



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

**FACULTAD DE ECONOMIA
LICENCIATURA DE ACTUARIA**

Algebra Lineal

Práctica: Matriz inversa

M. en I. Elizabeth Almazán Torres

1

Resultado de Aprendizaje

- ▶ El estudiante será capaz de calcular la inversa de una matriz por los métodos de matriz adjunta y eliminación gaussiana.

Justificación

- ▶ Una de las operaciones matriciales más utilizadas es la generación de la matriz inversa, que se apoya en la matriz identidad. Esta es con el propósito de encontrar la solución al sistema de ecuaciones que se plantea para resolver un problema.
- ▶ Aunque este tema se imparte a los estudiantes en horas clases, sin embargo, es necesario que ellos practiquen de una manera individual para que los futuros temas y clases puedan interactuar en la clase esperando obtener un aprendizaje significativo.

Procedimientos

- ▶ Existen dos procedimientos para la generación de una matriz inversa, por Cofactores o la aplicación de Gauss o método gaussiano. Para calcular la matriz inversa debemos probar primero que el determinante de la matriz es distinta a cero, en caso contrario no es necesario realizarla, dado que no existe
- ▶ El método de Cofactores y adjunta para determinar la matriz inversa solo es utilizada para matrices de 2×2 y 3×3 , que es en sí una desventaja para el procedimiento, mientras que el método de Eliminación de Gauss-Jordan o Gaussiana, es aplicada para cualquier tamaño de matriz cuadrada, y que este procedimiento también se puede utilizar para resolver sistemas de ecuaciones no cuadrados.

Cofactores

- ▶ Dada la matriz $A \in M_{n \times n}$, se estiman los cofactores A_{ij} , dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$, donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz A al eliminar la i -ésima columna y el j -ésimo renglón
- ▶ Cada uno de los cofactores es la entrada de otra matriz $B = [A_{ij}]$,
- ▶ -Obtenemos el determinante de A , $\det A$, el cual debe ser distinto de cero.
- ▶ -Se obtiene $A^{-1} = \frac{Adj A}{\det A}$, donde $Adj A$ es la matriz transpuesta de B .

Método de Eliminación Gaussiana

- ▶ Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$ donde I es la matriz identidad respectiva al tamaño de la matriz A .
- ▶ -Se realizan las operaciones por renglones para obtener una matriz escalonada (triangular superior o triangular inferior), para comprobar la posibilidad de la existencia de la matriz inversa.
- ▶ -Se continuara realizando operaciones por renglón para obtener $(I|A^{-1})$

Operaciones elementales

- ▶ Soló multiplicas o afectas a todo el renglón indicado por un numero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- ▶ También es posible intercambiar renglones, para cumplir nuestro propósito

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Operaciones elementales

- También es posible realizar más de una operación en de una matriz a otra, con la única condición que debes tener es que una de las filas debe estar fijo. Fijo significa que no se altera propiamente esta fila o renglón:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- O bien podrías realizar una operación a la vez:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} R_2 - 4R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} R_3 - 2R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Operaciones elementales

- Pero también es posible que realices otras operaciones de tal manera que sea para ti más fácil esta serie de operaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} R_2 - 2R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} R_3 - 2R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Notación

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} R_2 - 4R_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Colocar el renglón que vas a cambiar

Colocar el renglón que utilizaras para realizar cambios

El pivote es aquella cantidad que nos ayuda para eliminar sobre renglón la cantidad, de tal manera que se genere un cero.

Tradicionalmente el cálculo es el valor que se tiene sobre este renglón a cambiar entre el renglón que se deja fino o bien es el pivote y le cambiamos el signo.

Ejemplo

$$\rightarrow [A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] R_2 - 4R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow R_3 - 2R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] R_1 - R_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Comprobación

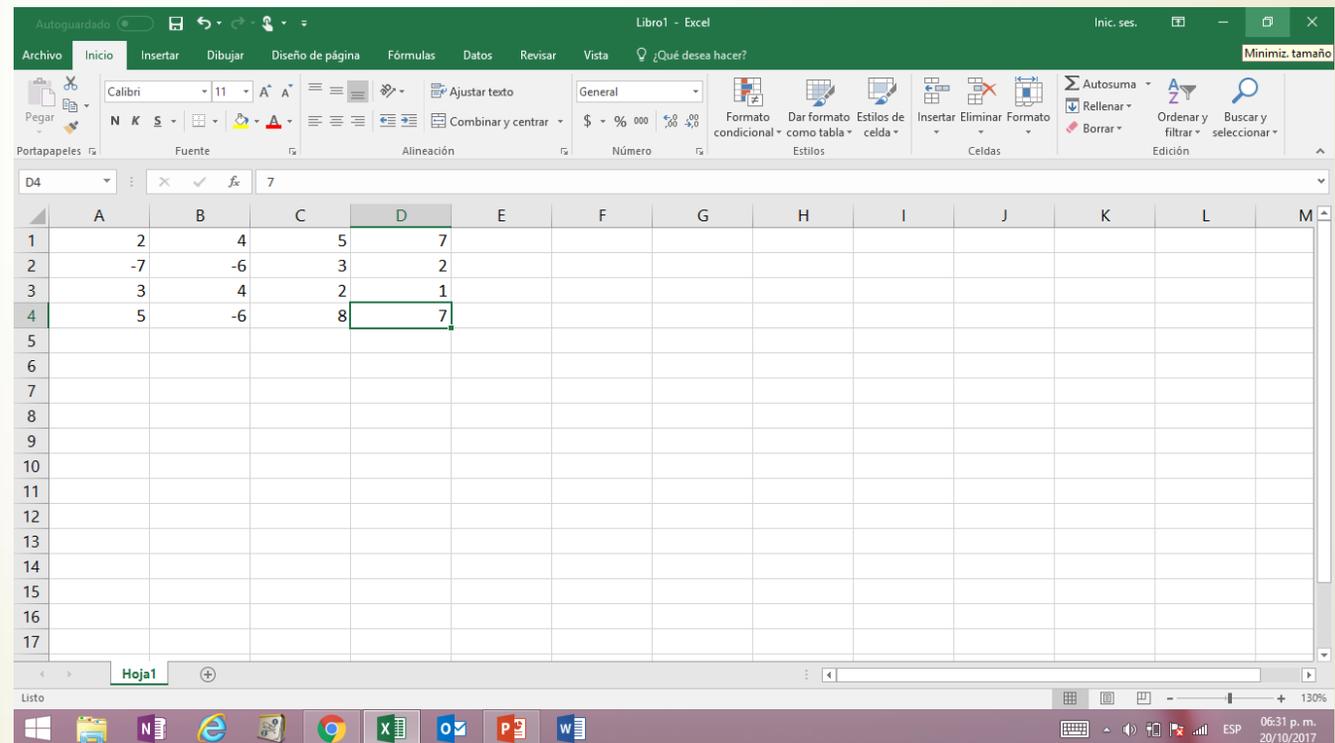
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ -\frac{4}{7} & -\frac{5}{14} & 1 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{14} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

REALIZANDO CON EXCEL

- ▶ Ventajas
 - ▶ Para números reales
 - ▶ Matrices de gran tamaño como 10X10 o más
 - ▶ Solo se declara la función ya establecida
 - ▶ Tiempo
- ▶ Desventajas
 - ▶ No para literales ni imaginarios
 - ▶ No se tiene la expresión general
 - ▶ Se encuentra redondeado
 - ▶ Solo matrices cuadradas

MATRIZ INVERSA

- Se debe colocar con el arreglo matricial. Cada celda es un valor de la matriz



The screenshot shows the Microsoft Excel interface with a 4x4 matrix entered in the range D4:G7. The matrix values are:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		2	4	5	7								
2		-7	-6	3	2								
3		3	4	2	1								
4		5	-6	8	7								
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16													
17													

- Se selecciona del mismo tamaño celdas, para declara la operación de inversa

The screenshot shows the Microsoft Excel interface with the following data and actions:

- Worksheet:** Hoja1
- Formulas Bar:** =minversa(
- Matrix Data (Columns A-D, Rows 1-4):**

	A	B	C	D
1	2	4	5	7
2	-7	-6	3	2
3	3	4	2	1
4	5	-6	8	7
- Output Range (Columns F-H, Rows 1-4):** A 4x3 grid of cells is selected, with the formula =minversa(entered in cell F1. A tooltip for the MINVERSA function is visible over the selected area.

- Y debemos seleccionar las celdas donde colocamos nuestra matriz a trabajar, ni de mas ni de menos elementos

The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The ribbon is set to 'Inicio' (Home). The formula bar shows the formula `=minversa(A1:D4)` entered in cell F1. The spreadsheet contains a 4x4 matrix in cells A1:D4:

	A	B	C	D
1	2	4	5	7
2	-7	-6	3	2
3	3	4	2	1
4	5	-6	8	7

Cell F1 contains the formula `=minversa(A1:D4)`. The cells F2:H4 are shaded grey, indicating they are part of the calculation area. The status bar at the bottom shows the time as 06:35 p. m. on 20/10/2017.

- No se debe colocar un enter
- El proceso es que al mismo tiempo debes presionar las teclas del teclado SHIFTL + CTRL + ENTER

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	4	5	7		-0.0351124	-0.113764	-0.0280899	0.0716292
2	-7	-6	3	2		0.0435393	0.0210674	0.1348315	-0.0688202
3	3	4	2	1		-0.1530899	0.1839888	0.4775281	0.0323034
4	5	-6	8	7		0.2373596	-0.1109551	-0.4101124	-0.0042135
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									

Formula bar: `=MINVERSA(A1:D4)`

Status bar: Promedio: 0.017380618 Recuento: 16 Suma: 0.278089888

- ▶ En automático se obtiene el resultado
- ▶ Así mismo la comprobación de esta, es posible realizarla con las operaciones ya predeterminadas

The screenshot shows the Excel interface with the following data in the spreadsheet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		2	4	5	7	-0.0351124	-0.113764	-0.0280899	0.0716292	
2		-7	-6	3	2	0.0435393	0.0210674	0.1348315	-0.0688202	
3		3	4	2	1	-0.1530899	0.1839888	0.4775281	0.0323034	
4		5	-6	8	7	0.2373596	-0.1109551	-0.4101124	-0.0042135	
5										
6										
7		=mmult(
8		MMULT(matriz1, matriz2)								
9										
10										
11										
12										
13										

- Como es numérica, al numero cero no lo expresa literal, sino por decimales con notación científica, de tal forma que son ceros en la practica.

Excel interface showing a matrix multiplication result. The formula bar displays $\{=MMULT(A1:D4,F1:I4)\}$. The spreadsheet shows a 4x4 matrix in columns B-D and its inverse in columns F-H. The inverse matrix is highlighted in a grey box.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	2	4	5	7		-0.0351124	-0.113764	-0.0280899	0.07162
2	-7	-6	3	2		0.0435393	0.0210674	0.1348315	-0.06882
3	3	4	2	1		-0.1530899	0.1839888	0.4775281	0.03230
4	5	-6	8	7		0.2373596	-0.1109551	-0.4101124	-0.00421
5									
6									
7		1	-1.11022E-16	4.44089E-16	6.93889E-18				
8		-5.55112E-17	1	0	-3.46945E-18				
9		-1.66533E-16	-1.66533E-16	1	3.29597E-17				
10		-2.22045E-16	-1.11022E-16	-4.44089E-16	1				
11									
12									
13									

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

- Procedimiento con ayuda de Excel
- Introducimos la matriz que deseamos obtener su inversa extendida con una matriz identidad

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "Matriz inversa - Microsoft Excel (Error de activación de produ...". The spreadsheet displays a 3x3 matrix in cells A2:C4 and its augmented form in cells D2:F4. The augmented form consists of the original matrix followed by a 3x3 identity matrix. The cells D2:F4 are highlighted in orange.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	4	1	0	0
3	5	1	-2	0	1	0
4	4	2	1	0	0	1
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

21

- Se debe generar un uno en los elementos de la diagonal principal.

Toda la fila se debe dividir entre el valor que se encuentra el elemento de la diagonal principal.

Esto se hace fijo colocando el símbolo de pesos antes de la letra y el valor numérico.

Matriz inversa - Microsoft Excel (Error de activación de produ...)

Archivo Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista

Calibri 11 Fuente Alineación Número Celdas Estilos Modificar

SUMAR.SI =A2/\$A\$2

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	4	1	0	0
3	5	1	-2	0	1	0
4	4	2	1	0	0	1
5						
6	=A2/\$A\$2	2	4	1	0	0
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Modificar 110% 68%

11:27 p. m. 20/10/2017

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

22

- ▶ Para transformar los elementos de la columna a cero, se sigue:

Elemento de la fila a eliminar menos (valor a eliminar entre e valor pivote)*valor de la fila del pivote

Se puede mover esa formula por fila para no trabajar de mas

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	4	1	0	0
3	5	1	-2	0	1	0
4	4	2	1	0	0	1
5						
6	1	2	4	1	0	0
7	=A\$3-(A\$3/A\$2)*A2		-22	-5	1	0
8	0	-6	-15	-4	0	1
9						
10						
11						

	A	B	C	D	E	F
1						
2	1	2	4	1	0	0
3	5	1	-2	0	1	0
4	4	2	1	0	0	1
5						
6	1	2	4	1	0	0
7	0	-9	-22	-5	1	0
8	=A4-(A\$4/A\$2)*A2		-15	-4	0	1
9						
10						
11						
12						
13						

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

23

- Se realiza el procedimiento parecido, ahora haciendo referencia a la segunda columna

	A	B	C	D	E	F	
1		Matriz Original			Matriz inversa		
2	1	2	4	1	0	0	
3	5	1	-2	0	1	0	
4	4	2	1	0	0	1	
5							
6	1	2	4	1	0	0	
7	0	-9	-22	-5	1	0	
8	0	-6	-15	-4	0	1	
9							
10	1	0	-0.88888889	-0.11111111	0.22222222	0	
11	0	1	2.44444444	0.55555556	-0.11111111	0	
12	0	0	-0.33333333	-0.66666667	-0.66666667	1	
13							
14							
15							
16							

	A	B	C	D	E	F	
1		Matriz Original			Matriz inversa		
2	1	2	4	1	0	0	
3	5	1	-2	0	1	0	
4	4	2	1	0	0	1	
5							
6	1	2	4	1	0	0	
7	0	-9	-22	-5	1	0	
8	0	-6	-15	-4	0	1	
9							
10	1	0	-0.88888889	-0.11111111	0.22222222	0	
11	0	1	2.44444444	0.55555556	-0.11111111	0	
12	0	=B8-(\$B\$8/\$B\$7)*B7	-0.66666667	-0.66666667	-0.66666667	1	
13							
14							
15							
16							

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

24

- Como fue una matriz de 3x3, solo falta que termines la ultima columna

Matriz inversa - Microsoft Excel (Error de activación de produ...)

Archivo Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista

Calibri 11 Fuente Alineación Número Estilos Celdas Modificar

	A	B	C	D	E	F	G
1		Matriz Original			Matriz inversa		
2		1	2	4	1	0	0
3		5	1	-2	0	1	0
4		4	2	1	0	0	1
5							
6		1	2	4	1	0	0
7		0	-9	-22	-5	1	0
8		0	-6	-15	-4	0	1
9							
10		1	0	-0.88888889	-0.11111111	0.22222222	0
11		0	1	2.44444444	0.55555556	-0.11111111	0
12		0	0	-0.33333333	-0.66666667	-0.66666667	1
13							
14		1	0	0	1.66666667	2	-2.66666667
15		0	1	0	-4.33333333	-5	7.33333333
16		0	0	1	2	2	-3
17							
18							

E.A.T.

Para un sistema de ecuaciones

- ▶ Para un sistema de ecuaciones cuadrado cuyo determinante sea diferente de cero, es posible realizar este procedimiento

$$x + 2y + 4z = 20$$

$$5x + y - 2z = 30$$

$$4x + 2y + z = -7$$

Matricialmente se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Para un sistema de ecuaciones

- Vista en excel, se puede escribir de la siguiente forma

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Matriz A			b		
2	1	2	4	x	20		
3	5	1	-2	y	-30		
4	4	2	1	z	-7		
5							
6							
7							

- Utilizando las mismas operaciones que anteriores y colocando una columna mas, se tiene

Matriz inversa - Microsoft Excel (Error de activación de produ...)

Archivo Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista

Calibri 11 Fuente Alineación Número Estilos Celdas Modificar

C20

	A	B	C	D	E	F	G
1	Matriz Original			Matriz inversa			
2	1	2	4	1	0	0	20
3	5	1	-2	0	1	0	-30
4	4	2	1	0	0	1	-7
5							
6	1	2	4	1	0	0	20
7	0	-9	-22	-5	1	0	-130
8	0	-6	-15	-4	0	1	-87
9							
10	1	0	-0.88888889	-0.11111111	0.22222222	0	-8.8888889
11	0	1	2.44444444	0.55555556	-0.11111111	0	14.4444444
12	0	0	-0.33333333	-0.66666667	-0.66666667	1	-0.3333333
13							
14	1	0	0	1.66666667	2	-2.66666667	-8
15	0	1	0	-4.33333333	-5	7.33333333	12
16	0	0	1	2	2	-3	1
17							
18							Es la solución

- ▶ Cuando son matrices de mayor tamaño se puede proceder de manera semejante

Matriz inversa - Microsoft Excel (Error de activación de productos)

Archivo Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista

Calibri 11 Fuente Alineación Número Estilos Celdas Modificar

Portapapeles Pegar

Formato condicional Dar formato como tabla Estilos de celda

Insertar Eliminar Formato Ordenar y filtrar Buscar y seleccionar

I21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1		Matriz Original				Matriz inversa						
2	1	2	4	6	1	0	0	0	20			
3	5	1	-2	3	0	1	0	0	-30			
4	4	2	1	4	0	0	1	0	-7			
5	2	8	4	1	0	0	0	1	25			
6												
7	1	2	4	6	1	0	0	0	20			
8	0	-9	-22	-27	-5	1	0	0	-130			
9	0	-6	-15	-20	-4	0	1	0	-87			
10	0	4	-4	-11	-2	0	0	1	-15			
11												
12	1	0	-0.88888889	0	-0.11111111	0.22222222	0	0	-8.8888889			
13	0	1	2.44444444	3	0.55555556	-0.11111111	0	0	14.4444444			
14	0	0	-0.33333333	-2	-0.66666667	-0.66666667	1	0	-0.3333333			
15	0	0	-14	-24.3333333	-4.66666667	0	0.66666667	1	-73			
16												
17	1	0	0	5.33333333	1.66666667	2	-2.66666667	0	-8			
18	0	1	0	-11.66666667	-4.33333333	-5	7.33333333	0	12			
19	0	0	1	6	2	2	-3	0	1			
20	0	0	0	-1.420634921	-0.55555556	-0.66666667	0.984126984	-0.02380952	1.404761905			
21												
22	1	0	0	0	-0.41899441	-0.5027933	1.027932961	-0.08938547	-2.72625698			
23	0	1	0	0	0.229050279	0.474860335	-0.74860335	0.195530726	0.463687151			
24	0	0	1	0	-0.34636872	-0.81564246	1.156424581	-0.10055866	6.932960894			
25	0	0	0	1	0.391061453	0.469273743	-0.69273743	0.016759777	-0.98882682			
26									Solución			
27												

- De forma rápida se tiene

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data and formula:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	2	4	6		20			
2	5	1	-2	3		-30			
3	4	2	1	4		-7			
4	2	8	4	1		25			
5									
6	Matriz inversa								
7	-0.41899441	-0.5027933	1.02793296	-0.08938547		-2.72625698			
8	0.22905028	0.47486034	-0.74860335	0.19553073		0.46368715			
9	-0.34636872	-0.81564246	1.15642458	-0.10055866		6.93296089			
10	0.39106145	0.46927374	-0.69273743	0.01675978		-0.98882682			
11									
12									
13									

The formula bar shows the formula: $\{=MMULT(A7:D10,F1:F4)\}$