UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de Potencial

Profr:Dr. Alfredo Cano Rodríguez

Elaborado por:
Gabriela Natividad Apolinar Ruiz

Índice general

Introducción

Dentro del Análisis Matemático podemos encontrar diferentes ramas que involucran a los operadores con derivadas, tal es el caso de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales la cual se encarga de estudiar funciones que dependen de más de una variable. El surgimiento de las Ecuaciones Diferenciales está estrechamente relacionado con el desarrollo general de las matemáticas de manera que se remonta desde Arquímedes (287-212 a.C.) hasta Newton en 1671 que fue el precursor del Cálculo Infinitesimal y que en su momento hicieron grandes aportaciones a las Ecuaciones Diferenciales dando solución a las ecuaciones de primer grado y posteriormente a las de orden superior; de la misma forma Laplace, Euler y Lagrange hicieron aportaciones en esta misma dirección. Al paso del tiempo se formalizaron los métodos para dar solución a las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, los cuales han sido de mucha ayuda en otras áreas como Física, Química, Economía, etc. El objetivo de este trabajo es encontrar la solución al problema de Dirichlet, para ello utilizaremos funciones armónicas, las cuales cumplen una ecuación que involucra al operador Laplaciano de una función; estas funciones se abordarán en dos casos para, $n = 2$ y $n \geq 3$ con $n \in \mathbb{N}$. A lo largo de este trabajo se emplearán resultados de la Teoría de Potencial sobre dominios conexos. Primero se abordarán tres teoremas importantes en la Teoría de Potencial en los cuales se expondrán algunas características de las Ecuaciones de Poisson y Laplace, las cuales están estrechamente relacionadas con esta Teoría, cabe mencionar que el potencial y el campo eléctrico están dados directamente como integrales sobre una distribución de cargas (véase [6]):

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'}{|r-r'|}, \\ E(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(r-r')dq'}{|r-r'|^3}. \end{aligned}$$

Además, en un campo puramente electrostático, E puede expresarse como menos el gradiente del potencial U, esto es, $E = -grad\ U$ y por la ley de Gauss $div\ E = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, donde ε es una constante y ρ es una densidad de carga, considerando las dos últimas igualdades podemos llegar a

$$div\ grad\ U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

donde podemos escribir la *div grad* como un solo operador diferencial o $\nabla^2 \equiv \Delta$ el cual se llama Laplaciano. Entonces tenemos $\nabla^2\ U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ la cual es una ecuación diferencial (véase [7] y [9]). Esta es la ecuación de Poisson, donde el operador implica la derivación con respecto a más de una variable; en consecuencia, la ecuación de Poisson es una ecuación diferencial parcial (véase [2] y [5]). En esta clase determinada de problemas en la Teoría de Potencial en que intervienen conductores, toda la carga se encuentra ya sea sobre la superficie de los conductores o en forma de cargas puntuales fijas. En estos casos, ρ es cero, la cual nos da como resultado $\nabla^2 U = 0$ la cual conocemos como la ecuación de Laplace; con las cuales se estarán trabajando a lo largo del texto. En el capítulo 1 se construirá la representación de la integral para la solución de la ecuación de Poisson en un dominio G, lo cual será de gran ayuda para resultados que nos llevarán a resolver el problema de Dirichlet. Para el capítulo 2 se trabajará con funciones de Green las cuales estarán representadas de diferente forma dependiendo el caso que se esté abordando, en este mismo capítulo se definirán las funciones superarmónicas y subarmónicas, posteriormente se probarán teoremas como el Principio del Máximo, Desigualdad de Harnack, Teorema de Liuville para funciones armónicas, etc, los cuales serán resultados importantes que se utilizarán en el último capítulo. En el capítulo 3 el objetivo será estudiar el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace por el método de Perron, utilizando resultados que se obtuvieron en los capítulos 1 y 2.

Capítulo 1

Ecuación diferencial de Poisson en $\mathbb{R}^n$.

En este capítulo se construirá la representación de la integral para la solución de la ecuación de Poisson en dominios G que se mostrarán en este capítulo, lo cual será de gran utilidad para los siguientes resultados, y permitirá dar solución al problema de Dirichlet.

Definición 1.1. *Sean $n \geq 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. La función $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ es* ***armónica*** *en Ω, si φ satisface la ecuación diferencial de Laplace, es decir,*

$$\Delta\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$$

para todo $x \in \Omega$.

Nuestros dominios a lo largo de este escrito serán conjuntos $G \subset \mathbb{R}^n$ conexos y con frontera de clase C^∞ (véase en [7] y [8]).

Definición 1.2. *Sea $\varphi(y; x)$ una función. Diremos que φ es una* ***solución fundamental*** *de la ecuación de Laplace en el dominio G si φ se define como:*

$$\varphi(y; x) = \frac{1}{2\pi} \log|y - x| + \psi(y; x),$$

$x, y \in G$ para $x \neq y$, y $n = 2$ y alternativamente

$$\varphi(y; x) = \frac{1}{(2-n)w_n} |y - x|^{2-n} + \psi(y; x),$$

$x, y \in G$ para $x \neq y$, $n \geq 3$ y w_n el volumen de la esfera unitaria de dimensión n. Donde la función $\psi(y;x)$ es armónica en G para cada $x \in G$.

El significado central de la TeorÃa de Potencial estÃ¡ reflejado en el siguiente resultado

Teorema 1.1. *Sean $n \geq 2$ y G un dominio en $\mathbb{R}^n$. Si u es una función en $C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ la cual es solución de la ecuación diferencial de Poisson tal que*

$$\triangle u(x) = f(x),$$

donde $f(x) \in C^0(\overline{G})$. Entonces

$$u(x) = \int_{\partial G} (u(y)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y;x) - \varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y))\, d\sigma(y) + \int_G \varphi(y;x) f(y)\, dy$$

para todo $x \in G$. Donde ν denota el vector exterior normal unitario para ∂G, $d\sigma(y)$ denota el elemento de superficie en la frontera de G y $\varphi(y;x)$ es una solución fundamental.

Demostración. Presentaremos la prueba sólo para $n \geq 3$. Sea $x \in G$ un punto fijo, elijamos $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \varepsilon\} \subset\subset G$$

se satisface para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Introduzcamos el cambio de coordenadas polares

$$y = x + r\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

con $|\xi| = 1$, cerca del punto x y denotamos la derivada radial por $\frac{\partial}{\partial r}$. En el dominio $G_\varepsilon = G \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}$, aplicando la Fórmula de Green (ver por ejemplo [4], [7] u [8]), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{G_\varepsilon} f(y)\varphi(y;x)dy &= \int_{G_\varepsilon} \Delta u(y)\varphi(y;x)dy \qquad (1,1)\\
&= \int_{G_\varepsilon} (\Delta u(y)\varphi(y;x) - u(y)\Delta_y\varphi(y;x))dy\\
&= \int_{\partial G_\varepsilon} (\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y;x))d\sigma(y)\\
&= \int_{\partial G} (\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y;x))d\sigma(y) -\\
&\quad \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial r}(y) - u(y)\frac{\partial \varphi}{\partial r}(y;x))d\sigma(y)
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.
Observemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (\frac{1}{(2-n)w_n}|y-x|^{2-n} + \psi(y,x))\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{(2-n)w_n}\varepsilon^{2-n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)\\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \psi(y,x)\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)
\end{aligned}$$

y dado que u y ψ son funciónees continuas en G y como ∂B_ε se encuentra contendio en G, entonces podemos acotar a las funciones u y ψ, así

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)\Big| = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big|\frac{1}{(2-n)w_n}\varepsilon^{2-n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y) + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \psi(y;x)\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)\Big|,$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)\Big| &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{(2-n)w_n}\varepsilon^{2-n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\Big|\frac{\partial u}{\partial r}d\sigma(y)\Big| \\
&\quad + \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\Big|\psi(y;x)\Big|\Big|\frac{\partial u}{\partial r}\Big|d\sigma(y) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{(2-n)w_n}\varepsilon^{2-n}M\int_{\partial B_\varepsilon(x)}d\sigma(y) \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0^+}N\int_{\partial B_\varepsilon(x)}d\sigma(y) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big|\frac{1}{(2-n)w_n}\Big|\varepsilon^{2-n}M\varepsilon^{n-1}w_n \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0^+}N\varepsilon^{n-1}w_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

esto se da ya que $vol(\partial B_\varepsilon) = \int_{\partial B_\epsilon(x)} d\sigma(y) = \varepsilon^{n-1}w_n$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial r}(y;x))d\sigma(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{1}{w_n}|y-x|^{1-n}d\sigma(y)\\
&\quad + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial\psi}{\partial r}(y;x)d\sigma(y)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{1}{w_n}|y-x|^{1-n}\\
&\quad +(u(x)-u(x))\frac{1}{w_n}|y-x|^{1-n}d\sigma(y)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (u(y)-u(x))\frac{1}{w_n}|y-x|^{1-n}d\sigma(y)\\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(x)\frac{1}{w_n}|y-x|^{1-n}d\sigma(y)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{w_n}\varepsilon^{1-n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (u(y)-u(x))d\sigma(y)\\
&\quad +u(x)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{1}{w_n}\varepsilon^{1-n}d\sigma(y)\\
&= u(x),
\end{aligned}$$

la última igualdad se da ya que $vol(\partial B_\varepsilon)=\varepsilon^{n-1}w_n$, además u es continua en $B_\varepsilon(x)\subset G$ así que la podemos acotar por una constante, de tal forma que podamos utilizar la propiedad ya mencionada al primcipio de este párrafo.

Aplicando límite a la ecuación (1.1) tenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{G_\epsilon} f(y)\varphi(y;x)d\sigma(y) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial G}(\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(y;x))d\sigma(y)$$

$$-\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\epsilon(x)}(\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial\gamma} - u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}(y;x))d\sigma(y),$$

así

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{G_\epsilon} f(y)\varphi(y;x)d\sigma(y) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\partial G}(\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(y;x))d\sigma(y)+u(x),$$

por tanto

$$\int_G f(y)\varphi(y;x)dy + \int_{\partial G}(u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(y;x) - \varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y))d\sigma(y) = u(x)$$

para todo $x \in G$

$\square$

El siguiente resultado de variable compleja puede consultarse en [4] y [8].

Teorema. *Sean $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ y $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dominios en el respectivo espacio de dimensión n y $m \in \mathbb{N}$. Si $f : \Theta \times \Omega \to \mathbb{C}$, es una función continua tal que $f \in C^0(\Theta \times \Omega, \mathbb{C})$ donde f satisface las siguientes propiedades:*

a) Para cada vector $t \in \Theta$ la función $\Phi(z) := f(t,z)$, con $z \in \Omega$ es holomorfa.

b) Tenemos una función continua integrable $F : \Theta \to [0, +\infty), F \in C^0(\Theta, \mathbb{R})$ satisface

$$\int_\Theta F(t)dt < +\infty,$$

tal que $|f(t,z)| \leq F(t)$ para todo $(t,z) \in \Theta \times \Omega$.

Entonces la función

$$\varphi(z) = \int_\Theta f(t,z)dt, \quad z \in \Omega$$

es holomorfa.

Teorema 1.2. *Sean* $\overset{\circ}{x} = (\overset{\circ}{x}_1, ..., \overset{\circ}{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ *y un radio* $R \in (0, +\infty)$, *y* $B_R(\overset{\circ}{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \overset{\circ}{x}| < R\}$. *Si* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función tal que* $u \in C^2(B_R(\overset{\circ}{x})) \cap C^1(\overline{B_R}(\overset{\circ}{x}))$ *y es solución de la ecuación de Laplace,* $\Delta u(x_1, ..., x_n) = 0$.
Entonces una serie de potencias

$$P(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1, ..., k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

para $x_j \in \mathbb{C}$ *con* $|x_j| \leqslant \frac{R}{4n}$ $j = 1, ..., n$ *con coeficientes reales* $a_{k_1 \dots k_n}$ *para* $k_1, ..., k_n = 0, 1, 2, ...$ *converge absolutamente en el policilindro complejo tal que*

$$u(x) = P(x_1 - \overset{\circ}{x}_1, ..., x_n - \overset{\circ}{x}_n)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ *con* $|x_j - \overset{\circ}{x}_j| \leqslant \frac{R}{4n}$.

Demostración. Es suficiente sólo la prueba para el caso en $B_1(0)$, el cual puede ser fácil de verificar con ayuda de la transformación $T : B_1(0) \longrightarrow B_R(\overset{\circ}{x})$ definida por $T(y) = \overset{\circ}{x} + Ry$, $y \in B_1(0)$. Como antes consideramos sólo el caso $n \geq 3$, con la función

$$\varphi(y; x) = \frac{1}{(2-n)w_n} |y - x|^{2-n}, \qquad y \in B = B_1(0),$$

como una solución fundamental de la ecuación de Laplace en B. Y para cada punto fijo $x \in B$ del Teorema 1.1 obtenemos la siguiente expresión

$$u(x) = \int_{\partial B} (u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y; x) - \varphi(y; x) \frac{\partial u}{\varphi \nu}(y)) d\sigma(y) + \int_B \varphi(y; x) f(y) dy,$$

en la cual, en nuestro caso, $f(y) = 0$. De esta manera

$$u(x) = \int_{\partial B} (u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y; x) - \varphi(y; x) \frac{\partial u}{\varphi \nu}(y)) d\sigma(y),$$

donde el punto $x \in B$ es fijo y $y \in \partial B$ es arbitrario. Se sabe de la definición de la derivada respecto a la normal exterior, (véase [3] o [7]) que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu}\varphi(y;x) &= y\cdot\nabla_y\varphi(y;x)\\
&= \frac{1}{(2-n)w_n}(2-n)y\cdot|y-x|^{1-n}\\
&= y\cdot\frac{1}{w_n}|y-x|^{1-n}\frac{(y-x)}{|y-x|}\\
&= y\cdot\frac{1}{w_n}\frac{(y-x)}{|y-x|^n}\\
&= y\cdot(y-x)\frac{1}{w_n|y-x|^n}.
\end{aligned}$$

Tomamos $\lambda\in\mathbb{R}$, $y\in\partial B$ y $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{C}^n$ que satisface $|x_j|\leqslant\frac{1}{4n}$ para $j=1,...,n$. Consideremos que

$$|y-x|^\lambda=(\Sigma_{j=1}^n(y_j-x_j)^2)^{\frac{\lambda}{2}}=(1-2\Sigma_{j=1}^n y_jx_j+\Sigma_{j=1}^n x_j^2)^{\frac{\lambda}{2}},$$

abreviando con

$$\varrho=-2\Sigma_{j=1}^n y_jx_j+\Sigma_{j=1}^n x_j^2\in\mathbb{C},$$

vemos que

$$|y-x|^\lambda=(1+\varrho)^{\frac{\lambda}{2}}=\Sigma_{l=0}^\infty\binom{\frac{\lambda}{2}}{l}\varrho^l=\Sigma_{l=0}^\infty\binom{\frac{\lambda}{2}}{l}(-2\Sigma_{j=1}^n y_jx_j+\Sigma_{j=1}^n x_j^2)^l.$$

Observemos que

$$|\varrho|=|-2\Sigma_{j=1}^n y_jx_j+\Sigma_{j=1}^n x_j^2|\leqslant 2\Sigma_{j=1}^n|y_j||x_j|+\Sigma_{j=1}^n|x_j|^2\leqslant 2\frac{1}{4n}n+\frac{1}{16n^2}n<1.$$

Ahora definamos la función

$$g(x)=|y-x|^\lambda,\quad x_j\in\mathbb{C}\quad con\quad |x_j|\le\frac{1}{4n},\ \ j=1,...,n,$$

como $|\varrho|<1$ entonces $\Sigma_{l=0}^\infty\binom{\frac{\lambda}{2}}{l}\varrho^l<M$, para algún $M\in\mathbb{R}$ así que la serie converge, de manera que la función $g(x)$ es holomorfa para cada punto fijo $y\in\partial B$. Definimos la siguiente función

$$F(x;y)=u(y)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(y;x)-\varphi(y;x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y),\quad |x_j|\le\frac{1}{4n}$$

la cual, por los cálculos anteriores es holomorfa sobre el policilindro complejo para cada punto fijo $y\in\partial B$ y acotado. $\square$

Teorema 1.3. *Sean* $\overset{\circ}{x} \in \mathbb{R}^n, R \in (0, +\infty)$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *con* $\lambda < n$ *y sea* f *una función holomorfa* $f = f(y_1, ..., y_n)$ *definida en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{C}^n$ *satisfaciendo* $U \supset\supset B_R(\overset{\circ}{x})$*. Entonces la función*

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{B_R(\overset{\circ}{x})} \frac{f(y)}{|y-x|^\lambda} dy, \qquad x \in B_R(\overset{\circ}{x})$$

puede ser localmente expandida bajo una serie de potencias sobre el punto $\overset{\circ}{x}$*.*

Demostración. Aplicando la transformación

$$T(y) = \overset{\circ}{x} + Ry, \qquad y \in B_1(0),$$

podemos considerar el caso $\overset{\circ}{x} = 0$ y $R = 1$, y hacer el análisis para la integral singular

$$F(x_1, ..., x_n) = \int_{|y|<1} \frac{f(y)}{|y-x|^\lambda} dy,$$

$x \in B = B_1(0)$(véase en [3]).
Sea $x \in B$ fijo, consideramos el segmento que une a x con el punto parametrizado con variable ϱ, denotado

$$y = x + \varrho(\xi - x) = (1-\varrho)x + \varrho\xi \quad 0 < \varrho \leqslant 1, \quad |\xi| = 1.$$

Notemos que

$$\xi_n = \xi_n(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \pm\sqrt{1 - \Sigma_{i=1}^{n-1} \xi_i^2},$$

de donde la asignación definida como $(\xi_1, ..., \xi_n - 1, \varrho) \mapsto y$ es biyectiva. Tenemos

$$\frac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, \varrho)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \xi_1} & ... & \frac{\partial y_n}{\partial \xi_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial \xi_{n-1}} & ... & \frac{\partial y_n}{\partial \xi_{n-1}} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varrho} & ... & \frac{\partial y_n}{\partial \varrho} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho & ... & 0 & -\varrho\frac{\xi_1}{\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & \varrho & -\varrho\frac{\partial \xi_{n-1}}{\xi_n} \\ \xi_1 - x_1 & ... & \xi_{n-1} - x_{n-1} & \xi_n - x_n \end{vmatrix}$$

$$= \varrho^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & ... & 0 & -\frac{\xi_1}{\xi_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & ... & 1 & -\frac{\partial \xi_n - 1}{\xi_n} \\ \xi_1 - x_1 & ... & \xi_{n-1} - x_{n-1} & \xi_n - x_n \end{vmatrix}$$

$$= \varrho^{n-1}\frac{1}{\xi_n}(\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i(\xi_i - x_i) + \xi_n(\xi_n - x_n))$$

$$= \frac{\varrho^{n-1}}{\xi_n}(1 - \sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i) \neq 0$$

para todo $|\xi| = 1, |x| < 1$. La fórmula para integrales multiples

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{|y|<1} \frac{f(y)}{|y-x|^{\lambda}} dy \\ &= \int_0^1 \int\limits_{\substack{\xi_1^2+...+\xi_n-1^2<1 \\ \xi_n(\xi_1,...,\xi_n-1)<0}} \frac{f(x+\varrho(\xi-x))}{\varrho^{\lambda}|\xi-x|^{\lambda}} \frac{\varrho^{n-1}}{|\xi_n|}(1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k)d\xi_1...d\xi_{n-1}d\varrho \\ &+ \int_0^1 \int\limits_{\substack{\xi_1^2+...+\xi_n-1^2<1 \\ \xi_n(\xi_1,...,\xi_{n-1})>0}} \frac{f(x+\varrho(\xi-x))}{\varrho^{\lambda}|\xi-x|^{\lambda}} \frac{\varrho^{n-1}}{|\xi_n|}(1-\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k)d\xi_1...d\xi_{n-1}d\varrho \\ &= \int_0^1 \varrho^{n-1-\lambda}(\int_{|\xi|=1} \frac{f(x+\varrho(\xi-x))}{|\xi-x|^{\lambda}}(1-\xi\cdot x)dx_{\xi})d\varrho. \end{aligned}$$

Como en el Teorema 1.2 expandimos la función $|\xi - x|^{\lambda}$ bajo una serie de potencias, y como se ha mencionado previo al Teorema 1.2 podemos extender a $F(x)$ bajo una serie de potencias en una vecindad, del punto $x = 0$.

□

Definición 1.3. *Una función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es llamada **analítica real** en Ω si se cumple que:*
Para cada punto $\mathring{x} = (\mathring{x}_1, ..., \mathring{x}_n) \in \Omega$ existe un número suficientemente pequeño $\varepsilon = \varepsilon(\mathring{x}) > 0$ y una serie de potencias convergente

$$P(z_1, ..., z_n) = \Sigma_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} a_{k_1...k_n} z_1^{k_1} \cdot ... \cdot z_n^{k_n}$$

($z_j \in \mathbb{C}$ con $|z_j| \leqslant \varepsilon$, $j = 1, ..., n$ con coeficientes reales $a_{k_1...k_n} \in \mathbb{R}$ para

$k_1, ..., k_n = 0, 1, 2, ...$) tal que la igualdad

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = P(x_1 - \mathring{x}_1, ..., x_n - \mathring{x}_n),$$

con $|x_j - \mathring{x}_j| \leqslant \varepsilon$, $j = 1, ..., n$ se satisface.

Teorema 1.4. ***(Analiticidad para la ecuación de Poisson)*** *Sean $n \geqslant 2$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función analítica real, definida sobre el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $u \in C^2(\Omega)$ es una función que es solución de la ecuación diferencial de Poisson*

$$\Delta u(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n), \qquad (x_1, ..., x_n) \in \Omega.$$

Entonces $u(x)$ es analítica real en el conjunto Ω.

Demostración. Tomando $\mathring{x} \in \Omega$ y $B_R(\mathring{x}) \subset\subset \Omega$, el Teorema 1.1 nos presenta la solución $u(x)$ con la solución fundamental φ de la siguiente forma

$$u(x) = \int_{\partial B_R(\mathring{x})} (u(y)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y; x) - \varphi(y; x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y))\, d\sigma(y) + \int_{B_R(\mathring{x})} \varphi(y; x) f(y)\, dy$$

con $x \in B_R(\mathring{x})$. Dado que φ es solución fundamental, por el Teorema 1.2 se tiene que

$$\varphi = P(x_1 - \mathring{x}_1, ..., x_n - \mathring{x}_n)$$

donde P es como se menciona en dicho teorema. Así tenemos que la primera integral del lado derecho representa una función analítica real en el punto $\mathring{x}$, y del Teorema 1.3 podemos observar que la segunda integral de la igualdad es una función analítica real en el punto $\mathring{x}$. $\square$

Capítulo 2

Ecuación de la integral de Poisson con aplicaciones.

En el Teorema 1.1 del Capítulo 1 se tiene la construcción de la representación de la integral para la solución de la ecuación de Poisson en dominios G con la solución fundamental $\varphi(y;x)$. La representación de esta ecuación es particularmente simple si la función $\varphi(y;x)$ se anula en la frontera ∂G, dado que una de las integrales se calcula en ∂G. Lo cual motiva a lo siguiente.

Definición 2.1. *Sobre un dominio $G \subset \mathbb{R}^n$ consideremos la solución fundamental $\varphi(y;x)$ dada. Llamaremos a está función una* ***función de Green*** *de dominio G, si la condición de contorno*

$$\varphi(y;x) = 0$$

para todo $y \in \partial G$ se satisface para cualquier $x \in G$.

Daremos unos resultados con respecto a esta definición en el caso particular cuando se considera una bola de radio R como dominio. Para ésto usaremos la notación $B_R = B_R(0)$, de lo contrario se especificará a qué se hace referencia.

Teorema 2.1. *Para la bola $B_R(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$ con $R \in (0, +\infty)$, las siguientes funciones:*

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{R(y-x)}{R^2 - \overline{x}y} \right|, \qquad y \in \overline{B_R}, x \in B_R \quad con \quad n = 2,$$

$$\begin{aligned}\varphi(y;x) &= \frac{1}{(2-n)w_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{(\frac{R}{|x|})^{n-2}}{|y-\frac{R^2}{|x|^2}x|^{n-2}}\right)\\ &= \frac{1}{(2-n)w_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{(R^4-2R^2(x\cdot y)+|x|^2|y|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right)\end{aligned}$$

para $y \in \overline{B_R}, x \in B_R$ *con* $n \geq 3$, *son funciones de Green.*

Demostración. 1. Primero haremos la prueba para cuando $n = 2$. Consideramos el punto $x \in B_R$ como fijo, la expresión

$$f(y) := \frac{R(y-x)}{R^2-\overline{x}y} = \frac{Ry-Rx}{-\overline{x}y+R^2}, \quad y \in \mathbb{C}$$

es una transformación de Möbius con la matriz de coeficientes no singulares

$$\begin{pmatrix} R & -Rx \\ -\overline{x} & R^2 \end{pmatrix},$$

y determinante

$$det\begin{pmatrix} R & -Rx \\ -\overline{x} & R^2 \end{pmatrix} = R(R^2-|x|^2) > 0,$$

lo cual nos da una transformación no singular, es decir, es una función con dominio el plano complejo y contradominio el plano complejo. Para saber de que tipo es, basta saber cual es la imagen del disco de radio R, para esto hacemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}|f(R)| &= \left|\frac{R^2-Rx}{-\overline{x}R+R^2}\right| = \left|\frac{R^2-Rx}{R^2-Rx}\right| = 1\\ |f(-R)| &= \left|\frac{-R^2-Rx}{R\overline{x}+R^2}\right| = \left|\frac{R^2+Rx}{R^2+Rx}\right| = 1\\ |f(iR)| &= \left|\frac{iR^2-Rx}{-iR\overline{x}+R^2}\right| = \left|\frac{iR^2-Rx}{R^2+iRx}\right| = \left|\frac{R^2+iRx}{R^2+iRx}\right| = 1\\ f(0) &= \frac{-x}{R} \in B_1,\end{aligned}$$

con esto podemos ver que la imagen del interior del disco está en el interior del disco unitario, esto implica

$$|f(y)| = 1$$

para todo $y \in \partial B_R$ y entonces

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{R(y-x)}{R^2 - \overline{x}y} \right| = 0$$

para todo $y \in \partial B_R$ y todo $x \in B_R$. Finalmente, notemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(y;x) &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{y-x}{R - \frac{\overline{x}}{R} y} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \log |(y-x)| - \frac{1}{2\pi} \log \left| R - \frac{\overline{x}y}{R} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \log |(y-x)| - \frac{1}{2\pi} \log \left| -\frac{\overline{x}}{R}(y - \frac{R^2}{\overline{x}}) \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \log |(y-x)| - \frac{1}{2\pi} \log \left| y - \frac{R^2}{\overline{x}} \right| - \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{x}{R} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \log |y-x| + \psi(y;x) \quad \textit{con} \quad y \in B_R, x \in B_R \setminus \{0\},
\end{aligned}$$

donde la función $\psi(\cdot;x)$ es armónica en $\overline{B_R}$ es la parte real de una función holomorfa (véase en [4]).

2. Ahora consideremos el caso cuando $n \geq 3$. Definimos la siguiente función

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{(2-n)w_n} \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{K}{|y - \lambda x|^{n-2}} \right), \quad y \in \overline{B_R}.$$

El punto $x \in B_R$ es fijo y las constantes K y λ se elegirán adecuadamente. Primero notemos que la función

$$\psi(y;x) = -\frac{1}{(2-n)w_n} \frac{K}{|y - \lambda x|^{n-2}}$$

es armónica en $y \in \overline{B_R}$ si $\lambda x \notin \overline{B_R}$, ya que

$$\begin{aligned} \psi(y) = \frac{1}{|y|^{2-n}} &= ((y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{1}{2}})^{n-2} \\ &= (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{2-n}{2}}; \end{aligned}$$

notemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = (\frac{2-n}{2})(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-n}{2}}(2y_1) \quad = \quad (2-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-n}{2}}(y_1),$$

calculando la segunda parcial tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} &= (y_1)(2-n)(-\frac{n}{2})(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-(n+2)}{2}}(2y_1) + (2-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-n}{2}} \\ &= (y_1^2)(2-n)(-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-(n+2)}{2}} + (2-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-n}{2}} \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= (y_1^2 + \cdots + y_n^2)(2-n)(-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{-(n+2)}{2}} + n(2-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &= (2-n)(-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{n}{2}} + n(2-n)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &= [(-2n + n^2) + (2n - n^2)](y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La condición $\varphi(y; x) = 0$ para toda $y \in \partial B_R$ se satisface si y sólo si

$$\frac{1}{|y - x|^{n-2}} = \frac{K}{|y - \lambda x|^{n-2}},$$

o equivalentemente cuando

$$K^{\frac{2}{n-2}} |y - x|^2 = |y - \lambda x|^2$$

para todo $y \in \partial B_R$.

Si $|y| = R$ la identidad anterior se puede transformar en

$$K^{\frac{2}{n-2}}(R^2 - 2(y \cdot x) + |x|^2) = R^2 - 2\lambda(y \cdot x) + \lambda^2|x|^2$$

y finalmente en

$$R^2\left(K^{\frac{2}{n-2}} - 1\right) - 2(x \cdot y)\left(K^{\frac{2}{n-2}} - \lambda\right) + |x|^2\left(K^{\frac{2}{n-2}} - \lambda^2\right) = 0.$$

Tomando $\lambda = K^{\frac{2}{n-2}}$ obtenemos

$$R^2(\lambda - 1) + |x|^2(\lambda - \lambda^2) = (\lambda - 1)(R^2 - \lambda|x|^2) = 0.$$

Si $\lambda = 1$ entonces $K = 1$ y de lo cual se tendría que $\varphi \equiv 0$ en todo el dominio, lo cual no consideramos dado que tendríamos la solución trivial. Elijamos $\lambda := \left(\frac{R}{|x|}\right)^2$ y $K = \lambda^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}$. Ahora obtenemos la función de Green en el dominio B_R con la siguiente expresión

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{(2-n)w_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}}{\left|y - \left(\frac{R}{|x|}\right)^2 x\right|^{n-2}}\right)$$

$y \in \overline{B_R}$ para $x \in B_R \setminus \{0\}$. Notemos que

$$\frac{\frac{R}{|x|}}{|y - \frac{R^2}{|x|^2}x|} = \frac{R}{\left||x|y - R^2\frac{x}{|x|}\right|} = \left(\frac{R^2}{|x|^2|y|^2 - 2R^2(x \cdot y) + R^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y la función de Green entonces nos queda:

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{(2-n)w_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{(|x|^2|y|^2 - 2R(x \cdot y) + R^4)^{\frac{n-2}{2}}}\right)$$

para todo $y \in \overline{B_R}$ y $x \in B_R$. $\square$

Con los resultados anteriores en relación a la función de Green podemos dar una representación de la solución de la ecuación de Poisson.

Teorema 2.2. ***(Ecuación de la Integral de Poisson)***
Sean $n \geq 2$ y la bola $B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$ de radio $R \in (0, +\infty)$ en el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Si $u \in C^2(B_R) \cap C^0(\overline{B_R})$ es una función tal que $u(x)$ es solución de la ecuación diferencial de Poisson

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in B_R$$

donde $f(x) \in C^0(\overline{B_R})$. Entonces la integral de Poisson se escribe como

$$u(x) = \frac{1}{Rw_n} \int_{|y|=R} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} u(y) d\sigma(y) + \int_{|y|<R} \varphi(y;x) f(y) dy$$

para todo $x \in B_R$. El símbolo $\varphi(y;x)$ denota la función de Green dado en el Teorema 2.1.

Demostración. Primero supongamos que $u \in C^2(\overline{B_R})$, del Teorema 1.1 del capítulo 1 obtenemos la siguiente igualdad.

$$u(x) = \int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(y;x) d\sigma(y) + \int_{|y|<R} \varphi(y;x) f(y) dy, \quad x \in B_R$$

Podemos notar que la función φ anula una integral pues φ se anula en la frontera. Nos limitaremos al caso $n \geq 3$. Del Teorema 2.1 y su demostración tenemos la función de Green

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{(2-n)w_n} \left(|y-x|^{2-n} - K|y - \lambda x|^{2-n} \right), y \in \overline{B_R}, x \in B_R$$

con $\lambda := \left(\frac{R}{|x|}\right)^2$ y $K = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2} = \lambda^{\frac{n-2}{2}}$.
Tomando a $x \in B_R$ como fijo y $y \in \partial B_R$ arbitrario, determinamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} \varphi(y;x) &= \frac{y}{R} \cdot \nabla_y \varphi(y;x) \\
&= y \cdot \frac{1}{Rw_n} \left(|y-x|^{1-n} \frac{y-x}{|y-x|} - K|y-\lambda x|^{1-n} \frac{y-\lambda x}{|y-\lambda x|} \right) \\
&= y \cdot \frac{1}{Rw_n} \left(\frac{y-x}{|y-x|^n} - K \frac{y-\lambda x}{|y-\lambda x|^n} \right).
\end{aligned}$$

Notemos que esta fórmula también es cierta para $n = 2$, donde $K = 1$. Adicionalmente notemos que

$$\begin{aligned}
|y-\lambda x|^2 &= R^2 - 2\lambda(x\cdot y) + \lambda^2|x|^2 \\
&= R^2 - 2\frac{R^2}{|x|^2}(x\cdot y) + \frac{R^4}{|x|^2} \\
&= \frac{R^2}{|x|^2}\left(|x|^2 - 2(x\cdot y) + R^2\right) \\
&= \lambda|y-x|^2
\end{aligned}$$

y con lo cual $|y-\lambda x|^n = \lambda^{\frac{n}{2}}|y-x|^n$, finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\nu}\varphi(y;x) &= \frac{1}{Rw_n|y-x|^n}y\cdot\left(y - x - K\lambda^{-\frac{n}{2}}(y-\lambda x)\right) \\
&= \frac{1}{Rw_n|y-x|^n}y\cdot\left((1-\lambda^{-\frac{n}{2}}K)y - (1-K\lambda^{\frac{-n+2}{2}})x\right) \\
&= \frac{1}{Rw_n|y-x|^n}y\cdot\left((1-\lambda^{-\frac{n}{2}}\lambda^{\frac{n-2}{2}})y - (1-\lambda^{\frac{n-2}{2}}\lambda^{\frac{-n+2}{2}})x\right) \\
&= \frac{1}{Rw_n|y-x|^n}y\cdot\left((1-\lambda^{-1})y - (1-\lambda^{0})x\right) \\
&= \frac{|y|^2}{Rw_n|y-x|^n}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \frac{|y|^2}{Rw_n|y-x|^n}\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right) \\
&= \frac{|y|^2-|x|^2}{Rw_n|y-x|^n}
\end{aligned}$$

para todo $y\in\partial B_R, x\in B_R$, por lo tanto la integral de Poisson se representa

$$u(x) = \frac{1}{Rw_n}\int_{|y|=R}\frac{|y|^2-|x|^2}{|y-x|^n}u(y)d\sigma(y) + \int_{|y|<R}\varphi(y;x)f(y)dy, \qquad x\in B_R.$$

Ahora se asumirá que $u\in C^2(B_R)\cap C^0(\overline{B_R})$. De la primera parte de esta prueba se puede observar que se podemos cambiar R por cualquier $\varrho\in(0,R)$, así podemos suponer que $u\in C^2(B_\varrho)\cap C^1(\overline{B_\varrho})$ y entonces podemos escribir

$$u(x) = \frac{1}{\varrho w_n}\int_{|y|=\varrho}\frac{|y|^2-|x|^2}{|y-x|^n}u(y)d\sigma(y) + \int_{|y|<\varrho}\varphi(y;x,\varrho)f(y)dy.$$

Aquí $\varphi(y;x,\varrho)$ denota la función de Green para la bola B_ϱ; si $\varrho \to R$ obtenemos

$$u(x) = \frac{1}{Rw_n}\int_{|y|=R}\frac{|y|^2-|x|^2}{|y-x|^n}u(y)d\sigma(y) + \int_{|y|<R}\varphi(y;x,R)f(y)dy$$

para todo $x \in B_R$. □

Podemos notar algunas diferencias entre el Teorema 1.1 del Capítulo 1 y el teorema anterior, es decir, el Teorema 2.2. Observemos que la función u en el Teorema 1.1 pide que la primera derivada sea continua, y en éste solo necesitamos que la función sea continua, hagamos notar también que en el Teorema 1.1 la prueba se realiza sobre un dominio G y en este Teorema es sobre $\overline{B}_R$, otra difencia importante es la función φ y en el Teorema 1.1 era la solución fundamental, la cual en este Teorema no aparece en una integral pues ésta se anula en la frontera.

Observación 2.1. *Llamemos a*

$$P(x,y,R) = \frac{1}{Rw_n}\frac{|y|^2-|x|^2}{|y-x|^n}, \quad y \in \overline{B_R}, \quad x \in B_R$$

el ***Kernel de Poisson.***

Teorema 2.3. *Si $u(x) \in C^2(G)$ es una solución de la ecuación diferencial de Poisson $\Delta u(x) = f(x)$, $x \in G$ en el dominio $G \subset \mathbb{R}^n$. Entonces para toda bola $B_R(a) \subset\subset G$ tenemos las siguientes igualdades.*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|x-a|=R}u(x)d\sigma(x) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{|x-a|<R}\log\left(\frac{R}{|x-a|}\right)f(x)dx$$

en el caso $n = 2$ y

$$u(a) = \frac{1}{R^{n-1}w_n}\int_{|x-a|=R}u(x)d\sigma(x) - \frac{1}{(n-2)w_n}\int_{|x-a|<R}\left(|x-a|^{2-n} - R^{2-n}\right)f(x)dx$$

en el caso $n \geq 3$.

Demostración. Usando $u(x)$ del teorema anterior, es decir,

$$u(x) = \frac{1}{Rw_n}\int_{|y|=R}\frac{|y|^2-|x|^2}{|y-x|^n}u(y)d\sigma(y) + \int_{|y|<R}\varphi(y;x)f(y)dy,$$

y evaluando a u en cero se tiene

$$u(0) = \frac{1}{Rw_n} \int_{|y|=R} \frac{|y|^2}{|y|^n} u(y) d\sigma(y) + \int_{|y|<R} \varphi(y;0) f(y) dy,$$

por otro lado de la función de Green para $n = 2$

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{R(y-x)}{R^2 - \overline{x}y} \right|$$

para $y \in \overline{B_R}$, $x \in B_R$, y evaluando en cero tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(y;0) &= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{Ry}{R^2} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{y}{R} \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \log \frac{|y|}{R} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{|y|}
\end{aligned}$$

y para $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\varphi(y,x) &= \frac{1}{(2-n)w_n} \left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{(R^4 - 2R^2(x \cdot y) + |x|^2|y|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right) \\
\varphi(y,0) &= \frac{1}{(2-n)w_n} \frac{1}{|(y)-(0)|^{n-2}} \\
&- \frac{1}{(2-n)w_n} \frac{R^{n-2}}{(R^4 - 2R^2((0) \cdot (y)) + |0|^2|y|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \\
&= \frac{1}{(2-n)w_n} \left(\frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{(R^2)^{n-2}} \right) \\
&= \frac{1}{(2-n)w_n} \left(\frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right)
\end{aligned}$$

para $y \in \overline{B_R}$. Por otro lado recordando a $u(x)$ del Teorema 2.2 evaluada en cero, para el caso $n = 2$ se tiene

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{Rw_n}\int_{|y|=R}\frac{|y|^2}{|(y)|^2}u(y)d\sigma(y) \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<R}\log\frac{R}{|y|}f(y)dy \end{aligned}$$

y para $n \geq 3$

$$\begin{aligned} u(0) &= \frac{1}{Rw_n}\int_{|y|=R}\frac{|y|^2}{|y|^n}u(y)d\sigma(y) + \\ & \frac{1}{(2-n)w_n}\int_{|y|<R}\left(\frac{1}{|y|^{n-2}-\frac{1}{R^{n-2}}}\right)f(y)dy \\ &= \frac{1}{Rw_n}\int_{|y|=R}\frac{R^2}{R^n}u(y)d\sigma(y) + \\ & \frac{1}{(2-n)w_n}\int_{|y|<R}\left(\frac{1}{|y|^{n-2}-\frac{1}{R^{n-2}}}\right)f(y)dy \\ &= \frac{R^{2-n}}{Rw_n}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y) + \\ & \frac{1}{(2-n)w_n}\int_{|y|<R}\left(\frac{1}{|y|^{n-2}-\frac{1}{R^{n-2}}}\right)f(y)dy \\ &= \frac{1}{R^{n-1}w_n}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y) + \\ & \frac{1}{(2-n)w_n}\int_{|y|<R}\left(\frac{1}{|y|^{n-2}-\frac{1}{R^{n-2}}}\right)f(y)dy, \end{aligned}$$

para $y \in B_R(0)$, donde se debe cumplir $\Delta u(y) = f(y)$. Ahora utilizando la traslación $y = x - a$, se tendría

$$u(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_{|x-a|=R}u(x)d\sigma(x) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{|x-a|<R}\log\left(\frac{R}{|x-a|}\right)f(x)dx$$

en el caso $n = 2$ y

$$u(a) = \frac{1}{R^{n-1}w_n}\int_{|x-a|=R}u(x)d\sigma(x) - \frac{1}{(n-2)w_n}\int_{|x-a|<R}\left(|x-a|^{2-n} - R^{2-n}\right)f(x)dx$$

en el caso $n \geq 3$, para $x \in B_R(a)$ donde se debe cumplir $\Delta u(x) = f(x)$. $\square$

De este Teorema se deriva el siguiente corolario.

Corolario 2.1. *Sea u una función armónica entonces se cumple*

$$u(a) = \frac{1}{R^{n-1} w_n} \int\limits_{|y-a|=R} u(y) d\sigma(y),$$

para $B_R(a) \subset\subset G$. A esta ecuación se le conoce como la propiedad del valor medio para funciones armónicas.

La desigualdad de Harnack que probaremos abajo, establece que las funciones armónicas positivas en dominios acotados son más o menos constante. Un uso importante de estas desigualdades es demostrar la convergencia de sucesiones de funciones armónicas o funciones subarmónicas.

Teorema 2.4. ***(Desigualdad de Harnack)***
Sea $u \in C^2(B_R)$ la función armónica definida en la bola $B_R = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < R\}$ de radio $R \in (0, +\infty)$. Si $u(x) \geq 0$ para toda $x \in B_R$, entonces

$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} u(0)$$

para todo $x \in B_R$.

Demostración. Primero supongamos que $u \in C^2(\overline{B_R})$, del Teorema 2.2 sabemos que

$$u(x) = \int_{|y|=R} P(x, y, R) u(y) d\sigma(y),$$

donde el Kernel de Poisson estaba dado por

$$P(x, y, R) = \frac{|y|^2 - |x|^2}{R w_n |y - x|^n}$$

con $|y| = R$, $x \in B_R$ y donde w_n denota el volumen de la esfera unitaria.

Sabemos que $|y| - |x| \leq |y - x|$. Como $|y| = R$ entonces tenemos que $R - |x| \leq |y - x|$ así $\frac{1}{|y-x|} \leq \frac{1}{R-|x|}$, por otro lado $|y - x| \leq R + |x|$ entonces $\frac{1}{R+|x|} \leq \frac{1}{|y-x|}$, así obtenemos

$$\frac{|y|^2 - |x|^2}{(R + |x|)^n} \leq \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} \leq \frac{|y|^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n},$$

multiplicando a esta desigualdad por $\frac{1}{Rw_n}u(y)$ e integrando sobre ∂B_R tenemos

$$\frac{1}{Rw_n}\frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y)\leq u(x)\leq\frac{1}{Rw_n}\frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y),$$

reescribiendo lo anterior

$$\frac{R^{n-2}}{R^{n-1}w_n}\frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y)\leq u(x)\leq\frac{R^{n-2}}{R^{n-1}w_n}\frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n}\int_{|y|=R}u(y)d\sigma(y).$$

Ahora bien usando la propiedad del valor medio para funciones armónicas (ver Corolario 2.1) obtenemos

$$R^{n-2}\frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^n}u(0)\leq u(x)\leq R^{n-2}\frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^n}u(0),$$

o bien

$$R^{n-2}\frac{R(1-\frac{|x|^2}{R^2})}{(R(1+\frac{|x|}{R}))^n}u(0)\leq u(x)\leq R^{n-2}\frac{R(1-\frac{|x|^2}{R^2})}{(R(1-\frac{|x|}{R}))^n}u(0),$$

y con lo cual tenemos

$$\frac{1-\frac{|x|^2}{R^2}}{(1+\frac{|x|}{R})^n}u(0)\leq u(x)\leq\frac{1-\frac{|x|^2}{R^2}}{(1-\frac{|x|}{R})^n}u(0),$$

pero notemos que

$$\frac{(1-\frac{|x|}{R})(1+\frac{|x|}{R})}{(1+\frac{|x|}{R})^n}u(0)\leq u(x)\leq\frac{(1-\frac{|x|}{R})(1+\frac{|x|}{R})}{(1-\frac{|x|}{R})^n}u(0),$$

donde finalmente tenemos

$$\frac{1-\frac{|x|}{R}}{(1+\frac{|x|}{R})^{n-1}}u(0)\leq u(x)\leq\frac{1+\frac{|x|}{R}}{(1-\frac{|x|}{R})^{n-1}}u(0)$$

para $x\in B_R$. □

Un resultado importante que es consecuencia de la Desigualdad de Harnack, es el siguiente, el cual clasifica algunas funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.5. ***(Teorema de Liouville para funciones armónicas)*** *Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función armónica que satisface $u(x) \leq M$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, con una constante $M \in \mathbb{R}$. Entonces $u(x) \equiv cte$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Consideremos la función $v(x) = M - u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ notemos que $v(x) \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$, es fácil ver que v también es armónica. Por la desigualdad de Harnack obtenemos

$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{\left(1 + \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} v(0) \leq v(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{\left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{n-1}} v(0)$$

para $x \in B_R$ con $R > 0$. Notemos que si $R \to +\infty$ se tiene que $v(x) = v(0)$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ y podemos concluir que $u(x) \equiv cte$. $\square$

Una definición importante que se desprende de los resultados anteriores es la siguiente:

Definición 2.2. *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $u : G \to \mathbb{R}$, donde $u \in C^0(G)$. Llamaremos a u*
a) ***débilmente armónica,*** *si:*

$$u(a) = \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x) = \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi),$$

b) ***superarmónica,*** *si:*

$$u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1} w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x) = \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi),$$

c) ***subarmónica,*** *si:*

$$u(a) \leq \frac{1}{r^{n-1} w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x) = \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi),$$

para toda $a \in G$ y $r \in (0, \vartheta(a))$ para cualquier $\vartheta(a) \in (0, dist(a, \mathbb{R}^n \setminus G))$.

Proposición 2.1. *1.- La función $u : G \to \mathbb{R} \in C^0(G)$ es superarmónica si y sólo si la función $-u$ es subarmónica.*
2.-Una función es débilmente armónica si y sólo si es simultaneamente superarmónica y subarmónica.
3.-Una función es débilmente armónica si satisface la propiedad del valor

medio para funciones armónicas (como se vio en el corolario 2.1).
4.-Si $u, v : G \to \mathbb{R}$ *son funciones superarmónicas y* $\alpha \in [0, +\infty)$ *es una constante, entonces las siguientes funciones*

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \alpha u(x), \\ h_2(x) &= u(x) + v(x), \\ h_3(x) &= \min\{u(x), v(x)\}, \end{aligned}$$

también son superarmónicas en G.

5.- Sean $u, v : G \to \mathbb{R}$ *funciones subarmónicas y* $\alpha \in [0, +\infty)$ *es una constante, entonces las siguientes funciones*

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \alpha u(x), \\ h_2(x) &= u(x) + v(x), \\ h_3(x) &= \max\{u(x), v(x)\}, \end{aligned}$$

también son subarmónicas en G.

Demostración. Los primeros enunciados son inmediatos, sólo se realizará la demostración de 4 ya que 5 es análogo. Sea $a \in G$ y $r \in (0, \vartheta(a))$ un radio.
$i)$ Como $u(x)$ es superarmónica cumple que

$$u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x)$$

y como $\alpha \geq 0$ entonces

$$\alpha u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} \alpha u(x) d\sigma(x),$$

así

$$h_1(a) = \alpha u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} \alpha u(x) d\sigma(x)) = \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} h_1(x) d\sigma(x).$$

ii) Sabemos que u y v son superarmónicas, es decir,

$$u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x)$$

y

$$v(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} v(x) d\sigma(x),$$

así

$$\begin{aligned} h_2(a) = u(a) + v(a) &\geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x) + \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} v(x) d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}w_n} \left(\int_{|x-a|=r} (u(x) + v(x)) d\sigma(x) \right) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} h_2(x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

iii) Sea $a \in G$ y $r \in (0, \vartheta(a))$ un radio, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} h_3(a + r\xi) d\sigma(\xi) &= \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} \text{mín} \{u(a + r\xi), v(a + r\xi)\} d\sigma(\xi) \\ &\leq \text{mín} \left\{ \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi), \frac{1}{w_n} \int_{|\xi|=1} v(a + r\xi) d\sigma(\xi) \right\} \\ &\leq \text{mín} \{u(a), v(a)\} = h_3(a). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6. *Sea $u \in C^2(G)$ la función definida sobre el dominio $G \subset \mathbb{R}^n$. Entonces u es*
a) Débilmente armónica en G si y sólo si

$$\Delta u(x) = 0$$

para toda $x \in G$.
b) Subarmónica en G si y sólo si

$$\Delta u(x) \leq 0$$

para toda $x \in G$.
c) Superarmónica en G *si y sólo si*

$$\Delta u(x) \geq 0$$

para toda $x \in G$.

Demostración. Supongamos que u es débilmente armónica, es decir,

$$u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x), \tag{2.1}$$

$$u(a) \leq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x). \tag{2.2}$$

Definimos a $f(x) = \Delta u(x)$ para $x \in G$ y $f \in C^0(G)$. Del Teorema 2.3 tenemos la siguiente igualdad para todo $a \in G$ y $r \in (0, \vartheta(a))$ un radio

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x) \\ &- \frac{1}{(n-2)w_n} \int_{|x-a|<r} \left(|x-a|^{2-n} - r^{2-n} \right) f(x) dx, \end{aligned}$$

así, si suponemos que u es superarmónica se cumple (2.1)

$$\frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x) - \frac{1}{(n-2)w_n} \int_{|x-a|<r} \left(|x-a|^{2-n} - r^{2-n} \right) f(x) dx \geq$$

$$\frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x) d\sigma(x).$$

Entonces

$$\frac{1}{(n-2)w_n} \int_{|x-a|<r} \left(|x-a|^{2-n} - r^{2-n} \right) f(x) dx \leq 0.$$

Notemos que como $|x-a| < r$ entonces para $n \geq 3$ se tiene $r^{2-n} < |x-a|^{2-n}$, así $(|x-a|^{2-n} - r^{2-n}) > 0$, de donde se debe cumplir que $f(x) \leq 0$, por tanto $\Delta u(x) \leq 0$. Por otra parte si usamos la desigualdad (2.2) se obtiene $\Delta u(x) \geq 0$.

Ahora supongamos que $\Delta u(x) = 0, \Delta u(x) \geq 0, \Delta u(x) \leq 0$, sabemos nuevamente por el Teorema 2.3 que

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x)d\sigma(x) \\ &- \frac{1}{(n-2)w_n} \int_{|x-a|<r} \left(|x-a|^{2-n} - r^{2-n}\right) f(x)dx \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} u(a) &- \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x)d\sigma(x) = \\ &- \frac{1}{(n-2)w_n} \int_{|x-a|<r} \left(|x-a|^{2-n} - r^{2-n}\right) f(x)dx \end{aligned}$$

y definamos a

$$\chi(a,r) = -\frac{1}{(n-2)w_n} \int_{|x-a|<r} (|x-a|^{2-n} - r^{2-n}) f(x)dx,$$

si suponemos $\Delta u(x) \leq 0$, definamos $f(x) = \Delta u(x)$. Entonces $\chi(a,r) \geq 0$, así

$$u(a) - \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x)d\sigma(x) \geq 0,$$

por lo que

$$u(a) \geq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x)d\sigma(x).$$

Por otro lado $\Delta u(x) \geq 0$, así $u(a) - \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x)d\sigma(x) \leq 0$, de esta manera

$$u(a) \leq \frac{1}{r^{n-1}w_n} \int_{|x-a|=r} u(x)d\sigma(x).$$

Por tanto $u(x)$ es débilmente armónica.

□

Teorema 2.7. ***(Principio del máximo y mínimo)***
Si la función superarmónica (subarmónica) $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$, definida sobre el dominio $G \subset \mathbb{R}^n$ tiene un mínimo (máximo) global en $\mathring{x} \in G$, es decir,

$$u(x) \geq u(\mathring{x}) \qquad (u(x) \leq u(\mathring{x})) \quad \textit{para} \;\; \textit{todo} \;\; x \in G,$$

entonces

$$u(x) = const \quad en \quad G.$$

Demostración. Como la función u es superarmónica, podemos considerar la reflexión $u \longrightarrow -u$, la cual manda funciones subarmónicas a funciones superarmónicas, de manera que solo demostraremos el Teorema para funciones superarmónicas, pues sabemos que la reflexión es superarmónica si u es subarmónica. Ahora supongamos que la función superarmónica $u : G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \in C^0(G)$ tiene un mínimo global en el punto $\overset{\circ}{x} \in G$. Consideremos el conjunto

$$G^* = \{x \in G : u(x) = \inf_{y \in G} u(y) = u(\overset{\circ}{x})\}$$

el cual debido a la continuidad de u es cerrado en el dominio G.
Ahora mostraremos que el conjunto G^* es abierto, sea $a \in G^*$ un punto arbitrario, notemos que

$$\begin{aligned} u(a) &\geq \frac{1}{w_n} \int\limits_{|\xi|=1} u(a + r\xi) d\sigma(\xi), \\ 0 = u(a) - u(a) &\geq \frac{1}{w_n} \int\limits_{|\xi|=1} (u(a + r\xi) - u(a)) d\sigma(\xi) \geq 0, \end{aligned}$$

por tanto $u(a+r\xi) = u(a)$ con $x = a+r\xi$, para todo $r \in (0, \vartheta(a)$. Esto implica $u(x) = u(a)$ para todos los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x - a| < \vartheta(a)$. Entonces el conjunto G^* es abierto, como G es un dominio en particular es conexo. De la continuidad $u(x) \equiv u(\overset{\circ}{x})$ para todo $x \in G$, esto es $u(x) = const$. $\square$

Teorema 2.8. *Sea $u \in C^0(G)$ la función superarmónica (subarmónica) en la frontera del dominio $G \subset \mathbb{R}^n$. Si toda sucesión de puntos $\{x^{(k)}\}_{k=1,2,\ldots} \subset G$ que satisface $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \in \partial G$ tiene la propiedad*

$$\liminf_{k\to\infty} u(x^{(k)}) \geq M,$$

$$(\limsup_{k\to\infty} u(x^{(k)}) \leq M),$$

con una constante $M \in \mathbb{R}$. Entonces

$$u(x) \geq M$$

$$(u(x) \leq M)$$

para toda $x \in G$.

Demostración. Es suficiente considerar funciones superarmónicas $u : G \to \mathbb{R}$, por la misma razón del teorema anterior. Supongamos que la afirmación $u(x) \geq M$ para todo $x \in G$ es falsa, tenemos un punto $\xi \in G$ con $\mu := u(\xi) < M$. De esta manera podemos construir una sucesión creciente de subconjuntos Θ_j conexos compactos de G, (véanse los conceptos de sucesión creciente y conexos compactos en [7]) satisfaciendo

$$\xi \in \Theta_1 \subset \Theta_2 \subset ...$$

$$\lim_{j \to \infty} \Theta_j = G.$$

Del Teorema 2.7 la función superarmónica u tiene un mínimo $y^{(j)} \in \partial\Theta_j$ para cada compacto Θ_j. Más aún tenemos la desigualdad

$$u(y^{(j)}) \leq u(\xi) = \mu$$

para $j = 1, 2, ...$

De la sucesión $\left\{y^{(j)}\right\}_{j=1,2,...} \subset \overline{G}$ y por la compacidad de $\overline{G}$ podemos elegir una subsucesión convergente $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1,2,...} \subset \left\{y^{(j)}\right\}_{j=1,2,...}$ con lo cual se obtiene una sucesión de puntos $\left\{x^{(j)}\right\}_{j=1,2,...} \subset G$, la cual satisface $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x \in \partial G$ y por lo dicho anteriormente $\liminf\limits_{k \to \infty} u(y^{(k)}) \leq \mu < M$, con lo cual llegamos a una contradicción, pues por hipótesis

$$\liminf_{k \to \infty} u(y^{(k)}) \geq M$$

para toda sucesión $\left\{y^{(j)}\right\}_{j=1,2,...} \subset G$ con $\lim\limits_{k \to \infty} y^{(k)} \in \partial G$. $\square$

Teorema 2.9. *Para dos funciones* $u, v : G \to \mathbb{R} \in C^0(G)$*, que son débilmente armónicas en* G*, se cumple*

$$\sup_{x \in G} |u(x) - v(x)| \leq \sup_{x \in \partial G} |u(x) - v(x)|.$$

Demostración. De la definición de débilmente armónica notemos que la función $w(x) = u(x) - v(x)$, $x \in \overline{G}$ es continua y débilmente armónica en G. Considerando $M = \sup_{x \in \partial G} |u(x) - v(x)|$, el Teorema 2.8 nos proporciona la siguiente desigualdad

$$-M \leq w(x) \leq M$$

para todo $x \in G$, de donde

$$\sup_{x \in G} |u(x) - v(x)| \leq \sup_{x \in \partial G} |u(x) - v(x)|.$$

□

Por continuidad, el teorema anterior puede extenderse para funciones en la cerradura de G.

Corolario 2.2. *Consideremos dos funciones $u, v : \overline{G} \to \mathbb{R} \in C^0(\overline{G})$, débilmente armónicas en G. Entonces*

$$\sup_{x \in \overline{G}} |u(x) - v(x)| = \sup_{x \in \partial G} |u(x) - v(x)|.$$

Teorema 2.10. *La función de Green $\varphi_G(y, x)$ se determina únicamente para un dominio G y*

$$\varphi_G(y, x) < 0$$

para todo $(x, y) \in G \times G$ fijo.

Demostración. Sólo hacemos la prueba para $n \geq 3$.

Sean φ_1 y φ_2 dos funciones de Green definidas por

$$\varphi_j(y, x) = \frac{1}{(2-n)w_n} |y - x|^{2-n} + \psi_j(y, x)$$

con $y \in \overline{G}$, $x \in G$, $j = 1, 2$, ψ_j funciónes armónicas. Sabemos que una función de Green se anula en la frontera, entonces $0 = \varphi_1(y, x) = \varphi_2(y, x)$, para $y \in \partial G$ y $x \in G$, como el primer término en la expresión de φ_j, es igual para $j = 1, 2$ entonces

$$\psi_1(y, x) = \psi_2(y, x),$$

$y \in \partial G$, $x \in G$. Por el Teorema 2.9 obtenemos que $\psi_1(y, x) \equiv \psi_2(y, x)$ y finalmente

$$\psi_1 \equiv \psi_2.$$

Ahora consideramos el punto $x \in G$ fijo y la función de Green

$$\varphi_j(y,x) = \frac{1}{(2-n)w_n}|y-x|^{2-n} + \psi_j(y,x)$$

con $y \in \overline{G}$ para el dominio G. Entonces la función $\chi(y) := \varphi(y,x)$, $\chi : G \setminus \{x\} \to R$ es armónica por definición de solución fundamental. Elegimos una sucesión arbitraria de puntos tales que $\left\{y^{(k)}\right\}_{k=1,2,\dots} \subset G'$, donde $G' = G \setminus \{x\}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = y \in \partial G' = \partial G \cup \{x\}$, por la continuidad de φ se tiene $\varphi(y^{(k)},x) \to \varphi(y,x)$, notemos que $\varphi(y;x) = 0$, si $y \in \partial G$. Por otro lado $y^{(k)} \to x$ por como se ha definido a χ podemos asegurar que esta función es continua, así

$$\chi(y^{(k)}) \to \varphi(x,x)$$

Más aún podemos notar que el máximo lo alcanza en la frontera, es decir, los valores fuera de la frontera son menores que cero $\varphi(x,x) < 0$, por tanto

$$\limsup_{k\to\infty} \chi(y^{(k)}) \leq 0,$$

entonces por el Teorema 2.8 tenemos que $\chi(y) \leq 0$ para toda $y \in G'$ y el Teorema 2.7 implica que

$$\varphi_G(y,x) < 0.$$

$\square$

Capítulo 3

Problema de Dirichlet para la Ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n$.

En este capítulo $f : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ denotará una función continua definida en ∂G. Nuestro objetivo es estudiar el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

$$\begin{aligned} \Delta u(x) = 0 \ \text{ para todo } x \in G, \\ u(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \partial G, \\ u \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G}). \end{aligned}$$

Se conoce que para el Problema de Dirichlet existen soluciones para dominios rectangulares utilizando funciones de Green (veasé en [5]), las cuales tienen representación en Series de Fourier, (véase en [2]); de igual forma se pueden obtener soluciones para el problema de Dirichlet en dominios sencillos como en cilindros o discos (véase en [9]).

Teorema 3.1. ***(Teorema de unicidad)***
Sean $u(x), v(x)$ dos soluciones del problema de Dirichlet para G y $f : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces tenemos

$$u(x) \equiv v(x) \ \text{en } \overline{G}.$$

Demostración. Observamos que la función $w(x) := v(x) - u(x)$, es de clase $C^2(G) \cap C^0(\overline{G})$ además es débilmente armónica en G y

$$w(x) = v(x) - u(x) = f(x) - f(x) = 0$$

para todo $x \in \partial G$. Como $w(x) = 0$ para todo $x \in \partial G$ entonces $\sup\limits_{x\in\partial G}|u(x) - v(x)| = 0$. Por otro lado notemos que u, v son continuas en $\overline{G}$ y débilmente armónicas en G así utilizando el Corolario 2.2 del Capítulo 2 $\sup\limits_{x\in\overline{G}}|u(x) - v(x)| = 0$ entonces $w(x) \equiv 0$ en $\overline{G}$. $\square$

Teorema 3.2. *Sean $B_R(a) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - a| < R\}$ la bola con centro en $a \in \mathbb{R}^n$ y $R \in (0, \infty)$ un radio. Si la integral de Poisson*

$$u(x) = \frac{1}{Rw_n}\int_{|y-a|=R} \frac{|y - a|^2 - |x - a|^2}{|y - x|^n} f(y)d\sigma(y), \quad x \in B_R(a).$$

Entonces la función u es de clase $C^2(B_R(a)) \cap C^0(\overline{B_R(a)})$ y es armónica en $B_R(a)$. Mas aún, tenemos que en la frontera

$$\lim_{\substack{x\to\mathring{x} \\ x\in B_R(a)}} u(x) = f(\mathring{x}) \text{ para todo } \mathring{x} \in \partial B_R(a).$$

De esta forma la función u es solución del problema de Dirichlet sobre la bola $G = B_R(a)$ para la función continua $f : \partial B_R(a) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. Primero consideremos cuando $a = 0,\ R = 1$ y denotemos $B = B_1(0)$.

Entonces obtenemos la función

$$u(x) = \frac{1}{w_n}\int_{|y|=1} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} f(y)d\sigma(y) = \int_{|y|=1} P(y, x)f(y)d\sigma(y),\ x \in B$$

con el kernel de Poisson

$$P(y, x) = \frac{1}{w_n}\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n},\ y \in \partial B,\ x \in B.$$

Notemos que la función u implica que $u \in C^2(B)$. Acorde con la parte uno de la prueba del Teorema 2.2 de la Capítulo 2, la siguiente igualdad se satisface

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu}\varphi(y;x) &= \frac{1}{w_n|y-x|^n} y\cdot \left(y - x - K\lambda^{-\frac{n}{2}}(y-\lambda x)\right)\\
&= \frac{1}{w_n|y-x|^n} y\cdot \left((1-\lambda^{-\frac{n}{2}}K)y - (1-K\lambda^{\frac{-n+2}{2}})x\right)\\
&= \frac{1}{w_n|y-x|^n} y\cdot \left((1-\lambda^{-\frac{n}{2}}\lambda^{\frac{n-2}{2}})y - (1-\lambda^{\frac{n-2}{2}}\lambda^{\frac{-n+2}{2}})x\right)\\
&= \frac{1}{w_n|y-x|^n} y\cdot \left((1-\lambda^{-1})y - (1-\lambda^{0})x\right)\\
&= \frac{|y|^2}{w_n|y-x|^n}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\\
&= \frac{|y|^2}{w_n|y-x|^n}\left(1-|x|^2\right)\\
&= \frac{|y|^2-|x|^2}{w_n|y-x|^n}.
\end{aligned}$$

Así tenemos las siguientes igualdades;

$$P(y,x) = \frac{1}{w_n}\frac{|y|^2-|x|^2}{|y-x|^n} = \frac{\partial}{\partial \nu}\varphi(y;x) = y\cdot\nabla_y\varphi(y;x),\ y\in\partial B,\ x\in B.$$

Notemos que $\varphi(y;x)$ denota la función de Green para la bola unitaria B descrita anteriormente en el Capítulo 2 en el Teorema 2.1, a saber, para $n\geq 3$ es

$$\begin{aligned}
\varphi(y;x) &= \frac{1}{(2-n)w_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{(\frac{R}{|x|})^{n-2}}{|y-\frac{R^2}{|x|^2}x|^{n-2}}\right)\\
&= \frac{1}{(2-n)w_n}\left(\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{R^{n-2}}{(R^4-2R^2(x\cdot y)+|x|^2|y|^2)^{\frac{n-2}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

y

$$\varphi(y;x) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{R(y-x)}{R^2-\overline{x}y}\right|, \qquad y\in\overline{B_R}, x\in B_R \ \text{ con } \ n=2.$$

Como φ es simétrica, es decir;

$$\varphi(x;y) = \varphi(y;x) \text{ para todo } x, y \in B \; con \; x \neq y.$$

Mas aún, como φ es armónica tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_x P(y;x) &= y \cdot \Delta_y(\nabla_x \varphi(y;x)) \\ &= y \cdot \nabla_y(\Delta_x \varphi(y;x)) \\ &= 0 \quad x \in B, \; y \in \partial B. \end{aligned}$$

Con lo cual, obtenemos

$$\Delta u(x) = \int_{|y|=1} \Delta_x P(y;x) f(y) d\sigma(y) = 0$$

para todo $x \in B$.

Aplicando el Teorema 2.2 capítulo 2 para la función armónica $v(x) = 1$ con x en B, se puede deducir

$$1 = \frac{1}{w_n} \int_{|y|=1} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} 1 d\sigma(y) = \int_{|y|=1} P(y;x) d\sigma(y). \tag{3.1}$$

Mas aún $P(y;x) > 0$ para todo y en la frontera de B y todo x en B. Ahora mostraremos la implicación

$$\lim_{x \to \overset{\circ}{x}} u(x) = f(\overset{\circ}{x})$$

para todo punto $\overset{\circ}{x}$ que está en la frontera de B. Tomamos un punto arbitrario x en B y vemos que por la definición de $u(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} u(x) - f(\overset{\circ}{x}) &= \frac{1}{w_n} \int\limits_{|y|=1} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} (f(y) - f(\overset{\circ}{x})) d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \overset{\circ}{x}| \geq 2\delta}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} (f(y) - f(\overset{\circ}{x})) d\sigma(y) + \\ & \quad \frac{1}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \overset{\circ}{x}| \leq 2\delta}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y-x|^n} (f(y) - f(\overset{\circ}{x})) d\sigma(y) \end{aligned}$$

Probaremos primero que la última integral tiende a 0. La función f es continua en el punto $\overset{\circ}{x}$, por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(y) - f(\overset{\circ}{x})| < \varepsilon$ siempre se cumple para todo punto $y \in \partial B$ con $|y - \overset{\circ}{x}| < 2\delta$. Esto implica que, usando (3.1)

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \overset{\circ}{x}| \leq 2\delta}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} (f(y) - f(\overset{\circ}{x})) d\sigma(y) \right| &\leq \frac{1}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \overset{\circ}{x}| \leq 2\delta}} \left| \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} \right| \big| f(y) - f(\overset{\circ}{x}) \big| d\sigma(y) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $x \in B$. Ahora se probará el caso cuando $y \in \partial B$ con $|y - \overset{\circ}{x}| \geq 2\delta$, eligiendo un punto $x \in B$ con $|x - \overset{\circ}{x}| \leq \delta$ (Figura 3.1), inferimos la siguiente desigualdad $|y - x| > |y - \overset{\circ}{x}| - |\overset{\circ}{x} - x| \geq 2\delta - \delta = \delta$.

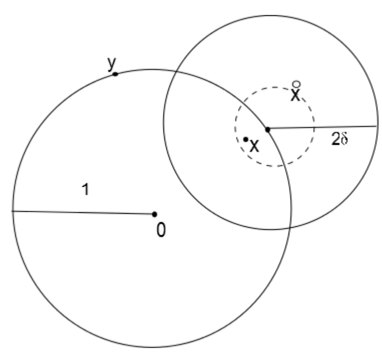

Figura 3.1: $|y - \overset{\circ}{x}| \geq 2\delta$ y $|x - \overset{\circ}{x}| \leq \delta$

Como x está en B y y están en la frontera de B, tenemos que $|x| \leq 1$ y $|y| = 1$ así $|y| + |x| \leq 1 + 1 = 2$ entonces

$$(|y| + |x|)(|y| - |x|) \leq 2(|y| - |x|) = 2(|\mathring{x}| - |x|).$$

Con lo cual, para todo $y \in \partial B$ con $|y - \mathring{x}| \geq 2\delta$ y $x \in B$ con $|x - \mathring{x}| \leq \eta < \delta$ y tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} &\leq \frac{(|y| + |x|)(|y| - |x|)}{\delta^n} \\
&\leq \frac{2}{\delta^n}(|\mathring{x}| - |x|) \\
&\leq \frac{2}{\delta^n}|\mathring{x} - x| \\
&\leq \frac{2\eta}{\delta^n}.
\end{aligned}$$

Como estamos suponiendo f continua en ∂B y este último es un conjunto acotado, existe $M := \sup\limits_{y \in \partial B} |f(y)|$, así podemos calcular lo siguiente

$$\begin{aligned}
\underbrace{\left| \frac{1}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \mathring{x}| \geq 2\delta}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} (f(y) - f(\mathring{x})) d\sigma(y) \right|}_{**} &\leq \frac{1}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \mathring{x}| \geq 2\delta}} \left| \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} \right| |f(y) - f(\mathring{x})| d\sigma(y) \\
&\leq \frac{2M}{w_n} \int\limits_{\substack{y \in \partial B \\ |y - \mathring{x}| \geq 2\delta}} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} d\sigma(y) \\
&\leq \frac{2M}{w_n} \int\limits_{y \in \partial B} \frac{2\eta}{\delta^n} d\sigma(y) \\
&< \frac{2M}{w_n} \frac{2\eta}{\delta^n} w_n \\
&\leq \frac{4M\eta}{\delta^n}.
\end{aligned}$$

Así dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = (\frac{4M\eta}{\varepsilon})^{\frac{1}{n}}$, entonces $(**) < \varepsilon$.
Si elegimos un $\eta \in (0, \delta)$ suficientemente pequeño, con los anteriores cálculos podemos deducir

$$|u(x) - f(\overset{\circ}{x})| \leq 2\varepsilon$$

para todo $x \in B$ con $|x - \overset{\circ}{x}| < \delta$. Esto implica que

$$\lim_{x \to \overset{\circ}{x}} u(x) = f(\overset{\circ}{x})$$

para todo $\overset{\circ}{x} \in \partial B$ con $x \in B$. Con lo anterior tenemos que la función

$$u(x) = \frac{1}{w_n} \int\limits_{|y|=1} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|y - x|^n} f(y) d\sigma(y)$$

con $x \in B$ es solución al problema de Dirichlet en la bola unitaria B.
Ahora probaremos para $B_R(a)$, para ésto utilizaremos la transformación biyectiva $T : \overline{B_R(a)} \to \overline{B_1(0)}$ (Figura 3.2).

$$x = T\xi = \frac{1}{R}(\xi - a) \qquad \xi \in \overline{B_R(a)}.$$

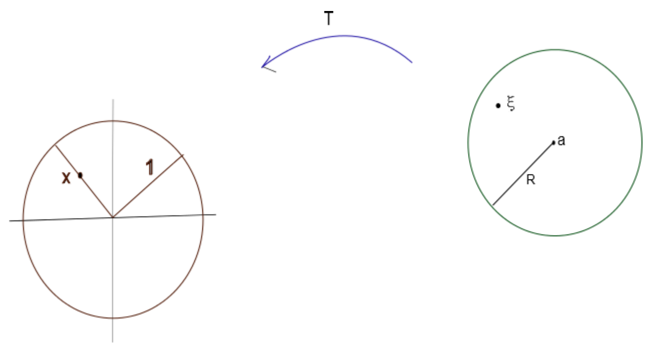

Figura 3.2: transformación T

Podemos definir la función $v(\xi) := u(T\xi)$, donde u es solución del problema de Dirichlet en $B_1(0)$. Como T es de clase C^∞, por regla de la cadena se deduce que $v(\xi) \in C^2(B_R(a)) \cap C^0(\overline{B_R(a)})$, además

$$\begin{aligned} \Delta v(\xi) &= 0 \text{ para todo } \xi \in B_R(a), \\ v(\xi) &= g(\xi) \text{ para todo } \xi \in \partial B_R(a), \end{aligned}$$

donde $g(\xi) = f(T\xi)$ con $\xi \in \partial B_R(a)$.
Tomando $\eta = T^{-1}y = Ry + a$, $y \in \partial B$ notemos que $\eta \in \partial B_R(a)$ y $d\sigma(\eta) = R^{n-1} d\sigma(y)$. Calculamos

$$
\begin{aligned}
v(\xi) = u(T\xi) &= \frac{1}{w_n} \int\limits_{|y|=1} \frac{|y|^2 - |T\xi|^2}{|y - T\xi|^n} f(y) d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{w_n} \int\limits_{|\eta-a|=R} \frac{|T\eta|^2 - |T\xi|^2}{|T\eta - T\xi|^n} f(T\eta) \frac{1}{R^{n-1}} d\sigma(\eta) \\
&= \frac{1}{w_n} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{|\eta-a|=R} \frac{|\frac{1}{R}(\eta - a)|^2 - |\frac{1}{R}(\xi - a)|^2}{|\frac{1}{R}(\eta - a) - \frac{1}{R}(\xi - a)|^n} f(T\eta) d\sigma(\eta) \\
&= \frac{1}{w_n} \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{|\eta-a|=R} \frac{\frac{1}{R^2}(|(\eta - a)|^2 - |(\xi - a)|^2)}{\frac{1}{R^n}(|\eta - a) - (\xi - a)|^n} f(T\eta) d\sigma(\eta) \\
&= \frac{1}{w_n} \frac{1}{R} \int\limits_{|\eta-a|=R} \frac{(|(\eta - a)|^2 - |(\xi - a)|^2)}{|\eta - \xi|^n} g(\eta) d\sigma(\eta).
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 3.3. ***(Teorema de Regularidad para funciones débilmente armónicas)*** *Sea $u : G \to \mathbb{R}$, $u \in C^0(G)$ una función débilmente armónica definida sobre el dominio $G \subset \mathbb{R}^n$. Entonces la función u es real analítica en G y satisface la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in G$.*

Demostración. Sea $a \in G$ un punto elegido arbitrariamente. Para un radio adecuado $R \in (0, \infty)$ tal que la bola $B_R(a) \subset\subset G$ y consideramos a v como la integral de Poisson en la $B_R(a)$, utilizando el Teorema 3.2 tenemos que v es de clase $C^2(B_R(a)) \cap C^0(\overline{B_R(a)})$ y armónica en $B_R(a)$, entonces $\Delta v(x) = 0$ para todo $x \in B_R(a)$, mas aún tenemos por el mismo Teorema que

$$
\lim_{\substack{x \to \mathring{x} \\ x \in B_R(a)}} v(\mathring{x}) = u(x) \text{ para todo } \mathring{x} \in \partial B_R(a).
$$

para la función continua $u : \partial B_R(a) \to \mathbb{R}$.
Por lo anterior tenemos que v es débilmente armónica y de clase $C^0(\overline{B_R(a)})$, utilizando el Corolario 2.2 tenemos que $u(x) = v(x)$ en $(\overline{B_R(a)})$, como lo anterior fue para cualquier a y R adecuado así $u \in C^2(G)$ y $\Delta u(x) = 0$ para todo $x \in G$. Acorde con el Teorema 1.4 en el Capítulo 1 la función es real analítica en G.

$\square$

El Teorema 3.2 nos da una solución al problema de Dirichlet en $B_R(a)$, ahora intentaremos dar solución para una clase grande de dominios G. En este contexto utilizaremos un ingenioso método propuesto por O. Perron.

Definición 3.1. *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ el cual denota un dominio acotado y $u : G \to \mathbb{R}$, $u \in C^0(G)$ una función continua. Definimos la función armónicamente modificada*

$$\begin{aligned} v(x) &= [u]_{a,R}(x) \\ &= \begin{cases} u(x), & x \in G \quad con \quad |x-a| \geq R \\ \frac{1}{Rw_n} \int\limits_{|y-a|=R} \frac{|y-a|^2 - |x-a|^2}{|y-x|^n} u(y) d\sigma(y), & x \in G \ |x-a| < R \end{cases} \end{aligned}$$

para todo $a \in G$ y $R \in (0, dist(a, \mathbb{R}^n \setminus G))$.

Observación 3.1. *La función armónicamente modificada $v : G \to \mathbb{R}$, $v \in C^0(G)$ es armónica en $B_R(a)$ y coincide con la función original en el complemento de esta bola.*

En la secuencia del método de Perron necesitamos de la importante Proposición.

Proposición 3.1. *Sean $a \in G$ un punto y $R \in (0, dist(a, \mathbb{R}^n \setminus G))$ los cuales serán fijos. Si $u(x)$ es una función superarmónica en G, entonces la función armónicamente modificada*

$$v(x) = [u]_{a,R}(x), \quad x \in G$$

es superarmónica en G, y tenemos

$$v(x) \leq u(x) \qquad para \;\; todo \;\; x \in G$$

Demostración. Primero mostraremos la desigualdad $v(x) \leq u(x)$ para todo $x \in G$, notemos que de la definición de armónicamente modificada para cuando x no está en $B_R(a)$ se tiene que $v(x) = u(x)$, así que basta probar que $v(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \overline{B_R(a)}$.

Definamos la función

$$w(x) = u(x) - v(x), \qquad x \in \overline{B_R(a)}.$$

Dado que $v(x)$ es armónicamente modificada tenemos que $v(x)$ es armónica en $B_R(a)$, más aún $v(x)$ y $u(x)$ son superarmónicas en $B_R(a)$, así $w(x)$ es superarmónica en la bola $B_R(a)$.

Por otro lado cada sucesión de puntos

$$\{x_k\}_{k=1,2,...} \subset B_R(a)$$

con $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \mathring{x}, \quad \mathring{x} \in \partial B_R(a)$ satisface

$$\liminf_{k\to\infty} w(x_k) = w(\mathring{x}).$$

Notemos que por como w está definida, podemos concluir que u y v coinciden en la frontera de $B_R(a)$, entonces $w(\mathring{x}) = 0$, así por el Teorema 2.8 tenemos $w(x) \geq 0$, para todo $x \in B_R(a)$entonces

$$v(x) \leq u(x) \quad para \;\; todo \;\; x \in B_R(a).$$

Enseguida se mostrará que v es superarmónica en G.
Sea $\xi \in \partial B_R(a)$ un punto arbitrario y $\vartheta(\xi) \in (0, dis(\xi, \mathbb{R}^n \setminus G)]$, como $v(x) \leq u(x)$, para todo $\varrho \in (0, \vartheta(\xi))$

$$\frac{1}{\varrho^{n-1} w_n} \int\limits_{|x-\xi|=\varrho} v(x) d\sigma(x) \leq \frac{1}{\varrho^{n-1} w_n} \int\limits_{|x-\xi|=\varrho} u(x) d\sigma(x)$$

y dado que u es superarmónica

$$\frac{1}{\varrho^{n-1} w_n} \int\limits_{|x-\xi|=\varrho} u(x) d\sigma(x) \leq u(\xi)$$

además como $\xi \in \partial B_R(a)$ se tiene que $u(\xi) = v(\xi)$ entonces v es superarmónica en G, notemos que la función v en $B_R(a)$ es armónica en cualquier parte. □

Adicionalmente necesitaremos el siguiente resultado.

Proposición 3.2. ***(Lema de Harnack)*** *Sea $w_k : G \to \mathbb{R}, k = 1, 2, ...$ una sucesión decreciente de funciones armónicas en G, es decir;*

$$w_1(x) \geq w_2(x) \geq w_3(x) \geq \cdots \quad para \;\; todo \;\; x \in G.$$

Además supongamos que la sucesión converge puntualmente en el punto $\overset{\circ}{x} \in G$ *con*

$$\lim_{k\to\infty} w_k(\overset{\circ}{x}) > -\infty.$$

Entonces la sucesión de funciones $\{w_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *converge uniformemente en cada compacto* $\Theta \subset G$ *hacia una función armónica en* G*, llamémosla*

$$w(x) := \lim_{k\to\infty} w_k(x), \qquad x \in G.$$

Demostración. En general asumiremos que $\overset{\circ}{x} = 0$ y para la bola tendremos que $B_R \subset G$ con un radio $R \in (0, +\infty)$, vamos a suponer que $R < 2$. Para los índices $k, l \in \mathbb{N}$ con $k \leq l$ definimos las funciones no negativas $v_{kl} := w_k(x) - w_l(x) \geq 0$, $x \in B_R$. Aplicando la desigualdad de Harnack, obtenemos

$$\frac{1 - \frac{|x|}{R}}{(1 + \frac{|x|}{R})^{n-1}} v_{kl}(0) \leq v_{kl}(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{(1 - \frac{|x|}{R})^{n-1}} v_{kl}(0), \quad para \;\; todo\; x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}}.$$

Dado que $x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}}$ tenemos que $|x| \leq \frac{R}{2} < 1$, así que

$$0 \leq v_{kl}(x) \leq \frac{1 + \frac{|x|}{R}}{(1 - \frac{|x|}{R})^{n-1}} v_{kl}(0) \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^{n-1}} v_{kl}(0), \qquad x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}},$$

por como está definida v_{kl} tenemos lo siguiente

$$0 \leq (w_k(x) - w_l(x)) \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2})^{n-1}} (w_k(0) - w_l(0)), \qquad x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}}$$

donde definimos a $K := \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^{n-1}} = 3 \cdot 2^{n-2}$.
Así

$$|w_k(x) - w_l(x)| \leq K|w_k(0) - w_l(0)|.$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} w_k(0)$ existe, por el criterio de Cauchy (veasé en [7]) se tiene $|w_k(0) - w_l(0)| < \varepsilon$ para todo k, l adecuados, entonces $|w_k(x) - w_l(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \overline{B_{\frac{R}{2}}}$, de esta forma la sucesión $\{w_k(x)\}_{k=1,2,\ldots}$ converge uniformemente en $\overline{B_{\frac{R}{2}}}$ hacia la función $w(x)$. Dado que Θ es un compacto por la definición de compacto podemos cubrir a Θ con una cantidad finita de bolas abiertas, como la sucesión $\{w_k(x)\}_{k=1,2,...}$ converge uniformemente en cada bola, es decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$, se cumple que $|w_k(x) - w_k(a)| < \varepsilon$, así podemos elegir el $\min\{\delta_i, i \in I\}$ donde I representa una familia de índices finita asociada a la cubierta finita del compacto. Así para todo $\varepsilon > 0$, se cumple $|w_k(x) - w_k(a)| < \varepsilon$ para cualesquiera puntos $x, a \in \Theta$ con $|x-a| < \delta$, entonces la sucesión $\{w_k\}_{k=1,2,...}$ converge uniformente en Θ.

$\square$

Para resolver el problema de Dirichlet utilizaremos el siguiente conjunto de funciones admisibles

$$M' := \left\{ \begin{array}{l} v : G \to \mathbb{R} \in C^0(G) : v \ \text{ es superarmónica,} \\ \text{ y para toda sucesión } \{x^{(k)}\}_{k=1,2,...} \subset G \text{ con} \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \in \partial G \\ \text{se tiene } \liminf\limits_{k\to\infty} v(x^{(k)}) \geq f(x^*) \end{array} \right\}$$

El símbolo $f : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ denota una función continua en la frontera. Ya que

$$v(x) = M = \max_{x\in\partial G} f(x) \qquad v \in M',$$

siempre es cierto que $M' \neq \varnothing$.

Proposición 3.3. *Sea la función u definida como sigue*

$$u(x) = \inf_{v\in M'} v(x), \qquad x \in G.$$

Entonces u es armónica en G y tenemos

$$m \leq u(x) \leq M \qquad \textit{para todo } x \in G,$$

donde $m = \inf\limits_{x\in\partial G} f(x)$ y $M = \sup\limits_{x\in\partial G} f(x)$.

Demostración. Elegimos una sucesión de puntos $\{x^i\}_{i=1,2,3,..} \subset G$. Para cada índice $i \in \mathbb{N}$ existe una sucesión de funciones $\{v^i_{ij}\}_{i=1,2,3,..} \subset M'$ que satisface

$$\lim_{j\to\infty} v_{ij}(x^i) = u(x^i),$$

el principio del mínimo implica que $v_{ij}(x) \geq m$ para toda $x \in G$ y todo $i, j \in \mathbb{N}$. Ahora definamos las funciones

$$v_k(x) = \min_{1 \leq i,j \leq k} v_{ij}(x).$$

Para cada índice $k \in \mathbb{N}$. Evidentemente, tenemos $v_k(x) \geq v_{k+1}(x)$, $x \in G$. Para todo $k \in \mathbb{N}$. El mínimo de funciones superarmónicas es superarmónica, de manera que $v_k \in M', k = 1, 2, ...$
Notemos que $u(x^i) \leq v_k(x^i) \leq v_{ik}(x^i)$ para $1 \leq i \leq k$, de donde obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} v_k(x^i) = u(x^i), \qquad \text{para toda } i = 1, 2, ...$$

En el disco $B_R(a) \subset\subset G$ modificamos armónicamente la función v_k con la siguiente función

$$w_k(x) := [v_k]_{a,R(x)}, \qquad x \in G,$$

con la ayuda de la Proposición 3.1 vemos que $\{w_k\}_{k=1,2,3,..} \subset M'$. Ademas tenemos $w_k(x) \geq w_{k+1}(x)$ en $B_R(a)$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y

$$u(x^i) \leq w_k(x^i) \leq v_k(x^i), \text{ para toda } \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\lim_{k \to \infty} w_k(x^i) = u(x^i), \text{ para toda } i \in \mathbb{N}.$$

De acuerdo al lema de Harnack 3.2 la sucesión $\{w_k\}_{k=1,2,...}$ converge uniformemente en $B_R(a)$ hacia una función armónica $w(x)$, así

$$w(x^i) = u(x^i) \text{ para toda } x^i \in B_R(a), \quad i = 1, 2, ...$$

Como w y u son funciones continuas, inferimos la igualdad $u(x) = w(x), x \in \overline{B_R(a)}$. Consecuentemente la función u debe ser armónica en G, ya que la bola $B_R(a) \subset\subset G$ fue elegida arbitrariamente.
La inclusión de la función constante M en M' implica la desigualdad $u(x) \leq M$ para toda $x \in G$, ya que la desigualdad $v_{ij} \geq m$ para toda $x \in G$ y toda $i, j \in \mathbb{N}$ siempre es cierta, con lo cual obtenemos.

$$u(x) = \lim_{k \to \infty} v_k(x) \geq m, \quad \text{para toda } x \in G.$$

□

Definición 3.2. *Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Se dirá que un punto $x \in \partial G$ es **regular**, si tenemos una función $\Phi : G \to \mathbb{R}$ superarmónica con*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in G}} \Phi(y) = 0$$

y

$$\varrho(\varepsilon) = \inf_{\substack{y \in G \\ |y-x| \geq \varepsilon}} \Phi(y) > 0 \quad \textit{para todo } \varepsilon > 0$$

*Si cada punto frontera del dominio G es regular, estaremos hablando de un **dominio Dirichlet.***

Observación 3.2. *Un punto $x \in \partial G$ es regular si y sólo si tenemos un número $r > 0$ y una función superarmónica $\Psi : G \cup B_R(x) \to \mathbb{R}$ que satisface*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in G \cap B_r(x)}} \Psi(y) = 0$$

y

$$\inf_{\substack{r > |y-x| \geq \varepsilon \\ y \in G}} \Psi(y) > 0 \quad 0 < \varepsilon < r.$$

Además la función

$$\Phi(y) = \begin{cases} \min(1, \frac{2\Psi(y)}{m}), & y \in G \cap B_r(x) \\ 1, & y \in G \setminus B_r(x) \end{cases}$$

es superarmónica.

Teorema 3.4. ***(Problema de Dirichlet para el Laplaciano)***
Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ que denota un dominio acotado con $n \geq 2$. Entonces el problema de Dirichlet

$$u = u(x) \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G}),$$

$$\Delta u(x) = 0 \textit{ para todo } x \in G,$$

$$u(x) = f(x) \textit{ para todo } x \in \partial G,$$

puede ser resuelto para todas las funciones continuas en la frontera $f : \partial G \to \mathbb{R}$ si y sólo si G es un dominio Dirichlet.

Demostración. Supongamos que el problema de Dirichlet tiene solución con la función u y para toda función $f : \partial G \to \mathbb{R}$ continua en la frontera. Ahora tomando un punto arbitrario $\xi \in \partial G$ vamos a considerar $f(y) = |y - \xi|,\ y \in \partial G$ y solucionamos el problema de Dirichlet para estos valores frontera. Aplicamos el principio del mínimo para las funciones armónicas $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ y obtenemos

$$u(x) > 0 \quad \text{para} \quad \text{toda} \quad x \in \overline{G} \setminus \{\xi\},$$

mas aún $u(\xi) = 0$, de donde ξ es regular.

Supongamos G es un dominio Dirichlet y $x \in \partial G$ un punto frontera regular arbitrario. Entonces por Definición 3.2 tenemos una función armónica asociada $\Phi : G \to \mathbb{R}$. Como la función $f : \partial G \to \mathbb{R}$ es continua, dada $x \in \partial G$ podemos prescribir $\varepsilon > 0$ y obtenemos una cantidad $\delta(\varepsilon) > 0$, satisfaciendo $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ para toda $y \in \partial G$ con $|y - x| \leq \delta$.

Ahora definimos

$$\eta(\varepsilon) := \inf_{\substack{y \in G \\ |y-x| \geq \varepsilon}} \Phi(y) > 0.$$

1.-Sea la función barrera superior

$$v^+(y) := f(x) + \varepsilon + (M - m)\frac{\Phi(y)}{\eta(\varepsilon)}, \qquad y \in G.$$

Evidentemente la función v^+ es superarmónica en G. Mas aún una sucesión arbitraria $\{y^{(k)}\}_{k=1,2,\ldots} \subset G$ con $y^{(k)} \to y^+ \in \partial G$ para $k \to \infty$ satisface

$$\liminf_{k \to \infty} v^+(y^{(k)}) \geq f(y^+).$$

Consecuentemente se cumple $v^+ \in M'$.

2.- Ahora consideremos la función barrera inferior

$$v^-(y) := f(x) - \varepsilon - (M - m)\frac{\Phi(y)}{\eta(\varepsilon)}, \qquad y \in G$$

Elegimos $v \in M'$. Entonces consideramos una sucesión $\{y^{(k)}\}_{k=1,2,\ldots} \subset G$ con $y^{(k)} \to y^- \in \partial G$ para $k \to \infty$, la cual cumple

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}(v(y^{(k)}) &- v^-(y^{(k)})) \\ &\geq \liminf_{k\to\infty}(v(y^{(k)}) - f(y^-)) + \liminf_{k\to\infty}(f(y^-) - v^-(y^{(k)})) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Mas aún, la función $v - v^-$ es superarmónica en G, y el Teorema 2.8 Capítulo 2 tenemos $v - v^- \geq 0$ en G. Esto implica

$$v(y) \geq v^-(y), \quad y \in G \quad \text{para toda} \quad v \in M'.$$

Por lo tanto $v^- \in M'$.

3.- Sea la función armónica

$$u(y) := \inf_{v\in M'} v(y), \quad y \in G$$

construida en la Proposición 3.3, por esta misma proposición tenemos que

$$\inf_{y\in\partial G} f(y) = m \leq u(y) \leq M = \sup_{y\in\partial G} f(y),$$

de esta forma se puede notar que u alcanza valores en la frontera iguales a los de la función f de manera continua. Así por 1 y 2 se cumple,

$$v^-(y) \leq u(y) \leq v^+(y) \quad \text{para toda} \;\; y \in G.$$

lo que significa que

$$f(x) - \varepsilon - (M-m)\frac{\Phi(y)}{\eta(\varepsilon)} \leq u(y) \leq f(x) + \varepsilon + (M-m)\frac{\Phi(y)}{\eta(\varepsilon)}, \quad y \in G.$$

Usando

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in G}} \Phi(y) = 0,$$

obtenemos

$$|f(x) - u(y)| \leq \varepsilon + (M-m)\frac{\Phi(y)}{\eta(\varepsilon)} \leq 2\varepsilon \quad \text{para toda} \;\; y \in G$$

con $|y - x| \leq \delta(\varepsilon)$. Esto implica

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in G}} u(y) = f(x).$$

Mas aún la función u resuelve el problema de Dirichlet, para los valores frontera f. $\square$

Bibliografía

[1] Ahlfors L. V., *Complex Analysis. An Introduction to the theory of Analytic functions of one complex variable*, Ed. McGraw-Hill , 1985.

[2] Haberman R., *Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno. Tercera Edición*, Ed. Pearson Educación, 2003.

[3] Marsden,J.; Tromba A.J. *Cálculo Vectorial. Quinta Edición*, Ed. Pearson, 2004.

[4] Marsden J. E., *Análisis Básico de Variable Compleja*, Ed. Trillas, 1996.

[5] Pinchover Y.; Rubinstein J., *An Introduction to Partial Differential Equations*, Ed. CAMBRIDGE, 2005.

[6] Reitz J. R.; Milford F. J., *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*, Ed. UTEHA, 1981.

[7] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis. Third edition*, Ed. McGraw-Hill, 1976.

[8] Sauvigny F., *Partial Differential Equations 1*, Foundations and Integral Representations. Ed. Springer, 2006.

[9] Simmons G. F.; Krantz S. G., *Ecuaciones Diferenciales*, Ed. Mc Graw Hill, 2007.