



**UAEM** | Universidad Autónoma  
del Estado de México

**SD**  
Secretaría de Docencia



Universidad Autónoma del Estado de México • Secretaría de Docencia • Dirección de Estudios Profesionales

# **Universidad Autónoma del Estado de México**

## **Licenciatura en Matemáticas 2003**

**Programa de Estudios:**

**Teoría de la Medida**



**I. Datos de identificación**

Licenciatura **Matemáticas 2003**

Unidad de aprendizaje **Teoría de la Medida** Clave **L31748**

Carga académica	4	2	6	10
	Horas teóricas	Horas prácticas	Total de horas	Créditos

Período escolar en que se ubica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Seriación	Teoría de la Convergencia Análisis Matemático	Análisis Funcional Probabilidad Avanzada Procesos Estocásticos Temas Avanzados de Análisis Matemático
	UA Antecedente	UA Consecuente

**Tipo de Unidad de Aprendizaje**

Curso  Curso taller

Seminario  Taller

Laboratorio  Práctica profesional

Otro tipo (especificar)

**Modalidad educativa**

Escolarizada. Sistema rígido  No escolarizada. Sistema virtual

Escolarizada. Sistema flexible  No escolarizada. Sistema a distancia

No escolarizada. Sistema abierto  Mixta (especificar)

**Formación común**

Biología 2003  Biotecnología 2010

Física 2003

**Formación equivalente**

	Unidad de Aprendizaje
Biología 2003	<input type="text"/>
Biotecnología 2010	<input type="text"/>
Física 2003	<input type="text"/>



## II. Presentación

La rama de la matemática originada con la disertación doctoral del matemático francés Henri Lebesgue, publicada en 1902 bajo el título: Intégrable, Longuer, Aire, es ahora conocida bajo distintos nombres, uno de ellos es: Teoría de la Medida.

Históricamente la Teoría de la Medida y la Teoría de la Integración de Lebesgue evolucionaron como un esfuerzo para remover los inconvenientes de la integral de Riemann, esfuerzos hechos a partir de 1854 por matemáticos destacados como: Camilla Jordan, Emile Borel, Rene Baire, J. Radon, por mencionar algunos, y cuya culminación es el trabajo antes mencionado de Henri Lebesgue, a partir de ahí surgen distintos enfoques como el de Riesz y C. Carathéodory los cuales exponen las ideas en una manera unificada y clara para los matemáticos. Debido a su importancia fundamental y a sus aplicaciones en distintas ramas de la matemática y física en esta unidad de aprendizaje se presentan las ideas de la Teoría de la Medida de un modo unificado y en un lenguaje claro para el discente.

## III. Ubicación de la unidad de aprendizaje en el mapa curricular

Núcleo de formación: **Sustantivo**

Área Curricular: **Análisis Matemático**

Carácter de la UA: **Obligatoria**

## IV. Objetivos de la formación profesional.

### Objetivos del programa educativo:

Formar matemáticos competentes, capaces de resolver problemas de matemática pura y aplicada, participar en proyectos de investigación en su área, así como auxiliar a otras áreas del conocimiento y de la actividad social, tales como otras científicas y tecnológicas; formar también profesionistas con espíritu crítico y actitud de servicio.

### Objetivos del núcleo de formación:

### Objetivos del área curricular o disciplinaria:



Dominar con suficiente rigor las herramientas del cálculo diferencial e integral en una y varias variables reales y complejas, y ser capaz de aplicarlas en diversas áreas del conocimiento.

## V. Objetivos de la unidad de aprendizaje.

Entender el concepto de conjunto y función medible. Manejar y aplicar con suficiente rigor la integral de Lebesgue. Leer artículos especializados en el área.

## VI. Contenidos de la unidad de aprendizaje y su organización

### Unidad 1. Funciones medibles

**Objetivo:** Se darán ejemplos de distintas familias de subconjuntos de un conjunto dado no vacío y de funciones medibles, ya que estas son la herramienta abstracta básica para definir la integral. Se definen los números reales extendidos y su aritmética

- 1.1 Anillo
- 1.2 Álgebra
- 1.3  $\sigma$ -anillo
- 1.4  $\sigma$ -álgebra
- 1.5 Semiálgebra
- 1.6 Función medible relativa a dos  $\sigma$ -álgebras
- 1.7 Generación de  $\sigma$ -álgebras y otras estructuras
- 1.8  $\sigma$ -álgebra de Borel, conjuntos de Borel
- 1.9 Espacio de funciones medibles con valores reales y reales extendidos

### Unidad 2. Medida sobre una $\sigma$ -álgebra

**Objetivo:** Se introduce el importante concepto de medida como una abstracción que identifica la esencia de distintas ideas propuestas tanto por físicos como matemáticos, se define un espacio de medida, y se demuestran las propiedades que tiene la medida. Se introduce el concepto de medida cero y el de que una proposición sea válida casi en todo punto ya que es necesario como el lenguaje para describir las propiedades de la integral entre otras

- 2.1 Propiedades finito aditivas y  $\sigma$ -aditivas de las medidas
- 2.2 Propiedades de continuidad desde arriba y desde abajo de la medida
- 2.3 Conjuntos de medida cero



## 2.4 Completación de una $\sigma$ -álgebra y completación de una medida

### Unidad 3. Integral de Lebesgue para funciones medibles

**Objetivo:** Se introduce la integral para las distintas funciones con respecto a una medida y se establecen sus propiedades, se enuncia y demuestra el Teorema de la convergencia monótona ya que este provee la herramienta principal para demostrar las propiedades fundamentales de convergencia que la integral de Lebesgue posee. Se enuncia y demuestra el Lema de Fatou, con el fin de manejar sucesiones de funciones que no son monótonas.

- 3.1 Funciones simples con valores reales
- 3.2 Definición de la integral
- 3.3 Propiedades de la integral
- 3.4 Teorema de la convergencia monótona
- 3.5 Lema de Fatou y sus Corolarios

### Unidad 4. Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

**Objetivo:** Se define la parte positiva y negativa de una función medible con valores reales con el fin de definir su integral, enunciar y demostrar el teorema de la integrabilidad absoluta ya que este provee una desigualdad básica que satisface la integral de Lebesgue, enunciar y demostrar las propiedades de la integral para funciones medibles con valores reales. Se establece el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ya que este es el Teorema más importante de convergencia para funciones integrables, el cual tiene amplias aplicaciones, por ejemplo donde el integrando depende de un parámetro real.

- 4.1 Parte positiva y negativa de una función
- 4.2 La clase de funciones integrables con valores reales finitos, así como la estructura que posee
- 4.3 La propiedad de la integral de ser numerable aditiva sobre sucesiones disjuntas
- 4.4 El Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y sus Corolarios

### Unidad 5. Espacios $L_p$

**Objetivo:** Definir el concepto de espacio normado, definir los espacios de Lebesgue  $L_p$ , enunciar su estructura de Banach bajo la norma adecuada, para lo cual se demostrarán las desigualdades necesarias de Hölder, de Cauchy-Schwarz, de Minkowski



- 5.1 Espacio vectorial normado
- 5.2 Seminorma
- 5.3 Equivalencia con respecto a una medida
- 5.4 Espacios de Lebesgue y la norma definida en éstos
- 5.5 Índices conjugados que son necesarios en la desigualdad de Hölder
- 5.6 Desigualdades de Cauchy- Schwarz y de Minkowski.
- 5.7 Sucesiones de funciones que son de Cauchy
- 5.8 Espacios de Banach

## Unidad 6. Tipos de Convergencia

**Objetivo:** Introducir para sucesiones de funciones de valores reales definidas en espacios de medida fijos los distintos tipos de convergencia que estas pueden tener, analizar las relaciones que estos tipos de convergencia poseen entre sí y enunciar los notables Teoremas de Egoroff y Vitali

- 6.1 Convergencia uniforme
- 6.2 Convergencia puntual
- 6.3 Convergencia casi en todo punto
- 6.4 Convergencia en medida
- 6.5 Convergencia casi uniforme
- 6.6 Teoremas de Egoroff y Vitali

## Unidad 7. Generación y extensión de Medidas

**Objetivo:** Con el objetivo de construir la medida de Lebesgue en la recta real se deberán estudiar los siguientes conceptos: Longitud de un intervalo, medida sobre un álgebra, medida exterior, condición de Carathéodory, teorema de extensión de Hahn- Carathéodory

- 7.1 Longitud de un intervalo y sus propiedades
- 7.2 Medida sobre un álgebra
- 7.3 Medida exterior y sus propiedades
- 7.4 Condición de Carathéodory
- 7.5 Teorema de extensión de Carathéodory
- 7.6 Teorema de unicidad de la extensión de Hahn



## VII. Sistema de evaluación

Exposiciones orales 15 %

Tareas Escritas 15 %

Exámenes 60 %

Otras actividades 10 %

## VIII. Acervo bibliográfico

Adams, M and Guillemin, V, Measure Theory and Probability. Boston, MA: Birkhauser.1996.

Apostol, Tom. Análisis Matemático. Editorial Reverté. Segunda Edición. España, 2001.

Asplund E. Y L.Bungart. A first course in integration. Holt, Rinehart and Winston Inc., Nueva York, 1966.

Bartle, R.G. The elements of integration and Lebesgue measure. J. Wiley & Sons. Nueva York, 1995.

Cohen, Donald, L. Measure Theory, Boston: Birkhauser, 1980.

Dood, J. L., Measure Theory, New York Springer-Verlag, 1994.

Evans, L .C. and. Gariepy, R. F. Measure Theory and Fine Properties of Funtions, Boca Raton, FL: CRC Press, USA, 1992.

Galaz Fontes, F. Medida e Integral de Lebesgue en RN. Oxford University Press. México, 2000.

Gelbaum, B. R. Y J. M. H. Olmsted. Counterexamples in Analysis. Dover Publications, Inc. Mineola, Nueva York, 2003.

Gordon, Rusell A. The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Hestock. Providence, RI: Amer. Math. Soc., USA, 1994.:

Halmos, P.R. Measure theory, Springer-Verlag. Nueva York, 1974.

Hawkins, Thomas. Lebesgue`s Theory of Integration: its Origins and Development, 2nd ed. New York: Chelsea. 1975.

Henstock, R. The General Theory of Integration. Oxford, England: Clarendon. Press, 1991.

Kestelman, H. Modern Theory of Integration, 2nd rev. ed. New York: Dover, 1960.

Kingman, J. F. C. and Taylor S. J. An Introduction to Measure and Probability, Cambridge, England: Cambridge University Press,1996.



- Kolmogorov A. y S. Fomin. Introductory real analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1970.
- Lang, S. Real analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1969.
- Murray y Spiegel. Varias Variables, Serie Schaum. McGraw-Hill. Colombia, 1976.
- Rao, M. M. Measure Theory and Integration, New York: Wiley, 1987.
- Royden, H. Real analysis. Macmillan Publishing Co. Nueva York, 1968.
- Rudin, W., Principios de Análisis Matemático. Mc Graw Hill, 1980.
- Rudin, W. Real and complex analysis. McGraw-Hill. Nueva Delhi, 1978.
- Strook, D. W. A Concise Introduction to the Theory of Integration, 2nd ed. Boston, MA: Birkhauser. 1994.
- Vestrup Eric M. The Theory of Measures and Integration. Wiley Inter-Science, 2003.
- Wheeden, R. L, and Zygmund, A., Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis:New York : Decker. 1975.