UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Monografía

# CONTINUOS DE TIPO N (TÓPICOS SELECTOS)

U. de A.: Temas Selectos de Topología

Material de apoyo para la U. de A.
"Temas Selectos de Topología"

Licenciatura en Matemáticas

Autor: Dr. Félix Capulín Pérez

# ÍNDICE


- 1. Presentación ..........................................................................3
- 2. Introducción...........................................................................4
- 3. Contractibilidad y continuos de tipo N....................................5
- 4. Propiedad [*]...........................................................................14
- 5. Funciones admisibles.................................................................17
- 6. Continuos de tipo N vs retracciones y funciones promedio.......22
- 7 Caracterización de abanicos contraibles.....................................25
- Coclusiones.................................................................................41
- Referencias..................................................................................42

# 1 PRESENTACIÓN

Dentro del plan de estudios de la Licencatura en Matemáticas, la unidad de aprendizaje "Temas Selectos de Topología" está ubicada dentro del núcleo integral y representa una unidad de aprendizaje optativa, en la que el alumno, junto con el profesor pueden elegir de manera libre los temas a trabajar, pues en muchos de los casos este tipo de unidades van enfocadas a introducir al estudiante a la investigación en temas de vanguardia. En los últimos años la topología ha tomado gran auge y como tal el alumno necesita herramienta que permita un mejor desarrollo y entendimiento de la misma.

## 2 INTRODUCCIÓN

El siguiente tema está enmarcado en la teoría de continuos. En este contexto un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Entenderemos por un subcontinuo a un continuo contenido en algún espacio. Para la lectura de esta monografía se presupone que el lector está familiarizado con el concepto de continuo, dendroide, abanico y muchas de las propiedades básicas en relación a estos conceptos. Para un mejor aprovechamiento del material se sugiere que el alumno haya leido la Monografía " Continuos de tipo $N$ (un primer estudio). En esta monografía se continuará con el estudio de este tipo de continuos. Se analizará la relación que guarda este concepto con los siguientes conceptos que son importantes dentro de la Teoría de Continuos: Contractibilidad, Retracciones de hiperespacios, Funciones Promedio. Especialmente se desarrollarán los siguientes Teoremas que aperecen en [2], [6],[7], [8], [9], [12], [16] y [17] (auxilados de algunos más):
Si un continuo es contraible entonces no es de Tipo $N$.
Si un continuo $X$ acepta retracciones de $C(X)$ sobre $X$ entonces no es de Tipo $N$.
Si un continuo $X$ acepta retracciones de $F_2(X)$ sobre $X$ entonces no es de Tipo $N$.
Si un continuo acepta funciones promedio entonces no es de Tipo $N$.

# 3 Contractibilidad y continuos de tipo N

El concepto de contractibilidad de un espacio juega un papel muy importante dentro de la teoría de continuos, es este capítulo se estudiará la relación de continuos de tipo N y la contractibilidad. Primero se presentarán varios resultados, los cuales serán utilizados en éste y en las secciones posteriores, los cuales se pueden encontrar en [11] y en [15]

**Lema 3.1** *Sea $X$ un espacio compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de $X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si $U$ es un abierto de $X$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_N \subset U$*

**Demostración.** Como $U$ es un abierto se tiene que $X \setminus U$ es cerrado. Se sabe que un subconjunto cerrado de un espacio compacto también es compacto. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$,

$$X \setminus U \subset X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus X_n).$$

De donde existen $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$ tales que $X \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{k} (X \setminus X_{n_j})$. Por hipótesis $X_{n+1} \subset X_n$, tomemos $N = máx\,\{n_1, n_2, ..., n_k\}$, entonces $X \setminus U \subset X \setminus X_N$. Por lo tanto $X_N \subset U$. ■

**Teorema 3.2** *Sean $X$ un continuo localmente conexo y $F$ un conjunto cerrado de $X$, entonces existe una sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos cerrados localmente conexos tal que:*

1. $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$
2. $F_n \supset F_{n+1}$

**Demostración.** Se va a construir la sucesión $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tal manera que cumpla las condiciones especificadas.

La demostración se hace por inducción.

Tomemos $F_1 = X$ que es cerrado y por hipótesis localmente conexo. Ahora supongamos que tenemos construido $F_n$ cerrado y localmente conexo, tal que $F \subset F_n$. Sabemos que cada componente de un espacio localmente conexo es abierta (ver [11, Teorema 4, pág. 230]). Por la compacidad de $F_n$, la familia de componentes de $F_n$ es a lo más finita. Por [11, Teorema 2, pág.256] dado $\epsilon > 0$, $F_n$ es unión de un número finito de continuos de diámetro menor que $\epsilon$. Es decir

$$F_n = K_1^n \cup K_2^n \cup \cdots \cup K_m^n$$

y para toda $i = 1, ..., m$, $diam(K_i^n) < 1/n < \epsilon$. Sea

$$F_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{m} \{K_i^n : F \cap K_i^n \neq \emptyset\}$$

notemos que $F \subset F_{n+1} \subset F_n$ de donde $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Ahora si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, se tiene que $x \in F_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por la construccion de $F_n$ se tiene que $x \in F$, por lo tanto $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ ■

**Teorema 3.3** *Si $A$ es un subconjunto de un espacio localmente conexo $X$ y $C$ es una componente de $A$, entonces $Fr(C) \subset Fr(A)$.*

**Demostración.** Supongamos que $Fr(C) \setminus Fr(A) \neq \emptyset$, tomemos

$$\begin{aligned} p \in Fr(C) \setminus Fr(A) &= [\overline{C} \cap \overline{X \setminus C}] \setminus [\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}] \\ &\subseteq \overline{C} \setminus [\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}] \\ &\subseteq \overline{A} \setminus [\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}] \\ &= \overline{A} \cap [(X \setminus \overline{A}) \cup (X \setminus \overline{X \setminus A})] \\ &= \overline{A} \cap \left(X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right)\right) \\ &\subset X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right). \end{aligned}$$

Como $X$ es localmente conexo y $X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right)$ es un abierto que contiene a $p$, existe una vecindad conexa $E$ de $p$ tal que $E \subset X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right)$, es decir, $p \in Int(E)$ y además $p \in Fr(C)$, se tiene que

$$p \in Int(E) \cap Fr(C) = Int(E) \cap [\overline{C} \cap \setminus\overline{X \setminus C}]$$

de donde

$$Int(E) \cap \overline{C} \neq \emptyset \neq Int(E) \cap \left(\overline{X \setminus C}\right).$$

Más aún dado que si $x \in Int(E) \cap \overline{C}$ se tiene que $x \in Int(E)$ y $x \in \overline{C}$, es decir, cada abierto que contiene a $x$ debe intersectar al conjunto $C$ en particular $x \in Int(E)$ que es un abierto por lo tanto

$$Int(E) \cap C \neq \emptyset \neq Int(E) \cap (X \setminus C)$$

Así

$$E \cap C \neq \emptyset \neq E \cap (X \setminus C) \tag{1}$$

Como $C$ es una componente de $A$, $E \subset X \setminus \left(\overline{X \setminus A}\right) \subset A$ y además $E \cap C \neq \emptyset$, se tiene que $E \subset C$ pues $E$ es conexo. De aquí tenemos que $E \setminus C = \emptyset$ lo cual contradice (1). Por lo tanto $Fr(C) \subset Fr(A)$. ■

**Definición 3.4** *Un subconjunto $C$ de un espacio $X$, se dice que* separa a $X$ entre dos subconjuntos $A$ y $B$ *($C$ es* separador entre $A$ y $B$*) si existen dos subconjuntos $M$ y $N$ tal que $X \setminus C = M \cup N$, $(\overline{M} \cap N) \cup (\overline{N} \cap M) \neq \emptyset$ y $A \subset M, B \subset N$.*

*El conjunto $C$ es llamado* separador irreducible entre $A$ y $B$ *si $C$ es separador pero ningún sunconjunto $C' \subset C$ lo es.*

**Teorema 3.5** *Sea $X$ un espacio localmente conexo. Si $A$ es un subconjunto abierto y conexo y $B$ es una componente de $X \setminus \overline{A}$, el conjunto $Fr(B)$ es un separador irreducible entre cada par de puntos $a \in A$ y $b \in B$.*

**Demostración.** Tomemos $a \in A$ y $b \in B$. Como $B$ es una componente de $X \setminus \overline{A}$, por el Teorema 3.3,

$$\begin{aligned} Fr(B) &\subset Fr(X \setminus \overline{A}) = Fr(\overline{A}) \\ &= \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \\ &= Fr(A) = \overline{A} \setminus A \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que si $a \in A$ se tiene que $a \notin Fr(B) = \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$, esto implica que $a \in (X \setminus \overline{B}) \cup \left(X \setminus \left(\overline{X \setminus B}\right)\right)$. De donde $a \in X \setminus \overline{B}$, además $b \in B$ y como $X \setminus Fr(B) = (X \setminus \overline{B}) \cup \left(X \setminus \left(\overline{X \setminus B}\right)\right)$ se tiene que $Fr(B)$ separa $a$ de $b$.

Ahora si $x \in Fr(B)$ por (2) se tiene que $x \in \overline{A}$, de donde $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, es decir, cada abierto de $x$ intersecta tanto a $A$ como a $B$, que son conexos, de donde $A \cup \{x\} \cup B$ es conexo. Por lo tanto ningún subconjunto propio de $Fr(B)$ separa $a$ de $b$, en otras palabras $Fr(B)$ es separador irreducible entre $a$ y $b$. ■

**Teorema 3.6** *Sea $X$ un espacio localmente conexo. Todo separador cerrado $C$ entre $a$ y $b$ contiene un subconjunto cerrado $F$ que es separador irreducible entre $a$ y $b$.*

**Demostración.** Como $C$ es separador entre $a$ y $b$, $X \setminus C = M \cup N$ donde $M$ y $N$ son separados con $a \in M$, $b \in N$.

Sea $A \subset X \setminus C$ la componente de $a$, se tiene que que $A \subset M$ y notemos que

$$A \cup Fr(A) = \overline{A} \subset \overline{M}. \tag{3}$$

Por otra parte se tiene que $X = M \cup N \cup C$ de donde $Fr(A) \subset M \cup C$ ya que si $Fr(A) \cap N \neq \emptyset$, por (3) se tiene que $\overline{M} \cap N \neq \emptyset$, pero esto es una contradicción pues $M, N$ son disjuntos.

Como $b \in N$ tenemos que $b \in X \setminus \overline{A}$, ya que $\overline{A} = A \cup Fr(A) \subset M \cup C$. Tomemos $B$ la componente de $b$ en $X \setminus \overline{A}$ entonces, por el Teorema 3.3 se tiene que

$Fr(B) \subset Fr(X \setminus \overline{A}) = Fr(\overline{A}) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}} \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = Fr(A) \subset C$

Por el Teorema 3.5 es suficiente tomar $F = Fr(B)$ que es cerrado, como separador irreducible entre $a$ y $b$. ■

**Teorema 3.7** *Sea $X$ un espacio normal y localmente conexo. Si $a_0 \in F_0$, $a_1 \in F_1$ donde $F_0, F_1$ son cerrados y $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, entonces existe un conjunto cerrado separador irreducible entre $a_0$ y $a_1$ y disjunto de $F_0 \cup F_1$.*

**Demostración.** Como $X$ es normal y dado que $F_i$ son cerrados disjuntos, existe un abierto $G$ tal que

$$F_0 \subset G \subset \overline{G} \subset X \setminus F_1. \tag{4}$$

Ya que $X \setminus Fr(G) = (X \setminus \overline{G}) \cup \left( X \setminus \left( \overline{X \setminus G} \right) \right)$ y de (4) se tiene que $F_1 \subset X \setminus \overline{G}$ y $F_0 \subset X \setminus \left( \overline{X \setminus G} \right)$ entonces $Fr(G)$ es separador entre cada par $a_0 \in F_0$ y $a_1 \in F_1$.

Usando el Teorema anterior $Fr(G)$ contiene un separador cerrado $F$ irreducible entre $a_0$ y $a_1$.
Además, de (4) se tiene que $(X \setminus G) \cap F_0 = \emptyset$ y $F_1 \cap \overline{G} = \emptyset$, de donde

$$\begin{aligned}
F \cap (F_0 \cup F_1) &\subset Fr(G) \cap (F_0 \cup F_1) \\
&= [Fr(G) \cap F_0] \cup [Fr(G) \cap F_1] \\
&= [(\overline{G} \cap \overline{X \setminus G}) \cap F_0] \cup [(\overline{G} \cap \overline{X \setminus G}) \cap F_1] \\
&= [\overline{G} \cap (\overline{X \setminus G} \cap F_0)] \cup [(\overline{G} \cap F_1) \cap \overline{X \setminus G})] \\
&= [\overline{G} \cap \emptyset] \cup [\emptyset \cap \overline{X \setminus G}] \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Entonces, $F$ es un separador cerrado irreducible entre $a_0$ y $a_1$ y además es disjunto de $F_0 \cup F_1$. ■

**Teorema 3.8** *Sea $X$ un espacio normal, localmente conexo, compacto y unicoherente. Para $j = 0, 1$, tomemos $p_j \in F_j$ con $F_j$ cerrado y $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, entonces existe un separador $L$ entre $p_0$ y $p_1$ que es cerrado, localmente conexo y disjunto de $F_0 \cup F_1$*

**Demostración.** Como $X$ es un espacio normal, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ y $p_j \in F_j$ se sigue del Teorema 3.7, que existe un separador $C$ entre $p_0$ y $p_1$ que es cerrado y disjunto de $F_0 \cup F_1$.

Por el Teorema 3.2 y dado que $C$ es cerrado, existe $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cerrados localmente conexos tal que $C_{n+1} \subset C_n$ y $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Ahora como $C \cap (F_0 \cup F_1) = \emptyset$, $X \setminus F_0 \cup F_1$ es un abierto tal que $C \subset X \setminus (F_0 \cup F_1)$. Por el Lema 3.1, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C_N \subset X \setminus (F_0 \cup F_1)$.

Si tomamos $L = C_N$, tenemos que $L$ el cerrado, localmente conexo y disjunto de $F_0 \cup F_1$ que es lo que se quería. ■

**Definición 3.9** *Sean $f : X \to Y$ y $f' : X \to Y$ funciones continuas, diremos que son* homotópicas *si existe una función continua $h : X \times I \to Y$ tal que*

*i)* $h(x, 0) = f(x)$ *para toda* $x \in X$

*ii)* $h(x, 1) = f'(x)$ *para toda* $x \in X$

**Definición 3.10** *Un espacio $X$ es contraíble respecto a $Y$ si para toda función $f : X \to Y$ se tiene que $f$ es homotópica a una función constante.*

Si en la definición anterior $f : X \to X$ es la identidad diremos que $X$ es contraíble en sí mismo ó simplemente que es contraíble.

Veamos la siguiente definición antes de pasar a la demostración del teorema principal de esta sección.

**Definición 3.11** *Un espacio topológico es homeomorfo a la letra griega $\theta$ si consiste de tres arcos $L_0, L_1$ y $L_2$, los cuales, dos a dos tienen exactamente los puntos extremos en común. A tal espacio le llamaremos $\theta - curva$.*

12.eps 12.eps

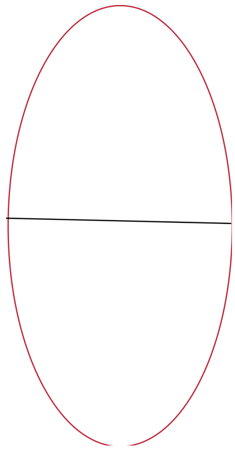


Figure 1: Continuo $\theta$-curve

El siguiente teorema aparece en [11, § 61, II, Teorema 2, pág. 511]

**Teorema 3.12** *Sea $X$ un espacio topológico, si $C$ es una $\theta$-curva, entonces $X \setminus C = D_0 \cup D_1 \cup D_2$ y $Fr(D_i) = L_i \cup L_{i+1}$, (los subíndices son reducidos mod 3) donde los discos $D_0, D_1$ y $D_2$ son componentes de $X \setminus C$.*

Teorema principal de esta sección (ver [16]).

**Teorema 3.13** *(*L.G. Oversteegen*) Supongamos que $X$ es un espacio métrico y $p, q \in X$. Si $X$ es de tipo N entre $p$ y $q$, y $f : X \to X$ es una función homotópica a la identidad, entonces $p, q \in f(X)$. En consecuencia $X$ no es contraíble.*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad se probará que $p \in f(X)$. Tomemos los arcos $A$, $A_i$, $A'_i$ y los puntos $p_i$, $p'_i$, $p''_i$, $q_i$, $q'_i$, $q''_i$ como en la definición de continuo de tipo N.

Supongamos que $p \notin f(A)$, y sea $h : X \times I \to X$ una homotopía tal que:

$$h(x,0) = x, \quad h(x,1) = f(x) \tag{5}$$

Dado que $p \notin f(A)$ y por (5), $f(A) = h(A \times \{1\})$, se tiene que $h^{-1}(p) \cap (A \times \{1\}) = \emptyset$, es decir, $h^{-1}(p)$ es disjunto del arco $(A \times \{1\})$. También se tiene que $(p,0) \in h^{-1}(p)$. En particular la componente $C$ que contiene al punto $(p,0)$, del conjunto compacto $h^{-1}(p) \cap (A \times I)$ es disjunto con el arco $(A \times \{1\})$.

Afirmamos que $C \cap (\{q\} \times I) \neq \emptyset$, para probar esta afirmación supongamos que no es así, es decir,

$$C \cap [(A \times \{1\}) \cup (\{q\} \times I)] = \emptyset \tag{6}$$

Nótese que $(p_i'', 0) \in (h^{-1}(p_i'') \cap (A_i' \times I))$, Sea $C_i$ la componente del conjunto compacto $h^{-1}(p_i'') \cap (A_i' \times I)$ que contiene al punto $(p_i'', 0)$. Como la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $A$, entonces los conjuntos $A_i' \times \{I\}$ convergen a $A \times \{I\}$, por el Teorema 2.1, $(A \times I) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i' \times I)$ es un espacio métrico compacto, más aún los conjuntos $\{q_i\} \times I$ y $\{q_i'\} \times I$ convergen a $\{q\} \times I$.

Si para cada $i \in \mathbb{N}$, el continuo $C_i$ intersecta ya sea a $(A_i' \times \{1\})$ o $\{q_i\} \times I$ o $\{q_i'\} \times I$, la sucesión de continuos $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ puede contener una subsucesión convergente a un continuo en $h^{-1}(p) \cap (A \times I)$ y que contiene al punto $(p,0)$ (pues $\{p_i''\} \times I$ converge a $\{p\} \times I$) e intersecta ya sea a $A \times \{1\}$ o $\{q\} \times I$. Este último continuo debe estar contenido en $C$, contradiciendo (6).

Entonces podemos tomar subíndices $k = 1, 2, 3, ...$, tales que

$$C_k \cap [(\{q_k\} \times I) \cup (A_k' \times \{1\}) \cup (\{q_k'\} \times I)] = \emptyset \tag{7}$$

Ahora tomemos el arco

$$\Gamma = (\{q_k\} \times I) \cup (A_k' \times \{1\}) \cup (\{q_k'\} \times I)$$

y el conjunto compacto $Z = \Phi \cup \Gamma$, donde $\Phi = h^{-1}(p_k'') \cap (A_k' \times I)$ y notemos que $Z$ no es conexo entre $\Gamma$ y el punto $z = (p_k'', 0) \in Z \setminus \Gamma$.

Pues si fuera conexo entre esos dos conjuntos, por el Teorema 2.6 existiría una componente $K$ de $Z$, tal que $K \cap \Gamma \neq \emptyset$ y $z \in K$, entonces podemos considerar los siguientes casos:

Caso1.- $K \not\subseteq \Phi$.
Entonces $K \cap \Phi$ es un subconjunto propio cerrado del continuo $K$ y $z \in K \cap \Phi$, usando el Teorema 2.8, tenemos que la componente $K'$ de $K \cap \Phi$ que contiene al punto $z$, intersecta la cerradura del conjunto

$$K \setminus (K \cap \Phi) = K \setminus \Phi \subset Z \setminus \Phi \subset \Gamma$$

es decir, $K' \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Caso 2.- Si $K = \Phi$.
En este caso basta con tomar $K' = K$.

En ambos casos obtenemos un continuo $K'$ contenido en $\Phi$ y que contiene al punto $z$ tal que $K' \cap \Gamma \neq \emptyset$, recordando la definición de $C_i$ y $\Phi$ tenemos que $K'$ debe estar contenido en $C_k$. Esto implica que $C_k \cap \Gamma \neq \emptyset$ contradiciendo (7).

De esta manera $Z$ no es conexo entre $\Gamma$ y $z$, en otras palabras $(A'_k \times I) \setminus Z$ separa el disco $(A'_k \times I)$ entre $\Gamma$ y $z$. Como $(A'_k \times I)$ es un continuo unicoherente y localmente conexo, por el Teorema 3.8, existe un continuo localmente conexo $L \subset (A'_k \times I) \setminus Z$, que también separa el disco entre $\Gamma$ y $z$.

Ahora, el punto $z$ divide el arco $A'_k \times \{0\}$ en dos subarcos $\Delta$ y $\Delta'$. Tomemos $(q_k, 0) \in \Delta$ y $(q'_k, 0) \in \Delta'$, cada uno de estos arcos conectan $z$ y $\Gamma$, por lo que $L$ debe intersectar tanto a $\Delta$ como a $\Delta'$ en algunos puntos $d, d'$ respectivamente, donde $d, d' \notin \Gamma \cup \{z\}$, tomemos $\Lambda, \Lambda'$ subarcos de $\Delta$ y $\Delta'$ con puntos extremos $d, (q_k, 0)$ y $d', (q'_k, 0)$ respectivamente, por el Teorema 2.15, tenemos que la unión $U = L \cup \Lambda \cup \Lambda'$ es un continuo localmente conexo, y también lo es su imagen $h(U)$.

Por otra parte se tiene que

$$\begin{aligned} L \subset (A'_k \times I) \setminus Z &\subset (A'_k \times I) \setminus \Phi \\ &= (A'_k \times I) \setminus [h^{-1}(p''_k) \cap (A'_k \times I)] \\ &\subseteq (X \times I) \setminus [h^{-1}(p''_k)] \end{aligned}$$

y $\Lambda \cup \Lambda' \subset (A'_k \times \{0\}) \setminus \{z\} = (A'_k \times \{0\}) \setminus (p''_k, 0) = (A'_k \setminus \{p''_k\}) \times \{0\}$
de donde

$$h(\Lambda \cup \Lambda') \subset A'_k \setminus \{p'_k\}. \tag{8}$$

Dado que los puntos $(q_k, 0), (q'_k, 0) \in \Lambda \cup \Lambda' \subset U$ se sigue que $h((q_k, 0)) = q_k$ y $h((q'_k, 0)) = q'_k$ pertenecen a $h(U)$, que es un continuo localmente conexo, de donde existe un arco que une $q_k$ con $q'_k$ y al mismo tiempo no contiene al punto $p''_k$, ya que si $p''_k \in h(U)$, se sigue que $h^{-1}(p''_k) \subset U = L \cup \Lambda \cup \Lambda'$, pero por (8) se debe cumplir que $h(p''_k) \subset L$ lo cual no es posible pues $L \subseteq (X \times I) \setminus [h^{-1}(p''_k)]$. Por lo tanto $p''_k \notin h(U)$ pero esto contradice el hecho de que cada arco que une $q_n$ con $q'_n$ debe contener a $p''_n$ .

Con esto se demuestra que $C \cap (\{q\} \times I) \neq \emptyset$.

De la misma manera si $q \notin f(A)$, y $D$ es la componente del conjunto compacto $h^{-1}(q) \cap (A \times I)$ que contiene al punto $(q, 0)$, cambiando $A_i, C, p, p''_i, q_i, q'_i$ por $A'_i, D, q, q''_i, p_i, p'_i$ respectivamente y siguiendo las mismas ideas, podemos afirmar que $D \cap (\{p\} \times I) \neq \emptyset$.

Dado que $p \neq q$ se tiene que $h^{-1}(p) \cap h^{-1}(q) = \emptyset$, así $C \cap D = \emptyset$. Como $A \times I$ es un espacio normal existe un conjunto abierto $U$ tal que $C \subset U \subset A \times I$ y $\overline{U} \cap D = \emptyset$.

Tomemos $V$ la componente de $U$ de contiene a $C$, dado que $A \times I$ es localmente conexo se sigue que $V$ es un conjunto abierto y además es arco conexo, (ver [11, Teorema 4, pág.230]).

Notemos que $D \cap ((\{p\} \times I) \setminus V) \neq \emptyset$. Sea $\alpha$ un arco contenido en $V$ que va de $(p, 0)$ a $l$, con $l \in (q \times I) \cap C$, para $a, b \in \alpha$ tal que $a$ está entre $p$ y $b$, denotemos por $\alpha_{ab}$ el subarco de $\alpha$ cuyos puntos extremos son $a$ y $b$.

Dado que $(\{p\}\times I)\cap D\neq\emptyset$ existen puntos $p_0, q_0$ y $x$, tales que $p_0\in\alpha\cap(\{p\}\times I)$ (puede ocurrir que $p_0=(p,0)$) y $q_0\in\alpha\cap(\{q\}\times I)$ (puede ocurrir que $q_0=l$) además

$$\alpha_{p_0q_0}\cap[(\{p\}\times I)\cup(\{q\}\times I)]=\{p_0,q_0\}\,.$$

Y, o bien $x\in(\{p\}\times I)_{p_0q_0}\cap D$ o $x\in(\{p\}\times I)_{p_0(p,1)}\cap D$, donde $(\{p\}\times I)_{p_0q_0}$ y $(\{p\}\times I)_{p_0(p,1)}$ denotan los subarcos de $\{p\}\times I$ cuyos puntos extremos en $X\times I$ son $p_0, q_0$ y $p_0, (p,1)$ respectivamente.

Tomemos

$$\Delta=(\{p\}\times I)\cup(\{q\}\times I)\cup A'$$

donde $A'=(A\times\{0\})\cup(A\times\{1\})$, se tienen los siguientes casos:
*i)* $q_0\in\alpha\cap(\{p\}\times I)$ y $\alpha_{p_0q_0}\cap\Delta=\{p_0,q_0\}$
*ii)* $q_0\in\alpha\cap(\{q\}\times I)$ y $\alpha_{p_0q_0}\cap\Delta=\{p_0,q_0\}$
*iii)* $q_0\in[\alpha\cap(\{q\}\times I)]\cup[\alpha\cap(\{p\}\times I)]$ y $\alpha_{p_0q_0}\cap A'\neq\emptyset$.

En este caso vamos a considerar un punto $r_0\in\alpha_{p_0q_0}$ de tal manera que $\alpha_{p_0q_0}\cap A'=\{r_0\}$.

Notemos que en los casos $(i)$ y $(ii)$ el conjunto $\alpha_{p_0q_0}\cup\Delta$ es una $\theta-curva$ en $A\times I$ y en el caso $(iii)$, $\alpha_{r_0q_0}\cup\Delta$ es una $\theta$ curva en $A\times I$, por lo tanto el conjunto $D$ satisface $D\subset A\times I\backslash\alpha_{p_0q_0}$ si se tienen los casos $(i)$ y $(ii)$ o $D\subset A\times I\backslash\alpha_{r_0q_0}$ si se tiene el caso $(iii)$ y $D$ intersecta ya sea a las dos componentes de $A\times I\backslash\alpha_{p_0q_0}$ o las dos componentes de $A\times I\backslash\alpha_{r_0q_0}$ respectivamente pero esto es una contradicción pues $D$ es conexo en $A\times I$. Esta contradicción surgió de suponer que $p,q\notin f(A)$.
■

El siguiente abanico no es contraible por ser de tipo $N$.

4.eps 4.eps

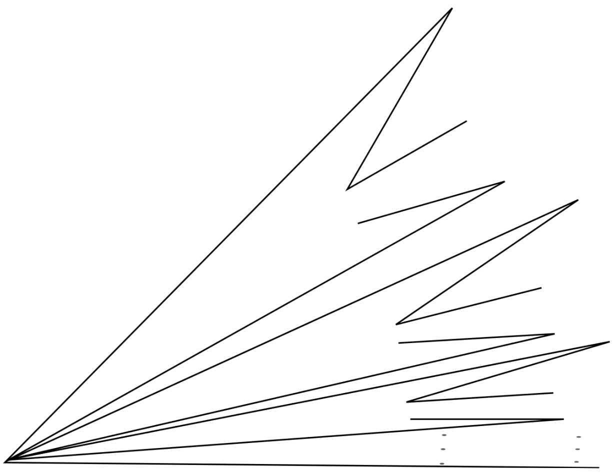


Figure 2: Abanico contraible

El siguiente resultado fue dado por Lex G. Oversteegen en [18], únicamente mencionamos este teorema ya que la demostración escapa a los intereses de este trabajo.

**Teorema 3.14** *Si $X$ es un abanico contraíble con vértice $v$, entonces $X$ es localmente conexo en $v$.*

T. J. Lee en [12] demostró el siguiente corolario con herramientas diferentes a las presentadas en este trabajo.

**Corolario 3.15** *Si $X$ es un abanico contraíble, entonces tiene la propiedad de intersección doblada.*

**Demostración.** Usando la herramienta presentad aquí daremos una prueba alterna al resultado anterior.
Como $X$ es contraíble, por el teorema anterior, se tiene que $X$ es localmente conexo en el vértice. Por el Teorema 3.13, $X$ no es de tipo N, por el Corolario **??** tenemos que $X$ tiene la propiedad de intersección doblada. ■

Usando el Teorema 3.13 y el Teorema **??** obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 3.16** *Sea $X$ un continuo, si $X$ es contraíble entonces para cada arco de $X$ la intersección de todos sus conjuntos de doblez es distinta del vacío.*

Dado el resultado anterior es natural hacer la siguiente pregunta.

**¿Si $X$ es un continuo que no es de tipo N, entonces $X$ es contraíble?**

La respuesta es NO. Para dar una respuesta a la pregunta anterior será necesario algunos resultados de la siguiente sección. Por lo que en la siguiente sección se responderá esta pregunta.

# 4 Propiedad [*]

El resultado principal de esta sección fue dado por S. T. Czuba en [8], el cual trata una clase de continuos no contraíbles que no necesariamente son de tipo $N$ pero que son obtenidos de continuos de tipo N bajo funciones que satisfacen algunas condiciones especiales, veamos cuales son esas condiciones.

**Definición 4.1** *(*S. T. Czuba*) Sea $X$ un continuo de tipo $N$ entre $p$ y $q$, $Y$ un continuo hereditariamente unicoherente y $g$ una función continua de $X$ en $Y$. Decimos que $(X, g, Y)$* tiene la propiedad $[*]$ *si se cumplen las siguientes condiciones:*
*i)* $g\,(p) \neq g\,(q)$
*ii)* $g\,(p_n q_n'') \cap g\,(q_n'' p_n') = g\,(q_n'')$
*iii)* $g\,(q_n p_n'') \cap g\,(p_n'' q_n') = g\,(p_n'')$

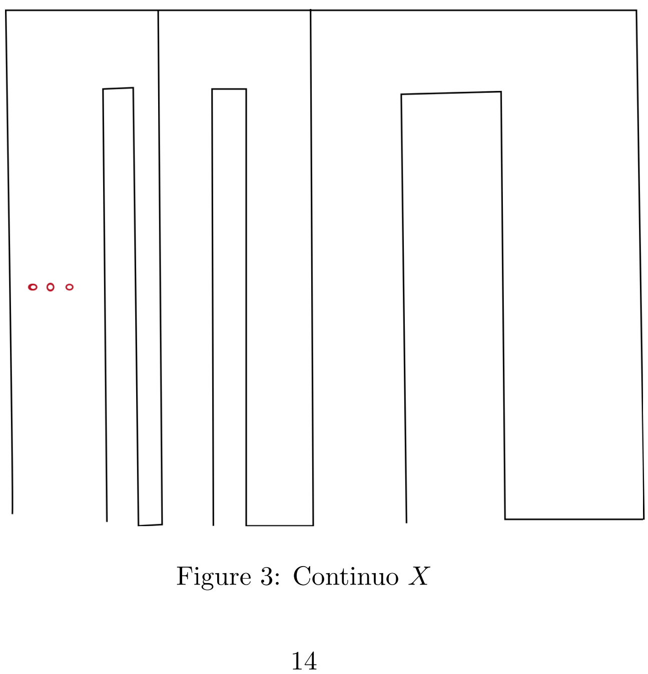
**Ejemplo 4.2** *Considere* $K_n = (\{\frac{1}{n}\}\times[\frac{-3}{2},2])\cup([\frac{1}{n},\frac{-1}{2^{3n}}]\times\{\frac{-3}{2}\})\cup(\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^{3n}}\}\times[\frac{-3}{2},\frac{3}{2}])\cup([\frac{1}{n}-\frac{2}{2^{3n}},\frac{1}{n}-\frac{1}{2^{3n}}]\times\{\frac{3}{2}\})\cup(\{\frac{1}{n}-\frac{2}{2^{3n}}\}\times[\frac{-3}{2},\frac{3}{2}])$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. $K = \{0\} \times [-\frac{3}{2}, 2]$, $L = [1, 0] \times \{2\}$ *y hagamos*

$$X = K \cup L \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (K_n).$$

*La siguiente figura muestra al continuo $X$.*

*Tomemos $g : X \to Y = g(X)$ como la función que identifica los puntos $(0, y)$ con los puntos $(0, -y)$ para todo $y \in [-1, 1]$.*

*Tenemos que $(X, g, Y)$ tiene la propiedad $[*]$.*



13.eps 13.eps

Figure 3: Continuo $X$

Un resultado que nos será de utilidad es el siguiente y aparece en [11], p. 374.

**Teorema 4.3** *$Y$ es contraíble si y sólo si para cada $X$ espacio topológico, $X$ es contraíble respecto a $Y$.*

**Demostración.** Supongamos que $Y$ es contraíble. Sea $X$ un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua, vamos a demostrar que $f(x)$ es homotópica a una función constante.

Como $Y$ es contraíble entonces existe $h : Y \times I \to Y$ continua, tal que:
$i)$ $h(y, 0) = y$ para cada $y \in Y$
$ii)$ $h(y, 1) = c$ para cada $y \in Y$
En particular si $y = f(x)$ tenemos que $h(f(x), 0) = f(x)$ y $h(f(x), 1) = c$.

Definamos $H : X \times I \to Y$ como;
$H(x, 0) = h(f(x), 0) = f(x)$
$H(x, 1) = h(f(x), 1) = c$

Si consideramos $g : X \times I \to Y \times I$ definida por $g(x, t) = (f(x), t)$, se tiene que $g(x)$ es continua, pues es continua coordenada a coordenada, ahora notemos que $h(g(x, t)) = h(f(x), t) = H(x, t)$, entonces $H$ es continua, pues es composición de funciones continuas, se tiene que $f(x)$ es homotópica a una constante, por lo tanto $X$ es contraíble respecto a $Y$.
Ahora vamos a demostrar que $Y$ es contraíble. Por hipótesis $X$ es contraíble respecto a $Y$ para cada espacio $X$, en particular si $X = Y$ se tiene que $Y$ es contraíble en sí mismo. ■

**Teorema 4.4** *(*S. T. Czuba*) Sean $X, Y$ continuos y $g : X \to Y$ una función continua dada, Si $(X, g, Y)$ tiene la propiedad $[*]$, entonces para cada función $f : X \to Y$ homotópica a $g$, se tiene que $g(p)$, $g(q) \in f(A) \subset f(X)$, en consecuencia $X$ no es contraíble relativo a $Y$ y por el Teorema* 4.3*, $Y$ no es contraíble.*

**Demostración.** La demostración de este teorema se muestra de en forma análoga a la del Teorema de Oversteegen, dado en la sección anterior.

Se probará que $g(p), g(q) \in f(A)$. Consideremos los arcos $A$, $A_i$, $A'_i$ y los puntos $p_i$, $p'_i$, $p''_i$, $q_i$, $q'_i$, $q''_i$ como en la definición de continuo de tipo N.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $g(p) \notin f(A)$ y tomemos $h : X \times I \to Y$ una homotopía tal que:

$$h(x, 0) = g(x), \quad h(x, 1) = f(x) \tag{9}$$

Dado que $g(p) \notin f(A)$ por (9) se tiene que $g(p) \notin h(A \times \{1\})$, de donde $h^{-1}(g(p)) \cap (A \times \{1\}) = \emptyset$, es decir, $h^{-1}(g(p))$ es disjunto del arco $A \times \{1\}$. También se tiene que $(p, 0) \in h^{-1}(g(p))$. Sea $C$ la componente del conjunto compacto $h^{-1}(g(p)) \cap (A \times I)$ que contiene al punto $(p, 0)$, $C$ es disjunta del arco $A \times \{1\}$. Podemos afirmar que $C \cap (\{q\} \times I) \neq \emptyset$, probar esta afirmación supongamos que no es así, es decir,

$$C \cap [(A \times \{1\}) \cup (\{q\} \times I)] = \emptyset \tag{10}$$

Aseguramos que $(p_i'', 0) \in h^{-1}(g(p_i'')) \cap (A_i' \times I)$ y tomemos $C_i$ que denota la componente del conjunto compacto $h^{-1}(p_i'') \cap (A_i' \times I)$ que contiene al punto $(p_i'', 0)$.

Tenemos que los conjuntos $A_i' \times \{I\}$ convergen a $A \times \{I\}$, en consecuencia el conjunto $(A \times I) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i' \times I)$ es un espacio métrico compacto, más aún, como $q_i, q_i'$ convergen a $q$, los conjuntos $\{q_i\} \times I$ y $\{q_i'\} \times I$ convergen a $\{q\} \times I$.

Si para cada $i \in \mathbb{N}$, el continuo $C_i$ intersecta ya sea a $A_i' \times \{1\}$ o $\{q_i\} \times I$ o $\{q_i'\} \times I$, la sucesión de continuos $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ puede contener una subsucesión convergente a un continuo en $h^{-1}(p_i'') \cap (A \times I)$ y que contiene al punto $(p, 0)$ (pues $\{p_i''\} \times I$ converge a $\{p\} \times I$), e intersecta ya sea a $A \times \{1\}$ o $\{q\} \times I$. Este último continuo debe estar contenido en $C$, contradiciendo (10).

Entonces existen subíndices $k = 1, 2, 3, ...$ tales que

$$C_k \cap [(\{q_k\} \times I) \cup (A_k' \times \{1\}) \cup (\{q_k'\} \times I)] = \emptyset \tag{11}$$

Si tomamos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \Gamma &= (\{q_k\} \times I) \cup (A_k' \times \{1\}) \cup (\{q_k'\} \times I) \\ \Phi &= h^{-1}(g(p_k'')) \cap (A_k' \times I) \\ Z &= \Phi \cup \Gamma \\ z &= (p_k'', 0) \end{aligned}$$

y seguimos el procedimiento del Teorema 3.13 tenemos que $Z$ no es conexo entre $\Gamma$ y el punto $z \in Z \backslash \Gamma$, en otras palabras, $(A_k' \times I) \backslash Z$ separa el disco $(A_k' \times I)$ entre $\Gamma$ y $z$, de donde existe un continuo localmente conexo $L \subset (A_k' \times I) \setminus Z$ que también separa el disco entre $\Gamma$ y $z$.

Podemos tomar $U = L \cup \Lambda \cup \Lambda'$, donde $\Lambda, \Lambda'$ son tomados como en el Teorema 3.13 y además $U$ es un continuo localmente conexo, también lo es su imagen $h(U)$ y se tiene que: $g(p_k'') \notin h(U)$ pero $g(q_k), g(q_k') \in h(U)$ por la propiedad [*] y dado que $Y$ es hereditariamente unicoherente, esto es una contradicción y prueba que $C$ intersecta al arco $\{q\} \times I$.

Al igual que en el Teorema 3.13 afirmamos que la componente $D$ del conjunto compacto $h^{-1}(g(q)) \cap (A \times I)$ que contiene al punto $(q, 0)$ intersecta al arco $\{p\} \times I$.

Dado que $p \neq q$ y $g(p) \neq g(q)$ se tiene que $h^{-1}(g(p)) \cap h^{-1}(g(q)) = \emptyset$. Como $A \times I$ es un espacio normal podemos formar una $\theta-$curva en $A \times I$ lo que nos lleva a una contradicción y con esto el teorema queda demostrado. ∎

Ahora ya tenemos la herramienta necesaria para responder la pregunta hecha en la pág. 13, considere el Ejemplo 4.2. Entonces $(X, g, Y)$ tiene la propiedad [*] así por el teorema anterior $Y$ no es contraíble y además no es de tipo N, lo que nos dice que el inverso del Corolario 3.16 no se cumple.

**Observación.** Notemos que el Teorema 3.13 nos dice que si un continuo tiene sucesiones de tipo N, entonces no es contraíble, pero este teorema no es de gran utilidad cuando el continuo no presenta este tipo de sucesiones. Sin embargo, el Teorema 4.4 da un panorama más amplio de continuos que no son contraíbles.

## 5 Funciones admisibles

El siguiente concepto dado por J. J. Charatonik y A. Illanes en [7] y es una generalización de la propiedad [$*$] que dió Czuba en [8].

**Definición 5.1** *(*J. J. Charatonik, A. Illanes*) Sean $X, Y$ continuos y $g : X \to Y$ una función sobreyectiva. Decimos que $g$ es admisible si se prueba que*
*i) $X$ es de tipo $N$ entre algunos puntos $p$ y $q$,*
*ii) $Y$ es hereditariamente unicoherente y*
*iii) Lim sup* $[g([p_n, q_n'']) \cap g([q_n'', p_n'])] \cap$ *Lim sup* $[g([q_n, p_n'']) \cap g([p_n'', q_n'])]$
$= \emptyset$.

En el Ejemplo 4.2 se da una función que cumple la definición anterior.

El siguiente teorema generaliza el teorema dado por Czuba en [8]. Para la demostración básicamente seguiremos las ideas de lo probado por Oversteegen en [16].

**Teorema 5.2** *(J. J. Charatonik, A. Illanes) Sea $g : X \to Y$ una función admisible entre los continuos $X$, $Y$.*

*$\neq f(A) \cap Q$, en consecuencia, $X$ no es contraíble respecto a $Y$, de esta manera, por el Teorema 4.3, $Y$ no es contraíble.*

**Demostración.** Dado que $g : X \longrightarrow Y$ es admisible, el continuo $X$ es de tipo N. Tomemos los arcos $A,\ A_n,\ A_n'$, los puntos $p_n,\ p_n',\ p_n'',\ q_n,\ q_n',\ q_n''$ como en la definición de continuo de tipo N y $h : X \times I \to Y$ una homotopía tal que

$$h(x, 0) = g(x), \quad h(x, 1) = f(x). \tag{12}$$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{gathered}\Gamma = (\{q_n\} \times I) \cup (A_n' \times \{1\}) \cup (\{q_n'\} \times I),\\ \Phi = h^{-1}(g([q_n, p_n'']) \cap g([p_n'', q_n'])) \cap (A_n' \times I),\\ Z = \Phi \cup \Gamma.\end{gathered}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n$ la componente del conjunto compacto $\Phi$ que contiene al punto $(p_n'', 0)$.

Notemos que $h(p_n'', 0) = g(p_n'') \in g([q_n, p_n'']) \cap g([p_n'', q_n'])$, de donde $C_n$ está bien definida.

Afirmación.

$$C_n \cap \Gamma \neq \emptyset \tag{13}$$

para probar la afirmación supongamos que $C_n \cap \Gamma = \emptyset$ y con un procedimiento parecido al del Teorema 3.13 tenemos que $Z$ no es conexo entre $\Gamma$ y $C_n$, en otras palabras, $(A_k' \times I) \setminus Z$ separa el disco $(A_k' \times I)$ entre $\Gamma$ y $C_n$, recordando la Definición 3.4, podemos encontrar dos conjuntos cerrados disjuntos tal que

$$Z = F \cup G, \quad C_n \subset F \quad y \quad \Gamma \subset G$$

Tomemos $U$, $V$ conjuntos abiertos y disjuntos de $(A'_k \times I)$ tal que $F \subset U$ y $G \subset V$, sea $M$ la componente de $(A'_k \times I) \setminus U$ que contiene a $\Gamma$ y $L$ la componente de $(A'_k \times I) \setminus V$ que contiene a $C_n$, $L$ es abierto pues es componente de un conjunto abierto $(A'_k \times I) \setminus V$ en un continuo localmente conexo $(A'_k \times I)$.

El conjunto $(A'_k \times I) \setminus L$ es la unión del continuo $M$ y todas las componentes de $(A'_k \times I) \setminus M$ diferentes de $L$.

Como las componentes son cerradas, se tiene que si $K$ es una componente de $(A'_k \times I) \setminus M$ entonces

$$\begin{aligned} \emptyset \neq K \cap Fr((A'_k \times I) \setminus M) &= K \cap [\overline{(A'_k \times I) \setminus M} \cap \overline{M}]. \\ &= K \cap [\overline{(A'_k \times I) \setminus M} \cap M] \end{aligned}$$

es decir, cada componente intersecta a $M$ y en consecuencia $(A'_k \times I) \setminus L$ es conexo ya que M intersecta cada componente de $(A'_k \times I) \setminus L$.

Ahora como $(A'_k \times I)$ es unicoherente se tiene que $Fr(L)$ es un continuo y además por la conexidad local de $A'_k \times I$ y por el Teorema 3.3 se tiene que

$$Fr(L) \subset Fr((A'_k \times I) \setminus M) \subset Fr(M) \subset Fr((A'_k \times I) \setminus U) = Fr(U).$$

Notemos que $\Gamma \subset M \subset (A'_k \times I) \setminus L$ y $C_n \subset L$ en consecuencia, cada uno de los arcos $[q_n, p''_n] \times \{0\}$ y $[p''_n, q'_n] \times \{0\}$ debe intersectar tanto a $L$ como a $(A'_k \times I) \setminus L$, entonces existen puntos $a \in [q_n, p''_n]$ y $b \in [p''_n, q'_n]$ tal que $(a, 0)$, $(b, 0) \in Fr(L)$. Note que $h((a, 0)) = g(a)$, $h((b, 0)) = g(b) \in h(Fr(L)) \subset Y$, dado que $g(a), g(b) \in g([q_n, q'_n]) \subset Y$ y como $Y$ es hereditariamente unicoherente y $g([q_n, q'_n])$ es arco conexo existe un único arco que los une, digamos $[g(a), g(b)]$ y además

$$[g(a), g(b)] \subset [g([q_n, p''_n]) \cup g([p''_n, q'_n])] \cap h(Fr(L)).$$

Dado que $g([q_n, p''_n])$ y $g([p''_n, q'_n])$ son cerrados y cada uno de ellos intersecta al arco $[g(a), g(b)]$ debe existir un punto

$$y \in [g(a), g(b)] \cap [g([q_n, p''_n]) \cap g([p''_n, q'_n])]$$

entonces $y \in h(Fr(L))$, de donde existe $x \in Fr(L)$ tal que $h(x) = y$ y además $h(x) \in g([q_n, p''_n]) \cap g([p''_n, q'_n])$ entonces

$$x \in [\Phi \cap Fr(L)] \subset [\Phi \cap Fr(U)]. \tag{14}$$

Ahora dado que $G \subset V$ y $F \subset U$ y como $V, U$ son disjuntos se tiene que $\overline{U} \subset (A'_k \times I) \setminus V$ de donde

$$\begin{gathered} \overline{U} \subset (A'_k \times I) \setminus V \subset (A'_k \times I) \setminus G \\ \text{y } (A'_k \times I) \setminus U \subset (A'_k \times I) \setminus F. \end{gathered}$$

Como $U$ es abierto, entonces

$$\begin{aligned} Fr(U) &= \overline{U} \setminus U = \overline{U} \cap ((A'_k \times I) \setminus U) \\ &\subset [(A'_k \times I) \setminus G] \cap [(A'_k \times I) \setminus F] = [(A'_k \times I) \setminus (F \cup G)]. \end{aligned}$$

Por (14) se tiene que

$$\begin{aligned} x \in \Phi \cap [(A'_k \times I) \setminus (F \cup G)] &= \Phi \cap (A'_k \times I) \setminus Z \\ &\subset \Phi \cap (A'_k \times I) \setminus \Phi = \emptyset \end{aligned}$$

esta contradicción completa la demostración de la afirmación.

Ahora consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{gathered} \Gamma' = (\{p_n\} \times I) \cup (A_n \times \{1\}) \cup (\{p'_n\} \times I), \\ \Phi' = h^{-1}(g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n])) \cap (A_n \times I), \\ Z' = \Phi' \cup \Gamma'. \end{gathered}$$

Y si $D_n$ es la componente del conjunto compacto $\Phi'$ que contiene al punto $(q''_n, 0)$. Siguiendo las mismas ideas de la afirmación anterior podemos demostrar que

$$D_n \cap \Gamma' \neq \emptyset. \tag{15}$$

Por otra parte para cada $n \in \mathbb{N}$ fijamos los puntos $c_n \in C_n \cap \Gamma$ y $d_n \in D_n \cap \Gamma'$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos las subsucesiones $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{C_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de las sucesiones $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a $c$, $d$, $C$ y $D$ respectivamente.

Tenemos que $(p, 0) \in C$, $(q, 0) \in D$ y

$$c \in C \cap [(\{q\} \times I) \cup (A \times \{1\})] \tag{16}$$

$$d \in D \cap [(\{q\} \times I) \cup (A \times \{1\})] \tag{17}$$

Dado que $C_n$ es una componente de $\Phi$, $C_n \subset (A'_n \times I)$, de donde $C \subset (A \times I)$ y además como $h(C_n) \subset (g(q_n p''_n) \cap g(p''_n q'_n))$

$$h(C) \subset Lim\ sup\ (g([q_n, p''_n]) \cap g([p''_n, q'_n])) = P.$$

De manera similar tenemos que $D \subset (A \times I)$ y

$$h(D) \subset Lim\ sup\ (g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n])) = Q.$$

Para terminar la demostración del teorema vamos a suponer que

$$f(A) \cap Q = \emptyset = f(A) \cap P. \tag{18}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(A) \cap P = \emptyset$, por (16) tenemos dos posibilidades, si $c \in A \times \{1\}$, entonces $c = (a, 1)$ para algún $a \in A$, es decir, $f(a) = h(a, 1) = h(c) \in h(C) \subset P$ y por lo tanto $f(A) \cap P \neq \emptyset$, lo que es una contradicción y muestra que $c \notin A \times \{1\}$, de donde $c \in \{q\} \times I$. Con lo cual tenemos que $C$ es un subcontinuo del disco $A \times I$ que contiene al punto $(p, 0)$ e intersecta al arco $\{q\} \times I$.

De manera similar y utilizando (17) tenemos que $D$ es un subcontinuo del disco $A \times I$ que contiene al punto $(q, 0)$ e intersecta al arco $\{p\} \times I$, se sigue que $C \cap D \neq \emptyset$.

Entonces existe un punto $e \in C \cap D$ tal que

$$h(e) \in h(C \cap D) \subset h(C) \cap h(D) \subset P \cap Q$$

lo que contradice el hecho de que $g$ es admisible.
Por lo tanto $f(A) \cap Q \neq \emptyset \neq f(A) \cap P$. ■

**Observación.** El Ejemplo 4.2 nos muestra que las funciones admisibles no necesariamente preservan las sucesiones de tipo N, en este mismo ejemplo se observa que el continuo resultante bajo la función admisible es de tipo N generalizado, es decir, no tiene la propiedad de intersección doblada. De manera general no es cierto que la imagen sea siempre de tipo N generalizado pues el Ejemplo **??** no es de tipo N generalizado y la función para obtenerlo es admisible, lo que nos lleva a preguntarnos lo siguiente: Si $g : X \to Y$ es admisible, entonces ¿$Y$ no tendrá la propiedad de intersección doblada?.

La respuesta a esta pregunta es afirmativa. El siguiente teorema lo demuestra.

**Teorema 5.3** *Sean $g : X \to Y$ una función admisible entre los continuos $X, Y$, entonces $Y$ no tiene la propiedad de intersección doblada.*

**Demostración.** Dado que $g : X \to Y$ es admisible, se tiene que $X$ es de tipo N. Tomemos $A$, $A_n$, $A'_n$, $p_n$, $p'_n$, $p''_n$, $q_n$, $q'_n$ y $q''_n$ como en la definición continuo de tipo N.

Tenemos que las sucesiones $\{[p_n, q''_n]\}_{n=1}^{\infty}$, $\{[q''_n, p'_n]\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al arco $A = [p, q]$, por la continuidad de $g$ se tiene que $\{g([p_n, q''_n])\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g([q''_n, p'_n])\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de subcontinuos de $Y$ que convergen a $g(A)$, además se tiene que $q''_n \in [p_n, q''_n] \cap [q''_n, p'_n]$ de donde

$$\emptyset \neq g([p_n, q''_n] \cap [q''_n, p'_n]) \subset g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n]).$$

Se tiene que $g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n])$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$, pues $Y$ es hereditariamente unicoherente.

Notemos que $C(Y)$ es un espacio compacto de donde la sucesión $\{g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n])\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente digamos $\left\{g([p_{n_k}, q''_{n_k}]) \cap g([q''_{n_k}, p'_{n_k}])\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Si tomamos

$$\begin{gathered} B = Lim\ g([p_{n_k}, q''_{n_k}]) \cap g([q''_{n_k}, p'_{n_k}]), \\ B_k = g([p_{n_k}, q''_{n_k}]) \text{ y} \\ B'_k = g([q''_{n_k}, p'_{n_k}]). \end{gathered}$$

Tenemos que $B$ es un conjunto de doblez de $g(pq)$ pues:
*i)* $B_k \cap B'_k \neq \emptyset$
*ii)* $g([p, q]) = Lim\ B_k = Lim\ B'_k$
*iii)* $B = Lim\ (B_k \cap B'_k)$
Además

$$\begin{aligned} B = Lim\,(B_k \cap B'_k) &= Lim\ sup\ (B_k \cap B'_k) \\ &\subset Lim\ sup\ [g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n])]. \end{aligned}$$

De manera análoga podemos encontrar un conjunto de doblez $C$, de $g(pq)$ tal que

$$C \subset Lim\ sup\ [g([q_n, p''_n]) \cap g([p''_n, q'_n])]$$

Por hipótesis se tiene que

$$Lim\ sup\ [g([p_n, q''_n]) \cap g([q''_n, p'_n])] \cap Lim\ sup\ [g([q_n, p''_n]) \cap g([p''_n, q'_n])] = \emptyset$$

de donde $B \cap C = \emptyset$ y demuestra lo que se quería demostrar. ■

# 6 Continuos de tipo N, retracciones y funciones promedio

**Definición 6.1** *Sea $A$ un subconjunto cerrado de $X$, una* retracción *es una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = id|_A$.*

**Ejemplo 6.2** *Considere la función $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$ definida de la siguiente manera.*

$$r(x, y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

*se tiene que $r|_{S^1} = id|_{S^1}$.*

Un concepto importante en hiperespacios de continuos es llamado arco ordenado, a continuación se define.

**Definición 6.3** *Sea $X$ un continuo y $L \subset 2^X$. Un* arco ordenado *en $L$ es un arco $M$ tal que para cualesquiera dos elementos $A, B$ de $M$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Si $A, B$ denotan los puntos extremos de un arco ordenado $M$ y $A \subsetneq B$, decimos que $M$ es un arco ordenado en $L$ desde $A$ hasta $B$.*

Para el siguiente teorema consideremos $w, w' \in X$ y $T = [w, w']$ un arco contenido en $X$, denotemos por $wT = \{[w, t] \mid t \in T\}$, entonces $wT$ es un arco ordenado en $C(X)$ cuyos puntos extremos son $w$ y $T$.

**Teorema 6.4** *(F. Capulín, W. J. Charatonik [2]). Sea $X$ un continuo. Si existe una retracción $r : C(X) \to X$. Entonces $X$ no es de tipo N.*

**Demostración.** Primero notemos que $X$ es arco conexo ya que $C(X)$ es arco conexo y $r$ es una función continua de $C(X)$ en $X$.

Supongamos que el continuo $X$ es de tipo N.

Afirmamos que si $C$ es la componente de $r^{-1}(p) \cap C(A)$ que contiene al punto $p$, entonces $C \cap qA \neq \emptyset$, donde $qA$ es un arco ordenado en $C(A)$.

Para demostrar esta afirmación supongamos que $C \cap qA = \emptyset$ y denotemos por $C_i$ la componente del conjunto compacto $r^{-1}(p_i'') \cap C(A)$ que contiene al punto $p_i''$.

Dado que $C_i \in C\left(C(A) \cup \bigcup C(B_i)\right)$ que es un conjunto compacto, se tiene que la sucesión $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión que converge a un continuo $T$ contenido en $r^{-1}(p) \cap C(A)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Lim\ C_i = T$, se tiene que $Lim\ p_i'' \in Lim\ C_i$, es decir, $p \in T$, de donde $T \subset C$, supongamos que para una cantidad finita

$$C_i \cap (q_i A_i' \cup q_i' A_i') \neq \emptyset$$

entonces $T \cap qA \neq \emptyset$, pero $T \subset C$, entonces $C \cap qA \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Entonces tenemos que excepto para un número finito de índices

$$C_k \cap (q_k A_k' \cup q_k' A_k') = \emptyset$$

Tomemos $k \in \mathbb{N}$ un índice para el cual la igualdad anterior se cumple y hagamos

$$\begin{gathered} \Gamma = q_k A'_k \cup q'_k A'_k, \\ \Phi = r^{-1}(p''_k) \cap C(A'_k), \\ Z = \Phi \cup \Gamma. \\ z = p''_k \end{gathered}$$

Siguiendo los pasos del Teorema 3.13 podemos probar que $C(A'_k) \setminus Z$ separa el disco $C(A'_k)$ entre $\Gamma$ y $z$, para entonces encontar un continuo localmente conexo $L \subset C(A'_k) \setminus Z$ que también separa $C(A'_k)$ entre $\Gamma$ y $z$.

Tenemos que $z$ separa el arco $[q_k, q'_k]$ en dos subarcos cada uno de los cuales debe intersectar a $L$, podemos tomar $\Lambda, \Lambda'$ subarcos con puntos extremos $d, q_k$ y $d', q'_k$ respectivamente.

De manera análoga al Teorema 3.13 podemos tomar $U = L \cup \Lambda \cup \Lambda'$ un continuo localmente conexo y también $r(U)$ es localmente conexo, en consecuencia arco conexo.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} L \subset C(A'_k) \setminus Z &\subset C(A'_k) \setminus \Phi \\ &= C(A'_k) \setminus [r^{-1}(p''_k) \cap C(A'_k)] \\ &\subseteq C(X) \setminus [r^{-1}(p''_k)] \end{aligned}$$

y $\Lambda \cup \Lambda' \subset A'_k \setminus \{z\} = A'_k \setminus \{p''_k\}$, dado que $q_k, q'_k \in \Lambda \cup \Lambda'$ se sigue que $q_k, q'_k \in r(U) \subset X$, y al mismo tiempo $p''_k \notin r(U)$, entonces ningún arco que une a $q_k$ con $q'_k$ contiene al punto $p''_k$ lo cual es una contradicción, por lo que

$$C \cap qA \neq \emptyset.$$

Si tomamos $D$ la componente de $r^{-1}(q) \cap C(A)$ que contiene al punto $q$ afirmamos que $D \cap pA \neq \emptyset$.

La demostración de esta afirmación es similar a la anterior si reemplazamos $A'_i, C, p, p''_i, q_i, q'_i$ por $A_i, D, q, q''_i, p_i, p'_i$ respectivamente.

Dado que $p \neq q$ entonces $r^{-1}(p) \cap r^{-1}(q) = \emptyset$, retomando la demostracion del Teorema 3.13, reemplazando $pA, qA$ por $\{p\} \times I, \{q\} \times I$ respectivamente y tomando

$$\Delta = pA \cup qA \cup A'$$

donde $A' = \{\{x\} \mid x \in A\}$ podemos formar una $\theta$ curva en $C(A)$ lo cual nos lleva a una contradicción, demostrando lo que se quería. ■

**Teorema 6.5** *(*F. Capulín, W. J. Charatonik [2]*) Sea $X$ un continuo y supongamos que existe una retracción $r : F_2(X) \to X$. Entonces $X$ no es de tipo $N$*

**Demostración.** Se sabe que $F_2(A)$ es homeomorfo a $C(A)$ cuando $A$ es un arco. La demostración es la misma del teorema anterior, si reemplazamos $C(X)$ por $F_2(X)$. ■

**Definición 6.6** *Sea* $m : X \times X \to X$ *una función continua. Decimos que* $m$ *es una* función promedio *si cumple las siguientes condiciones:*
*i)* $m(x,x) = x$ *para cada* $x \in X$,
*ii)* $m(x,y) = m(y,x)$ *para cada* $x, y \in X$.

**Ejemplo 6.7** *Si* $X = [a,b]$, *una función promedio* $m : X \times X \to X$ *estará definida como sigue*

$$m(x,y) = \tfrac{x+y}{2}.$$

Por otra parte como $X$ es homeomorfo a $F_1(X)$ tenemos que una retracción $r : F_2(X) \to X$ define una función promedio si tomamos $m(x,y) = r(\{x,y\})$, esto nos lleva al siguiente resultado.

**Corolario 6.8** *(*F. Capulín, W. J. Charatonik [2]*) Un continuo de tipo N no admite funciones promedio.*

De las Proposiciones 5.11 y 5.16 dadas en [6, págs. 19, 20] que nos dicen que la existencia de una retracción de $2^X$ en $X$ implica la existencia de una función promedio en $X$, y del corolario anterior obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 6.9** *Un continuo* $X$ *de tipo N no admite retracciones de* $2^X$ *en* $X$.

# 7 Caracterizaciones de contractibilidad en abanicos

En esta sección mostraremos que si $X$ es un abanico, las siguientes condiciones son equivalentes [17]:

1. $X$ es contraíble.

2. $X$ no contiene $Q-$puntos, $X$ no es de tipo N, y $X$ es suave a pares.

3. $X$ no contiene $Q-$puntos, $X$ no es de tipo zig zag, y $X$ es suave a pares.

Usaremos la siguiente notación para el resto de esta sección. Denotaremo por $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ a los puntos extremos del abanico $X$. Adicionalmente usaremos las siguiente definiciones y resultados.

## Continuos suaves a pares

**Definición 7.1** *Sean $X$ un dendroide y $r$ un punto en $X$, supongamos que existen dos sucesiones $\left\{r_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{r_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en $X$, ambas convergiendo al punto $r$, decimos que* la sucesión $\left\{r_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ domina a la sucesión $\left\{r_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$, *si siempre que exista un punto $s \in X$ y una sucesión $\left\{s_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en $X$ convergiendo a $s$, con la propiedad de que los arcos $[r_n^1, s_n^1]$ convergen al arco $[r, s]$, existe otra sucesión $\left\{s_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en $X$ convergiendo a $s$, tal que los arcos $[r_n^2, s_n^2]$ convergen al arco $[r, s]$.*

*Decimos que un dendroide es* suave a pares*, si para cada par de sucesiones que convergen a un punto en común, una sucesión del par domina a la otra.*

Acontinuación mostraremos un ejemplo de un dendroide suave a pares.

5.eps 5.eps

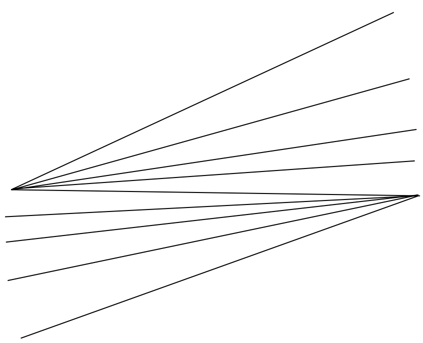


Figure 4: Abanico suave a pares

**Definición 7.2** *Sea $X$ un dendroide, el orden de punto de corte débil con respecto a un punto c, se denota por "$\leq_c$" y está dado como sigue, $x \leq_c y$ si y sólo si $x \in [c, y]$ y $x <_c y$ si $x \leq y$ pero $x$ es distinto de $y$.*

**Lema 7.3** *Sean $X$ un abanico con vértice $v$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de puntos convergiendo a $x_0$, $r_0$ respectivamente. Sean $b$ un punto de Lim sup $[x_n, r_n]$ y $\leq_v$ el orden de punto de corte débil con respecto a $v$. Si Lim sup $[x_n, r_n]$ es un arco, entonces existe una subsucesión convergente $[x_{n_j}, b_{n_j}]$ y una sucesión $\{b_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ convergiendo a $b$, con $b_{n_j} \in [x_{n_j}, r_{n_j}]$ tal que*

$$Lim\ sup\ [x_{n_j}, b_{n_j}] \leq b\ (si\ x_0 \leq b)$$

*es decir, si $y \in$ Lim sup $[x_{n_j}, b_{n_j}]$ se tiene que $y \in [x_0, b]$.*
*respectivamente Lim sup $[x_{n_j}, b_{n_j}] \geq b$ (si $x_0 \geq b$)*

**Demostración.** Sea $b \in$ *Lim sup* $[x_n, r_n]$, supongamos que $x_0 \leq b$ y que $x_0$ es distinto de $b$, así para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n$ no está contenido en $\overline{B_\epsilon(b)}$, para algún $\epsilon > 0$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ fija, existe un subarco $[x_n, b_n(j)]$ de $[x_n, r_n]$ que es irreducible entre $x_n$ y $\overline{B_{\epsilon/j}(b)}$ para cada $n$ mayor que algún $N_j$, también dado que $b \notin$ *Lim sup* $[x_n, b_n(j)]$ se sigue que *Lim sup* $[x_n, b_n(j)] \leq b$, es decir, si $y \in$ *Lim sup* $[x_n, b_n(j)]$ se tiene que $y \in [v, b]$ (respectivamente *Lim sup* $[x_n, b_n(j)] \geq b$ si $x_0 \geq b$).

Tomemos $j \in \mathbb{N}$ fija, existe $M_j$ tal que para cada $n > M_j$ se cumple que $[x_n, r_n]$ está en la $\epsilon/j$-nube alrededor de *Lim sup* $[x_n, r_n]$, tomemos $\mathbb{L}(b) = \{p \in X \mid p \leq b\} \subset$ *Lim sup* $[x_n, r_n]$, entonces para cada $n > M_j$ se cumple que $[x_n, b_n(j)] \subset N(\epsilon/j, \mathbb{L}(b))$. (Respectivamente $[x_n, b_n(j)] \subset N(\epsilon/j, \mathbb{U}(b))$ donde $\mathbb{U}(b) = \{p \in X \mid p \geq b\}$).

Elijamos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ con $n_j > M_j$ tal que $[x_{n_j}, b_{n_j}(j)]$ está en $N(1/j, \mathbb{L}(b))$.

Notemos que $b_{n_j}(j) \in \overline{B_{\epsilon/j}(b)}$ para cada $j$, entonces $\{b_{n_j}(j)\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $b$, renombrando índices se tiene que *Lim sup* $[x_{n_j}, b_{n_j}] \leq b$ (respectivamente *Lim sup* $[x_{n_j}, b_{n_j}] \geq b$) ■

**Definición 7.4** *Sea $X$ un dendroide con un orden parcial $\leq$ definido en $X$, una métrica $\rho$ en $X$ es* radialmente convexa *con respecto a $\leq$, si siempre que $x \leq y \leq z$ tenemos que $\rho(x, y) < \rho(x, z)$*

Se sabe por [4, Teorema 1, pág.229] el siguiente resultado.

**Teorema 7.5** *Si $\Gamma$ es un orden parcial cerrado en un espacio métrico compacto $X$, entonces existe una métrica equivalente en $X$ que es radialmente convexa con respecto a $\Gamma$.*

El cual utilizaremos para demostrar el siguiente lema.

**Lema 7.6** *Sean $X$ un abanico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de puntos convergiendo a $x_0, r_0$ respectivamente tales que los arcos $[x_n, r_n]$ son disjuntos a pares o si $x_n = x_0 = v$, donde $v$ es el vértice del abanico, $(x_n, r_n]$ son disjuntos* *a pares y Lim sup* $[x_n, r_n] = [x_0, r_0]$*, definimos* $y \leq z$ *si* $y \in [x_n, z]$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*. Si* $X$ *no contiene zig zag entonces* $\bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, r_n]$ *admite una métrica radialmente convexa con respecto a* $\leq$*.*

**Demostración.** Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos contenida en $\bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, r_n]$ que converge a un punto $y_0$. Afirmamos que

$$Lim\ sup\, \mathbb{L}(y_n) \subset \mathbb{L}(y_0).$$

Supongamos que $Lim\ sup\, \mathbb{L}(y_n) \setminus \mathbb{L}(y_0) \neq \emptyset$.
Sea $p \in Lim\ sup\, \mathbb{L}(y_n) \setminus \mathbb{L}(y_0)$, por la elección de $p$ existen puntos $p_n \in [x_n, y_n]$ convergiendo a $p$ en $(y_0, r_0]$.

Tomemos $q = min\ Lim\ sup\ [p_n, r_n]$ y notemos que $q \leq y_0 < p$.
Podemos tomar una subsucesión y renombrando índices si es necesario, podemos suponer que existen puntos $q_n \in [p_n, r_n]$, tal que la sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ coverge a $q$, denotemos por $\widehat{p} = máx\ Lim\ sup\ [x_n, q_n]$ podemos encontrar de manera similar puntos $\widehat{p_n} \in [q_n, p_n] \subset [p_n, r_n]$, tal que $\{\widehat{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ coverge a $\widehat{p}$ y notemos que $q \leq y_0 < p \leq \widehat{p}$.

Ahora $\widehat{p} \in [q, r_0] \subset Lim\ sup\ [q_n, r_n]$, aplicando el Lema 7.3, podemos encontrar puntos $p'_n \in [q_n, r_n]$ de tal manera que la sucesión $\{p'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\widehat{p}$ y $Lim\ sup\ [p'_n, q_n] \leq \widehat{p}$, además se tiene que $q \leq Lim\ sup\ [p'_n, q_n]$ pues $q_n \in [p_n, r_n]$ y $q = min\ Lim\ sup\ [p_n, r_n]$ de donde

$$Lim\ sup\ [p'_n, q_n] = [\widehat{p}, q].$$

Dado que $q \in [x_0, \widehat{p}] \subset Lim\ sup\ [x_n, \widehat{p_n}]$ aplicando nuevamente el Lema 7.3 y por la maximalidad de $\widehat{p}$ existen puntos $q'_n \in [x_n, \widehat{p_n}]$ tales que la sucesión $\{q'_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $q$ y $Lim\ sup\ [q'_n, \widehat{p_n}] = [\widehat{p}, q]$.

El conjunto $Lim\ sup\ [q_n, \widehat{p_n}]$ es igual a $[\widehat{p}, q]$ dado que $\widehat{p}$ es maximal y $q = min\ Lim\ sup\ [p_n, r_n]$, renombrando índices en la subsucesión apropiada obtenemos de hecho que la sucesión de arcos

$$\{[p'_n, q_n] \cup [q_n, \widehat{p}_n] \cup [\widehat{p}_n, q'_n]\}_{n=1}^{\infty}$$

converge al arco $[\widehat{p}, q]$ formando un zig zag, lo cual contradice la hipótesis.

Falta demostrar que $\{(a, b) \in X \times X |\ a \leq b\}$ es cerrado en $X \times X$ para aplicar el Teorema 7.5

Sea $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente tal que $a_n \leq b_n$ para cada $n \geq 1$, entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen digamos a $a_0$ y $b_0$ respectivamente. Como $a_n \leq b_n$ se sigue que $a_n \in \mathbb{L}(b_n)$ y por la afirmación anterior se tiene que

$$a_0 = Lim\ sup\ (a_n) \in Lim\ sup\ L(b_n) \subset L(b_0)$$

es decir $a_0 \leq b_0$, por lo tanto $\leq$ es cerrado en $X \times X$, por el Teorema 7.5, $\bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, r_n]$ admite una métrica radialmente convexa con respecto a $\leq$. ■

**Teorema 7.7** *Sea $X$ un abanico contraíble entonces $X$ es suave a pares.*

**Demostración.** Sean $X$ un abanico contraíble con vértice $v$, puntos extremos $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ y $h : X\times I\to X$ una contracción de $X$, supongamos que $X$ no es suave a pares.

Tomemos $r$, $s$ y $q$ puntos en $X$, dos sucesiones $\left\{r_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{r_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ las cuales convergen al punto $r$ y sucesiónes $\left\{s_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{q_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a $s$, $q$ respectivamente de tal manera que $Lim\,[r_n^1,s_n^1]=[r,s]$ y $Lim\,[r_n^2,q_n^2]=[r,q]$.

Dado que $X$ es un abanico contraíble, se tiene que es localmente conexo en el vértice, por el Corolario **??**, se tiene que $X$ no contiene $Q-$puntos. Podemos suponer que los puntos $s$, $r$ y $q$ pertenecen a un arco $[v,e_\beta]\setminus\{v\}$ para algún $\beta\in A$.

Tomemos $\left\{e_{\alpha_n}^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{e_{\alpha_n}^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ como los puntos extremos de los arcos a los que pertenecen los puntos $r_n^1$, $r_n^2$ respectivamente, podemos suponer que los puntos $s_n^1$, $q_n^2$ también pertenecen a los arcos $[v,e_{\alpha_n}^1],[v,e_{\alpha_n}^2]$.

Afirmamos que $s_n^1\in[v,r_n^1]$ y $q_n^2\in[v,r_n^2]$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que los puntos $s_n^1$ pertenecen a los arcos $[r_n^1,e_{\alpha_n}^1]$, si $Lim\,[v,r_n^1]=[v,z]$ entonces existen puntos $z_n^1$ en $[v,r_n^1]$ que convergen a $z$, además $Lim\,[r_n^1,z_n^1]=[r,z]$, en realidad existe una subsucesión pero podemos renombrar índices.

Sea $\leq$ el orden de corte de punto débil con respecto de $z$ definido en $Lim\,[r_n^1,z_n^1]$, usando el Lema 7.3, tenemos que $Lim\,[r_n^1,z_n^1]\leq z$ por la elección de $r\leq z$.

Se debe cumplir que $z<q$, ya que si $q\leq z$, usando el Lema 7.6, podemos elegir una métrica radialmente convexa sobre el conjunto

$$\left([r,z]\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}[r_n^1,z_n^1]\right)$$

y podríamos tomar una sucesión $\left\{q_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a $q$, tal que $Lim\,[r_n^1,q_n^1]=[r,q]$, los puntos $q_n^1$ elegidos sobre $[r_n^1,z_n^1]$ y con la distancia correcta de $r_n^1$ dada por $d(r,q)$, de donde la sucesión $\left\{r_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ domina a la sucesión $\left\{r_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ pero eso es una contradicción pues $X$ no es suave a pares.

Pero con $z<q$ podemos elegir una métrica radialmente convexa $d$, sobre el conjunto

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[v,z_n^1]\cup[v,z]\right)$$

(utilizando el Lema 7.6) y podemos tomar puntos $s_n^3$ (con la distancia correcta de $z_n^1$ dada por $d(s,z)$ ) elegidos sobre los arcos $[v,z_n^1]$ y puntos $r_n^3$ (con la distancia $d(r,z)$ de $z_n^1$) elegidos sobre los arcos $[v,z_n^1]$ y tenemos que $Lim\;[r_n^3,s_n^3]=[r,s]$, es decir, la sucesión $\left\{r_n^3\right\}_{n=1}^{\infty}$ dominaría a la sucesión $\left\{r_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$, lo cual tampoco puede ser, pues $X$ no es suave a pares. Entonces la afirmación es cierta.

Si aplicamos la contracción al punto $r$, este debe ser movido al menos una vez a la posición de $s$, y también a la posición de $q$ veamos por separado que.

$$\begin{aligned} h(\{r\} \times I) &= h(Lim\ \{r_n^1\} \times I) \\ &= Lim\ h(\{r_n^1\} \times I) \\ &\supseteq Lim\,[h(r_n^1, 0), h(r_n^1, 1)] \\ &\supseteq Lim\,[r_n^1, v] \\ &\supseteq Lim\ \{s_n^1\} = \{s\} \end{aligned}$$

de manera similar para $q$, tenemos que $h(\{r\} \times I) \supseteq \{q\}$.

Supongamos sin pérdida de generalidad, que $r$ es movido sobre $s$ antes de que sea movido sobre $q$.

Sea $t_0$ el primer tiempo $t$ en $[0,1]$, tal que $h(r,t) = s$ y supongamos que $h(\{r\}, [0,t_0]) = [s,w]$, donde $w$ debe ser menor que $q$. Sea $t_1$ el último tiempo $t$ en $[0,t_0]$ tal que $h(r,t) = w$.

Notemos que los arcos $[h(r_n^2, t_1), h(r_n^2, t_0)]$ están contenidos en los arcos $[q_n^2, e_{\alpha_n}^2] \setminus \{q_n^2\}$ (dado que $r$ no ha sido movido a $q$ puede ser verdad para toda $n$). Por la elección de $t_0$, $t_1$ y $w$, se tiene que

$$Lim\,[h(r_n^2, t_1), h(r_n^2, t_0)] = [r, s].$$

Por el Lema 7.6, podemos elegir una métrica radialmente convexa sobre

$$\left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[h(r_n^2, t_1), h(r_n^2, t_0)\right] \cup [r,s] \right)$$

se tiene que los arcos $[r_n^2, h(r_n^2, t_0)]$ convergen a $[r,s]$ y entonces la sucesión $\{r_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ domina a la sucesión $\{r_n^2\}_{n=1}^{\infty}$, lo que contradice la suposición inicial terminando la demostración del teorema. ■

# k-ganchos

Los $k$-ganchos fueron introducidos por Graham en [9] para probar la no contractibilidad de los abanicos. Aquí daremos su definición.

**Definición 7.8** *Sea $X$ un abanico que no contiene $Q-$puntos, no es de tipo zig zag y es suave a pares. Sea $n$ un entero mayor que 0, diremos que un arco $[a,b]$, el cual pertenece a $[v, e_\alpha]$ para algún $\alpha \in A$, es un $n-$*gancho parcial*, si existe una sucesión $\{[v, e_{\alpha_m}]\}_{m=1}^{\infty}$ de arcos, cada uno de los cuales contiene puntos*

$$v = p(m,0) < p(m,1) < \cdots < p(m,n)$$

*tales que para cada $j = 0,1,2,...,n$, la sucesión $\{p(m,j)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a un punto digamos $p_j$; y tal que para cada $j = 1,2,...,n$, la sucesión de arcos $\{[p(m,j-1), p(m,j)]\}_{m=1}^{\infty}$ converge al arco $[p_{j-1}, p_j]$, con las siguientes características adicionales:*

*1.* $[p_j, p_{j+1}] \subset [p_{j-1}, p_j]$ *para* $j = 1, 2, .., n-1$*,*

*2.* $p_{n-1} = b$*,* $p_n = a$ *y finalmente*

*3.* $\operatorname*{Lim\,sup}_{m\to\infty} [p(m,n), e_{\alpha_m}]$ *está contenido propiamente en* $[p_{n-1}, p_n]$

*al punto* $p_{n-1}$ *le llamamos vértice y al punto* $p_n$ *el fondo del* $n-$*gancho parcial.*

En la siguiente figura los arcos $p_2p_3$ y $p_1^*p_2^*$ muestran un $3-$gancho parcial y un $2-$gancho parcial respectivamente.

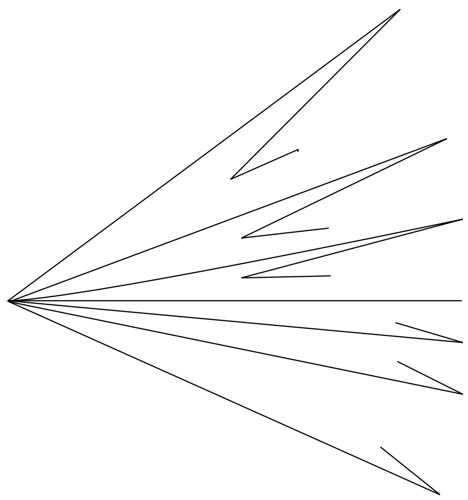


Figure 5: Abanico con 3-gancho y 2-gancho

**Observación.** De la definición de $n-$gancho parcial, para un $n$ dado tenemos que $a < b$ si $n$ es par y $b < a$ si $n$ es impar.

De aquí en adelante cuando se diga que $X$ es un abanico, se estará pensando en un abanico que es suave a pares, no contiene $Q-puntos$ y no es de tipo zig zag, salvo que se indique lo contrario.

Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, si $\{[p_{k-1}(i), p_k(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de $k-$ganchos parciales, para cada $i \in \mathbb{N}$ fija, existe una sucesión de arcos $\{[v, e_{\alpha_m}(i)]\}_{m=1}^{\infty}$ cada uno de los cuales contiene puntos

$$v = p(m,0,i) < p(m,1,i) < \cdots < p(m,k,i)$$

que cumplen las condiciones de la definición de $k-$gancho parcial.

**Lema 7.9** *Sea* $X$ *un abanico. Si un par de* $n-$*ganchos parciales se intersectan, sus vértices deben coincidir.*

**Demostración.** La demostración de este teorema se hará por inducción sobre $n$.

Sean $[p_1(1), p_2(1)]$ y $[p_1(2), p_2(2)]$ un par de $2-$ganchos parciales, entonces existen $\{[v, e_{\alpha_m}(1)]\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{[v, e_{\alpha_m}(2)]\}_{m=1}^{\infty}$ dos sucesiones de arcos cada uno de los cuales contiene puntos

$$v = p(m,0,1) < p(m,1,1) < p(m,2,1) \text{ y}$$
$$v = p(m,0,2) < p(m,1,2) < p(m,2,2)$$

respectivamente, tales que cumplen las condiciones de la Definición 7.8.

Supongamos que $[p_1(1), p_2(1)] \cap [p_1(2), p_2(2)] \neq \emptyset$ y que sus vértices no coinciden, sin pérdida de generalidad supongamos que $p_1(1) < p_1(2)$, es decir, $p_1(1) \in [v, p_1(2)]$.

Podemos tomar una sucesión de puntos $r_m^2 \in [p(m,1,2), p(m,2,2)]$, donde la sucesión de arcos $\{[p(m,1,2), p(m,2,2)]\}_{m=1}^{\infty}$ converge al arco $[p_1(2), p_2(2)]$, de tal manera que las sucesiones $\{p(m,1,1)\}_{m=1}^{\infty}, \{r_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ convergen al punto $p_1(1)$.

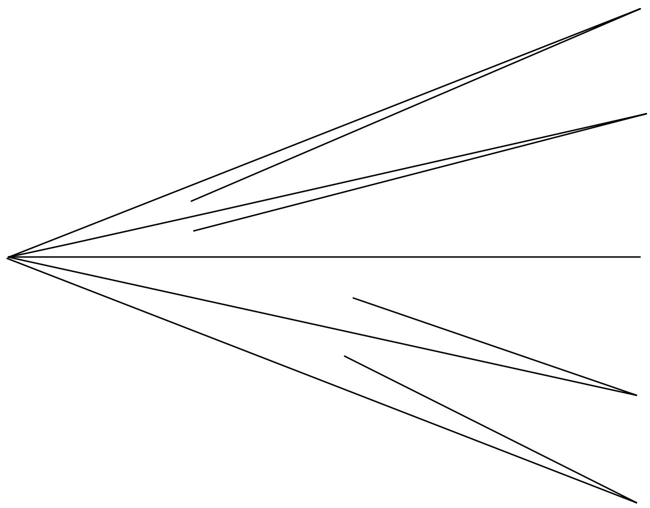


Figure 6: Abanico con 2, 2-gancho

Tomemos la sucesión $\{p(m,1,2)\}_{m=1}^{\infty}$ que converge al punto $p_1(2)$ tenemos que la sucesión de arcos $\left\{[r_m^2, p(m,1,2)]\right\}_{m=1}^{\infty}$ converge al arco $[p_1(1), p_1(2)]$.

Si $\left\{s_m^1\right\}_{m=1}^{\infty}$ es otra sucesión que converge al punto $p_1(2)$, se tiene que $p(m,0,2) \in [p(m,1,1), s_m^1]$ de donde $v \in \underset{m\to\infty}{Lim} [p(m,1,1), s_m^1]$ es decir la sucesión $\left\{r_m^2\right\}_{m=1}^{\infty}$ no domina a la sucesión $\{p(m,1,1)\}_{m=1}^{\infty}$.

Ahora vamos a demostrar que la sucesión $\{p(m,1,1)\}_{m=1}^{\infty}$ tampoco domina a la sucesión $\left\{r_m^2\right\}_{m=1}^{\infty}$, tomemos un punto $x$ tal que $x \in [v, y]$ con $y \leq [p_1(1), p_2(1)] \cup [p_1(2), p_2(2)]$ y puntos $x_m^1$ que pertenecen a los arcos $[p(m,0,1), p(m,1,1)]$

tal que $\left\{x_m^1\right\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $x$, de tal manera que la sucesión de arcos $\left\{[x_m^1, p(m,1,1)]\right\}_{m=1}^{\infty}$ converge al arco $[x, p_1(1)]$, podemos encontrar puntos $x_m^2 \in [p(m,0,2), p(m,1,2)]$ tal que la sucesión $\left\{x_m^2\right\}$ converge a $x$, pero

$$x_m^2 \in [x_m^2, p(m,1,2)] \subset [x_m^2, r_m^2] = [x_m^2, p(m,1,2)] \cup [p(m,1,2), r_n^2]$$

de donde $\underset{m\to\infty}{Lim}\ [x_m^2, r_m^2] = [x, p_1(2)]$, es decir, $\{p(m,1,1)\}_{m=1}^{\infty}$ no domina a $\left\{r_n^2\right\}_{m=1}^{\infty}$, esto es una contradicción pues $X$ es suave a pares, entonces para $2-$ganchos parciales el resultado se cumple.

Supongamos que se cumple para un par de $n-$ganchos parciales.

Para demostrar que se cumple para un par de $(n+1)-$ganchos parciales, sean $[p_n(1), p_{n+1}(1)]$, $[p_n(2), p_{n+1}(2)]$ un par de $(n+1)-$ganchos parciales, por definición están contenidos en un $n-$gancho parcial y por hipótesis de inducción los vértices coinciden, es decir, $p_{n-1}(1) = p_{n-1}(2)$, podemos hacer una analogía con la idea de la demostración de los $2-$ganchos parciales.

Si tomamos $p_{n-1}(1) = v = p_{n-1}(2)$, $[p_n(1), p_{n+1}(1)] = [p_1(1), p_2(1)]$ y $[p_n(2), p_{n+1}(2)] = [p_1(2), p_2(2)]$, haciendo la analogía podemos contradecir la suavidad a pares, con lo que se concluye la demostración. ■

**Lema 7.10** *Sea $X$ un abanico, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $X$ no contine k-ganchos parciales de diámetro menor que $\epsilon$ para $k = 2, 3, ...$, si para una $k$ fija elejimos una sucesión $\{[p_{k-1}(i), p_k(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ de k-ganchos parciales tal que $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_{k-1}(i) = p_{k-1}(0)$, $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_k(i) = p_k(0)$ entonces $\underset{i\to\infty}{Lim}\ [p_{k-1}(i), p_k(i)] = [p_{k-1}(0), p_k(0)]$ y este último también es un k-gancho parcial.*

**Demostración.** Primero demostraremos que el teorema es cierto cuando $k = 2$, para esto procederemos por contradicción.

Sea $\{[p_1(i), p_2(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de $2-$ganchos parciales tal que $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_1(i) = p_1(0)$, $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_2(i) = p_2(0)$. Si $\underset{i\to\infty}{Lim}\ [p_1(i), p_2(i)]$ no es un $2-$gancho parcial, no se debe satisfacer alguna de las condiciones de la Definición 7.8.

Podemos suponer que $[p_0(0), p_1(0)] \not\supseteq [p_1(0), p_2(0)]$, con $p_0(0) = v$.

Esto significa que $[p_0(0), p_1(0)] \subseteq [p_1(0), p_2(0)]$, ya que los puntos $p_1(0)$, $p_2(0)$ deben pertenecer al arco $[v, e_\alpha]$ para algún $\alpha \in A$, además los arcos $[v, p_1(0)]$, $[p_1(0), p_2(0)]$ tienen al punto $p_1(0)$ en común.

Esto quiere decir que $[p_0(0), p_1(0)] \subseteq \underset{i\to\infty}{Lim}\ [p_1(i), p_2(i)]$, de donde podemos elegir una sucesión $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $v_i \in [p_1(i), p_2(i)]$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tal que $\underset{i\to\infty}{Lim}\ v_i = v$, como $v_i \in [p_1(i), p_2(i)]$, para cada $i \in \mathbb{N}$ fija existe una sucesión de puntos $v(m,i) \in [p(m,1,i), p(m,2,i)]$, podemos renombrar índices para obtener puntos $v(m_i, i) \in [p(m_i,1,i), p(m_i,2,i)]$ donde $m_i$ indica el $i-$ésimo arco del $i-$ésimo $2-$gancho parcial.

Si tomamos $p'_i = p_1(0)$ y $v'_i = v$ para cada $i$, tenemos que los arcos

$$\{[p'_i, v'_i] \cup [v'_i, p(m_i,1,i)] \cup [p(m_i,1,i), v(m_i,i)]\}_{i=1}^{\infty}$$

forman un zig zag entre $v$ y $p_1(0)$, pero esta es una contradicción a la hipótesis.

Ahora, si $\underset{i\to\infty}{Lim\ sup}\,[p_2(i), e_{\alpha_m}(i)] \not\subset [p_1(0), p_2(0)]$.

Dado que $p_2(0) \in \underset{i\to\infty}{Lim\ sup}\,[p_2(i), e_\alpha(i)]$ y $p_2(0) \in [p_1(0), p_2(0)]$ debe ocurrir que $\underset{i\to\infty}{Lim\ sup}\,[p_2(i), e_\alpha(i)] \supseteq [p_1(0), p_2(0)]$, entonces podemos elegir puntos $p_1'(i) \in [p_2(i), e_\alpha(i)]$ para cada $i \in \mathbb{N}$, tal que la sucesión $\{p'(i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge al punto $p_1(0)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo existe una sucesión de puntos $p_1'(m,i) \in [p(m,2,i), e_{\alpha_m}(i)]$, renombrando índices si es necesario tenemos puntos $p_1'(m_i,i) \in [p(m_i,2,i), e_\alpha(m_i,i)]$ y puntos $p_2'(i) \in [v, p(m_i,1,i)]$ tal que la sucesión $\{p_2'(i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge al punto $p_2(0)$ y los arcos

$$\{[p_2'(i), p(m_i,1,i)] \cup [p(m_i,1,i), p(m_i,2,i)] \cup [p(m_i,2,i), p_1'(m_i,i)]\}_{i=1}^{\infty}$$

forman un zig zag y es una contradicción a la hipótesis.

Entonces $\underset{i\to\infty}{Lim}\,[p_1(i), p_2(i)] = [p_1(0), p_2(0)]$ es un $2-$gancho parcial.

Ahora, para $n > 2$, tenemos que cada $n-$gancho parcial se queda contenido en un $2-$gancho parcial, por el Teorema 7.6 podemos elegir una métrica radialmente convexa sobre la cerradura de la sucesión de $2-$ganchos parciales y con una idea semejante a la usada para un $2-$gancho se puede demostrar que el lema es cierto para $k = n$ lo que termina la demostración. ■

**Lema 7.11** *Sea $\epsilon > 0$ y supongamos que $X$ no contiene k-ganchos parciales para $k = 2, 3, \ldots$ de diámetro menor que $\epsilon$, entonces existe un número real positivo $\delta$, llamado el diámetro anidado de $X$, tal que para cada k-gancho parcial, el diámetro de $[p_{k-2}, p_{k-1}]$ excede por lo menos $\delta$ al diámetro de $[p_{k-1}, p_k]$ para $k = 2, 3, \ldots$*

**Demostración.** Si suponemos que no existe tal $\delta$, entonces podemos considerar dos casos, el primero, para alguna $k$ fija tomando una sucesión de $k-$ganchos parciales que no cumplan que el diámetro de $[p_{k-2}, p_{k-1}]$ excede por lo menos $\delta$ al diámetro de $[p_{k-1}, p_k]$ y el segundo, como cada $k-$gancho parcial se queda contenido en un $(k-1)-$gancho parcial que a su vez se queda contenido en un $(k-2)-$gancho parcial y así sucesivamente, considerar una sucesión de $i-$ganchos parciales donde $i < k$.

Caso 1. Supongamos que para algún entero $k > 1$, existe una sucesión $\{[p_{k-1}(i), p_k(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ de $k-$ganchos parciales tal que la diferencia entre los diámetro de $[p_{k-2}(i), p_{k-1}(i)]$ y $[p_{k-1}(i), p_k(i)]$ es menor que $1/i$.

Tomando una subsucesión y renombrando índices podemos suponer que,

$$\underset{i\to\infty}{Lim}\,[p_{k-1}(i), p_k(i)] = [p_{k-1}(0), p_k(0)]$$

donde $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_k(i) = p_k(0)$ y $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_{k-1}(i) = p_{k-1}(0)$ son puntos distintos pues por hipótesis $X$ no contiene $k-$ganchos de diámetro menor que $\epsilon$.

Ahora si $k = 2$ y $\{[p_1(i), p_2(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de $2-$ganchos parciales, por el Lema 7.9, se debe cumplir que $p_1(i) = p_1(0)$ para cada $i$, si la diferencia entre los diámetros de $[p_0(i), p_1(i)]$ y $[p_1(i), p_2(i)]$ es menor que $1/i$ tenemos que $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_2(i) = p_0(0) = v$ más aún se tiene que $[p_0(0), p_1(0)] = [p_1(0), p_2(0)]$.

Dado que para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo, existe una sucesión de arcos $[v, e_{\alpha_m}(i)]$ cada uno de los cuales contiene puntos

$$v = p(m, 0, i) < p(m, 1, i) < p(m, 2, i)$$

que satisfacen la Definición 7.8, renombrando índices si es necesario tenemos que la sucesión de arcos $\{[p(m_i, 1, i), p(m_i, 2, i)]\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $[p_1(0), p_2(0)]$ donde $\{p(m_i, 2, i)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{p(m_i, 1, i)\}_{i=1}^{\infty}$ convergen a $p_2(0)$ y $p_1(0)$ respectivamente de tal forma que los arcos

$$\{[p_1(i), v_i] \cup [v_i, p(m_i, 1, i)] \cup [p(m_i, 1, i), p(m_i, 2, i)]\}_{i=1}^{\infty}$$

forman un zig zag, lo cual por hipótesis no es posible.

Para $k > 2$ podemos tomar la siguiente familia de sucesiones

$$\Big\{ \{\{[p(m, j, i), p(m, j+1, i)]\}_{m=1}^{\infty}\}_{i=1}^{\infty} \Big| \, j = k-3, k-2, k-1 \Big\}$$

donde $\{[p(m, j, i), p(m, j+1, i)]\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $[p_j(i), p_{j+1}(i)]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $j = k-3, k-2, k-1$ fijas.

Podemos suponer después de renombrar índices que

$$\begin{aligned}
\underset{i\to\infty}{Lim}\,[p(m_i, k-3, i), p(m_i, k-2, i)] &= [p_{k-3}(i), p_{k-2}(i)] \\
\underset{i\to\infty}{Lim}\,[p(m_i, k-2, i), p(m_i, k-1, i)] &= [p_{k-2}(i), p_{k-1}(i)] \\
\underset{i\to\infty}{Lim}\,[p(m_i, k-1, i), p(m_i, k, i)] &= [p_{k-1}(i), p_k(i)]
\end{aligned}$$

donde $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_{k-3}(i) = p_{k-3}(0)$ y $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_{k-2}(i) = p_{k-2}(0)$.

Como el diámetro entre $[p_{k-2}(i), p_{k-1}(i)]$ y $[p_{k-1}(i), p_k(i)]$ es menor que $1/i$ podemos afirmar que $p_{k-2}(0) = p_k(0)$. Entonces usando el Lema 7.6, podemos tomar una métrica radialmente convexa sobre

$$Cl\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}[p(m_i, k-3, i), p(m_i, k-2, i)]\right)$$

para buscar puntos $z_i \in [p(m_i, k-3, i), p(m_i, k-2, i)]$ tal que $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p_{k-1}(0)$ y así los arcos

$$\begin{aligned}
\{[z_i, p(m_i, k-2, i)] \cup [p(m_i, k-2, i), p(m_i, k-2, i)] \\
\cup [p(m_i, k-2, i), p(m_i, k, i)]\}_{i=1}^{\infty}
\end{aligned}$$

forman un zig zag lo que nos lleva a una contradicción.

Caso 2. Existe una sucesión $\{[p_{i-1}(i), p_i(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ de $i-$ganchos parciales tal que la diferencia entre $[p_{i-2}(i), p_{i-1}(i)]$ y $[p_{i-1}(i), p_i(i)]$ es menor que $1/i$.

De manera análoga al Caso 1, podemos obtener sucesiones

$$\left\{ \{[p(m_i, j-1, i), p(m_i, j, i)]\}_{i=j}^{\infty} \right\}_{j=1}^{\infty}$$

tales que para cada $j$, la sucesión

$$\{[p(m_i, j-1, i), p(m_i, j, i)]\}_{i=j}^{\infty}$$

converge a $[p_j(0), p_{j+1}(0)]$ donde $\underset{i\to\infty}{Lim}\ p_{j-1}(i) = p_j(0)$, notemos que para cada $i \geq j$ cada $i-$gancho parcial está contenido en un $j-$gancho parcial de donde obtenemos los puntos $p_{j-1}(i)$.

Se tiene que

$$p_0(0) < p_2(0) < \cdots < p_{2n}(0) < \cdots < p_{2n-1}(0) < \cdots < p_3(0) < p_1(0)$$

de donde $Lim\ p_{2n}(0) = r$, $Lim\ p_{2n-1}(0) = s$, además $r, s$ distan por lo menos $\epsilon$, sin pérdida de generalidad se sigue que las sucesiones

$$\{p(m_i, j-3, i)\}, \{p(m_i, j-2, i)\}, \{p(m_i, j-1, i)\}, \{p(m_i, j, i)]\}$$

convergen a $r, s, r, s$ respectivamente y los arcos formados por las 4 sucesiones forman un zig zag, esta contradicción termina la demostración del teorema. ■

**Corolario 7.12** *Sea $\epsilon > 0$. Si el abanico $X$ no contiene k-ganchos parciales para $k = 1, 2, ...$ de diámetro menor que $\epsilon$, entonces existe un entero $n$ tal que para todo $k > n$, $X$ no contiene $k-$ganchos parciales*

**Demostración.** Sea $\delta$ el diámetro anidado de $X$ y supongamos que no existe tal $n$.

Dado que $X$ es compacto podemos suponer que $diam\ X = 1$, elijamos $m-1$ un entero mayor que $1/\delta$, si $[p_{m-1}, p_m]$ es un $m-$gancho parcial contenido en $X$, éste se queda contenido propiamente en un $(m-1)-$gancho parcial, que está contenido de un $(m-2)-$gancho parcial y sucesivamente en un $1-$gancho parcial, es decir,

$$\begin{gathered} diam\ [p_0, p_1] > \delta + diam\ [p_1, p_2] \\ diam\ [p_0, p_1] > 2\delta + diam\ [p_2, p_3] \\ \vdots \\ diam\ [p_0, p_1] > m\delta + diam\ [p_{m-1}, p_m] \end{gathered}$$

pero tenemos que

$$1 = diam\ X \geq diam\ [p_0, p_1] > 1 + diam\ [p_{m-1}, p_m]$$

lo cual no es posible, entonces basta con tomar $n < 1/\delta$. ■

**Definición 7.13** *Si $X$ es un abanico que es suave a pares, no contiene $Q-$puntos, no contiene zig zag y además satisface las condiciones del Corolario* 7.12 *diremos que es un $(\epsilon, n)-$*abanico.

**Lema 7.14** *Sea $X$ un $(\epsilon, n)-$abanico, tomemos $k$ un entero positivo menor o igual que $n$ y sea $p_{k-1}$ el vértice de un $k-$gancho parcial, afirmamos que la unión de todos los $k-$ganchos parciales que contienen al punto $p_{k-1}$ forman un conjunto cerrado y también es un $k-$gancho parcial.*

**Demostración.** Tenemos que cada $k-$gancho parcial contiene al punto $p_{k-1}$, entonces por el Lema 7.9, cada $k-$gancho parcial tiene al punto $p_{k-1}$ como su vértice.

Si $k$ es par, el fondo de cada $k-$gancho parcial debe pertenecer a $[v, p_{k-1}] \setminus \{v, p_{k-1}\}$ (respectivamente a $[p_{k-1}, e_\alpha] \setminus \{p_{k-1}, e_\alpha\}$ si $k$ es impar) y entonces existe un punto $q$ que es el ínfimo (respectivamente el supremo) de los puntos $p_k$.

Sea $\{p(k,i)\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos de fondo dada por los $k-$ganchos tal que $\{p(k,i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $q$, como $p(k-1,i) = p_{k-1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{p(k-1,i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p_{k-1}$ por lo que la sucesión de arcos $\{[p(k-1,i), p(k,i)]\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $[p_{k-1}, q]$.

Por el Lema 7.10, el conjunto $[p_{k-1}, q]$ es también un $k-$gancho parcial, es decir, $[p_{k-1}, q]$ se queda contenido en la unión de todos los $k-$ganchos parciales que contienen a $p_{k-1}$ como su vértice y además la unión está contenida en $[p_{k-1}, q]$, de donde la unión es un conjunto cerrado y también un $k-$gancho parcial. ■

**Definición 7.15** *Un conjunto de la forma $[p_{k-1}, q]$, donde $q$ es el punto definido en el lema anterior, es llamado un $k-$*gancho.

*Se quita el adjetivo "parcial" dado que un $k-$gancho es completo, en el sentido de que no pertenece propiamente a otro $k-$gancho*

**Observación.** Un $k-$gancho cumple todos los Lemas y el Corolario demostrados anteriormente, además, por el Lema 7.9, se tiene que para cada par de $k-$ganchos, estos son idénticos o no se intersectan.

Esta observación nos lleva al siguiente lema.

**Lema 7.16** *Sea $X$ un $(\epsilon, n)-$abanico, existe un número real positivo $\lambda$ tal que para cada $k \leq n$ y cada $\alpha \in A$, para cada par de $k-$ganchos contenidos en el arco $[v, e_\alpha]$ se tiene que sus nubes de radio $\lambda$ son disjuntas.*

**Demostración.** Supongamos que el lema no es cierto, es decir, para algún par de $k-$ganchos y $\lambda > 0$ se tiene que

$$N(\lambda, [p_{k-1}, q]) \cap N\left(\lambda, [p'_{k-1}, q']\right) \neq \emptyset.$$

Como esto pasa para cada $\lambda$ y cada par de $k-$ganchos, podemos elegir $\left\{[p'_{k-1}(i), p'_k(i)]\right\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de $k-$ganchos cada uno de los cuales son disjuntos de $[p_{k-1}, q]$, con la propiedad de que

$$d(p_{k-1}, p'_k(i)) < 1/i \tag{19}$$

$$(respectivamente\ d(p_k, p'_{k-1}(i)) < 1/i) \tag{20}$$

dependiendo si $k$ es par o impar. Por la compacidad de $X$ podemos suponer que $\{p'_k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p'_k(0)$ y que $\left\{p'_{k-1}(i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $p'_{k-1}(0)$. Así, la sucesión de $k-$ganchos $\left\{[p'_{k-1}(i), p'_k(i)]\right\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $[p'_{k-1}(0), p'_k(0)]$ y por el Lema 7.10 éste es un $k-$gancho.

Se sigue de (19) que $p'_k(0) = p_{k-1}$ (respectivamente de (20) se tiene que $p'_{k-1}(0) = p_k$) es decir los $k-$ganchos se intersectan, lo que contradice el Lema 7.9, demostrando así la existencia del numero $\lambda$. ■

**Lema 7.17** *Sea $X$ un $(\epsilon, n)-$abanico, existe un numero real $\tau$ tal que para cada $n-$gancho, se tiene que para cada $k < n-1$ y para cada $k-$gancho parcial, ni el vértice ni el fondo del $k-$gancho pueden pertenecer a la nube de radio $\tau$ del $n-$gancho.*

**Demostración.** Sea $[p_{n-1}, p_n]$ un $n-$gancho fijo con vértice $p_{n-1}$ y fondo $p_n$.

Supongamos que no existe $\tau$ para este caso en particular, entonces (para alguna $k$ fija, con $k < n-1$) existe una sucesión $\{[q_{k-1}(i), q_k(i)]\}_{i=1}^{\infty}$ de $k-$ganchos parciales, que por el Lema 7.10, convergen a algún $k-$gancho, digamos $[q_{k-1}(0), q_k(0)]$.

Notemos que $q_{k-1}(0)$ no pertenece a $[p_{n-1}, p_n]$ dado que por definición, $[p_{n-1}, p_n]$ está contenido en algún $k-$gancho parcial cuyo vértice se encuentra fuera de $[p_{n-1}, p_n]$ y además $[q_{k-1}(0), q_k(0)]$ intersecta este $k-$gancho, por el Lema 7.9, sus vértices deben de coincidir, es decir $q_{k-1}(0)$ se encuentra fuera de $[p_{n-1}, p_n]$.

Ahora si $q_k(0)$ pertenece a $[p_{n-1}, p_n]$, tenemos que $[p_{n-1}, p_n]$ está contenido en un $(k+1)-$gancho parcial $[p_k, p_{k+1}]$, podemos tomar una sucesión de arcos $\{[p(m,k), p(m,k+1)]\}_{m=1}^{\infty}$ que converge a $[p_k, p_{k+1}]$.

Como en la demostración del Lema 7.9, para cada $m$ podemos encontrar una sucesión de puntos $\{q_k(m)\}_{m=1}^{\infty}$ que pertenecen a los arcos $[p(m,k), p(m,k+1)]$, la cual converge a $q_k(0)$ y por la definición de $k-$gancho parcial, existe una sucesión $\{q(m,k,0)\}_{m=1}^{\infty}$ de puntos que también converge a $q_k(0)$, de tal manera que ninguna de las sucesiónes $\{q_k(m)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{q(m,k,0)\}_{m=1}^{\infty}$ domina a la otra, lo que contradice la suavidad a pares del abanico $X$.

Entonces podemos encontrar un número real positivo $\tau$, tal que para cada $k < n-1$ el vértice o fondo de cada $k-$gancho parcial no pertenece a la $\tau-$nube de $[p_{n-1}, p_n]$.

■

**Lema 7.18** *Sea $X$ un $(\epsilon, n)-$abanico con $n > 1$. Existe una función continua $F : X \times I \to X$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $F(x,0) = x$ y tal que $F(X, \{1\})$ es un $(\epsilon, n-1)-$abanico.*

**Demostración.** Recordemos que cada punto $x \in X$, en coordenadas polares, está definido de forma única como $x = (r, \theta)$

Sea $X$ un $(\epsilon, n)-$abanico, es decir, existe $n$ tal que $X$ no contiene $k-$ganchos de diámetro menor que $\epsilon$ para $k > n$, vamos a encontrar una función continua que deforme los arcos que se tienen.

Podemos suponer que $[p_{n-1}, p_n]$ es un $n-$gancho, por definición está contenido en un $(n-1)-$gancho, digamos$[p_{n-2}, p_{n-1}]$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p_{n-2} < p_n < p_{n-1}$, queremos deformar de manera continua el arco $[p_{n-2}, p_n]$ en el arco $[p_n, p_{n-1}]$ en algun tiempo $t$, notemos que la función $g(t) = p_n(1-t) + p_{n-1}t$ es tal que $g(0) = p_n$, $g(1) = p_{n-1}$ y $g(t_0) \in [p_n, p_{n-1}]$ para cada $t_0$ entre 0 y 1.

De tal manera que para lograr nuestro objetivo tenemos que calcular la ecuación de la recta cuyos puntos extremos son $(p_{n-2}, p_{n-2})$ y $(p_n, p_n(1-t) + p_{n-1}t)$, así como la ecuación de la recta cuyos puntos extremos son $(p_n, p_n(1-t) + p_{n-1}t)$

y $(p_{n-1}, p_{n-1})$, donde $t \in [0,1]$ para lograr que en este tiempo, el arco $[p_{n-2}, p_n]$ se deforme en el arco $[p_n, p_{n-1}]$, mientras este último se deforma al punto $p_{n-1}$.

Tomemos los puntos $(p_{n-2}, p_{n-2})$ y $(p_n, p_n(1-t) + p_{n-1}t)$, tenemos que la pendiente está dada por

$$m = \frac{p_{n-2} - (p_n(1-t) + p_{n-1}t)}{p_{n-2} - p_n}$$

calculando la ecuación de la recta tenemos que

$$y = \left[\frac{p_{n-2} - (p_n(1-t) + p_{n-1}t)}{p_{n-2} - p_n}\right](r - p_{n-2}) + p_{n-2}.$$

Ahora si tomamos los puntos $(p_n, p_n(1-t) + p_{n-1}t)$ y $(p_{n-1}, p_{n-1})$, la pendiente es

$$m = \frac{(p_n(1-t) + p_{n-1}t) - p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}$$

y tenemos la ecuación

$$y = \left[\frac{(p_n(1-t) + p_{n-1}t) - p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}\right](r - p_{n-1}) + p_{n-1}.$$

Tomemos

$$F(r,t) = \begin{cases} \left[\frac{p_{n-2} - (p_n(1-t) + p_{n-1}t)}{p_{n-2} - p_n}\right](r - p_{n-2}) + p_{n-2}, & r \in [p_{n-2}, p_n], 0 \leq t \leq 1 \\ \\ \left[\frac{(p_n(1-t) + p_{n-1}t) - p_{n-1}}{p_n - p_{n-1}}\right](r - p_{n-1}) + p_{n-1}, & r \in [p_n, p_{n-1}], 0 \leq t \leq 1 \\ \\ r & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notemos que $F(x,0) = x$ para toda $x \in X$, además, para toda $r \in [p_n, p_{n-1}]$ se tiene que $F([r, p_{n-1}], 1) = p_{n-1}$.

Si el abanico $X$ contiene un $n-$gancho, por el Lema 7.17, se tiene que para cada $k-$gancho parcial con $k < n$, ni el vértice ni el fondo del $k-$gancho parcial pertenece a la vecindad del $n-$gancho.

Entonces $F$ es una función continua tal que lleva el arco $[p_n, p_{n-1}]$ al punto $p_{n-1}$ sin tocar, ni el vértice ni el fondo de algún $k-$gancho parcial para $k < n$. Por lo tanto $F(X, \{1\})$ es un $(\epsilon, n-1)-$abanico.

Ahora si $X$ tiene más de un $n-$gancho podemos utilizar el Lema 7.16 y aplicar la función $F$ en dos vecindades disjuntas, de tal manera que transforma los arcos $[p_n(i), p_{n-1}(i)]$ en el punto $p_{n-1}(i)$.

Tenemos entonces que $F(X, \{1\})$ es un $(\epsilon, n-1)-$abanico. ■

**Lema 7.19** *Sea $X$ un abanico. Existe una función continua $F : X \times I \to X$ tal que para cada $x \in X$ se tiene que $F(x,0) = x$ y tal que $F(X, \{1\})$ no contiene $k-$ganchos excepto para $k = 1$*

**Demostración.** Por el Corolario 7.12, podemos suponer que para $k = 1, 2, ...$ el abanico $X$ no contiene $k-$ganchos de diámetro menor que $\frac{1}{k}$.

Para algún $n > 1$ podemos suponer que tenemos una función $F$ tal que la imagen $F(\frac{1}{n}, X)$ no contiene $k-$ganchos parciales para $k \geq n$, esto quiere decir que $F(\frac{1}{n}, X)$ es un $(\frac{1}{n}, n)-$abanico.

Podemos aplicar el Lema 7.18, para obtener un $(\frac{1}{n-1}, n-1)-$abanico durante el tiempo $t = 1/n$ y $t = 1/(n-1)$. ■

**Teorema 7.20** *Sea $X$ un abanico que es suave a pares, no contiene $Q-$puntos y no contiene zig zag entonces $X$ es contraíble*

**Demostración.** Por el Lema 7.19, podemos suponer que para $n > 1$, $X$ no contiene $n-$ganchos. Tomemos $\leq_v$ el orden de corte de punto débil con respecto a $v$ donde $v$ es el vértice del abanico.

Afirmamos que $X$ admite una métrica radialmente convexa, para esto, recordando la demostración del Lema 7.6, es suficiente probar que si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos que converge a un punto $p_0 \in X$, entonces $Lim\ sup\ \mathbb{L}(p_n) \subset \mathbb{L}(p_0)$, donde $\mathbb{L}(b) = \{p \in X \ |p \leq_v b\}$.

Tomemos $p_n \in [v, e_{\alpha_n}]$ para $n \in \mathbb{N}$, sea

$$z_0 = máx\ \{Lim\ sup\ [v, e_{\alpha_n}]\}$$

podemos suponer que existen puntos $z_n \in [v, e_{\alpha_n}]$ tales que la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $z_0$.

Si $Lim\ sup\ [z_n, e_{\alpha_n}]$ contiene un punto diferente de $z_0$, entonces podemos tomar un punto $y_0 <_v z_0$, tal que $[y_0, z_0]$ es un $2-$gancho, lo cual es una contradicción a la suposición inicial.

Por otro lado, si $Lim\ sup\ [z_n, e_{\alpha_n}] = z_0$, entonces a lo más para toda $n$, se tiene que $p_n \in [v, z_n]$.

Dado que $\{[v, z_n]\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $[v, z_0]$, el Lema 7.6, muestra que $Lim\ sup\ [v, p_n]$ está contenido en $[v, p_0]$ que es lo que se quería y demuestra que $X$ es contraíble, ya que si movemos el punto $p_0$ al punto $v$, se tiene que $Lim\ sup\ [v, p_n] \subset [v, p_0] = v$ ■

Finalmente tenemos el resultado principal de esta esta sección dado por primera vez en [9] y posteriormente en [17] se adicionaron condiciones adicionales equivalentes a las que a continuación se presentan.

**Teorema 7.21** *Sea $X$ un abanico, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$X$ es contraíble.*
2. *$X$ no contiene $Q-$puntos, $X$ no es de tipo N, y $X$ es suave a pares.*
3. *$X$ no contiene $Q-$puntos, $X$ no es de tipo zig zag, y $X$ es suave a pares .*

**Demostración.**

1) implica 2). Sea $X$ un abanico contraíble, entonces $X$ el localmente conexo en el vértice, por el Corolario 5.25 de la monografía "Continuos de tipo $N$ (un

primer estudio)", tenemos que $X$ no tiene $Q - puntos$, por el Teorema 3.13, $X$ no es de tipo N y del Teorema 7.7, $X$ que es suave a pares.

2)implica 3) Supongamos que $X$ es de tipo zig zag, por el Teorema 4.3 de la monografía "Continuos de tipo $N$ (un primer estudio)" tenemos que $X$ es de tipo N, lo cual es una contradicción.

3) implica 1) Se sigue del Teorema 7.20 ■

El siguiente abanico es suave a pares, no es de tipo N y no contiene Q-puntos, así por el teorema anterior es contraible.

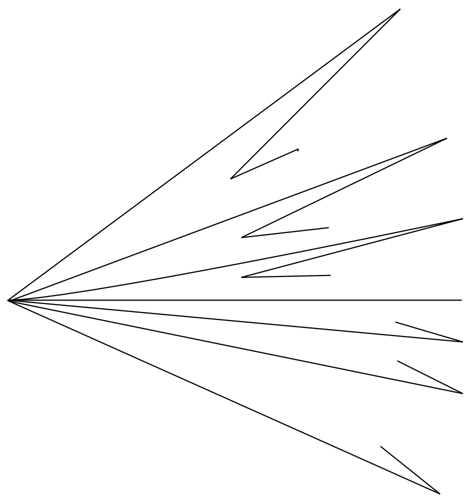


Figure 7: Abanico contraible

# 8 conclusiones

Como se puede observar en el desarrollo de esta monografía, los continuos de tipo N son una parte fundamental para el estudio de la contractibilidad, la existencia de retracciones de $C(X)$ sobre $X$, funciones promedio entre otras propiedades dentro de la Teoría de Continuos, pues no solo la existencia de este tipo de continuos (en el mismo espacio) no permite que sucedan cada uno de los conceptos anteriores sino que también interviene de manera indirecta para que otros espacios no cumplan también con lo anterior. Es de notar que en este estudio, junto con la monografía "Continuos de tipo N (un primer estudio)" se reune más de un 60 por ciento de lo que se sabe de esta propiedad.

# References

[1] F. Capulín, *Distintas funciones entres continuos y sus hiperespacios*, Tesis Doctoral. UNAM. 2006

[2] F. Capulín and W. J. Charatonik, *Retractions from C(X) onto X and continua of type N*, Houston journal of mathematics, ISSN 0362-1588, Vol. 33, N 1, 2007, págs.261-272

[3] F. Capulín, Alejandro Illanes, Fernando Orozco-Zitli, Pavel Pyrih and Isabel Puga-Espinosa, *Q-Points in Fans* (Por aparecer)

[4] J. Carrut, *A note on partially ordered compacta*, Pacific. J. Math. 24 (1968) págs. 229-231.

[5] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik and S. Miklos, *Confluent mappings of fans* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 301 (1990),págs. 1-86

[6] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, K. Omiljanowski And J. R. Prajs, *Hyperspace retractions for curves*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 370 (1997), págs.134.

[7] J. J. Charatonik and A. Illanes, *Bend sets, N-sequences and mappings*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2004 (2004), Issue 55, págs. 2927-2936.

[8] S. T. Czuba, *A new class of non-contractible continua*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI (Prague,1986), Proceedings Sixth Prague Topological Symposium 1986; Z. Frolik (ed.), R & E Res. Exp. Math., 16, Heldermann, Berlin, 1988, págs. 121-123.

[9] B. G. Graham, *On contractible fans*, Fund. Math. 111 (1981), págs.77-93.

[10] A. Illanes, *Modelos de hiperespacios*,Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios, Aportaciones matemáticas, SMM, 2006, págs. 153-194.

[11] K. Kuratowski, *Topology, Vol 2*, Acad. Press and PWN,1968.

[12] T. J. Lee, *Every contractible fan has the bend intersection property*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 36(1998), págs. 314-417.

[13] T. J. Lee, *Bend intersection property and dendroids of type N*, Period. Math. Hungar. 23 (1991), págs. 121-127.

[14] T. Maćkowiak, *continuous selections for C(X)*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 26 (1978), págs. 547-551

[15] S. B. Nadler Jr., *Continuum theory*, M. Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[16] L. G. Oversteegen, *Non-contractibility of continua*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 26. No. 9,10(1978), págs.837-840.

[17] L. G. Oversteegen, *Internal characterizations of contractibility for fans*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astrom. Phys. Vol 27. No. 5(1979), págs.391-395.

[18] L. G. Oversteegen, *Every contractible fan is locally connected at vertex*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 260. No 2 (1980), págs. 379-402.