\}$$

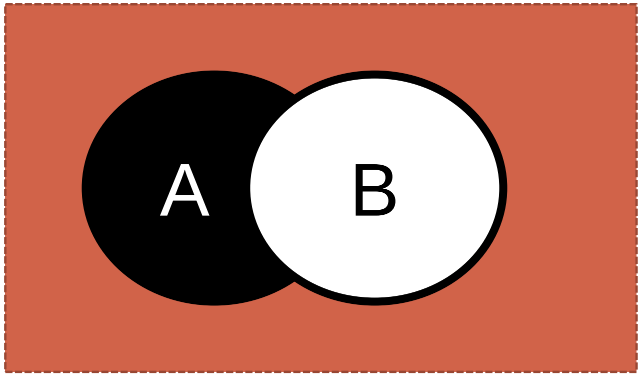


■ $A \cap B$

Si A y B no tienen elementos en común, entonces diremos que A y B son conjuntos disjuntos

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

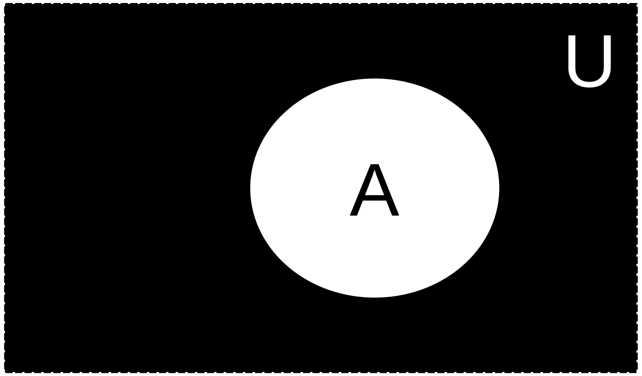


■ $A - B$

El conjunto "A menos B" recibe también el nombre de complementario relativo del conjunto B respecto del conjunto A.

El complementario de un conjunto A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A.

$$A^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$$

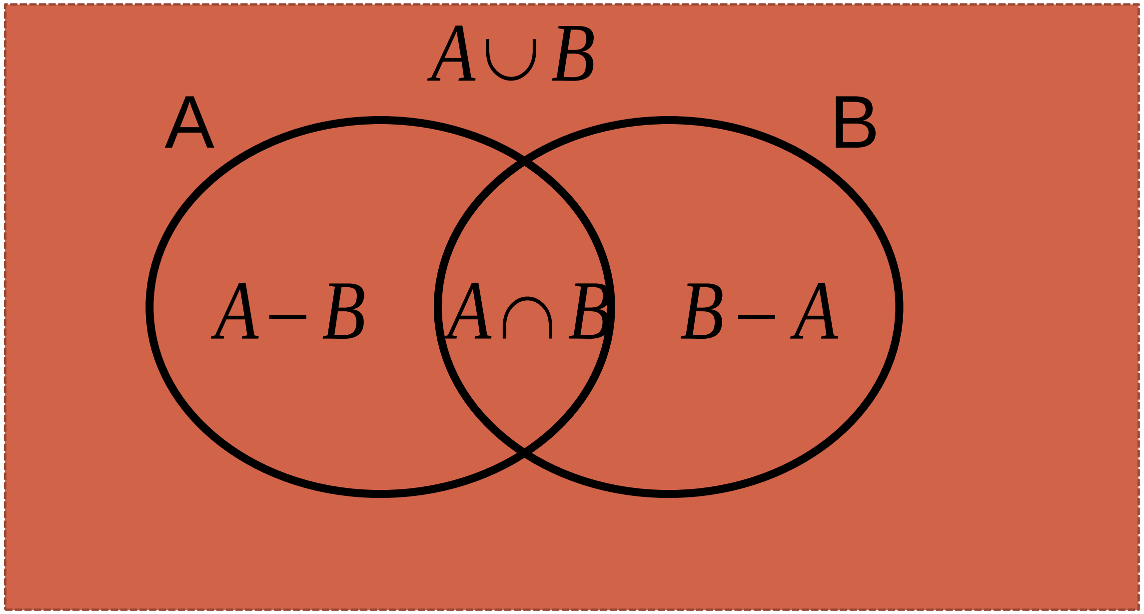


A^c

Obsérvese que el complementario de A es igual a la diferencia entre U y A.

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



Algebra de conjuntos. Dualidad

1. Leyes Idempotentes
2. Leyes Conmutativas
3. Leyes Asociativas
4. Leyes Distributivas
5. Leyes de Identidad
6. Ley Involutiva
7. Leyes del Complementario
8. Leyes de De Morgan.
9. Conjunto de las Partes de un Conjunto

Dado cualquier conjunto A en un universal arbitrario U, se verifica:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Sea $A = \{1,3,5\}$

$$A \cup A = \{1,3,5\}$$

$$A \cap A = \{1,3,5\}$$

Dados dos conjuntos A y B de un universal arbitrario U, se verifica:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Sean $A = \{1,3,5\}; B = \{2,3,4\}$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\} = B \cup A$$

$$A \cap B = \{3\} = B \cap A$$

Dados tres conjuntos A,B y C de un universal arbitrario, U, se verifica:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Sean $A = \{1,3,5\}; B = \{2,3,4\}; C = \{3,6,9\}$

$$B \cup C = \{2,3,4,6,9\} \rightarrow A \cup (B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6,9\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \rightarrow (A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,9\}$$

$$B \cap C = \{3\} \rightarrow A \cap (B \cap C) = \{3\}$$

$$A \cap B = \{3\} \rightarrow (A \cap B) \cap C) = \{3\}$$

Dados tres conjuntos A,B y C de un universal arbitrario, U, se verifica:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Sean

$$A = \{1,3,5\}; B = \{2,3,4\}; C = \{3,6,9\}$$

$$B \cap C = \{3\} \rightarrow A \cup (B \cap C) = \{1,3,5\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\} \wedge (A \cup C) = \{1,3,5,6,9\}$$

$$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,3,5\}$$

Dado un conjunto A cualquiera de un universal arbitrario, U, se verifica:

$$1)\, A \cup \phi = A$$

$$2)\, A \cup U = U$$

$$3)\, A \cap \phi = \phi$$

$$4)\, A \cap U = A$$

Dado un conjunto cualquiera A de un universal U, se verifica:

$$(A^c)^c = A$$

Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\};\ A = \{1,3,5\}$

$$A^c = \{2,4,6,7,8,9,10\}$$

$$(A^c)^c = \{1,3,5\}$$

Dado un conjunto A cualquiera de un universal arbitrario, U, se verifica:

$$1)\ A \cup A^{c} = U$$

$$2)\ U^{c} = \phi$$

$$3)\ A \cap A^{c} = \phi$$

$$4)\ \phi^{c} = U$$

Dados dos conjuntos A y B en un universal U, se verifica:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Dado un conjunto A, llamaremos conjunto de las partes de A a la clase o colección de todos los subconjuntos de A y se nota por $\wp(A)$.

si X es un conjunto cualquiera de U, entonces $X \in \wp(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$

Sea A = {1, 2, 3}. Entonces,
$\wp(A)$= {{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

Si el conjunto A es finito y tiene n elementos, entonces $\wp(A)$ también es un conjunto finito y tiene 2^n elementos.

Producto cartesiano de conjuntos

1. n-tupla ordenada
2. Igualdad de n-tuplas
3. Producto cartesiano
4. Propiedades . .

Se Llama n-tupla ordenada a una sucesión de n objetos a1, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dados en un cierto orden y la notaremos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (a_2, a_1, \ldots, a_n)$$

Dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, sus i-ésimas componentes son iguales para todo i, es decir,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow$$

$$a_i = b_i \forall, 1 \leq i \leq n$$

Dada una colección arbitraria de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ llamaremos producto cartesiano de los mismos y lo notaremos por $A_1 \mathrm{x} A_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} A_n$, al conjunto formado por todas las n-tuplas ordenadas.

$$A_1 \mathrm{x} A_2 \mathrm{x} \ldots \mathrm{x} A_n = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_i \in A_i \forall, 1 \leq i \leq n\}$$

En el caso de dos conjuntos A y B, tendremos

$$A \mathrm{x} B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

y este producto se llama binario si A = B, o sea,

$$A \mathrm{x} A = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A\} \qquad A^2 \text{ por extensión } A^n$$

Sea

$$A = \{1,2\} \text{ y } B = \{a,b,c\} \rightarrow$$

$$A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

$$B^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

$$A\text{x}B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$B\text{x}A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

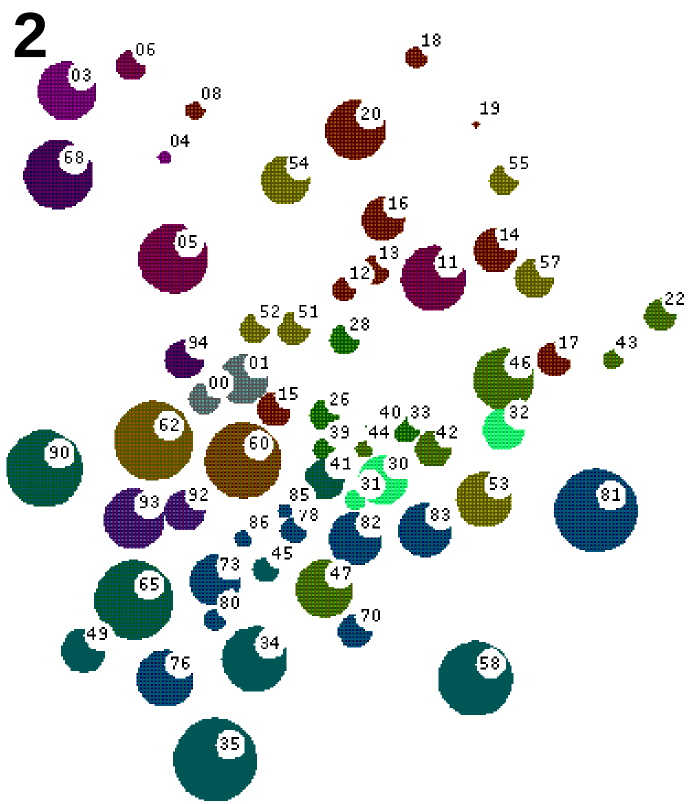
El producto cartesiano es distributivo respecto de la unión y la intersección de conjuntos, es decir, si A,B y C son tres conjuntos cualesquiera, se verifica:

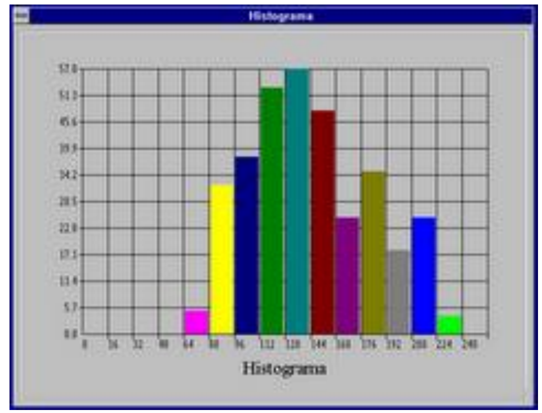
$$a)\,Ax(B\cup C)=(AxB)\cup(AxC)$$

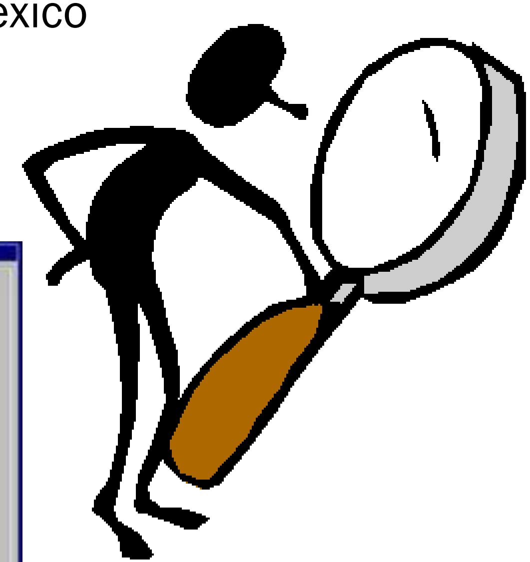
$$b)\,Ax(B\cap C)=(AxB)\cap(AxC)$$

$$c)\,(A\cup B)xC=(AxC)\cup(BxC)$$

$$b)\,(A\cap B)xC=(AxC)\cap(BxC)$$





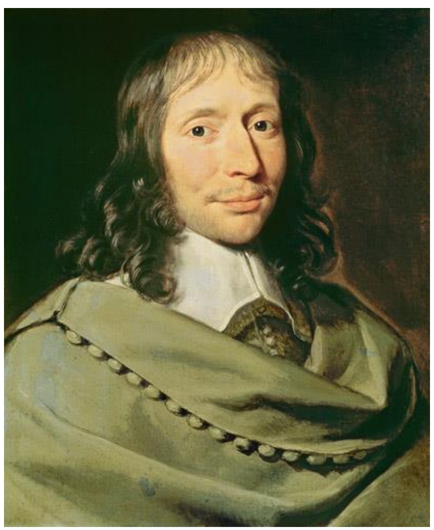


Inferencias

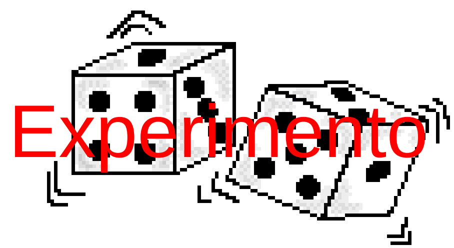
Variables y eventos

Probabilidad

La teoría de la probabilidad es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de los fenómenos o experimentos aleatorios.

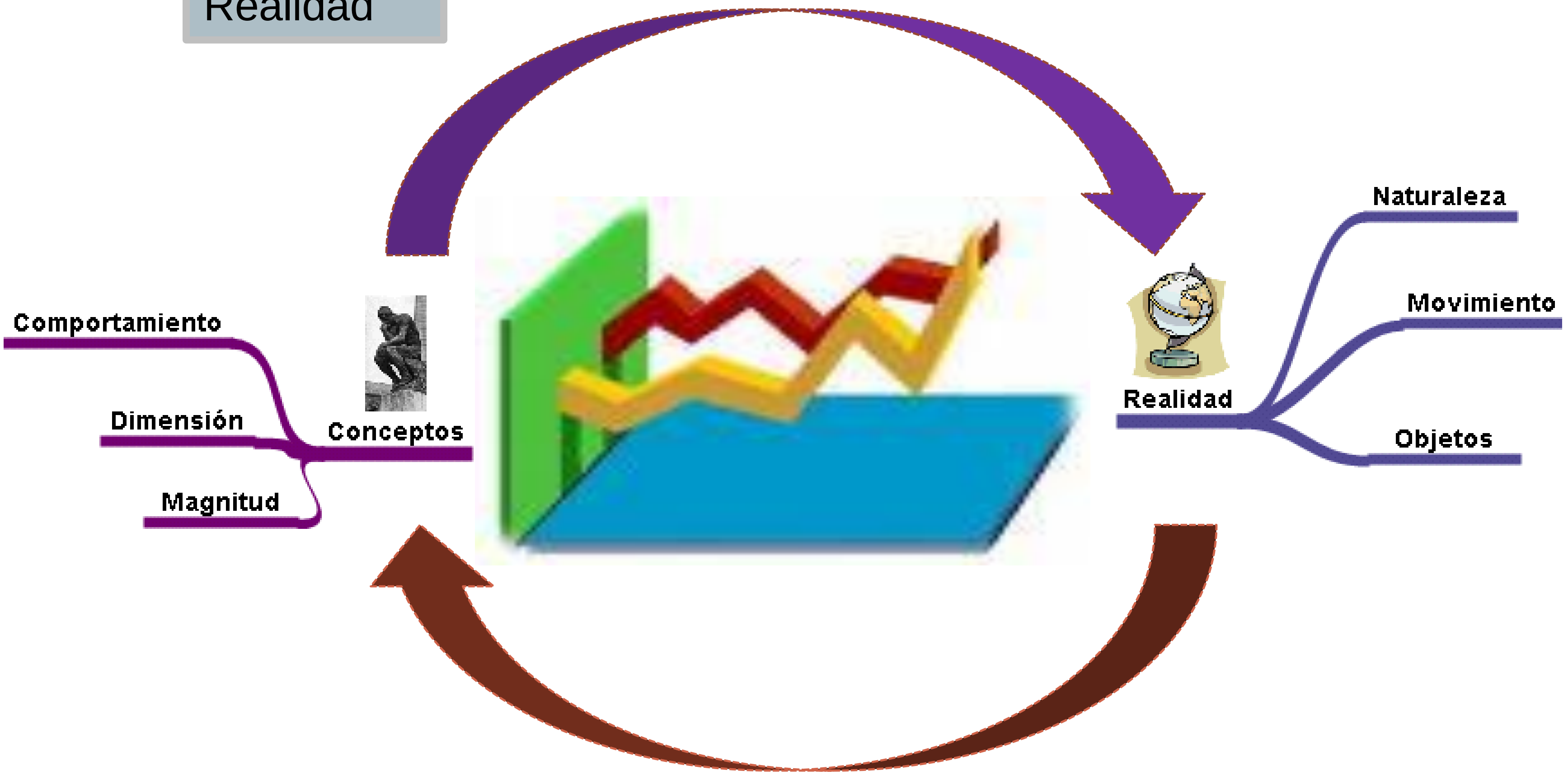


Blaise Pascal
(Francia, 1623–1662)

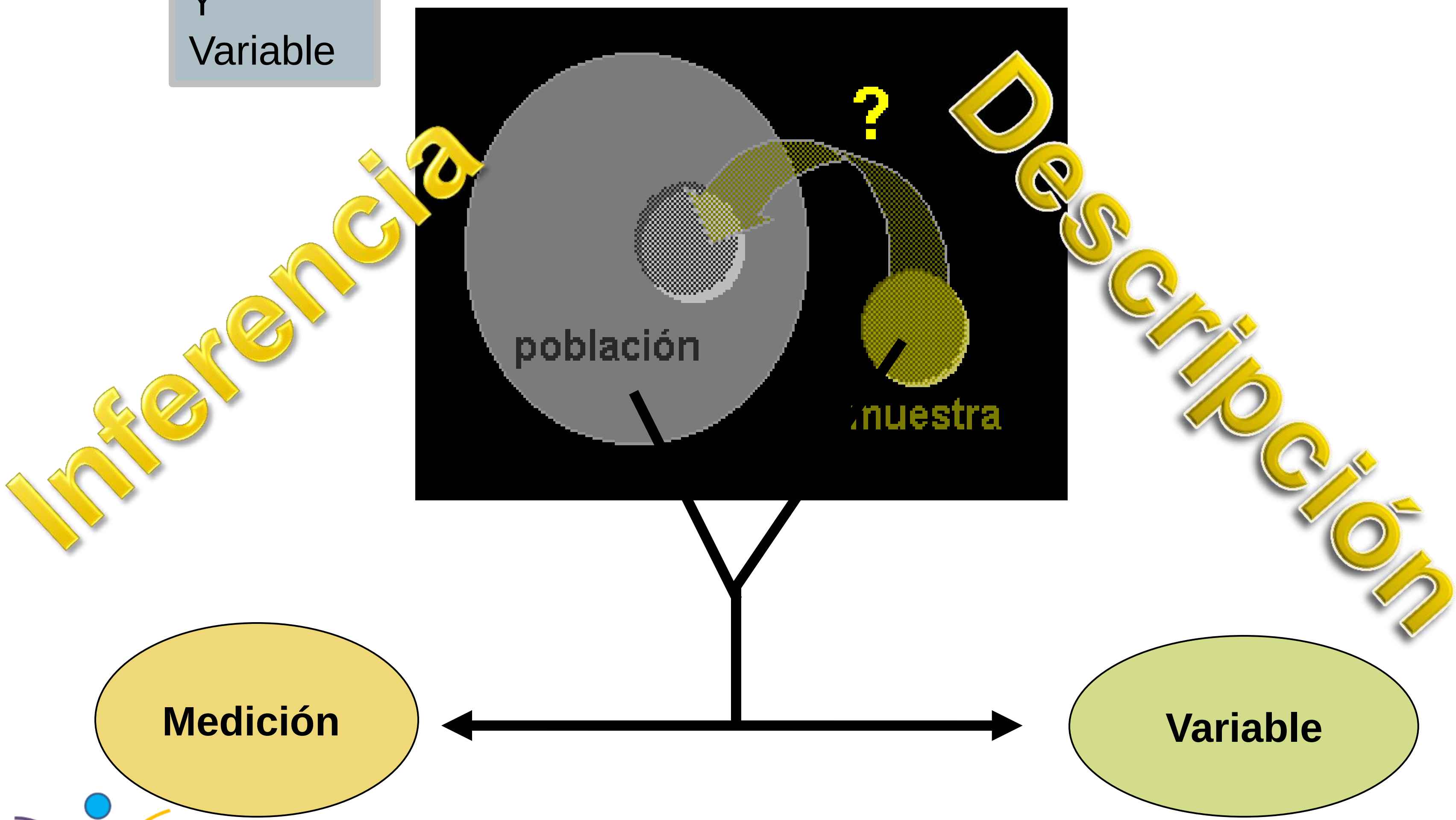


Pierre de Fermat
(Francia, 1601–1665)

Conceptos
Realidad

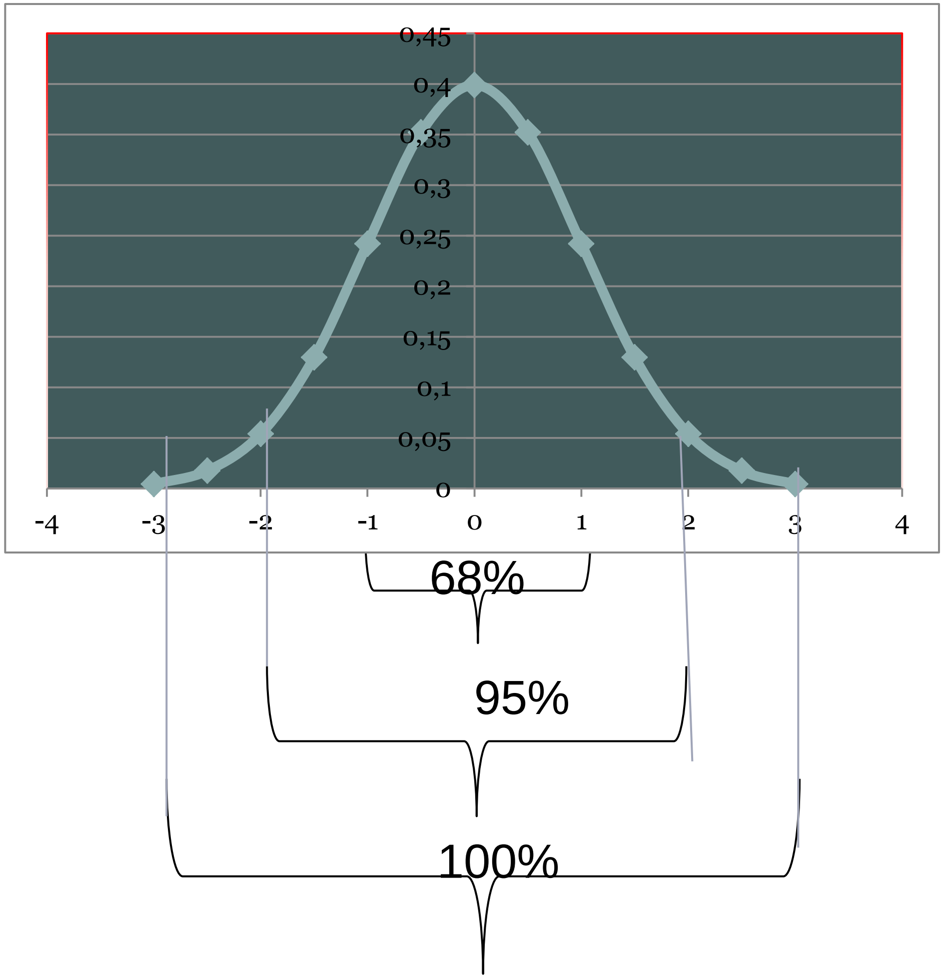


Medición
Y
Variable

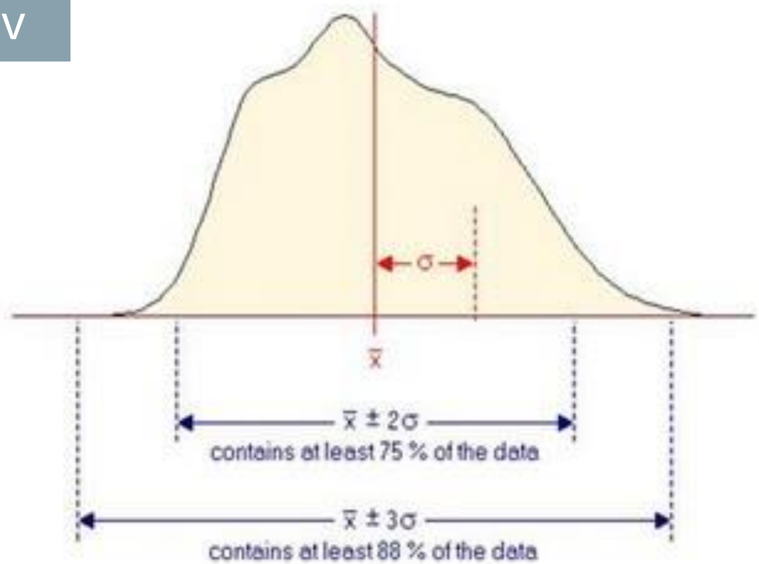


Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Regla empírica



Teorema De Chevyshev

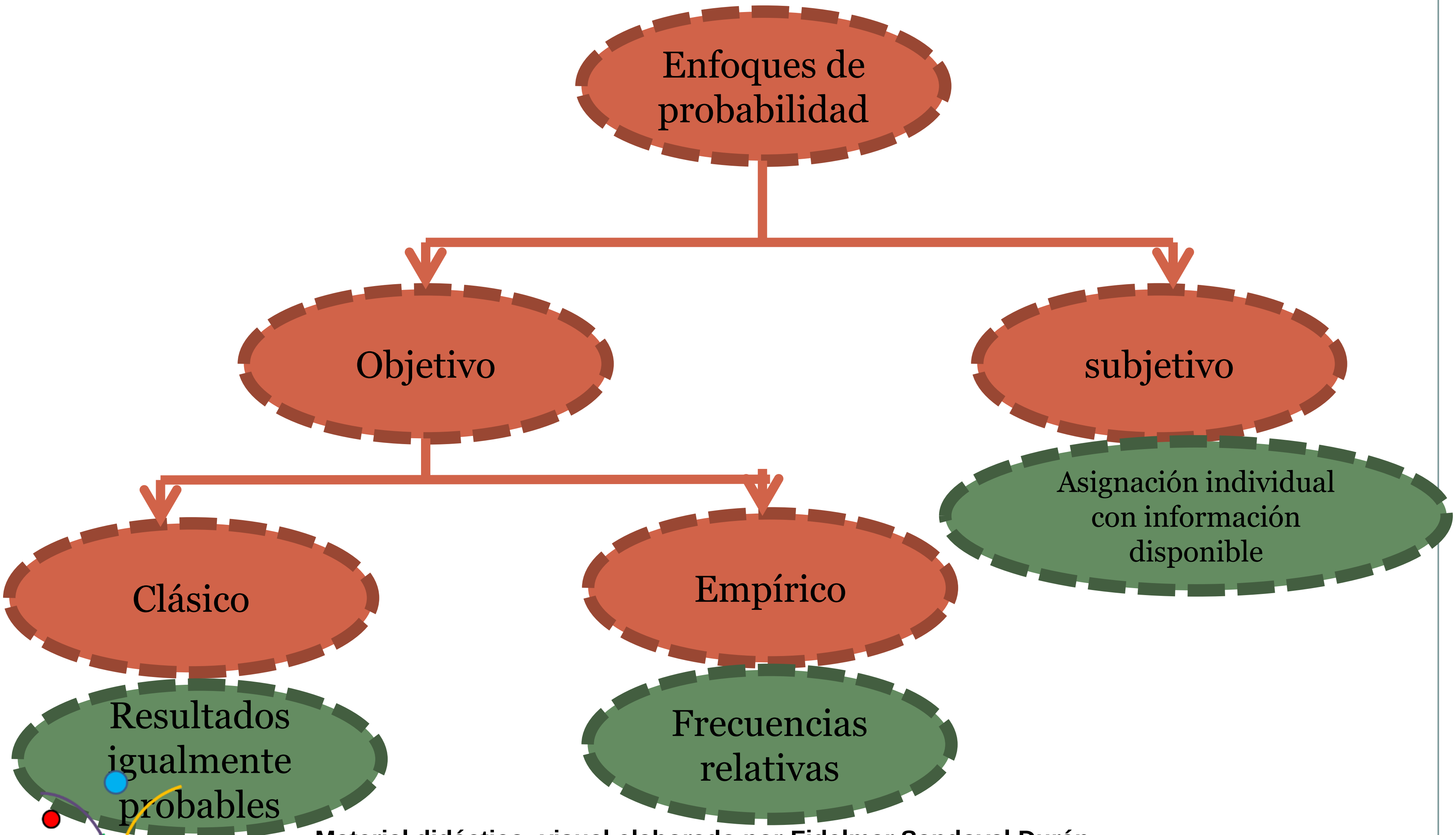


$$P\left(\left|x-\mu\right| \geq k\right) \leq \frac{\sigma^{2}}{k^{2}}$$

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Universidad Autónoma de Estado de México

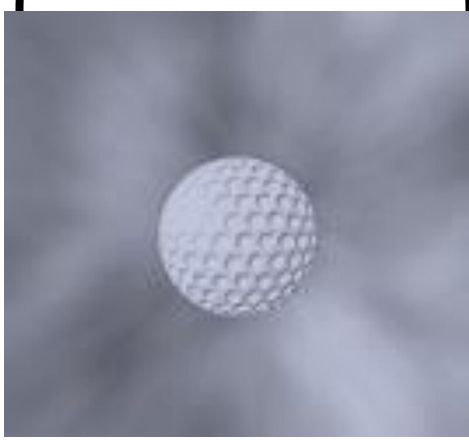
Facultad de Economía



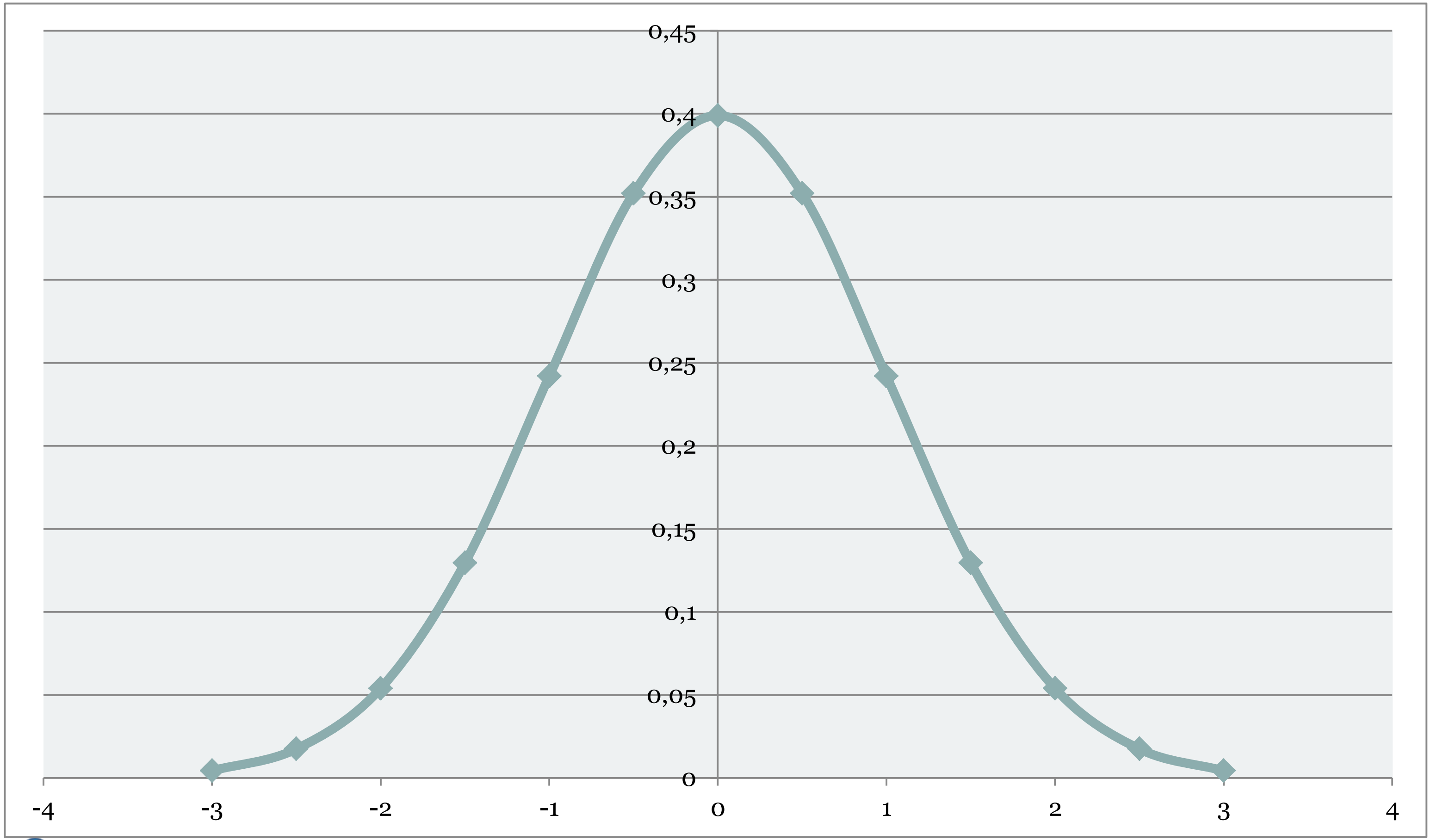
Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Subjetivo

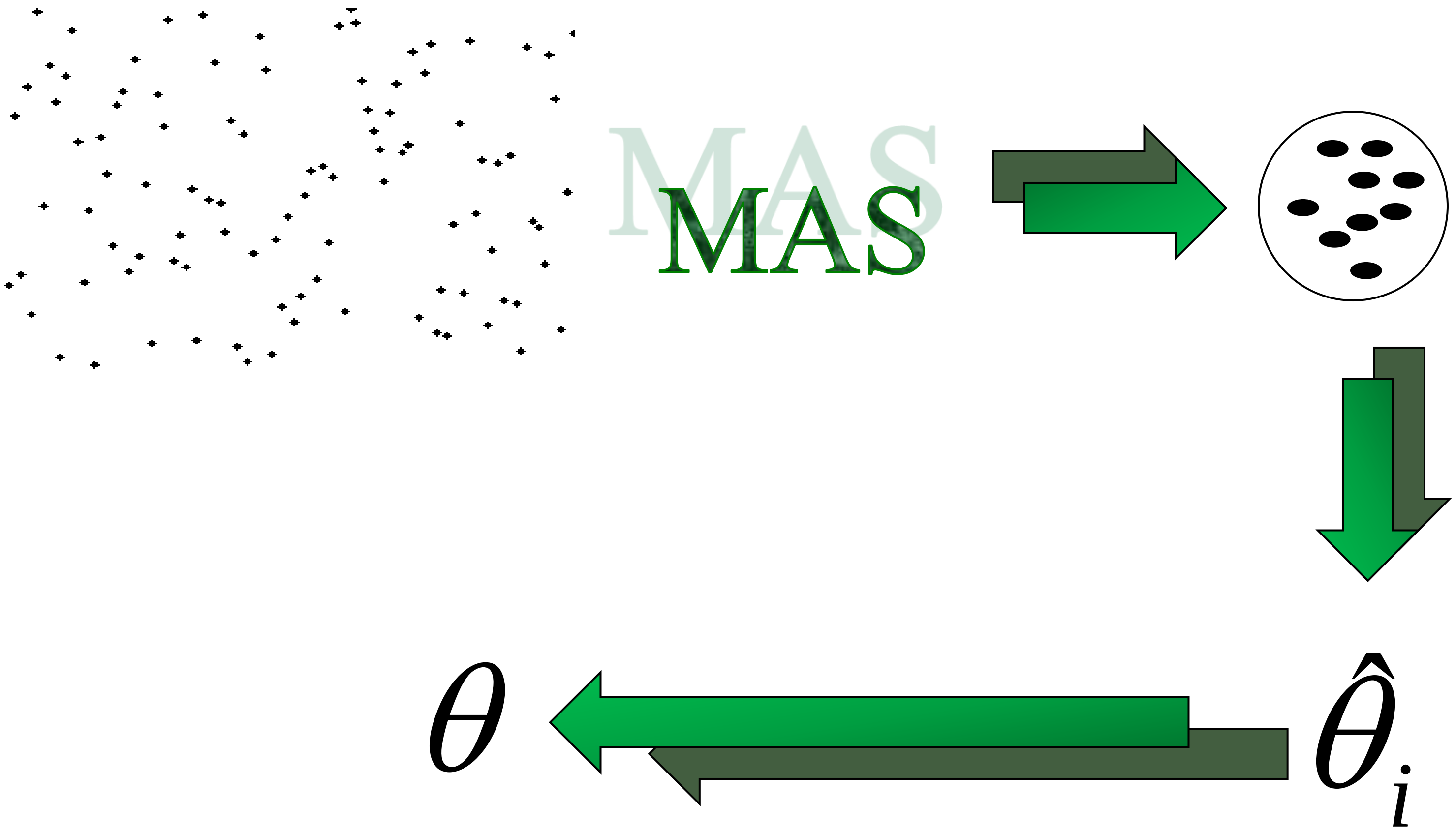
Objetivo



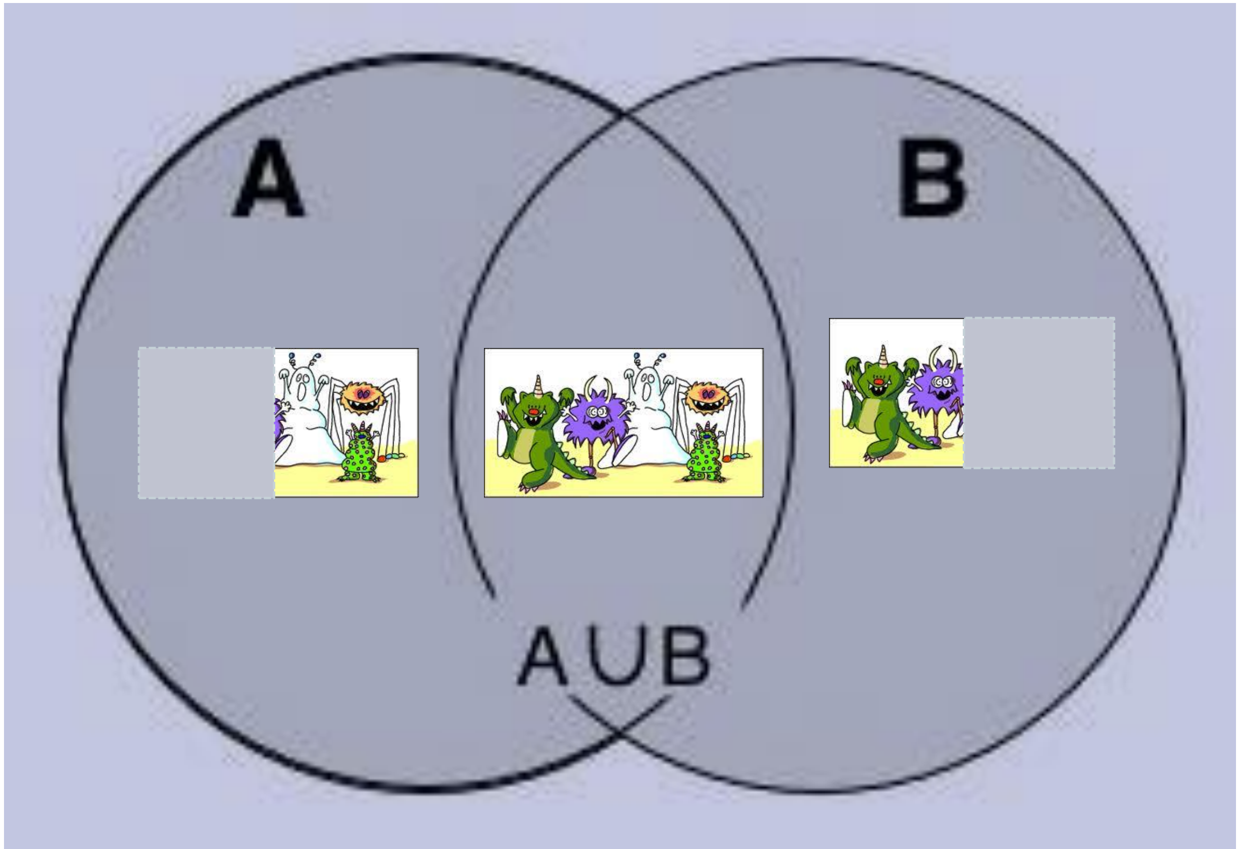
Variables aleatorias

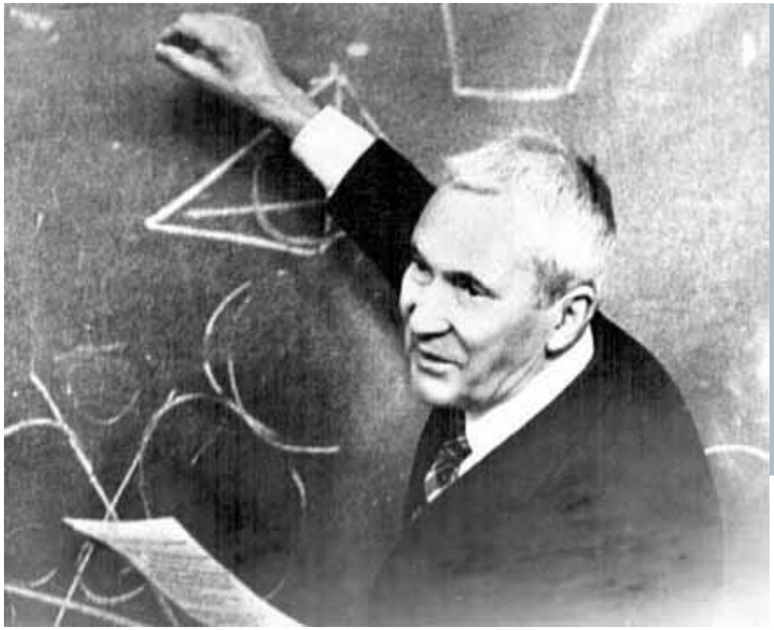


Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán


MAS
θ
$\hat{\theta}_i$

Eventos





A. N. Kolmogorov
(Rusia, 1903–1987)

Axiomas de la probabilidad

1. $P(A) \geq 0$.
2. $P(S) = 1$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, cuando $A \cap B = \emptyset$.

Proposición. Para cualquier evento A,

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$\Omega = A \cup A^c$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c)$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$\rightarrow P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Propiedades de probabilidad

$a) P(A^c) = 1 - P(A)$

$b) P(\phi) = 0$

$c) \text{Si } A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$

$d) \text{Si } A \subseteq B \rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$

$e) 0 \leq P(A) \leq 1$

$f) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

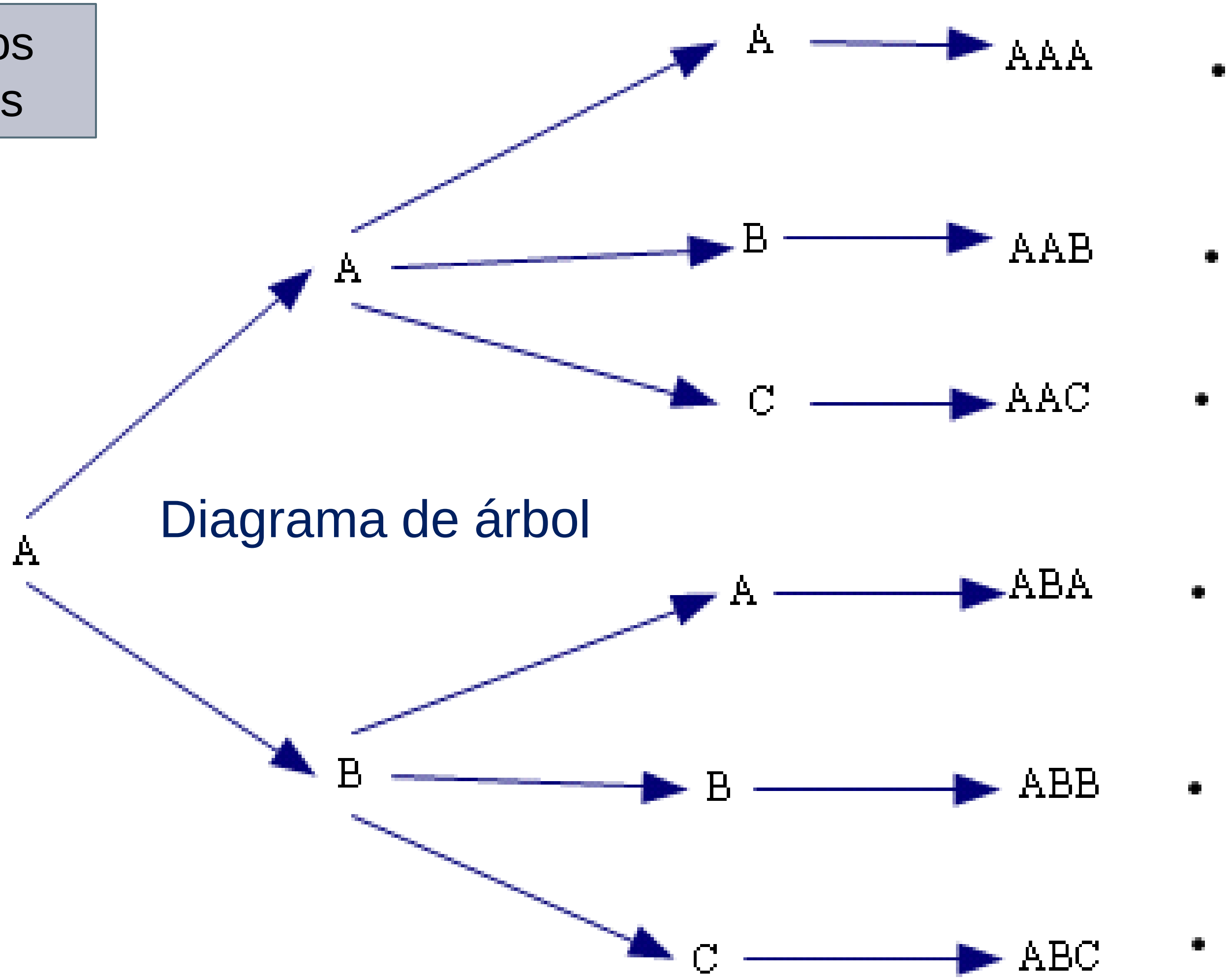
$g) P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

Universidad Autónoma de Estado de México

Facultad de Economía

Eventos simples

Diagrama de árbol



Análisis combinatorio

Principio de multiplicación.

Proposición.

Si un procedimiento A1 puede efectuarse de n formas distintas y un segundo procedimiento A2 puede realizarse de m formas diferentes, entonces el total de formas en que puede efectuarse el primer procedimiento seguido del segundo es el producto $n \cdot m$, es decir,

$$\#(A1 \times A2) = \#A1 \cdot \#A2.$$

4

3

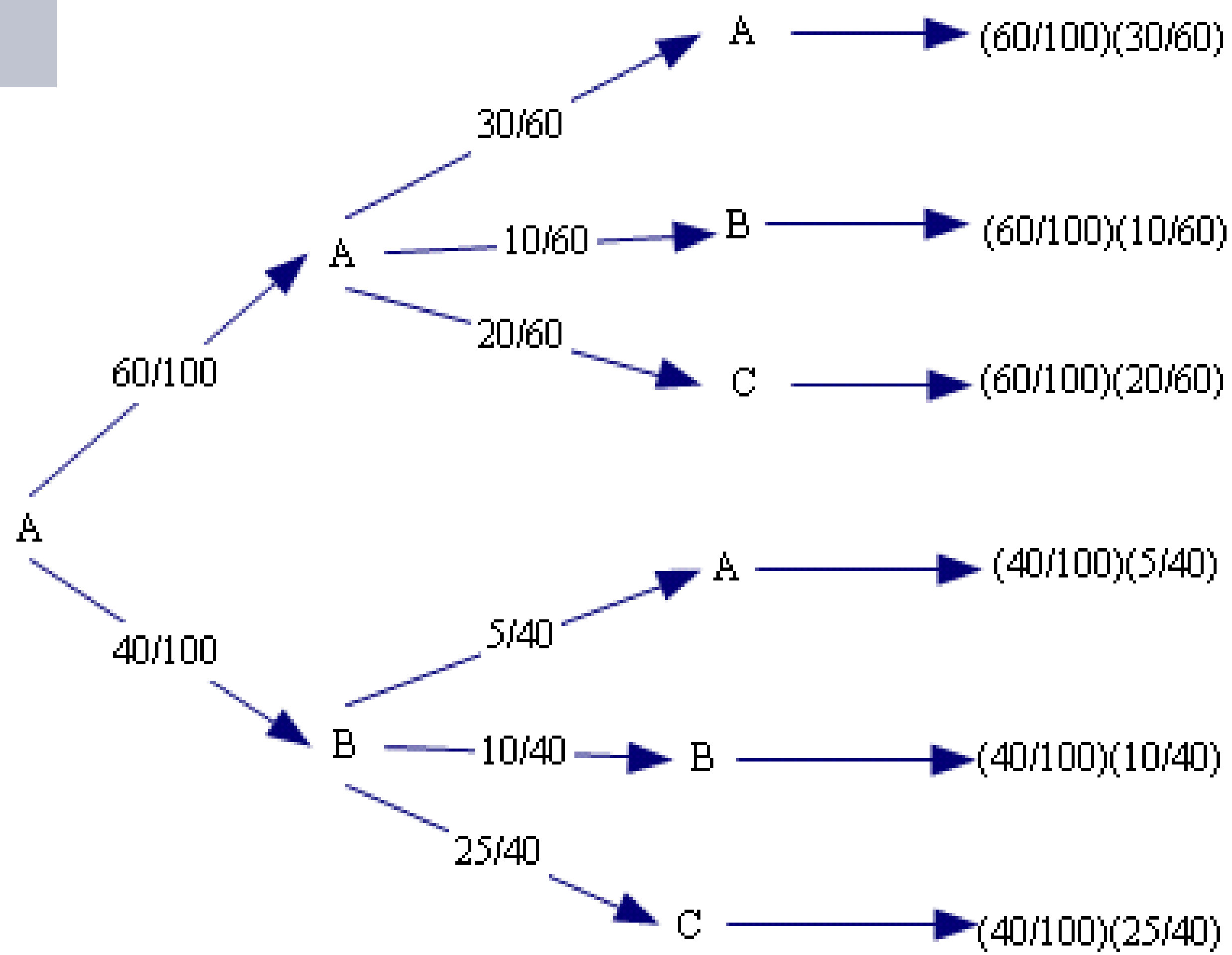
2

$3 \times 4 \times 2 = 24$

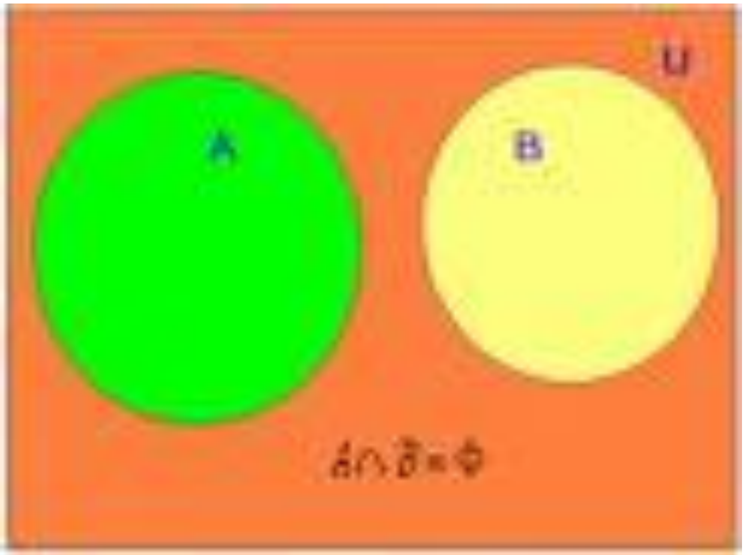
Diferentes formas de vestir

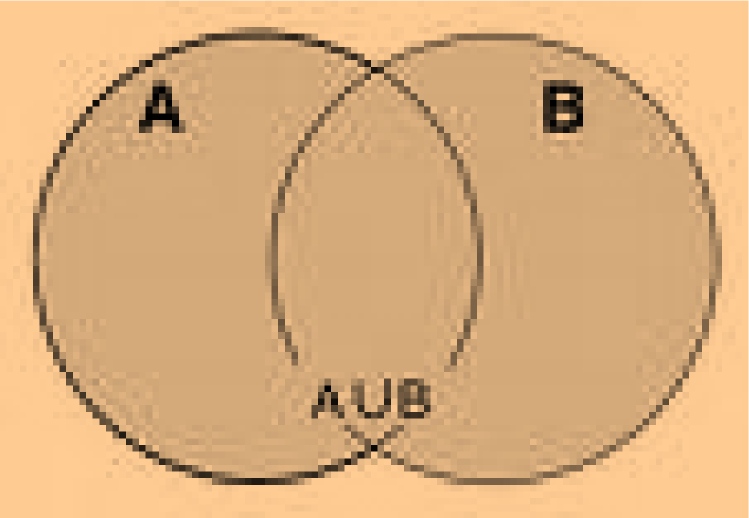
Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Multiplicación de Eventos



Adición De eventos





$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Arreglos

	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC
C	CA	CB	CC

Total de arreglos en parejas 9

Total de parejas que el primer elemento es igual al segundo 3

Parejas en las que no interesa el orden 3

Parejas en las que interesa el orden 6

Arreglos

22

	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC
C	CA	CB	CC

Total de arreglos en parejas 9

Total de arreglos en parejas 9

Total de parejas que el primer elemento es igual al segundo 3

Parejas en las que no interesa el orden 3

Parejas en las que interesa el orden 3

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Relaciones de eventos

Eventos:

E1 = {AA}

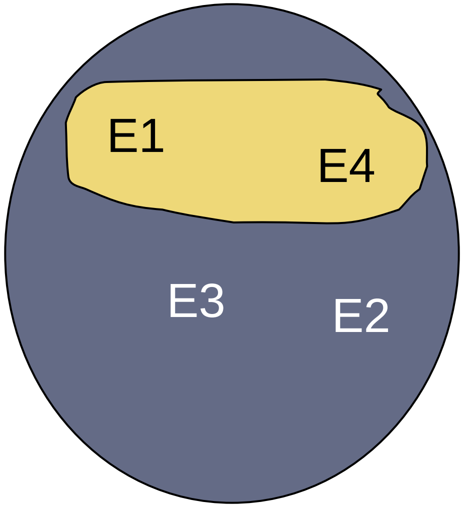
E2 = {AS}

E3 = {SA}

E4 = {SS}

S = {E1, E2, E3, E4}

Eventos simples y compuestos



A: resultado igual en ambas monedas

A = {E1, E4}

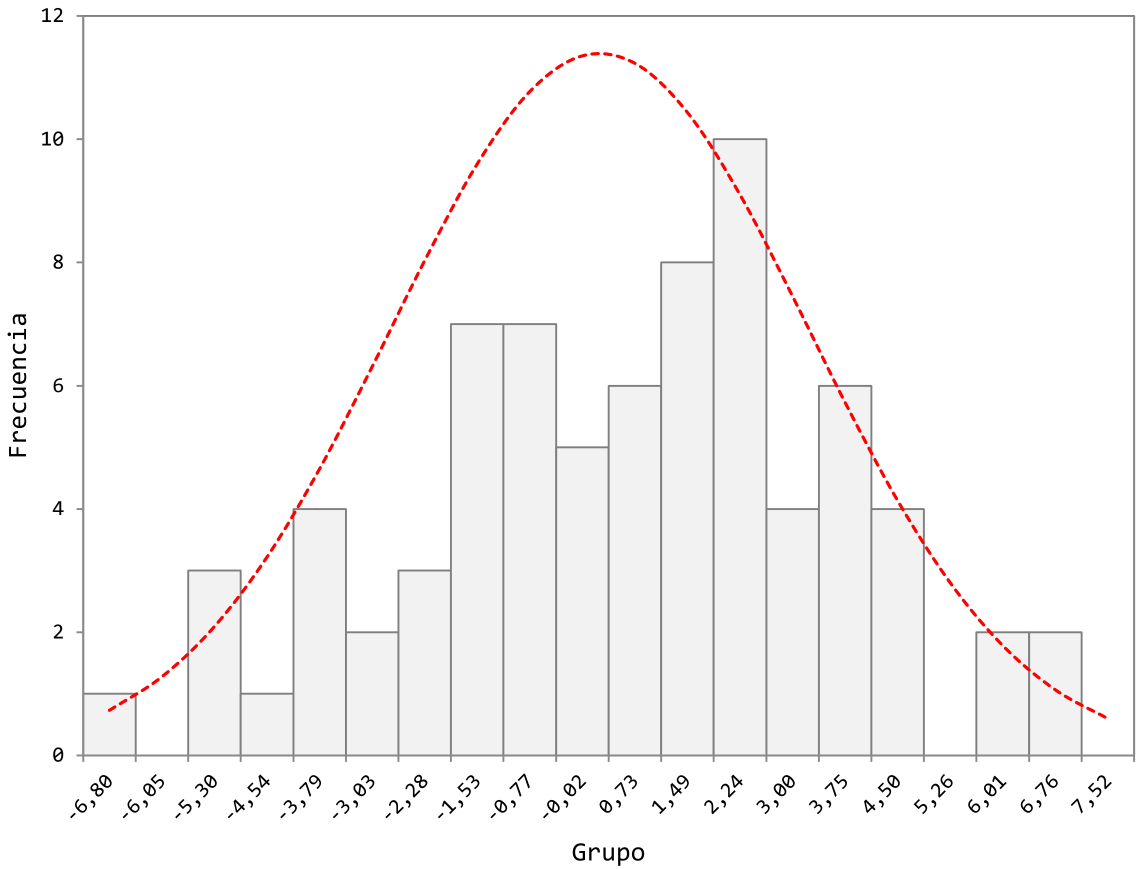
B: resultado diferente en las monedas

B = {E2, E3}

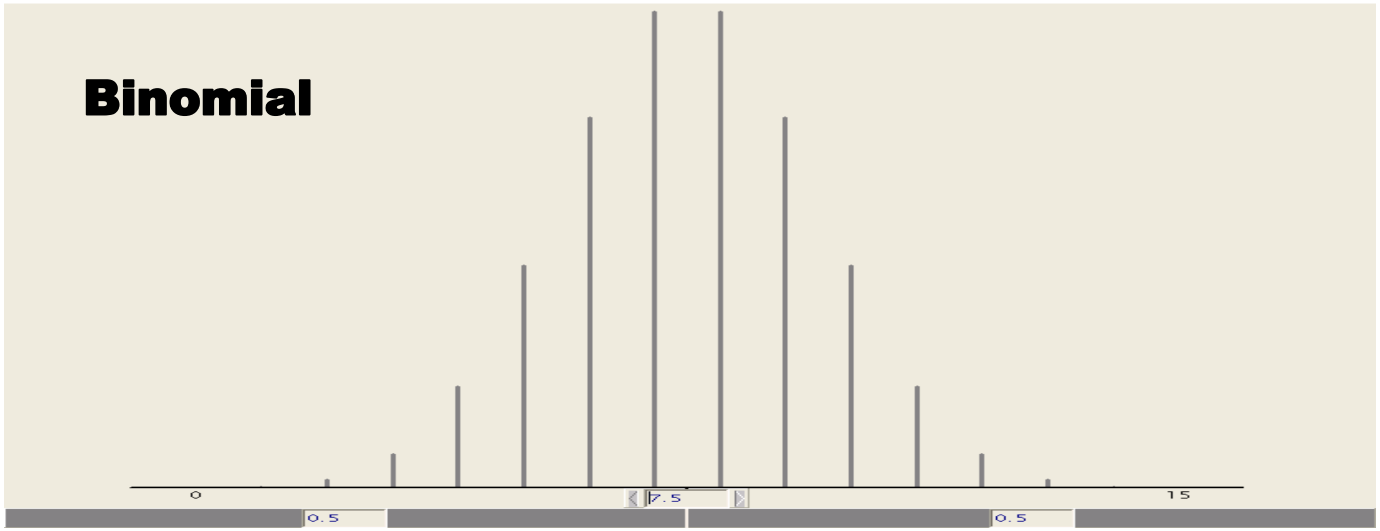
C: resultado la segunda moneda es águila

C = {E1, E3, E4}

Distribuciones de Probabilidad



Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

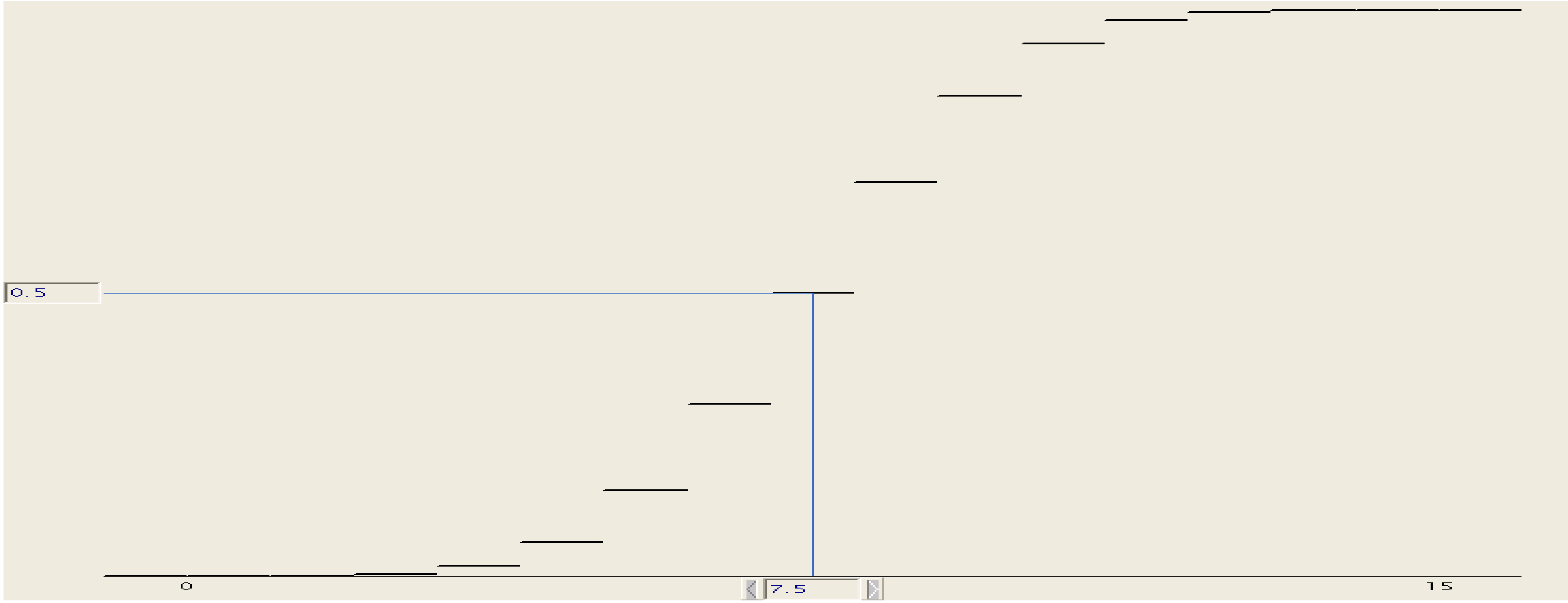


$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} (1-p)^{n-x} \; \forall x = 0,1,2,\ldots,n.$$

$$\mu = p$$

$$\sigma^{2} = p(1-p)$$

Binomial: función Distribución



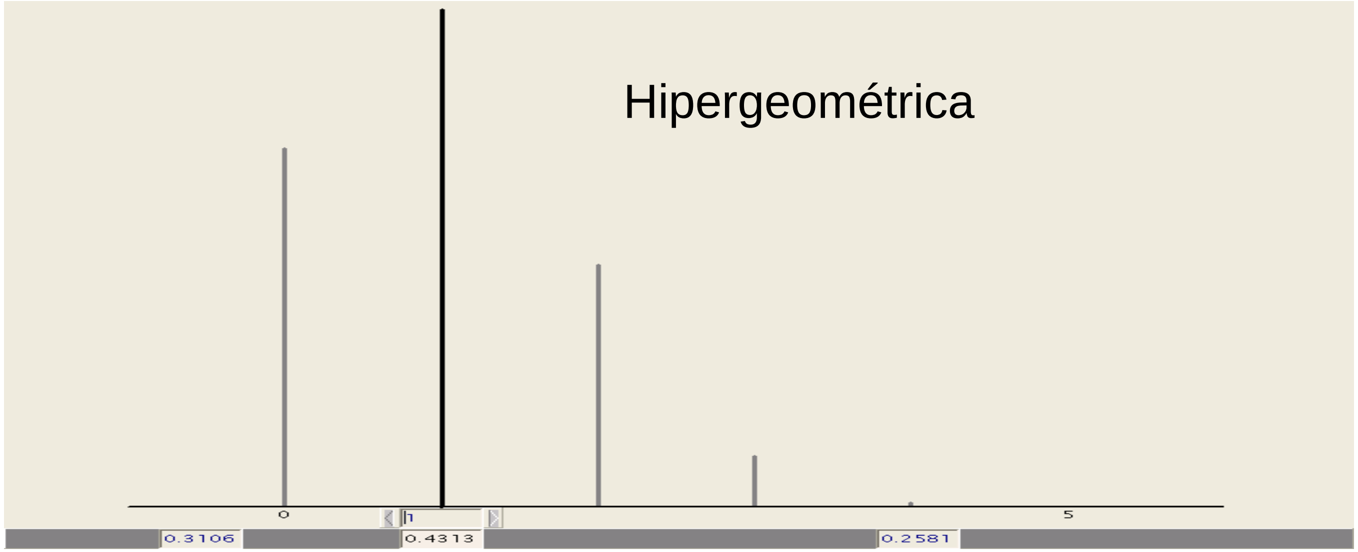
Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Geométrica

$$P(X) = (1 - p)^{x} p$$

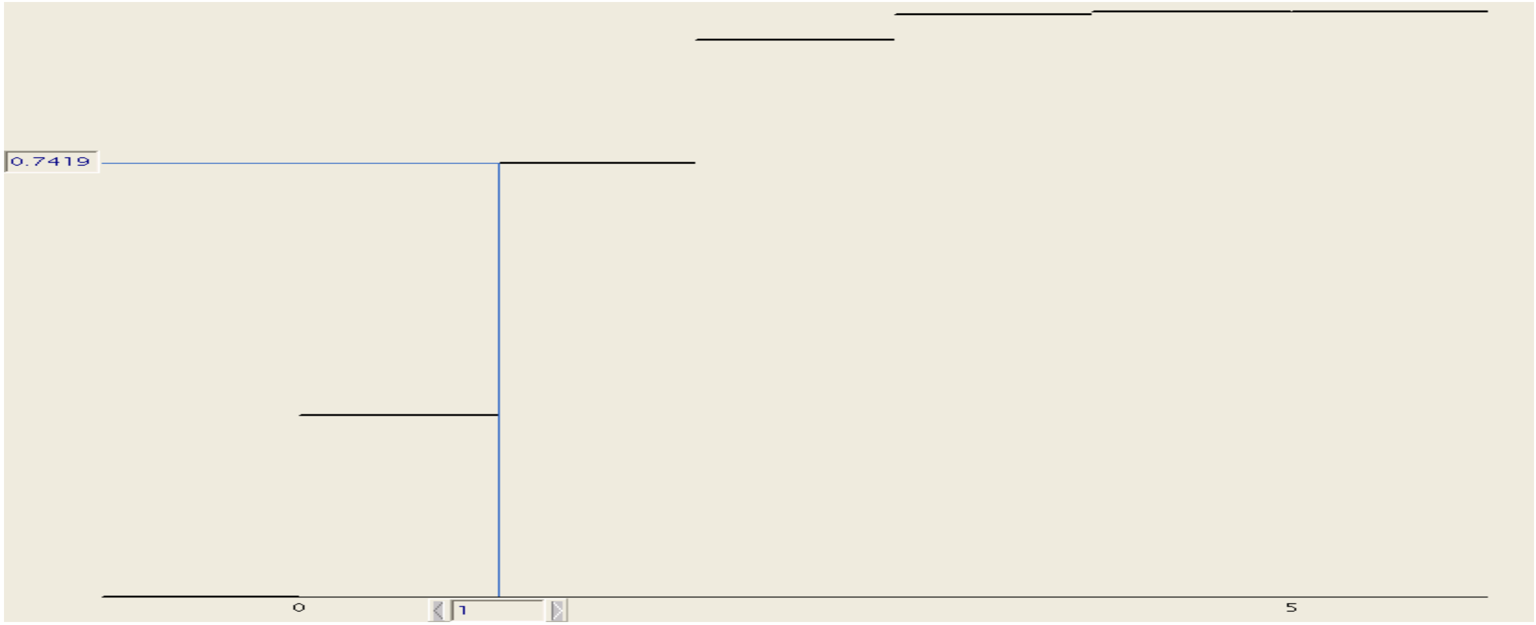
Geométrica: funcion de Distribución

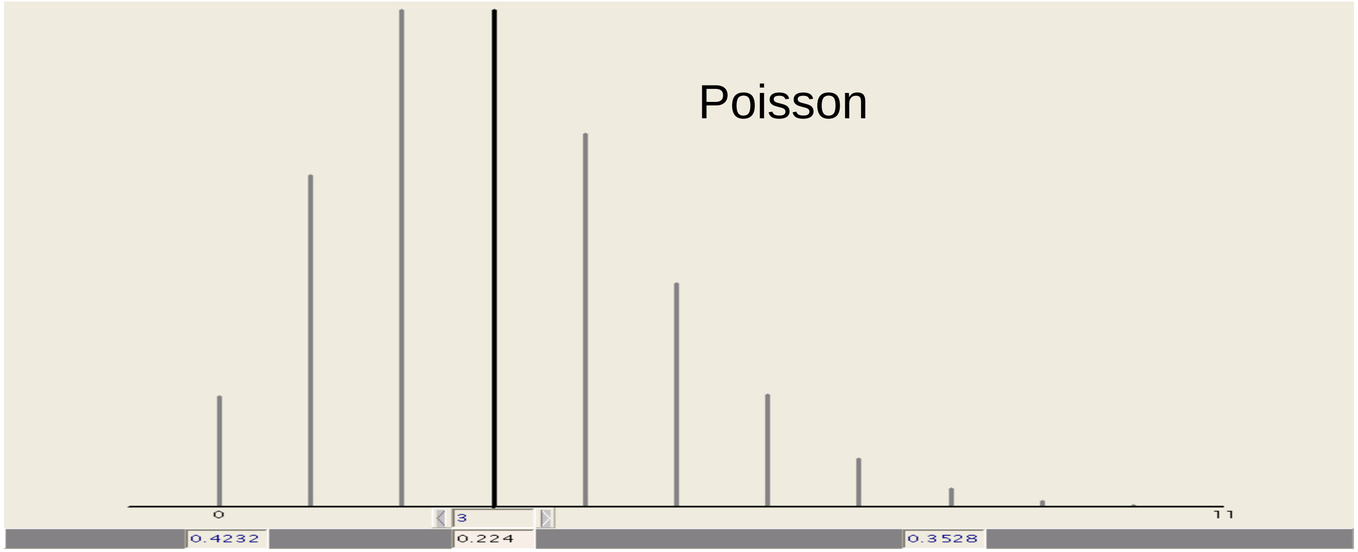
$$F(X) = 1 - (1 - p)^{x+1}$$



$$P(x) = \frac{C_x^s C_{n-x}^{N-s}}{C_n^N}$$

Hipergeométrica: función de Distribución



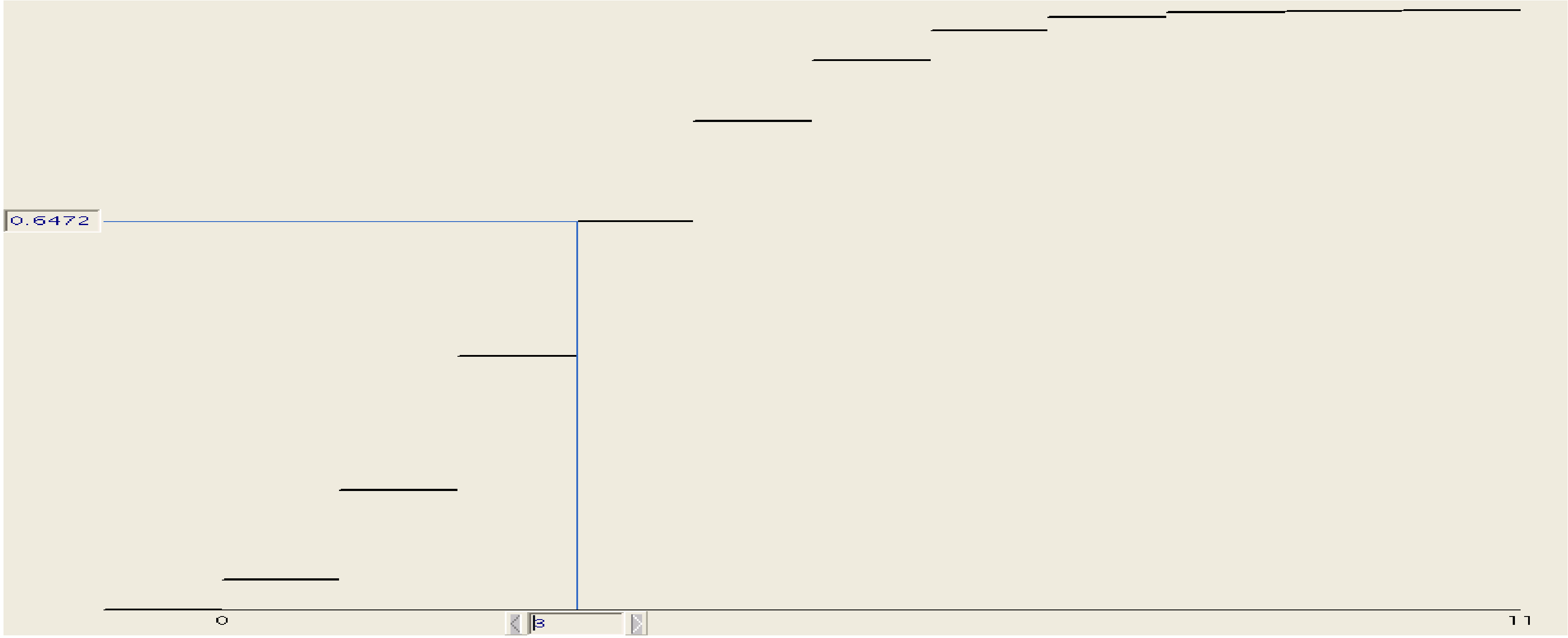


$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad \forall x = 0,1,2,\ldots$$

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^{2} = \lambda$$

Poisson: función de Distribución

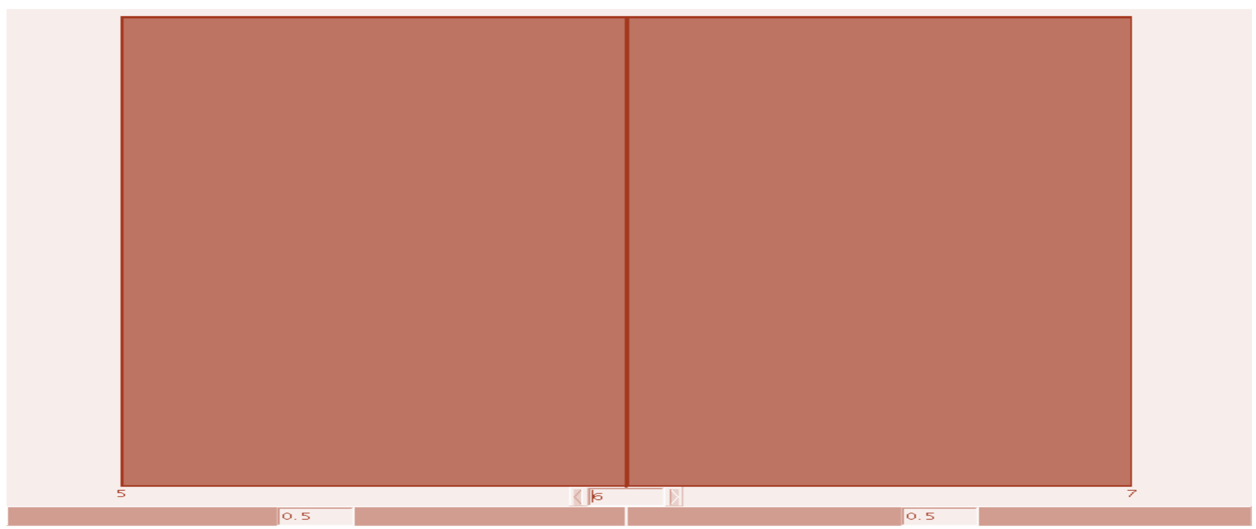


$$f(x) = \frac{1}{b-a} : a \leq x \leq b$$

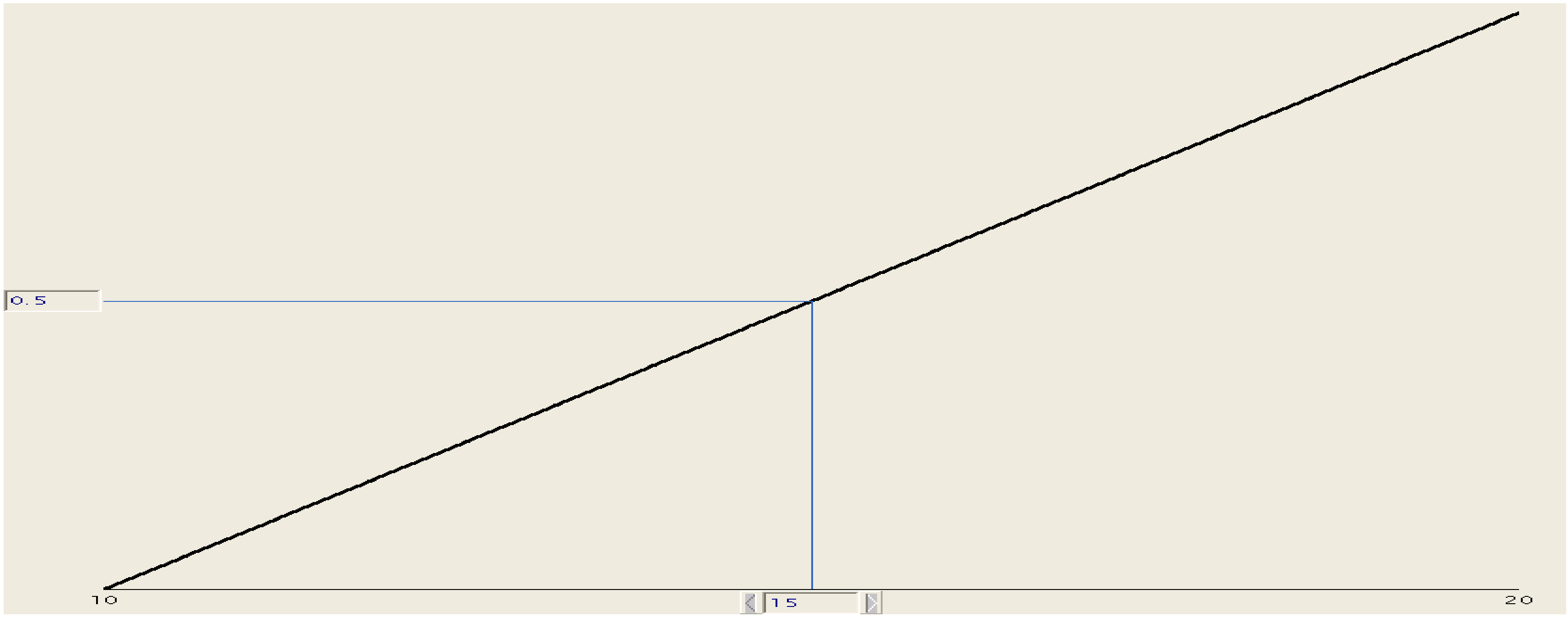
$$f(x) = 0 : d.c.$$

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

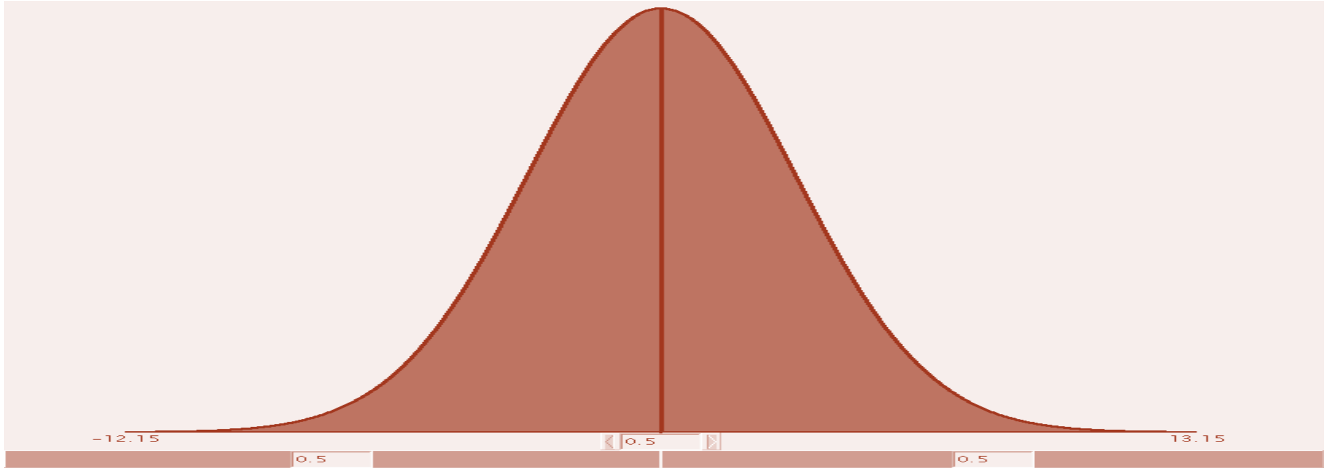
$$\sigma^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$



Uniforme: función de Distribución



Normal

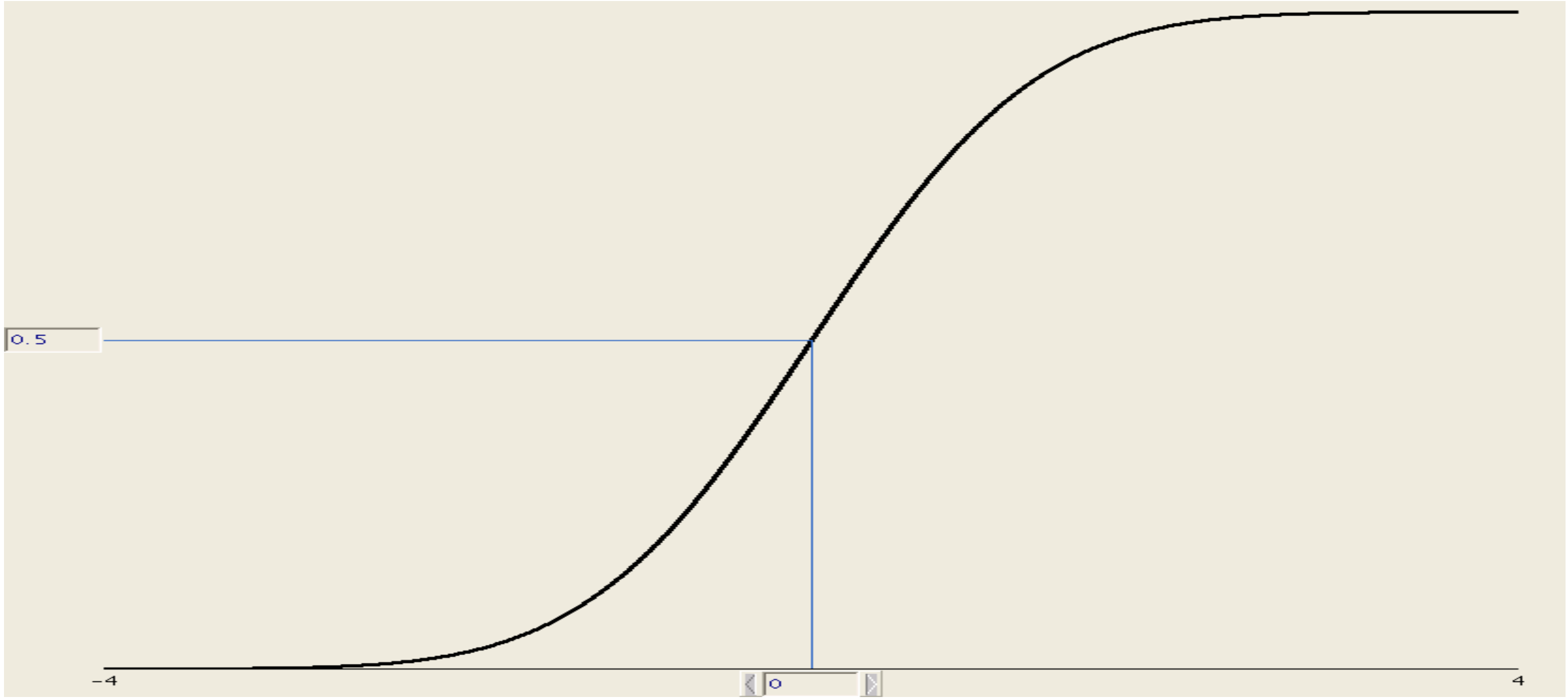


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \mu$$

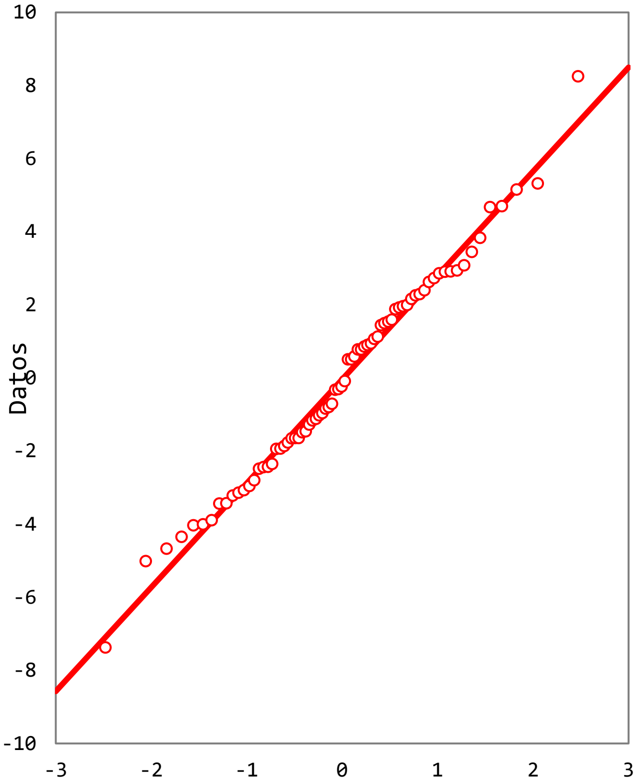
$$V(X) = \sigma^2$$

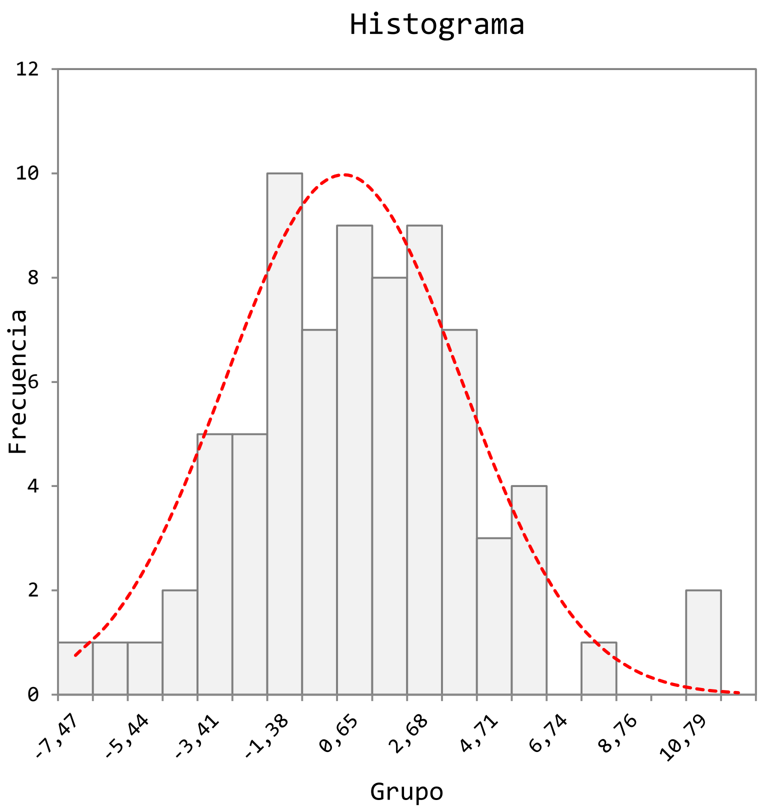
Normal: función de Distribución



Universidad Autónoma de Estado de México
Facultad de Economía

Grafico de probabilidades Normal





Cuantil normal (z)

Material didáctico: visual elaborado por Fidelmar Sandoval Durán

Fuentes de los recursos para el material visual

Las imágenes son objetos obtenidos en http://www.google.com.mx/

Las fórmulas se elaboraron como objetos utilizando el editor de ecuaciones.

Para las gráficas se dispuso de excel y minitab.