



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

UN MODELO PARA OPTIMIZAR LA
ASIGNACIÓN DE SERVICIOS PÚBLICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

PRESENTA:

M. en C. I. Edgar Jardón Torres



DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Marcelo Romero Huertas

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. José Raymundo Marcial Romero

Toluca, Estado de México, Octubre 2024

Publicaciones

Parte de la presente tesis ha sido publicada previamente en:

1. Jardón, E., Romero, M., & Marcial-Romero, J. R. (2024, Junio). Multiobjective Assignment of Citizens to INE Service Modules Using NSGA-II: An Efficient Optimization Approach. En Mexican Conference on Pattern Recognition (pp. 73-83). Springer Nature Proceedings. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18082-8_20.
2. Jardón, E., Romero, M., & Marcial-Romero, J. R. (2022, Noviembre). Multiobjective Model for Resource Allocation Optimization: A Case Study. En Telematics and Computing: 11th International Congress, WITCOM 2022 (pp. 322-334). Springer Nature Proceedings. https://doi.org/10.1007/978-3-031-62836-8_8.
3. Jardón, E., Romero, M., & Marcial-Romero, J. R. Analysis of Models for the Assignment of Voters of the Mexican National Institute. En revisión y posible publicación en la revista *Papeles de población*.
4. Jardón, E., Romero, M., & Marcial-Romero, J. R. Gestión Inteligente: Resolviendo Desafíos Sociales con NSGA-II y Lógica Difusa en el Valle de Toluca, En revisión y posible publicación en la revista *Computación y sistemas*.

Resumen

Esta tesis propone un modelo multiobjetivo que combina el algoritmo Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) con lógica difusa para optimizar la asignación de servicios públicos administrativos, con el objetivo de mejorar tanto la eficiencia operativa como la equidad en la distribución de recursos. En este modelo de asignación, los *orígenes* son los ciudadanos, denominados *clientes*, que deben ser asignados a un *destino*, denominado *instalaciones*, que proveen servicios administrativos a estos clientes. El modelo considera cuatro objetivos clave: minimizar la distancia entre los clientes y las instalaciones, maximizar la cobertura de las instalaciones, reducir los tiempos de espera y disminuir la cantidad de personal requerido. La incorporación de lógica difusa permite al algoritmo manejar de manera flexible las variables imprecisas y los criterios conflictivos, facilitando el modelado de la incertidumbre y la preferencia subjetiva.

La metodología del modelo se estructura en seis etapas (1. análisis del problema, 2. selección de variables clave, 3. generación de posibles soluciones, 4. creación de un conjunto de soluciones potenciales, 5. elección de la solución preferida y 6. presentación de los resultados finales). El uso de la lógica difusa no solo mejora la flexibilidad y adaptabilidad del modelo, sino que también contribuye a reducir el tiempo de convergencia del algoritmo NSGA-II. Esto se logra al facilitar la selección de soluciones potenciales en cada ciclo de ejecución, permitiendo que el algoritmo avance más rápidamente hacia mejores soluciones.

El modelo se aplica a tres escenarios específicos en el Valle de Toluca: la asignación de jóvenes votantes (de entre 17 y 18 años) a módulos del Instituto Nacional Electoral para tramitar su primera credencial de elector, la asignación de *Servidores del pueblo* encargados del programa social *Mujeres con bienestar* a distintos municipios, y la asignación de adultos mayores a *Centros integradores* para su incorporación al programa social *Pensión para el bienestar*.

El modelo propuesto ha mostrado ser significativamente más eficiente en la asignación de servicios públicos en comparación con el enfoque tradicional de NSGA-II. Al incorporar la lógica difusa, se logró una mejora del 15 % en la convergencia de la *frontera de Pareto*, lo que indica una optimización más efectiva de los objetivos planteados. Además, se observó una reducción del 10 % en la diversidad de soluciones, lo cual contribuye a una mayor estabilidad en los resultados. Otro aspecto destacado es la disminución del número de generaciones necesarias en un 20 %, lo que refleja una mayor eficiencia en el proceso evolutivo. Finalmente, el tiempo de ejecución total del modelo se redujo en un 35 %, lo que subraya la capacidad del enfoque propuesto para operar de manera ágil y con menor demanda de recursos computacionales.

Como parte del trabajo futuro, se propone el desarrollo de métodos para ajustar dinámicamente los parámetros de la lógica difusa durante la ejecución del algoritmo, lo que podría mejorar la eficiencia en la convergencia. También se sugiere la integración de técnicas de aprendizaje automático para predecir comportamientos en escenarios más complejos y diversos, lo que podría ampliar la aplicabilidad del modelo a otras áreas geográficas y contextos administrativos. Además, se plantea explorar la combinación de NSGA-II con otros algoritmos evolutivos o metaheurísticos para evaluar si se pueden obtener mejoras o si se pueden reducir los tiempos de ejecución en contextos con mayores volúmenes de datos.

Finalmente, el modelo propuesto puede ser considerado una herramienta robusta y eficiente para la asignación de servicios públicos administrativos, ofreciendo soluciones prácticas y flexibles aplicables a diversos contextos. Por lo tanto, esta investigación no solo contribuye al avance en la gestión de servicios públicos administrativos, sino que también abre nuevas vías para investigar la combinación de estas técnicas, mejorando la administración de recursos en futuros estudios.

Tabla de contenido

Capítulos	Página
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	IX
1. Introducción	1
1.1. Problemática	3
1.2. Justificación	5
1.3. Hipótesis	6
1.4. Objetivos	6
2. Marco teórico	8
2.1. Problemas de asignación	8
2.2. Modelos de asignación	11
2.3. Técnicas de solución para problemas de asignación	17
2.4. Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)	41
2.5. Lógica difusa	43
3. Estado del arte	55
3.1. Atención médica domiciliaria	55
3.2. Ciencias de la salud	58
3.3. Seguridad pública	59
3.4. Desastres naturales	60
3.5. NSGA-II en la optimización multiobjetivo	64
4. Marco metodológico	66
4.1. Análisis del problema	67
4.2. Elección de variables involucradas	67
4.3. Selección de posible solución al problema de asignación	69
4.4. Creación de un conjunto de soluciones potenciales	71
4.5. Selección de la solución preferida	72
4.6. Resultados finales	73
5. Modelo de asignación de servicios públicos administrativos	76
5.1. Variables de Decisión	76

TABLA DE CONTENIDO

5.2. Parámetros	77
5.3. Funciones Objetivo	77
5.4. Restricciones	79
5.5. Lógica difusa en el modelo	80
6. Experimentación y análisis de resultados	83
6.1. NSGA-II tradicional VS modelo de asignación propuesto	83
6.2. Problema votantes	88
6.3. Problema <i>mujeres con bienestar</i>	102
6.4. Problema adultos mayores	105
6.5. Publicaciones de resultados	108
7. Conclusiones y trabajo futuro	111
7.1. Conclusiones	111
7.2. Trabajo futuro	114
A. Materiales	117
Referencias	118

Índice de figuras

Figura	Página
2.1. Instancia del ejemplo: <i>example 8x3</i>	10
2.2. Cruce de un punto y dos puntos.	29
2.3. Hormigas esquivando un obstáculo (Maniezzo, 2021).	33
2.4. Comparativa entre botella difusa y probabilística (elaboración propia).	47
2.5. Función de pertenencia del conjunto difuso joven, de acuerdo con Zadeh (1965).	51
2.6. Función de pertenencia de joven si U es continuo, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	51
2.7. Función GAMMA, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	52
2.8. Función L, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	52
2.9. Función LAMBDA o triangular, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	53
2.10. Función PI o trapezoidal, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	53
2.11. Función S, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	54
2.12. Función II, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).	54
4.1. Etapas de la metodología propuesta.	66
6.1. Comparación de las fronteras de Pareto entre NSGA-II tradicional y la propuesta.	85
6.2. Evolución del Hipervolumen para NSGA-II tradicional y la propuesta.	85
6.3. Número de generaciones necesarias para alcanzar soluciones estables.	86
6.4. Análisis de Pareto: Distancia total vs Capacidad utilizada	98

Índice de tablas

Tabla	Página
2.1. Traducción de la nomenclatura CE	27
2.2. Grado de pertenencia en conjunto de acuerdo con Ross (2009).	50
3.1. Tabla de resumen sobre el estado del arte	62
3.2. Resumen del estado del arte en la asignación de servicios públicos utilizando NSGA-II y lógica difusa	65
6.1. Habitantes del valle de Toluca entre 17 y 18 años de edad. Elaboración propia con datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).	88
6.2. Capacidad de atención de cada módulo municipal en un período de nueve días. Elaboración propia a partir de trabajo de campo.	89
6.3. Comparación de cobertura de las instalaciones	92
6.4. Comparación de costo de traslado	93
6.5. Comparación de eficiencia de la asignación	93
6.6. Comparación de tiempos de ejecución	94
6.7. Número de clientes por módulo	94
6.8. Tasa de asistencia por módulo (parte 1).	95
6.9. Tasa de asistencia por módulo (parte 2)	95
6.10. Solución 1: Resumen de distancias y capacidades	99
6.11. Solución 2: Resumen de distancias y capacidades	100
6.12. Solución 3: Resumen de distancias y capacidades	101
6.13. Configuración inicial: Capacidad de atención y días necesarios por municipio. . .	103
6.14. Propuesta de solución: Capacidad de atención y días necesarios por municipio. .	103
6.15. Asignación de Adultos Mayores a Módulos por Municipio (configuración inicial).	106
6.16. Asignación de Adultos Mayores a Módulos por Municipio (propuesta de solución).	106

Capítulo 1

Introducción

A medida que la población incrementa, el proceso de dotación de servicios se vuelve complejo. Como consecuencia, la toma de decisiones estratégicas sobre la administración de recursos requiere herramientas que permitan modelar ciertos fenómenos de manera óptima, ya que la implementación de acciones repercute en el estado futuro de diversos escenarios. Un ejemplo son las decisiones presupuestarias para la asignación de servicios y la demanda pública que satisface el gobierno cada año, ya que estas decisiones podrían impactar a largo plazo en la calidad de vida de los ciudadanos ([Jardón-Torres, 2020](#)).

Es por lo que, es necesario contar con información de calidad, proveniente de fuentes confiables, ya sean instituciones públicas o privadas que utilicen metodologías probadas para la toma de decisiones, acorde a las necesidades actuales, ya que esto contribuye a los estudios que buscan el beneficio del devenir social. Tal información muestra la dinámica social actual, hecho que exige la implementación de métodos para el análisis de datos, cuyo objetivo sea optimizar la planificación de servicios ([Buzai, 2020](#)). Aunado a esto, la creciente evolución tecnológica contribuye a la creación de modelos matemáticos y computacionales que permiten a los expertos y tomadores de decisiones (públicas o privadas) comprender mejor los diversos escenarios de estudio.

Según [Chandrashekara \(2021\)](#), los modelos para la asignación de servicios con mayor oportunidad de aplicación se habían quedado en su forma conceptual hasta comienzos del siglo XX cuando se empezó a codificar software orientado a la toma de decisiones. Algunos ejemplos son los denominados: DISTRITACIÓN, REDISTRITACIÓN, ALINEACIÓN DE TERRITORIOS Y LOCALIZACIÓN-ASIGNACIÓN

1. INTRODUCCIÓN

(conocidos en inglés como: districting, re-districting, territory alignment, y location-allocation), los cuales buscan dividir una región geográfica en áreas más pequeñas denominadas distritos, que representan unidades de prestación de servicios y son típicamente colecciones de subáreas más pequeñas, conocidas como unidades básicas (Ríos-Mercado, 2020).

Los modelos de asignación consisten en un conjunto de métodos matemáticos diseñados para encontrar soluciones precisas al problema de cómo distribuir las solicitudes de un grupo de clientes entre diferentes servicios, optimizando ciertos criterios que se consideran importantes para una población específica. La mayoría de estos modelos se enfocan en identificar la asignación óptima de una o más instalaciones, con el objetivo de mejorar la distribución espacial a través de la reducción de los costos o tiempos totales de transporte (Cuadros-Lara, 2019).

Por otro lado, la asignación de servicios públicos debe alinearse con el principio de justicia o equidad espacial. Este principio es esencial en el ámbito de los servicios públicos, dado que son financiados por toda la ciudadanía y, por lo tanto, todos tienen el mismo derecho a acceder a ellos bajo condiciones de igualdad (Rebolledo et al., 2018). Algunos ejemplos de estos servicios incluyen hospitales, servicios de emergencia para desastres naturales, seguridad pública, escuelas y residencias para personas mayores, entre otros.

Existen diversos modelos de asignación que consideran ciertos parámetros como parte de una función objetivo o como una serie de restricciones para determinar la correcta asignación de un determinado cliente a un servicio. Algunos de los parámetros más utilizados en el estado del arte son: demanda asignada, radio de cobertura que puede atender cada nodo de servicio, costo de traslado (tiempo y/o recurso económico), conectividad entre servicios, ventana de tiempo utilizada, capacidad de un servicio, accesibilidad, el mínimo nivel de servicio, variedad de los servicios, tiempo de atención, entre otros propuestos para dar solución a problemas de propósito específico.

Sin embargo, a medida que el número de parámetros aumenta, también la complejidad para encontrar soluciones exactas en los problemas de asignación. Es así que, los investigadores han optado por implementar heurísticas tales como: búsqueda tabú, greedy, algoritmos genéticos, colonias de hormigas, recocido simulado, agentes inteligentes, entre otras más. Tales heurísticas permiten encontrar soluciones semi-óptimas en menor tiempo a partir del análisis de servicios públicos, además de reducir el espacio de búsqueda de los problemas a resolver.

El análisis sobre los métodos de solución para problemas de asignación de servicios públicos ha obligado a que los investigadores de este campo establezcan los criterios que rigen la correcta distribución de este tipo de servicios (Rebolledo et al., 2018):

- **Eficiencia espacial:** considera el costo total de desplazamientos por parte de la población para llegar a los servicios, se busca distribuir eficientemente a la población y a los servicios minimizando la distancia total.
- **Justicia o equidad espacial:** hace referencia al nivel de igualdad que otorga cada servicio para ser accedido por un grupo de la población de estudio. Usualmente este término tiene mayor relevancia en el estudio de servicios públicos y depende de la variabilidad de las distancias entre servicios y la población, de la capacidad de los servicios y su disponibilidad.
- **Efectividad:** expresa el nivel de funcionamiento del escenario actual respecto a una propuesta de solución *ideal*. Se realiza una evaluación de las soluciones para determinar si mejoran la distribución de los servicios.
- **Gestión:** es el análisis de las acciones inmediatas a implementar dentro del escenario de estudio, así como las estrategias a seguir para suministrar correctamente ciertos servicios a la población.

Es así que en esta investigación se propone el desarrollo y evaluación de un modelo que optimice la asignación de servicios públicos administrativos, a partir de varios objetivos y restricciones que permitan una correcta distribución de servicios. Así como incorporar dicho modelo a Sistemas de Información Geográfica (SIG) libres, contribuyendo así al trabajo de expertos y/o tomadores de decisiones.

1.1. Problemática

La diversidad de servicios ofertados en los últimos años, refleja el desarrollo dinámico de la sociedad, así como las necesidades que aquejan a la población. Dentro de los servicios ofertados se encuentran los servicios públicos tradicionales (por ejemplo: transporte público, servicios de salud, seguridad pública y recolección de basura), los cuales buscan atender necesidades básicas. En la mayoría de los estudios realizados, se ha concluido que planear la logística en la asignación de este tipo de servicios es una tarea difícil, ya que debe existir un balance entre la

1. INTRODUCCIÓN

oferta disponible, respecto a la demanda solicitada por la población (Rebolledo et al., 2018).

La planificación de servicios públicos posee diversas dimensiones y problemas asociados. Dos de los problemas que destacan, involucran la distribución de zonas de demanda de servicios (o zonificación) y la asignación de instalaciones de forma estratégica. Al dividir un área en partes más pequeñas, los expertos o responsables de la toma de decisiones deben especificar los criterios de distribución de distritos e instalaciones utilizados para cubrir los requisitos operativos de los servicios públicos (Ríos-Mercado, 2020). Respecto a la toma de decisiones sobre la asignación de instalaciones es fundamental crear estrategias en beneficio de organizaciones públicas o privadas, ya que en caso de establecer erróneamente la cantidad de instalaciones o su localización, provocarían efectos adversos en los costos de operación, perjudicando así, la calidad de los servicios ofertados (Ahmadi-Javid et al., 2017).

En la actualidad, dentro del campo de la planeación urbana se encuentra la necesidad de asignar cierta demanda a un servicio de acuerdo con su capacidad, dando entrada a los modelos de asignación. Estos modelos evalúan la calidad de las asignaciones actuales y producen alternativas que mejoran la distribución espacial, considerando el término de *justicia o equidad* al asignar óptimamente cierta demanda a las instalaciones (Sánchez et al., 2016).

Cuando se intenta resolver un problema de asignación, inicialmente se recurre a métodos de solución exacta que utilizan gradientes para resolver problemas no lineales, sin embargo, son inadecuados para resolver problemas de optimización a gran escala, ya que las fórmulas matemáticas propuestas como parte de una solución exacta son computacionalmente complejas de resolver, con tiempos de ejecución elevados, incluso implementando técnicas avanzadas de programación (Soroudi, 2017). Es por lo que se recurre a métodos alternos de solución que determinan soluciones semi-óptimas llamados heurísticas. A pesar de que la solución generada por una heurística no sea la óptima, ayuda a disminuir el espacio de búsqueda y por ende el tiempo de ejecución (Yarmand et al., 2014).

Las heurísticas surgen como inspiración de la naturaleza. Algunas heurísticas consideran una población inicial aleatoria e intentan mejorarla a partir de ciertas operaciones que modifican la población. Cada heurística varía en esencia de acuerdo con la forma en que modifica a la población. Además, la cantidad de iteraciones es proporcional a la cantidad de población, ya que a medida que aumenta la población también el tiempo de ejecución, debido a que el espacio

de búsqueda es mayor (Soroudi, 2017).

Con base en lo anteriormente expuesto, se debe considerar que la teoría de asignación de instalaciones ha sido de mayor interés dentro del campo de investigación de operaciones, ya que se trata de un tema de optimización trascendente para la planeación estratégica de servicios públicos (Ahmadi-Javid et al., 2017). Finalmente, Jardón-Torres (2020) menciona que uno de los desafíos más importantes es lograr el diseño de una política pública que pueda adaptarse al desarrollo de las exigencias conforme avanza el tiempo, considerando la evolución y el crecimiento de la población a atender. Por lo que, es necesario contar con herramientas tecnológicas que ayuden a disminuir el tiempo de análisis de escenarios y enfocarse más en las propuestas de solución.

Es así que resulta imperativo que las instituciones responsables construyan una base de datos actualizada, la cual almacene información útil para el desarrollo y evaluación de modelos de optimización que determinen la asignación de establecimientos proveedores de servicios públicos administrativos en áreas tales como: salud, asistencia social, seguridad y recolección de basura. De esta manera se contribuye a que la población tenga acceso a una mejor calidad de vida.

1.2. Justificación

Al aumentar la demanda de bienes y servicios se producen una serie de problemas que impactan en la calidad de vida de la población. De entre todos estos problemas los que más destacan son (Vilchis-Mata et al., 2021):

- Conocer la mejor localización de un nuevo servicio.
- El impacto en la demanda de bienes y servicios respecto al crecimiento poblacional.
- Control del uso de suelo ante la urbanización de zonas en crecimiento.
- La correcta asignación de cuerpos policíacos, que garanticen la seguridad de la población.

Encontrar la solución a estos problemas requiere del desarrollo de modelos computacionales que consideren las variables más representativas del problema que se desea resolver, para así, obtener resultados que determinen la mejor asignación de clientes a un nuevo servicio, así como la cantidad de demanda asignada a este.

1. INTRODUCCIÓN

Una alternativa son los modelos de asignación, los cuales son un conjunto de procedimientos matemáticos que intentan producir soluciones al problema de cómo asignar cierto número de clientes a determinados servicios, de tal manera que se mejoren ciertos valores considerados como clave al momento en que la población utiliza dichos servicios (Cuadros-Lara, 2019).

Existen diversos modelos de asignación que atienden diferentes necesidades dependiendo del servicio que se desea instalar. Esto último puede hacer referencia a la demanda asignada, o al radio de cobertura que puede atender cada nodo de servicio. La mayoría de los modelos se han desarrollado con el propósito de identificar la asignación óptima de diversas instalaciones deseables, buscando lograr la mejor distribución geográfica mediante la minimización de los costos o tiempos de transporte totales (Ramírez and Bosque, 2001). Por esta razón, la distribución de los servicios públicos debe ajustarse al principio de *equidad o justicia espacial*.

Finalmente, el presente trabajo de investigación contribuye a la creación de un modelo de asignación de servicios públicos, como son administrativos o de asistencia social, incorporado a Sistemas de Información Geográfica (SIG) libres, el cual genera información relevante para expertos en la toma de decisiones. Esto permite determinar a través del concepto de justicia espacial la distribución equitativa de recursos en beneficio de la población.

1.3. Hipótesis

El desarrollo de un modelo para la asignación multiobjetivo entre clientes y servicios públicos, mediante NSGA-II y lógica difusa, mejora la eficacia y eficiencia del proceso de asignación de servicios públicos administrativos.

1.4. Objetivos

En esta sección se presentan los objetivos general y particulares que dirigen el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Objetivo general

Diseñar y evaluar un modelo para mejorar la asignación multiobjetivo entre clientes y servicios públicos administrativos, mediante NSGA-II y lógica difusa, el cual ayude a la toma de decisiones a expertos.

Objetivos particulares

- Crear y/o depurar bases de datos con información sobre poblaciones de estudio y servicios públicos administrativos mediante trabajo de campo, para dar solución a problemas de asignación de recursos.
- Proponer un modelo de asignación multiobjetivo basado en NSGA-II con lógica difusa, así como compararlo con las técnicas reportadas en el estado del arte.
- Codificar el modelo de asignación propuesto mediante lenguajes de programación libre, siendo así, compatible con los sistemas operativos: Windows, Linux y Mac OS.
- Crear una propuesta de solución estratégica a problemas de planeación urbana con base en los resultados obtenidos a través del modelo de asignación propuesto.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presenta el fundamento teórico para el tópico de esta investigación mediante tres secciones: problemas de asignación, modelos de asignación y técnicas de solución para problemas de asignación.

2.1. Problemas de asignación

En las últimas décadas, el número de propuestas en materia investigación de operaciones para la optimización continua o discreta de problemas de asignación de instalaciones ha incrementado. Tales propuestas se han extendido al modelado y diseño de algoritmos con aplicaciones en organizaciones públicas y privadas (Vilchis-Mata et al., 2021).

Los problemas de asignación constan de tres elementos principales: puntos de demanda existentes en los que se encuentran los clientes, algunas instalaciones nuevas que deben estar localizadas entre los clientes y un espacio de solución factible en el que se distribuyen los puntos de demanda, además de un criterio de medición que explica las distancias (en términos de tiempo, costo, etc.) entre instalaciones (Revelle and Eiselt, 2005).

Por otro lado, debido a la diversidad de aplicaciones para los problemas de asignación de instalaciones, es necesario establecer objetivos específicos o variables de decisión, por ejemplo: minimizar el tiempo de comercialización para localizar almacenes a lo largo de una cadena de suministro, maximizar la distancia a áreas residenciales para ubicar instalaciones no deseadas, minimizar el tiempo de entrega al ubicar estaciones de tren y maximizar la accesibilidad de las personas al localizar cajeros automáticos, entre otro más (Hale and Moberg, 2003).

Usualmente, los problemas de asignación de instalaciones emplean una función objetivo que intenta minimizar los costos para la localización de un conjunto de instalaciones de acuerdo con la cantidad de demanda solicitada por los clientes bajo un conjunto de restricciones (Vilchis-Mata et al., 2021). Las decisiones que se toman para resolver problemas de asignación de instalaciones son fundamentales en la planificación estratégica de servicios.

2.1.1. Problema general de asignación

El problema general de asignación (PGA) es considerado en la literatura como un subproblema dentro de escenarios especializados. Este problema se abordó por primera vez mediante un modelo aplicado a diversas áreas, tales como: asignar tareas de desarrollo de software a programadores, asignar cargas de trabajo a las computadoras en redes informáticas, programar comerciales de televisión de duración variable bajo diferentes horarios y programar pagos a cuentas bancarias. Algunas otras aplicaciones consideran modelos de asignación de plantas de carga fija en las que los clientes deben ser atendidos por una sola planta y modelos para el diseño de redes de comunicación que consideran restricciones de capacidad (Ross and Soland, 1975).

El PGA busca designar n clientes a m servicios de tal manera que se minimice el costo de asignación, siempre que todos los clientes sean asignados a un servicio y este no se exceda su capacidad. Formalmente, un PGA es considerado un caso del problema de la *mochila* de capacidad Q_i para cada servicio i , donde cada cliente j tiene asignada una mochila que minimiza el costo total de asignación sin exceder la capacidad del servicio. Además se utiliza una variable binaria de asignación x_{ij} , la cual tiene un valor igual a 1 si se asigna el cliente j al servicio i , en caso contrario x_{ij} toma un valor igual a 0:

$$Z_{PGLA} = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in J} q_{ij} x_{ij} \leq Q_i \quad (2.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J \quad (2.4)$$

2. MARCO TEÓRICO

La función objetivo 2.1 minimiza el costo de asignación de los clientes a los servicios, la restricción 2.2 se denomina restricción de asignación y garantiza que cierto cliente puede ser atendido por solo un servicio, la restricción 2.3 establece el límite de la capacidad y la restricción 2.4 garantiza que la variable de asignación sea binaria.

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo de PGA, denominado *example* 8×3 , que se utiliza a lo largo de este trabajo para explicar diferentes algoritmos de solución. En este ejemplo, $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, por lo que $n = 8$ e $I = \{1, 2, 3\}$, entonces $m = 3$ servicios. Las capacidades de los servicios son: 160, 90 y 70 respectivamente, así $Q = (160, 90, 70)$. La asignación de costos y solicitudes de los clientes son presentados al lado del cliente correspondiente. Por ejemplo, el cliente 1 solicita 48 del del servicio 1, o 38 del del servicio 2, o 28 del servicio 3. Asignando al servicio 1 un costo de 10, al servicio 2 un costo de 22 y al servicio 3 un costo de 60 (Maniezzo, 2021).

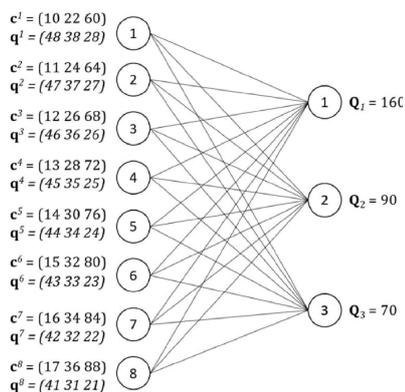


Figura 2.1: Instancia del ejemplo: *example* 8×3 .

Las variables del código utilizado para dar solución al problema *example* 8×3 son mostradas a continuación mediante un arreglo:

$$\begin{aligned}
& \{name : example\ 8\ x\ 3, \\
& \quad numcli : 8, \\
& \quad numserv : 3, \\
& \quad cost : \\
& \quad [[10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], \\
& \quad [22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36], \\
& \quad [60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88]], \\
& \quad req : \\
& \quad [[48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41], \\
& \quad [38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31], \\
& \quad [28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21]], \\
& \quad cap : [160, 90, 70]\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

El arreglo 2.5 consta de seis elementos: *name* es el nombre del arreglo, *numcli* es el número de clientes, *numserv* es el número de servicios, *cost* es el vector de costos, *req* es la matriz de solicitudes y *cap* es el vector de capacidades. La formula del PGA, hace uso de $n \times m$ variables de decisión y así produce una búsqueda en el espacio $2^{n \times m}$.

2.2. Modelos de asignación

En la actualidad, los criterios de asignación de servicios son tareas clave a considerar dentro del área de la planeación de ciudades. Por tal motivo se requiere de propuestas, tales como los modelos de asignación, que disminuyan el impacto de los cambios futuros en áreas demográficas, económicas y culturales (Ramírez and Bosque, 2001).

Los modelos de asignación (MA) son herramientas utilizadas para asignar ciertos clientes a servicios potenciales con base en un conjunto de criterios tales como: capacidad, distancia, tiempo, etc. (Rebolledo et al., 2018). Estos modelos evalúan la configuración actual de las instalaciones con base en la distribución de la demanda, para así generar alternativas que propicien una mejor distribución espacial (eficiente y/o equitativa).

2. MARCO TEÓRICO

De acuerdo con [Ramírez and Bosque \(2001\)](#), los MA poseen las siguientes características:

1. Son modelos matemáticos que abstraen escenarios de estudio mediante postulados.
2. Son modelos meso-espaciales, ya que las variables a modelar se encuentran delimitadas en un territorio.
3. Son modelos normativos, debido a que se enfocan en buscar la mejor solución a un problema.

A continuación, se definen algunos conceptos utilizados en el área de los MA ([Ullah et al., 2020](#))

- **Criterios:** Son reglas para probar la aceptabilidad.
- **Metas:** Son niveles de aspiración *a priori* determinados por los tomadores de decisiones (DM, por sus siglas en inglés).
- **Objetivo:** Son las directrices que consideran los DM. Para diferenciar, los objetivos dan la dirección deseada, mientras que las metas dan el nivel deseado a alcanzar.
- **Solución óptima:** Es aquella que da como resultado el valor máximo o mínimo de cada uno de los objetivos.
- **Solución eficiente (solución no dominada):** Es una solución eficiente si no existe otra solución factible que produzca una mejora en un objetivo sin afectar otro objetivo.
- **Solución preferida:** Es la solución elegida por los DM de entre un conjunto de soluciones eficientes.
- **Solución satisfactoria:** Es aquella solución que tiene un nivel mínimo aceptable para todos los atributos del problema.

Es así que, según lo reportado en [Sánchez et al. \(2016\)](#), se han desarrollado múltiples propuestas de modelos de asignación. Sin embargo, para efectos del presente trabajo de investigación se desarrollan seis tópicos de este tipo de modelos: 1. Modelo general de asignación, 2. Modelo de asignación donde cada cliente es cubierto por sólo una instalación, 3. Modelo de asignación con costo de apertura de instalación, 4. Modelo de asignación capacitado con demandas estocásticas, 5. Clasificaciones de los modelos de asignación y 6. Clasificación de instalaciones o servicios.

2.2.1. Modelo general de asignación

El primer modelo de asignación fue introducido por Cooper (1963), quien resolvió por primera vez un problema general de asignación (PGA) conformado por dos servicios y siete clientes (conocido como el problema de Weber de múltiples fuentes).

Supuestos del modelo:

- El espacio de soluciones es continuo.
- La demanda de cada cliente puede ser abastecida por varios servicios, ignorando el costo de apertura de nuevos servicios.
- Los servicios no consideran costo de apertura.
- Los parámetros son determinísticos y atienden toda la demanda.
- No existe relación entre nuevos servicios.

Definición del modelo:

- Un conjunto $I = \{1, \dots, m\}$ de servicios.
- Un conjunto $J = \{1, \dots, n\}$ de clientes.
- Una matriz de asignación de costos $C = [c_{ij}]$, $i \in I$, $j \in J$, donde cada elemento c_{ij} establece el costo de asignar un cliente j a un servicio i .
- Un vector de capacidad $Q = [Q_i]$, $i \in I$, donde cada elemento Q_i especifica la capacidad de cada servicio i .
- Una matriz de variables binarias de decisión $X = [x_{ij}]$, $i \in I$, $j \in J$, donde cada elemento x_{ij} indica si el cliente j es asignado al servicio i .

Entradas al modelo general:

- n : Número de clientes.
- r_j : Demanda del cliente $j = 1, 2, \dots, n$.
- b_j : Coordenadas de los clientes $j = 1, 2, \dots, n$.

Salidas del modelo general (variables de decisión):

- ϕ : Costo total de transporte entre las instalaciones y los clientes.

- m : Número de instalaciones.
- a_i : Coordenadas de las nuevas instalaciones $i = 1, 2, 3, \dots, m$.
- w_{ij} : Cantidad suministrada al cliente j por la instalación i .
- $d(a_i, b_j)$: Distancia entre un cliente j y una nueva instalación i .

Función objetivo y restricciones:

$$\text{Minimizar } \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} d(a_i, b_j), \quad (2.6)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m w_{ij} = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

2.2.2. Modelo de asignación donde cada cliente es cubierto por una sola instalación

Supuestos del modelo: En este modelo, se supone que cada cliente puede ser atendido solo por una instalación. Los demás supuestos son similares al modelo general [2.2.1](#).

Entradas al modelo: Las mismas entradas que en el modelo general [2.2.1](#).

Salidas del modelo (variables de decisión):

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \text{ es asignado a la instalación } i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Función objetivo y restricciones:

$$\text{Minimizar } \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} r_j d(a_i, b_j), \quad (2.10)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m z_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

2.2.3. Modelo de asignación con costo de apertura de la instalación

Supuestos del modelo: En este modelo, se considera el costo de apertura de la instalación. Los demás supuestos son similares al modelo general 2.2.1.

Entradas al modelo: Además de las entradas del modelo general 2.2.1, se incluye el costo de apertura:

$$f(x_i) = \text{costo de apertura de la instalación } i. \quad (2.13)$$

Función objetivo y restricciones:

$$\text{Minimizar } \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} d(a_i, b_j) + \sum_{i=1}^m f(x_i), \quad (2.14)$$

sujeto a las mismas restricciones del modelo general 2.2.1.

2.2.4. Modelo de asignación capacitado con demandas estocásticas

Supuestos del modelo: En este modelo, las instalaciones están capacitadas y la demanda de los clientes es probabilística (Zhang et al., 2018).

Entradas al modelo:

- ε_j : Demanda estocástica del cliente j .
- $\varepsilon_j(e)$: Una instancia del vector estocástico ε_j .
- s_i : Capacidad de la instalación i .

Función objetivo y restricciones:

$$\text{Minimizar } \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} d(a_i, b_j), \quad (2.15)$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m w_{ij} = \varepsilon_j(e), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.17)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.18)$$

Si no se encuentra una solución factible, algunas demandas de los clientes no pueden ser

satisfechas, y se penaliza con la siguiente función objetivo:

$$\text{Minimizar } \phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(e) d(a_i, b_j). \quad (2.19)$$

2.2.5. Clasificaciones de los modelos de asignación

Existen diversas formas de clasificar a los modelos de asignación dependiendo de los criterios que se consideren: de acuerdo con su topografía pueden ser modelos planos, discretos y basados en árboles o grafos generales. Además, los modelos se pueden clasificar en función de los parámetros de entrada: entradas estáticas o dinámicas y si se conocen las entradas a priori sólo en términos probabilísticos. Otra clasificación considera si las instalaciones tienen o no un límite de capacidad. Y finalmente, los modelos de asignación se pueden clasificar por el número de objetivos a cumplir: uniobjetivo y multiobjetivo (Hsu et al., 1995).

Sin embargo, la mayoría de los estudios clásicos se centran en la minimización de la distancia media o total y la minimización de la distancia a las instalaciones de servicio (Guastaroba et al., 2020). En dichos estudios, los modelos de asignación se dividen en cuatro grandes categorías:

- **Modelos analíticos:** Estos modelos se basan en supuestos que simplifican el problema de estudio, como el costo fijo para localizar una instalación. Usualmente el cálculo de distancia de viaje implementa la métrica de Manhattan.
- **Modelos continuos:** Estos modelos de asignación son los más antiguos. Incorporan representaciones geométricas de la realidad y consideran la continuidad del área de localización. El problema clásico en este tipo de modelos es el problema de Weber, donde las distancias son consideradas comúnmente como lineales o euclidianas, aunque se pueden implementar otros tipos de funciones de distancia (Tirkolaee et al., 2020). Se debe considerar que la teoría, generalmente se asume que los clientes pueden ser tratados como puntos en el espacio. Esta suposición es válida cuando la dimensión de los clientes es *pequeña* en relación con las distancias entre el nuevo servicio y los clientes, sin ignorar las dimensiones de los clientes. Algunos investigadores han considerado a los clientes como regiones de demanda de una región (Ahmad et al., 2020).
- **Modelos de red:** Los modelos de red utilizan dos elementos principalmente: enlaces y nodos. Algunos ejemplos de modelos en esta área son: mediana absoluta, centros no ponderados y criterio *q-mediana*. Las distancias se miden con respecto al camino más

corto.

- **Modelos discretos:** En estos modelos existe un conjunto discreto de servicios candidatos. Algunos ejemplos dentro de este tipo de modelos son: N-mediana, de instalaciones no capacitadas y de cobertura. Al igual que en los modelos continuos, en los modelos discretos se pueden usar todo tipo de funciones de distancia, pero en ocasiones se pueden especificar de forma exógena (Castro et al., 2019).

2.2.6. Clasificación de instalaciones o servicios

Las instalaciones suelen caracterizarse, entre otras cosas, por su número, tipo y costos. Otras características relacionadas con las instalaciones pueden incluir las ganancias, la capacidad, el rango de atracción (dentro del cual los clientes se sienten atraídos por las instalaciones) y el tipo de servicio prestado (Azarmand and Neishabouri, 2009):

- **Número de instalaciones:** El caso más simple es en el que solo se establece una nueva instalación. El caso general se denomina problema de múltiples instalaciones en el que el objetivo es ubicar simultáneamente más de una instalación.
- **Tipo de instalación:** En el caso básico se supone que todas las instalaciones son idénticas en cuanto a su tamaño y el tipo de servicio que ofrecen. Aunque, generalmente es necesario diferenciar instalaciones, por ejemplo, hospitales y unidades de atención médica de menor tamaño. Los modelos de asignación también se pueden diferenciar en tipos de servicio único y servicios múltiples, respecto si las instalaciones pueden proporcionar uno o varios servicios.
- **Costo de instalación:** Se considera si las instalaciones pueden abastecer una demanda infinita o si su capacidad de producción y suministro es limitada. En este sentido, los problemas a menudo se clasifican en capacitados e incapacitados.

2.3. Técnicas de solución para problemas de asignación

Debido a la naturaleza de los diversos problemas de asignación (PA) actuales, existen diferentes técnicas de solución tanto en el sector público como en el sector privado. Las soluciones producidas por tales técnicas son eficientes en la medida en que los parámetros involucrados en el problema de estudio se configuren correctamente. Es así, que en esta sección se abordan algunas de las técnicas de solución más utilizadas en el estado de arte.

Las propuestas de solución para PA involucran: ecuaciones exactas, métodos heurísticos y métodos metaheurísticos. Debido a que el PA es NP-Hard, su solución es compleja. El PA no admite un algoritmo de aproximación de tiempo polinómico con una relación de rendimiento fija. Por otro lado, los algoritmos heurísticos solo pueden evaluarse a *posteriori*. Es así que los algoritmos heurísticos se diseñaron para solucionar problemas específicos. Los primeros algoritmos se pueden clasificar en dos enfoques: heurística constructiva y heurística de búsqueda local (Lin et al., 2017).

Otro enfoque propuesto por Maniezzo (2021), menciona que las heurísticas se pueden dividir en algoritmos de una sola solución y algoritmos que tienen un conjunto de soluciones. El primer grupo, se aborda en la sección 2.3.1, el cual suele estar relacionado con la búsqueda local y la descripción de sus elementos, por lo general se realiza mediante una terminología de optimización estándar. El segundo grupo se detalla en la sección 2.3.2 y posee una mayor variedad de heurísticas basadas en la población.

2.3.1. Heurísticas de solución única

Los enfoques heurísticos se pueden clasificar según sus criterios, un ejemplo es el número de soluciones que se desarrollan en cada etapa del algoritmo: ya sea de una solución o más de una. En este capítulo se abordan algoritmos heurísticos que encuentran sólo una solución; siendo todas las propuestas, mejoras del procedimiento de búsqueda local básico.

Existe una diversidad de heurísticas utilizadas para aplicaciones específicas, sin embargo en este trabajo se abordan seis de las más utilizadas en la literatura: simulación mejorada, búsqueda tabú, búsqueda adaptativa aleatoria codiciosa (GRASP, por sus siglas en inglés), búsqueda local iterada y búsqueda de vecindario variable. Adicionalmente, se han utilizado algoritmos matemáticos para complementar cada una de las heurísticas.

2.3.1.1. Simulación mejorada

La heurística de simulación mejorada (SA, por sus siglas en inglés) es el primero de una serie de algoritmos que incluyen pasos inspirados en procesos naturales para optimizar cierto problema. En la heurística SA, el proceso natural es la mejora. Se considera un proceso térmico que alcanza estados de baja energía en un sólido mediante fases repetidas de calentamiento y enfriamiento lento. Este proceso se puede simular desde diferentes enfoques, uno de ellos es

Monte Carlo. En el núcleo de la simulación hay una serie de estados de tiempo, que se pueden describir mediante una cadena de Markov resumida en el siguiente ciclo (Maniezzo, 2021):

1. Dado un estado i con energía E_i , perturbado para generar el estado subsecuente j con energía E_j .
2. Si $E_j - E_i \leq 0$ acepta j con probabilidad $\exp(-(E_j - E_i)/(k_B T))$, donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura.

Si la temperatura disminuye con la suficiente lentitud, el material puede alcanzar a cada temperatura T un equilibrio térmico caracterizado por una distribución de Boltzmann de los estados energéticos:

$$P_T(i) = \exp(-E_i/(k_B T)) / \sum_j \exp(-E_j/(k_B T)) \quad (2.20)$$

Este proceso termodinámico que minimiza la energía libre dio lugar a la idea de que algo similar podría ser utilizado para minimizar una función de costo generalizada, y así crear el algoritmo SA. SA es, por tanto, un algoritmo de búsqueda global que incluye un parámetro de temperatura T (Glover, 1992).

A altas temperaturas la búsqueda se diversifica, a bajas temperaturas se intensifica la búsqueda. La temperatura T comienza en un valor alto, luego disminuye. Para cada temperatura, el algoritmo propone una nueva solución en las cercanías de la solución predominante y la acepta si esta es una mejor solución. Si la nueva solución es peor que la actual puede aceptarla de todos modos, pero con una probabilidad de aceptación expresada como una función creciente de T y decreciente de acuerdo a la calidad de la solución (Mestre et al., 2015).

Las peores soluciones se aceptan en términos de probabilidad, donde la probabilidad de aceptación disminuye conforme la calidad de la solución. Dado que la mejora permite una disminución eficaz de la energía libre, se espera que la SA proporcione un medio eficaz para reducir los costos de la solución. El pseudocódigo de una SA genérica se presenta en el Algoritmo 1 (Maniezzo, 2021).

La línea 10 implementa la fórmula de aceptación probabilística para los movimientos que empeoran. Es necesario especificar varios elementos además del valor de temperatura inicial y la función de vecindad, entre los que se encuentran:

- Condición de terminación.

Algorithm 1 Heurística simulación genérica mejorada.

```
1: function SimulatedAnnealing( $T$ );
2: Entrada: temperatura inicial  $T$ 
3: Salida: Una solución factible  $x^*$ 
4: Generar una solución factible  $x$ ; Asignar  $x^* = x$ ;
5: Generar una solución factible  $x' \in N(x)$ ;
6: si ( $z(x') < z(x)$ ) entonces
7:     Actualizar  $x = x'$ ;
8:     si ( $z(x^*) > z(x)$ ) entonces asignar  $x^* = x$ ;
9: de lo contrario
10:    Actualizar  $x = x'$  con probabilidad  $p = e^{-(z(x')-z(x))/(kT)}$ 
11: fin si
12: si se cumple la condición de enfriamiento entonces reducir  $T$ ;
13: si se cumple la condición de terminación entonces volver a la línea 5;
14: devolver  $x^*$ ;
```

- Condición de mejora (cuándo disminuir la temperatura).
- Programa de enfriamiento (cuánto se reduce la temperatura).

Se ha demostrado que SA garantiza la búsqueda de una solución óptima siempre que se cumplan las siguientes condiciones (Franzin and Stützle, 2019):

- Cualquier solución del vecindario es accesible desde cualquier otra a través de una cadena de movimientos adecuada.
- La temperatura inicial es lo suficientemente alta para que el enfriamiento sea lo suficientemente lento.
- Se da suficiente tiempo, *posiblemente infinito*.

Al ser usado con regularidad en la comunidad de optimización, SA ha sido de las primeras heurísticas que se integraron a un modelo matemático del problema a resolver. Un ejemplo sencillo de SA aborda el problema de programación de la tripulación de una aerolínea. Tal modelo proporciona soluciones rápidas y buenas, pero no es estable, ya que la calidad de las soluciones varía ampliamente. Por lo tanto, los autores proponen recopilar las soluciones de SA e incluirlas como columnas en un problema de generación de columnas. Es así como encontraron que ambos mejoran la solución final y garantizan una mejor estabilidad para los resultados propuestos (Mestre et al., 2015).

2.3.1.2. Búsqueda tabú

La búsqueda tabú (TS) es un procedimiento iterativo basado en una búsqueda local central que intenta escapar de los óptimos locales. Para ello, hace uso de estructuras de memoria

auxiliares destinadas a evitar que el algoritmo visite repetidamente las mismas soluciones. Los datos sobre búsquedas pasadas se almacenan en una lista tabú y se utilizan para limitar los movimientos sucesivos. Esto permite aceptar movimientos que empeoran la solución (Chouman and Crainic, 2010).

La lista tabú previene ciclos debido a que los movimientos recientes se declaran tabú y no se pueden revertir a menos que se demuestre que conducen a soluciones inexploradas. Un caso en el que se puede anular un tabú es cuando un movimiento prohibido conduce a una mejor solución, en este caso, el criterio de aspiración permite la ejecución del movimiento. Se debe considerar que el criterio de aspiración puede ser ajustado por el usuario especificando el nivel de aspiración a alcanzar (Maniezzo, 2021).

La lista tabú actúa como una estructura de memoria a corto y largo plazo. Los movimientos de la lista tabú están prohibidos durante un número de iteraciones establecidas por un parámetro denominado *tenencia tabú*. Esto permite escapar de los óptimos locales al mismo tiempo que diversifica la búsqueda. La memoria a largo plazo generalmente recopila información sobre las regiones exploradas del espacio de búsqueda y se utiliza para dirigir la búsqueda hacia regiones inexploradas, proporcionando así una guía de diversificación estratégica (Gallego et al., 2000).

La interacción de la búsqueda local básica y la estrategia de movimiento da como resultado un equilibrio entre la intensificación de la búsqueda de las soluciones actuales y la diversificación de la búsqueda, lo que obliga a explorar regiones espaciales de búsqueda no visitadas. En el Algoritmo 2 se presenta el pseudocódigo de un TS genérico. TS ha sido utilizado tanto en la academia como en la industria y ha permitido crear variantes. Algunas de las variantes matemáticas se enumeran a continuación (Maniezzo, 2021).

La primera variante se aplica al problema de enrutamiento de vehículos m – *ambulantes*, que es un problema especial de enrutamiento de vehículos que solicita que cada arco se use en la solución como máximo una vez para cada conjunto de m períodos. El enfoque utiliza un TS en el que solo se comprueba un subconjunto de vecinos en la vecindad de la solución actual por cada movimiento. La lista que define la vecindad se compone del conjunto de aristas no utilizadas que se encuentran en la solución b-matching. Los resultados computacionales ejecutados mostraron que el TS híbrido funciona mejor que el TS simple (Chouman and Crainic, 2010).

Algorithm 2 Búsqueda tabú genérica.

```
1: function TabuSearch( $TT$ );
2: Entrada : tabu ternure  $TT$ ;
3: Salida: Una solución factible  $x^*$ 
4: Generar una solución factible  $x$ ; Establecer  $x^* = x$  y  $TL = \emptyset$ ;
5: Generar una solución factible  $x' \in N(x)$  tal que  $z(x') = \min \{z(\hat{x}), \hat{x} \in N(x), \hat{x} \notin TL \text{ o } z(\hat{x}) < z(x^*)\}$  // condición de aspiración
6: Establecer  $x = x'$ ,  $TL \cup \{x\}$ ;
7: si ( $|TL| > TT$ ) entonces eliminar el elemento más antiguo de  $TL$ ;
8: si ( $z(x^*) > z(x)$ ) entonces establecer  $x^* = x$  ;
9: si (condición de actualización de duración tabu) entonces actualizar  $TT$ ;
10: si no (condición de terminación) entonces ir a 5;
11: devolver  $x^*$ ;
```

Otro enfoque más elaborado sobre el problema de diseño de redes de carga fija de múltiples productos utiliza programación entera mixta para generar una solución inicial, luego la búsqueda tabú explora la vecindad en forma de VLNS. Además, los datos se recopilan durante la ejecución de TS y se utilizan para generar cortes en las fases de programación entera mixta para reinicializar la búsqueda. El mismo problema se ha enfrentado recientemente con otra mateheurística iterativa basada en programación lineal, la cual obtuvo mejores resultados. También, es posible combinar TS y programación entera mixta, usando programación entera mixta para mejorar cada nueva solución encontrada por TS (Gallego et al., 2000).

Además, se presentó la combinación de una estructura de vecindad *cutting-plane* con la heurística de búsqueda tabú para resolver el problema de *p-mediana*. En la estructura de vecindad propuesta, para pasar de la solución actual a una solución vecina, se selecciona la mediana. Luego, se genera un modelo de programación lineal considerando restricciones binarias y agregando nuevas restricciones. La solución de programación lineal generada, mejora a partir del uso de desigualdades en el plano de corte (Maniezzo, 2021).

2.3.1.3. Búsqueda local iterada

La búsqueda local iterada (ILS, por sus siglas en inglés) es un enfoque que evita que la búsqueda local se quede en un óptimo local. La idea es implementar un muestreo del espacio de búsqueda basado en los óptimos locales identificados por cualquier procedimiento de búsqueda local específico. Una posibilidad sería generar una solución inicial aleatoria y luego ejecutar el optimizador local en ella. La evidencia experimental ha demostrado que un control más estricto de las soluciones de partida puede conducir a mejores resultados (Burke et al., 2011).

ILS al ser una heurística de búsqueda local guiada genera varias soluciones, que generalmente conducen a mejores resultados respecto a ejecuciones aleatorias. Para explicar esta heurística se presenta una ILS genérica en el algoritmo 3. El algoritmo utiliza varios procedimientos internos. Se genera una solución factible en el paso 4 mediante cualquier enfoque constructivo. Un buen enfoque constructivo puede ser útil para que la solución inicial optimice el comportamiento en cualquier momento, aunque los resultados a menudo resultan ser significativamente independientes de la solución inicial (Maniezzo, 2021).

Algorithm 3 Búsqueda local iterada genérica.

```
1: function IteratedLocalSearch();
2: Entrada :
3: Salida: Una solución factible  $x^*$ 
4: Generar una solución inicial factible  $x_0$ ;
5: Aplicar una búsqueda local sobre  $x_0$  para obtener un óptimo local  $x^o$ ;
6: repetir
7:     Establecer  $x' = \text{Perturbación}(x^o, \text{historia})$ ;
8:     Establecer  $x'' = \text{BúsquedaLocal}(x')$ ;
9:     Establecer  $x^o = \text{CriterioDeAceptación}(x^o, x'', \text{historia})$ ;
10:    si ( $z(x'') < z(x^o)$ ) entonces establecer  $x^* = x''$ ;
11: hasta condición de terminación;
12: devolver  $x^*$ ;
```

Lo que determina la mayoría de los resultados obtenidos son los pasos 9 y 10. El paso 5 requiere modificar la solución actual en una que no esté cerca de la original, de lo contrario, caería en la misma solución óptima local, ni tan lejos de ella, de lo contrario, todo el algoritmo se vuelve aleatorio. Además, las perturbaciones suelen beneficiar, ya que la solución resultante no está lejos del óptimo local correspondiente, por lo que el llegar a una búsqueda local es rápido. Es por ello necesario determinar el nivel de perturbación a aplicar (Bermudez et al., 2016).

Finalmente, el paso 9 controla el equilibrio entre la intensificación y diversificación de la búsqueda. Es posible cambiar entre la decisión de aceptar una nueva solución solo si es mejor que la actual (intensificación extrema, aceptar solo si $x'' < x^*$) hasta tomar la decisión de aceptar la nueva solución en cualquier caso (diversificación extrema, siempre establecer $x^o = x''$). Por lo general, las elecciones intermedias son más efectivas y pueden incluir elementos de otras metaheurísticas (Burke et al., 2011).

2.3.1.4. Búsqueda de vecindario variable

La búsqueda de vecindario variable (VNS, por sus siglas en inglés) es una variante del esquema de búsqueda local básica, la cual explora la secuencia de vecindarios en cada iteración de búsqueda principal (esto es conocido como Descenso de vecindario variable, VND, por sus siglas en inglés). Posteriormente, se realiza una perturbación de la solución (Martínez et al., 2009).

Este procedimiento se basa en la idea de que un mínimo local respecto a la vecindad no es necesariamente un mínimo local para otras vecindades. Solo se garantiza que un óptimo global sea un óptimo local para cualquier función de vecindario. Además, a menudo ocurre que los óptimos locales de los diferentes vecindarios no están tan separados (Maniezzo, 2021).

La idea de cambiar el vecindario durante la búsqueda se ha implementado desde diversos enfoques, dando lugar a muchas variantes, como la ascendencia de vecindario variable, la búsqueda de vecindario de variable básica, la búsqueda de vecindario de variable reducida y la búsqueda de descomposición de vecindario variable (Martínez et al., 2009).

2.3.1.5. Búsqueda adaptativa aleatoria codiciosa (GRASP)

GRASP, por sus siglas en inglés, es un procedimiento de búsqueda adaptable aleatorio codicioso, combina una heurística de búsqueda constructiva y una heurística local en un solo framework. La fase de búsqueda local es estándar, lo que diferencia a GRASP es la fase constructiva (Tomazic and Ljubic, 2008).

A pesar de la definición anterior, GRASP implementa una construcción semicodiciosa por medio de Listas de Candidatos Restringidos (RCL, por sus siglas en inglés), las cuales son listas producidas a partir del ordenamiento estándar de componentes realizado por la heurística constructiva, en la que incluyen solo los k mejores en las RCL. Luego, la construcción se realiza seleccionando al azar en cada iteración un elemento del RCL. Esto permite reinicializar en cada iteración la búsqueda local desde una solución semilla diferente, con la expectativa de partir de una solución de buena calidad (Maniezzo, 2021).

Existen diversas publicaciones que describen la manera en la que GRASP se puede integrar con programación entera mixta. Un ejemplo de esto es la aplicación a un problema de equilibrio de la línea de transferencia que integra GRASP y un algoritmo genético. En tal problema se

utiliza un solucionador de programación entera mixta y una subrutina para resolver subproblemas que surgen en el proceso de búsqueda de la metaheurística (Tomazic and Ljubic, 2008). La programación entera mixta es utilizada:

- Durante la construcción: en cada paso, para determinar cómo se utilizarán las expansiones alternativas en el conjunto de candidatos y así generar una solución completa.
- Durante la mejora: en específico en la ramificación local del problema.

2.3.2. Heurísticas basadas en la población

La propuesta más conocida de este grupo son los Algoritmos Genéticos (GA), sin embargo no fueron los primeros algoritmos introducidos del grupo, ni siquiera los primeros algoritmos que utilizan la genética para la optimización. Turing en 1950 dio a conocer la posibilidad de utilizar la evolución como un modelo para el aprendizaje computacional. Aunque, fueron los primeros en adquirir terreno en el mundo significativamente, a excepción de los países de habla alemana, ya que las estrategias de Evolución ya eran conocidas (Maniezzo, 2021).

Los GA se originaron en el área de Inteligencia Artificial, en vez del área de optimización. Incluso, en lugar de hacer referencia a conceptos de optimización previos, se ha propuesto que los GA, así como la mayoría de las metaheurísticas basadas en la población, hagan referencia a algún proceso natural específico, cuyos elementos son parcialmente imitados por el algoritmo (Kuri et al., 2002).

Esta forma de proponer conceptos de optimización fue introducida en Simulated Annealing, ayudando así a aceptar nuevos algoritmos basados en metáforas como la naturaleza para referirse a conceptos de optimización. Entre las propuestas que destacan en la literatura se encuentran: Algoritmos Genéticos, Estrategias de Evolución, Optimización de Colonias de Hormigas y Optimización de Enjambres de Partículas (Franzin and Stützle, 2019).

Actualmente, existen más de 190 metáforas naturales listadas en el sitio web del Bestiario de Computación Evolutiva, que es mantenido por Campelo et al. (2019), con temas que tratan desde *American Buffal* hasta *Zombies*. Esto muestra una problemática clara, ya que la mayoría de los algoritmos mantienen un conjunto de soluciones tradicionales, también conocidas como heurísticas basadas en la población, derivadas de metáforas naturales, por lo que el conjunto completo se confunde a menudo con su subconjunto (González, 2020).

Este trabajo describe cuatro de las heurísticas basadas en población más influyentes de la computación evolutiva: los algoritmos genéticos y las estrategias de evolución, optimización por colonias de hormigas, búsqueda de dispersión y Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II). Se combinan componentes de programación y matemáticas para obtener reglas formales. A pesar de que existen otras heurísticas basadas en población con componentes de programación matemáticos, existe escasez sobre su aplicación, por lo que no son incluidas en la revisión.

2.3.2.1. Algoritmos evolutivos

Los algoritmos evolutivos (EA, por sus siglas en inglés) o la computación evolutiva (EC, por sus siglas en inglés), como su nombre lo indica, adquieren su nombre de la evolución. Existen diversos métodos de EC disponibles tales como: los algoritmos genéticos, estrategias de evolución, programación evolutiva y programación genética. Para fines prácticos de este trabajo se abordan los dos principales: algoritmos genéticos y estrategias de evolución. De manera general, los métodos de EC son aquellos en los que la presión selectiva impulsa a las especies que viven en un entorno determinado a cambiar para asegurar una mayor probabilidad de sobrevivir y reproducirse (González, 2020).

Darwin reportó que las mutaciones aleatorias son un mecanismo producido en última instancia y es responsable de impulsar la evolución de las especies, ya que otorga ventajas de supervivencia. Tal mecanismo funciona en entornos que tienen recursos limitados, donde existen más individuos de los que pueden sobrevivir y reproducirse. Por lo tanto, se compete por la supervivencia. Las mutaciones aleatorias generan variantes entre individuos de la misma especie y por ende, los individuos con características ventajosas tienen más probabilidades de sobrevivir y reproducirse, transmitiendo sus rasgos a su descendencia. Por lo tanto, las generaciones futuras incluirán los nuevos rasgos como un componente común del genotipo de la especie, lo que garantizará una mejor adaptabilidad al entorno en el que viven (Kuri et al., 2002).

Debido a esta teoría, surgió la idea de considerar mecanismos de optimización utilizados en la naturaleza. Los cuales ejecutan procesos simples tales como: mutaciones aleatorias y reproducción, que dan como resultado genotipos optimizados para el entorno en el que viven. Esto permite resolver problemas que poseen una función objetivo, mejorando su solución en cada etapa (Pérez and Rückauer, 2002).

Derivado de la abstracción del procedimiento se establecieron tres elementos clave para la optimización de procesos (Maniezzo, 2021):

- **Presión selectiva:** actúa sobre poblaciones de individuos más grandes de lo que el medio ambiente puede soportar.
- **Mutaciones aleatorias:** muta los genotipos de los individuos de estudio, lo que permite la recombinación del genotipo de los padres en su descendencia.
- **Reproducción:** realiza la recombinación del genotipo de los padres en su descendencia.

Los tres elementos anteriores se consideran como los componentes *elementales* de los métodos EC. Sin embargo, de acuerdo con la literatura, se ha vuelto costumbre usar términos biológicos para denotar conceptos de optimización y no al revés. La Tabla 2.1 muestra los términos principalmente utilizados (González, 2020).

Tabla 2.1: Traducción de la nomenclatura CE

Biología	Optimización
Población	Conjunto de soluciones tentativas
Individuo	Solución tentativa
Genotipo	Solución tentativa
Cromosoma	Solución tentativa
Gen	Solución variable
Alelo	Valor de la variable de solución
Fitness	Función objetivo para maximizar
Crossover	Recombinación de dos soluciones
Mutación	Movimiento local
Evolución	Proceso de búsqueda

Es así que, la metáfora sugiere que así como la presión selectiva obliga a que una especie se adapte cada vez más a su entorno mediante mutaciones y recombinaciones, también un conjunto de soluciones puede obtener mejores valores de función objetivo gracias a movimientos locales únicos y a la recombinación de soluciones. Una contribución destacada de los métodos EC ha sido enfocar su atención en la actualización de un conjunto completo de soluciones por cada iteración, en vez de tratar una sola (Pérez and Rückauer, 2002).

2.3.2.2. Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos (GA, por sus siglas en inglés) son probablemente los métodos de computación evolutiva que más destacan, cuyos principales elementos son codificación, adecuación, inicialización, recombinación mutación. En sus inicios, se clasificaron como un enfoque independiente de los algoritmos de búsqueda locales. Sin embargo, cuando se abordaban problemas de optimización combinatoria, se presenta la necesidad de incluir algoritmos de búsqueda locales, lo que los convierte en esenciales dentro de diversas aplicaciones (Kuri et al., 2002).

Los algoritmos genéticos funcionan mejor en soluciones codificadas como cadenas binarias de igual longitud sin restricciones. Siempre que sea posible se trabaja con tal codificación, aunque es posible implementar codificaciones de solución más complejas como árboles o grafos. Después de haber definido la codificación, los algoritmos genéticos generan un conjunto inicial de soluciones tentativas y se iteran hasta que se cumple una condición de terminación. El bucle principal está conformado por tres procedimientos: selección, recombinación y mutación (Pose, 2000).

Debido a que todos los elementos que constituyen a los algoritmos genéticos cambian en la literatura, se debe considerar a éstos como una clase de algoritmos que se adaptan a diferentes casos de uso. Para este trabajo se usa la versión estándar que supone se actúa sobre una población $X = x_1, \dots, x_i, \dots, x_m$ de soluciones tentativas, donde cada solución $x_i \in X$ es una cadena binaria con fitness f_i . Los principales pasos de algoritmos genéticos son (Maniezzo, 2021):

- La inicialización generalmente se implementa mediante la generación aleatoria de una serie de soluciones. Este número se mantiene constante durante la búsqueda. El número de soluciones en la población suele ser uno de los parámetros del algoritmo.
- La selección puede implementarse de manera diferente, con o sin la necesidad del cálculo explícito de los valores de aptitud. Los más comunes son los siguientes:
 1. La selección de la ruleta: es un esquema de selección en el que cada solución superviviente está determinada por una selección de Monte Carlo con repetición entre todos los elementos de X .
 2. La selección basada en rangos: es una distribución $p_i \forall i \in \{1, \dots, m\}$ de valores de probabilidad no crecientes y se define a priori. Todos los elementos de X se ordenan

mediante valores decrecientes de aptitud, luego la selección continúa como en la selección de la ruleta.

3. La selección del torneo: es una selección en la que dos o más elementos de la población original son elegidos al azar a partir de la población original, manteniendo el que tiene mayor aptitud. Un determinado elemento se puede seleccionar más de una vez, por lo que se debe considerar que en este caso no es necesario tener valores de aptitud cuantificados, ni siquiera una clasificación, ya que las comparaciones hacen el trabajo.
- La recombinación es un operador específico del problema de estudio, que se emplea cuando la codificación elegida alcanza soluciones inviables. La idea es seleccionar dos elementos de la población sobreviviente, llamados padres y recombinarlos para obtener dos nuevas soluciones. El caso más fácil entre arreglos binarios de la misma longitud generalmente se implementa como un cruce de un punto o de dos puntos, como se muestra en la Figura 2.2. En el primer caso se elige un punto de corte más pequeño que la longitud de la matriz y todos los valores más allá de ese índice se intercambian. En el segundo caso, se eligen dos índices y se intercambian los valores entre ellos. Este operador se suele aplicar en probabilidad a cada par de padres elegidos, si no se aplica los dos hijos son iguales a los padres. La probabilidad de que se aplique el cruzamiento p_c es otro de los parámetros estándar del algoritmo genético.
 - La mutación es originalmente un movimiento aleatorio en un vecindario predefinido. La implementación estándar en el caso de cadenas binarias implica voltear con probabilidad p_i cada bit de cada solución, donde p_i es el tercero de los parámetros estándar del algoritmo genético. Posteriormente, la mutación se ha vuelto compleja y en ocasiones ha sido sustituida por una búsqueda local de soluciones.

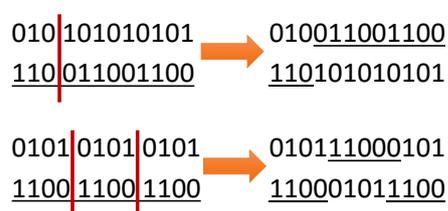


Figura 2.2: Cruce de un punto y dos puntos.

Con base en las probabilidades se puede apreciar que los elementos más innovadores de los algoritmos genéticos se derivan de su gestión de un conjunto de soluciones en lugar de una

sola. Esto permite el diseño de características de optimización que operan en conjuntos de soluciones, que son inconcebibles en el caso de una única solución. Si bien algunas de estas características se presentarán más adelante en esta sección, al describir las contribuciones matemáticas específicas, recordamos aquí dos de ellas, que también se han adoptado en otros algoritmos basados en poblaciones (Pose, 2000).

- El elitismo consiste en generar una copia de la mejor solución de una iteración e introducirla al conjunto de soluciones de la siguiente generación. Debido a que el operador de selección trabaja en términos de probabilidad, no hay garantía de que las mejores soluciones encontradas sobrevivan a través de las iteraciones. Copiar la mejor solución de una generación a la siguiente asegura que sus componentes estén disponibles también para futuras recombinaciones (Kuri et al., 2002).

Entre las características principales de los algoritmos genéticos se destacan que son capaces de optimizar una función objetivo con mínimo de restricciones explícitas, aportando un conjunto de soluciones alternativas y eficaces. Entre las desventajas, se menciona la lentitud del proceso, la dificultad para afinar la solución, obtener al menos óptimos locales (cuando no se utilizan búsquedas locales) y la necesidad de adaptar los operadores básicos cuando se imponen restricciones a las soluciones (Maniezzo, 2021).

2.3.2.3. Estrategias de evolución

Las estrategias de evolución (ES, por sus siglas en inglés), son algoritmos esencialmente similares a los algoritmos genéticos, pero con mayor número de normas en su funcionamiento. Se propusieron antes que los algoritmos genéticos, sin embargo su uso se intensificó después del uso de los algoritmos genéticos. La estructura general del algoritmo estrategias de evolución es similar al correspondiente de los GA: un bucle principal con una población de soluciones candidatas, sobre la que actúan operadores de selección, reproducción y mutación. La primer diferencia principal es que se espera que las soluciones sean matrices de números reales, en lugar de cadenas de bits, aunque hay algunas excepciones a esa regla. Lo peculiar de las estrategias de evolución es la codificación dentro de la matriz de valores reales que representa una solución tanto de los datos como de los parámetros de control de los operadores que actúan sobre ella (González, 2020).

De acuerdo con la notación estándar de las estrategias de evolución, la población está compuesta por soluciones μ , cada una de las cuales está compuesta por una secuencia numérica x_i^s que representa la solución y otra x_i^p que representa los parámetros de control de los operadores. En cada iteración se define una nueva población de elementos λ , con $\lambda \geq \mu$, que luego se reducirá a μ mediante selección. Esto se simboliza al denotar el algoritmo como (μ, λ) o $(\mu + \lambda)$, donde $+$ indica que también se cumple para $\lambda > 1$ (Pérez and Rückauer, 2002).

Cada ciclo en el algoritmo 4 primero construye una población de soluciones λ , iterando λ veces un ciclo (Maniezzo, 2021)

- Selecciona aleatoriamente p elementos padres de la población actual (el número de padres no está restringido a 2 como en los algoritmo genético).
- Recombina los padres seleccionados p obteniendo una descendencia x_i (paso 7).
- Muta las variables de decisión de la descendencia, con base en los parámetros de control, codificados en la propia solución (paso 8).
- Muta los parámetros de control que forman parte de la descendencia en función de los valores de las variables de control actuales (paso 9).

Algorithm 4 Simple (μ, λ) .

```
1: function EvolutionStrategies  $(\mu, \lambda, p)$ 
2: Entrada : Parámetros de control  $\mu, \lambda, p$ 
3: Salida: Un conjunto de soluciones factibles  $X$ 
4: Inicializar  $X = \{x_i = [x_i^s, x_i^p], 1 \leq i \leq \mu\}$ 
5: repetir
6:     para  $i = 1, \dots, \lambda$  hacer
7:          $[x_i^s, x_i^p] = \text{recombinar}(\text{seleccionar padres}( X, p ))$ 
8:          $x_i^s = \text{mutar}([x_i^s, x_i^p])$ 
9:          $x_i^p = \text{mutar}(x_i^p)$ 
10:    fin
11:     $X = X \cup \{[x_i^s, x_i^p], 1 \leq i \leq \lambda\}$ 
12:     $X = \text{seleccionar}(\mu, X)$ 
13: hasta (condición de terminación)
```

La selección de los padres puede tener diversas propuestas, pero a menudo se implementa como una selección aleatoria uniforme. Asimismo, la recombinación se puede realizar de varias formas, pero a menudo se implementa como una copia del valor de cada variable de un determinado padre seleccionado al azar, o mediante alguna función simple calculada sobre los valores

tomados por la variable correspondiente en los padres (por ejemplo, tomando su media, o el valor máximo, etc.) (González, 2020).

Sin embargo, el operador de mutación requiere mayor detalle debido a que se trabaja con variables continuas y por lo tanto operaciones simples como voltear bits serían ineficaces. La mutación debe producir variaciones en la solución y esto generalmente se consigue agregando una perturbación simétrica a cada valor obtenido después de la recombinación. La perturbación se obtiene sumando a la variable un número extraído de una distribución normal multivariante $N(0, C)$, con media cero y matriz de covarianza $C \in R^{n \times n}$, donde n es la longitud de la parte afectada de la solución. El resultado es $x + N(0, C)$ (Pose, 2000).

2.3.2.4. Optimización de colonia de hormigas

La optimización por colonia de hormigas (ACO) constituye una serie de algoritmos que se denomina de forma general como *ant system*. Una característica común de todos los algoritmos optimización por colonia de hormigas, al igual que en los Ant System es la comunicación indirecta entre los diferentes hilos de ejecución con el objetivo de mejorar las elecciones locales hechas por cada uno de ellos en cada una de sus iteraciones (Algarín, 2010).

La idea básica de la optimización por colonia de hormigas se deriva de una observación biológica a finales de la década de 1980. Este enfoque se refiere a la forma en que las hormigas identifican caminos eficientes desde su nido hasta las zonas de alimento. El proceso natural involucrado en el comportamiento de las hormigas se basa en feromonas que las hormigas errantes depositan en el suelo. Cuando una hormiga se mueve en un camino que conecta una zona de comida y su nido, deja en el suelo un rastro de feromona que tiene el uso de dirigir a cualquier hormiga errante hacia la comida (Alonso et al., 2004).

Si un obstáculo repentino corta el camino, las hormigas inicialmente no saben cómo evadirlo y eligen al azar una dirección a seguir, de tal manera que la mitad de las hormigas se dirige a cada lado del obstáculo, la mitad va a la derecha y la otra mitad a la izquierda (ver Figura 2.3). Sin embargo, habrá un momento en que las hormigas que llegan verán ambos caminos. Por lo tanto, las hormigas que llegan el camino $A' - B'$ encontrarán a la derecha el doble de feromonas que a la izquierda, siendo lo contrario para las que vienen por el camino $A - B$ (Maniezzo, 2021).

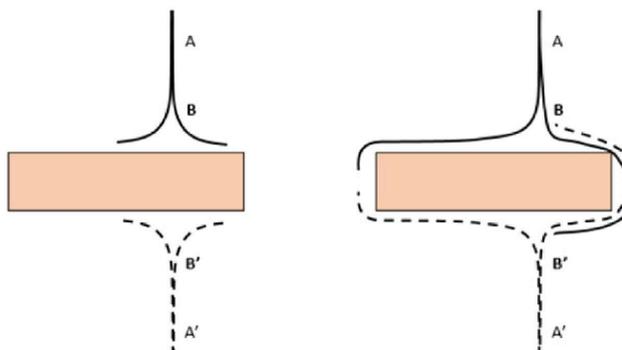


Figura 2.3: Hormigas esquivando un obstáculo (Maniezzo, 2021).

La elección del camino a seguir no es determinista, pero está sesgada por la feromona: cuanto más feromona, mayor es la probabilidad de seguir un determinado camino. Por lo tanto, las hormigas entrantes elegirán el curso correcto con una probabilidad dos veces mayor que la de elegir el curso izquierdo. Por lo tanto, se espera que el doble de hormigas vayan a la derecha y depositen sus feromonas en ese camino, aumentando la intensidad de feromonas entre los caminos más cortos. Después de un tiempo, la mayoría de las hormigas elegirán el camino más corto, excepto un grupo menor que optará por el camino de baja probabilidad (Algarín, 2010).

2.3.2.5. Heurísticas de optimización por colonia de hormigas

El sistema de hormigas se basa en la teoría de la sección 2.3.2.4, la cual define una metaheurística constructiva aleatoria paralela donde algunos componentes derivan del comportamiento de las hormigas. Este sistema es una metaheurística basada en la población, que utiliza un conjunto de subprocesos, los cuales implementan un agente que construye iterativamente una solución del problema a resolver. Cada agente constructivo se denomina hormiga y produce soluciones parciales que generan una más completa en cada etapa hasta conseguir una solución factible (Al-Salami, 2009).

Generalmente, las soluciones parciales para los problemas de estudio pueden verse como estados. Cada hormiga pasa de un estado ι a otro ψ , lo que representa una solución parcial más completa. Se debe considerar que ι y ψ se utilizan para denotar estados o soluciones parciales, mientras que i y j se utilizan para indexar componentes de soluciones. En el caso del problema general de asignación, ι sería una solución parcial donde solo la mitad de los clientes están asignados a servicios y ψ una solución parcial donde se asigna un cliente más (Algarín, 2010).

Por cada paso σ , cada hormiga calcula un conjunto de expansiones factibles a su estado actual y se mueve a una de estas en términos de probabilidad. De acuerdo con [Maniezzo \(2021\)](#), la estructura es la misma que la de la heurística constructiva pero el orden de los componentes no es determinista, sino que en cada paso, el siguiente componente a incluir en la solución se elige teniendo en cuenta:

- La expectativa a *priori* $n_{\iota\psi}$ de la utilidad de un movimiento en particular se incluye en la solución mediante *move* (ι, ψ) , como en los enfoques constructivos estándar. La medida a priori de la utilidad esperada de un movimiento se denomina *atractivo del movimiento*. En varias aplicaciones, su valor no cambia durante la búsqueda.
- Una medida a *posteriori* del nivel de ajuste de las soluciones construidas utilizando ese movimiento en particular, $\tau_{\iota\psi}$. La medida a posteriori de la utilidad esperada de un movimiento se denomina recorrido en movimiento. Su valor se actualiza iterativamente durante la búsqueda.

Dado un conjunto P de hormigas llamado población, para cada hormiga $k \in P$, la probabilidad $p_{\iota\psi}$, el movimiento del estado ι al estado ψ depende de la combinación de dos valores: el atractivo del movimiento, calculado por alguna heurística que indica la conveniencia a priori de ese movimiento, y el nivel de avance del movimiento, que indica el nivel de competencia en el pasado para realizar ese movimiento en particular ([Al-Salami, 2009](#)).

2.3.2.6. Probabilidad de un movimiento

La fórmula para definir la distribución de probabilidad de la elección de movimientos alternativos suele ser diferente entre las versiones de los algoritmos de optimización por colonia de hormigas. Sin embargo, la fórmula más popular proviene de los sistemas de hormigas, donde las probabilidades se calcularon de la siguiente manera. Siendo ψ el conjunto de expansiones factibles del estado ι , para cada hormiga $k \in P$ y para cada $\psi \in \varphi$ se puede calcular ([Maniezzo, 2021](#)):

$$Pr = \frac{\tau_{\iota\psi}^{\alpha} n_{\iota\psi}^{\beta}}{(\sum_{v \in \varphi} \tau_{\iota v}^{\alpha} n_{\iota v}^{\beta})} \quad (2.21)$$

La fórmula 2.21 combina dos elementos: 1. el atractivo $n_{\iota\psi}$ del movimiento del estado ι al estado ψ con el recorrido correspondiente $\tau_{\iota\psi}$ y 2. normaliza este valor considerando todas las posibles expansiones del estado ι . Donde, α y β son parámetros definidos por el usuario que miden la importancia relativa del sendero con respecto al atractivo ([Alonso et al., 2004](#)).

2.3.2.7. Actualización de recorrido

Los valores de atractivo son datos de entrada que se calculan antes de iniciar la búsqueda y no deben actualizarse durante la búsqueda. Por ejemplo, en el caso del problema general de localización asignación, el valor de atractivo es el inverso de un costo de asignación. Los recorridos, por el contrario, se actualizan de forma iterativa durante la búsqueda, aumentando el nivel de aquellos que tienen movimientos que formaban parte del conjunto de soluciones factibles, mientras que disminuyen todas las demás. De esta manera, los movimientos que contribuyeron a crear dichas soluciones aumentan su probabilidad, mientras que los movimientos que por lo general conducen a soluciones no factibles tienen menos probabilidades de ser elegidos nuevamente (Algarín, 2010).

Después de cada iteración t del algoritmo 5, los recorridos se actualizan mediante la siguiente ecuación (Maniezzo, 2021):

$$\tau_{\iota\psi}(t+1) = \rho\tau_{\iota\psi}(t) + \Delta\tau_{\iota\psi} \quad (2.22)$$

Donde $0 \leq \rho \leq 1$ es un parámetro ajustable por el usuario, denominado coeficiente de evaporación, y $\Delta\tau_{\iota\psi}$ corresponde a la variación en la cantidad de feromona asociada al recorrido, resultado de la suma de las contribuciones de todas las hormigas que eligieron el movimiento (ι, ψ) para construir sus soluciones. Dichas contribuciones son proporcionales a la calidad de las soluciones obtenidas, lo que significa que soluciones de mejor calidad generan mayores incrementos en el valor del recorrido. Las implementaciones específicas de este proceso varían entre las diferentes variantes de optimización por colonia de hormigas (Al-Salami, 2009).

A partir de la ecuación 2.22, los recorridos asociados a movimientos que nunca son seleccionados tienden a desaparecer con el tiempo, reduciendo significativamente su probabilidad de ser elegidos en el futuro. Esto orienta las decisiones hacia movimientos que previamente generaron mayores contribuciones, es decir, aquellos que condujeron a buenas soluciones. Con base en los elementos descritos en las secciones anteriores, se detallan a continuación los parámetros definidos por el usuario utilizados en el algoritmo sistema de hormigas (Maniezzo, 2021):

- m : número de hormigas, que para este caso es igual al número de soluciones
- α : importancia relativa del atractivo
- β : importancia relativa del recorrido

Algorithm 5 Sistema de hormigas.

```
1: function AntSystem( $\alpha, \beta, \rho$ );
2: Entrada : Parámetros de control  $\alpha, \beta, \rho$ 
3: Salida: Una solución factible  $\mathbf{x}$ 
4: Inicializar una población  $P$  de  $m$  soluciones vacías:  $\sigma^k = \emptyset, k = 1, \dots, m$ ;
5: Inicializar  $\tau_{\iota\psi}$  y  $n_{\iota\psi}, \forall(\iota, \psi)$ 
6: repetir
7:     para cada hormiga  $k$  (actualmente en el estado  $\iota$ ) hacer // Construcción
8:         repetir
9:             elegir probabilísticamente el estado al que moverse usando la fórmula
10:            2.21;
11:            agregar el componente elegido a la solución de la  $k$ -ésima hormiga,  $\sigma^k$ 
12:         hasta (la hormiga  $k$  complete su solución);
13: fin
14: para cada movimiento de hormiga  $(\iota, \psi)$  hacer // Actualización de rastro
15:     calcular  $\Delta_{\iota\psi}$ ;
16:     actualizar la matriz de rastros usando la fórmula 2.22;
17: fin
18: hasta (condición de terminación);
```

- ρ : coeficiente de evaporación
- τ_0 : valor de camino inicial

Las principales características del sistema de hormigas pueden describirse de la siguiente manera (Algarín, 2010):

- El sistema de hormigas es una heurística de propósito general inspirada en la naturaleza. Su estructura introduce un componente estocástico en un enfoque constructivo básico. Aunque no está específicamente diseñado para un problema o clase de problemas, es adaptable a cualquier problema de optimización combinatoria.
- Sistema de hormigas implementa una búsqueda distribuida y paralela. Cada hormiga construye su solución de manera independiente, sin comunicación directa entre ellas; la coordinación se logra indirectamente mediante la actualización de las feromonas. Esto permite ejecutar los subprocesos constructivos en paralelo, mejorando el rendimiento comparado con una ejecución secuencial.
- El sistema de hormigas combina una heurística constructiva con una representación adaptativa del problema, lo que permite orientar la búsqueda hacia las características particulares de la instancia específica que se está resolviendo.

El sistema de hormigas ha sido generalizado en optimización por colonia de hormigas, una clase de algoritmos que comparten la idea principal de realizar una búsqueda paralelizada a

través de varios subprocesos constructivos, todos basados en una estructura de memoria dinámica que almacena información sobre la efectividad de las soluciones previas. Cada agente simula el comportamiento de las hormigas, aprovechando la información obtenida de los resultados anteriores para mejorar futuras soluciones (Alonso et al., 2004).

2.3.2.8. Búsqueda de dispersión

Los algoritmos de búsqueda dispersa, integrados con *path relinking*, fueron propuestos inicialmente como una heurística basada en relajaciones sustitutas. Aunque en sus primeras publicaciones no contaban con suficiente evidencia de su efectividad computacional, tardaron dos décadas en publicarse las primeras implementaciones exitosas. Posteriormente, los algoritmos de búsqueda dispersa fueron estudiados como un vínculo entre la búsqueda tabú y los algoritmos genéticos (Alegre et al., 2010).

La idea central de los algoritmos búsqueda dispersa es utilizar un proceso sistemático de recombinación de soluciones para lograr las características deseadas o satisfacer restricciones. El enfoque se basa en el uso de un conjunto R , llamado *conjunto de referencia*, que está compuesto por soluciones o puntos representativos. El bucle principal del algoritmo itera a través de una secuencia de operaciones, donde los operadores de recombinación se aplican primero a los puntos de R para generar nuevas soluciones, que luego se utilizan como puntos de partida para un procedimiento de búsqueda local. Las mejores soluciones obtenidas se incorporan al conjunto de referencia al inicio de la siguiente iteración (Bermudez et al., 2016).

El concepto de *bueno* utilizado en el algoritmo de búsqueda dispersa es amplio y no se limita solo al valor objetivo como criterio para evaluar los puntos recién generados. Los mecanismos empleados en la búsqueda dispersa no siguen un diseño uniforme, lo que permite la exploración de diferentes posibilidades en implementaciones particulares. A continuación, se describen los pasos del algoritmo 6 (Maniezzo, 2021):

- **Paso 1. Inicialización:** Se define el conjunto de referencia R mediante un procedimiento de diversificación.
- **Paso 4. Búsqueda local:** Se aplica una búsqueda local para mejorar la calidad de las soluciones generadas en el Paso 1, obteniendo soluciones mejoradas y factibles que se incorporan al conjunto de referencia.
- **Paso 5. Generación de subconjuntos:** Se genera una colección de subconjuntos a

Algorithm 6 Algoritmo búsqueda dispersa genérico.

```
1: function GenericScatterSearch(numpop);
2: Entrada : Parámetros de control numpop
3: Salida: Un conjunto de soluciones factibles X
4: repetir
5:     Generar un conjunto inicial de soluciones R (conjunto de referencia);
6:     Generar nuevas soluciones aplicando operadores de recombinación al conjunto R;
7:     Modificar las soluciones obtenidas en el paso 6 para obtener soluciones factibles;
8:     Añadir un subconjunto de soluciones buenas entre las producidas en el paso 5 al
    conjunto R;
9: hasta (condición de terminación);
10: X = R
```

partir del conjunto de referencia.

- **Paso 6. Recombinación:** Para cada subconjunto de soluciones en el conjunto de referencia, se generan una o más nuevas soluciones.
- **Paso 7. Búsqueda local:** Se aplican mejoras adicionales mediante la búsqueda local a cada solución producida en el Paso 6.
- **Paso 8. Actualización del conjunto de referencia:** Se actualiza el conjunto de referencia incorporando las mejores soluciones obtenidas en el Paso 7 y, si es necesario, eliminando las soluciones de menor calidad.
- **Paso 9. Repetición:** Se repiten los pasos 5 a 9 hasta que se cumpla una condición de parada.

La implementación del Algoritmo 6 requiere describir los siguientes componentes (Alegre et al., 2010):

- **Procedimiento de diversificación:** Este procedimiento se utiliza para inicializar el conjunto de referencia. Se genera una secuencia de soluciones de manera que cada nueva solución maximice su distancia respecto a las ya generadas, según una métrica específica.
- **Procedimiento de recombinación:** Para cada subconjunto *S* generado, se crean nuevas soluciones a partir de la recombinación de elementos de *S*. Este operador puede depender del problema: en el caso de la programación entera, es posible utilizar una combinación lineal para generar nuevas soluciones, algunas de las cuales podrían situarse fuera del casco convexo de las soluciones originales.

- **Actualización del conjunto de referencia:** Después de cada paso de búsqueda local, se actualiza el conjunto de referencia, que contiene hasta n_{max} de las mejores soluciones, ordenadas por calidad decreciente. Se inserta el nuevo óptimo local si cumple con los criterios de calidad y no es una solución duplicada. Para optimizar las operaciones de ordenamiento y búsqueda, se recomienda utilizar una *función hash*.

2.3.3. Heurísticas constructivas

Las heurísticas constructivas para problemas de optimización combinatoria inician una solución vacía. Los posibles componentes a incluir se seleccionan según una medida específica, y se agregan los mejores componentes a una solución parcial hasta obtener una solución completa (Toro-Ocampo et al., 2016).

La forma en que se definen y seleccionan los componentes influye en la diferencia entre los algoritmos. Se pueden ordenar y seleccionar componentes de un subconjunto de vecinos potenciales en cada iteración. La definición de vecindad caracteriza los algoritmos resultantes: por ejemplo, en problemas de árboles de expansión mínima, el *algoritmo de Kruskal* realiza un único ordenamiento estático de los componentes antes de iniciar, mientras que el *algoritmo de Prim* realiza un ordenamiento adaptativo en cada iteración basado en la vecindad (Maniezzo, 2021).

Para ilustrar mejor, en el caso del problema de asignación generalizado, los componentes de una solución son los arcos que conectan clientes con servicios, representados por las variables de decisión x_{ij} . La estructura general de una heurística constructiva para el problema de asignación generalizado se presenta en el Algoritmo 7 (Toro-Ocampo et al., 2016).

La vecindad constructiva $N_C(\tilde{x})$ de una solución parcial \tilde{x} está definida implícitamente por el conjunto de localizaciones de todos los clientes no asignados que no provocan una sobrecarga del servicio. A partir del Algoritmo 7, surgen dos enfoques principales en las alternativas constructivas. El primero se basa en el criterio de ordenamiento utilizado en el paso 5, y el segundo en la decisión de ordenar los componentes solo una vez (ordenamiento estático), como en el Algoritmo 7, o al inicio de cada ciclo, trasladando la instrucción 5 dentro del ciclo de repetición (ordenamiento adaptativo).

2.3.4. Heurísticas de búsqueda local

La heurística de búsqueda local implementa algoritmos que mejoran una solución inicial explorando iterativamente un subconjunto del espacio de búsqueda *próximo* a ella. Para ello,

2. MARCO TEÓRICO

Algorithm 7 Heurística constructiva genérica para el problema de asignación generalizado

```
1: function Constructive;
2: Entrada:
3: Salida: Una solución factible  $\bar{x}$  o una indicación de fallo;
4: Establecer  $x_{ij} = 0, i \in I, j \in J$ ; // Solución parcial vacía;
5: Crear una lista lstComp de todos los componentes, pares  $(i, j)$  en el caso del GAP, ordenados
   según un criterio adecuado;
6: criterio adecuado;  $N_C \tilde{x} = f(i, j), i \in I, j \in J$ 
7: repetir
8:     si lstComp = 0 entonces devolver fallo
9:      $(i, j) = \text{extraer}(\textit{lstComp})$ 
10:    si  $(i, j)$  puede ser agregado de manera factible a la solución entonces establecer
     $\tilde{x}_{ij} = 1$ 
11: hasta solución completa
12: devolver  $\tilde{x}$ 
```

primero se debe definir el concepto de *próximo*. Esto se logra mediante una función de vecindad que, dada una solución x , identifica un subconjunto de soluciones vecinas $N(x)$, es decir, aquellas que difieren ligeramente de la solución original. Este subconjunto se conoce como el vecindario de búsqueda local o vecindario de x (Burke et al., 2011).

Algorithm 8 Heurística de búsqueda local genérica para el problema general de asignación

```
1: function GenericLocalSearch;
2: Entrada : Una solución factible  $\mathbf{x}$ 
3: Salida: Una solución factible  $\mathbf{x}$ 
4: Encontrar  $x' \in N(x) : Z_{GAP}(x') \leq Z_{GAP}(x'') \forall x'' \in N(x)$ 
5: si  $Z_{GAP}(x') < Z_{GAP}(x)$  entonces
6:      $x = x'$ ;
7:     ir a 4;
8: fin
9: devolver  $\mathbf{x}$ ;
```

Como se observa en el Algoritmo 8 (caso de mejora), la actualización de la solución en el paso 6 se denomina movimiento. Este proceso puede realizarse para buscar una mejor solución en el vecindario o para identificar la primera solución viable que se encuentre al explorar el vecindario en el paso 4 (caso de primera mejora).

En la heurística de búsqueda local, las principales diferencias radican en la función de vecindario utilizada y en la manera en que se explora este en el paso 4. Es importante tener en cuenta que vecindarios más grandes pueden ofrecer mejores soluciones, aunque esto implica un mayor tiempo de exploración. En este trabajo, se asume la exploración exhaustiva de los vecindarios, aunque en la actualidad existen propuestas que emplean vecindarios de tamaño

exponencial (Maniezzo, 2021).

2.3.5. Algoritmos exactos

Los algoritmos exactos no son el enfoque principal de este trabajo, dado que se priorizan las aproximaciones heurísticas. Tradicionalmente, los métodos de solución exacta y los heurísticos han estado separados, compartiendo solo componentes específicos o soluciones. Sin embargo, los avances en matemáticas han permitido integrar ambos enfoques. Así, ideas para una exploración eficiente del espacio de búsqueda pueden incorporarse a algoritmos matemáticos. En el contexto actual, la mayoría de los códigos exactos especializados no son competitivos frente a una aplicación bien configurada de programación entera mixta de propósito general para el PGA.

2.4. Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II)

La optimización de la asignación de clientes a servicios ha adquirido una relevancia creciente en campos tan diversos como la distribución de recursos empresariales y la planificación urbana. En este contexto, algoritmos evolutivos como NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) se han destacado como herramientas potentes para resolver problemas multiobjetivo, permitiendo identificar soluciones eficientes y equilibradas (Ji et al., 2007).

NSGA-II es un algoritmo evolutivo diseñado para abordar la optimización multiobjetivo, donde varios objetivos deben ser optimizados simultáneamente. Propuesto por Kalyanmoy Deb en 2002 como una mejora del NSGA original, este algoritmo se basa en los principios de los algoritmos genéticos, que se inspiran en la evolución biológica y en la teoría de la selección natural, aplicando mecanismos de reproducción, selección y variación (Ma et al., 2023).

El algoritmo incorpora un mecanismo de elitismo, que conserva las mejores soluciones pareto-óptimas entre generaciones, ayudando a mantener soluciones de alta calidad a lo largo del tiempo. Aunque se han propuesto diversas mejoras y extensiones de NSGA-II para enfrentar retos específicos en diferentes dominios, sigue siendo una herramienta central en la investigación de problemas cada vez más complejos (Ji et al., 2007).

NSGA-II ha demostrado su versatilidad en múltiples disciplinas. Por ejemplo, Deb et al.

(2002) aplicaron con éxito el algoritmo en áreas como ingeniería, planificación urbana y diseño de sistemas, evidenciando su eficacia y adaptabilidad en diversos contextos.

Los principios fundamentales que rigen el funcionamiento del algoritmo NSGA-II, pilares que lo convierten en una opción eficaz para la optimización multiobjetivo (Ji et al., 2007).

1. **Representación cromosómica:** Cada solución del problema se representa como un cromosoma, cuyos genes codifican las variables de optimización.
2. **Población inicial:** Se genera una población aleatoria de soluciones potenciales, evaluadas mediante una función de aptitud que considera los múltiples objetivos.
3. **Dominancia no dominada:** Una solución A domina a otra B si es igual o mejor en todos los objetivos y estrictamente mejor en al menos uno.
4. **Frentes no dominados:** Las soluciones se agrupan en frentes no dominados, donde el primer frente contiene las soluciones no dominadas.
5. **Operadores genéticos:** El cruzamiento combina soluciones parentales para crear nuevas, y la mutación introduce variabilidad.
6. **Selección basada en dominancia y distancia:** Se seleccionan soluciones considerando tanto la dominancia como la densidad de soluciones cercanas en el espacio objetivo, promoviendo diversidad y convergencia.

Los pasos iterativos que estructuran el funcionamiento de NSGA-II guían a la obtención de conjuntos pareto-óptimos bien distribuidos, marcando su éxito en la optimización evolutiva (Liang et al., 2023).

1. **Inicialización de la población:** Generación aleatoria de una población de soluciones, representadas como cromosomas.
2. **Evaluación de la aptitud:** Se calcula la aptitud de cada solución, evaluando cada objetivo de manera independiente.
3. **Dominancia y frentes no dominados:** Las soluciones se clasifican en frentes no dominados según su dominancia.
4. **Asignación de rangos y distancia de congestión:** Se asigna un rango y se calcula la distancia de congestión para fomentar la diversidad en la población.

5. **Selección de padres:** Se seleccionan los padres considerando la dominancia y la distancia de congestión.
6. **Operadores genéticos:** Aplicación de cruzamiento y mutación para generar descendencia.
7. **Evaluación de la aptitud de la descendencia:** Evaluación de la aptitud de las nuevas soluciones.
8. **Unión de poblaciones:** Se combinan las poblaciones original y descendiente para formar una nueva intermedia.
9. **Clasificación y selección de la nueva población:** Se clasifica y selecciona una nueva población basada en la dominancia y se preserva el elitismo.
10. **Repetición del proceso:** El ciclo se repite hasta cumplir la condición de parada.
11. **Condición de parada:** Define una condición de parada, como un número máximo de generaciones o una convergencia aceptable.
12. **Convergencia y diversidad:** NSGA-II equilibra la convergencia y la diversidad a lo largo de las generaciones.
13. **Resultado final:** Al finalizar, se obtiene un conjunto pareto-óptimo de soluciones equilibradas.

La información presentada proporciona una base comprensiva para explorar y entender la eficacia de NSGA-II en la optimización multiobjetivo. Su capacidad para generar soluciones pareto-óptimas eficientes y bien distribuidas lo consolida como una herramienta esencial en la resolución de problemas complejos en diversos campos de aplicación.

2.5. Lógica difusa

La lógica difusa ofrece un mecanismo de inferencia que permite imitar los procesos de razonamiento humano en sistemas basados en el conocimiento. Esta teoría proporciona un marco matemático adecuado para modelar la incertidumbre en los procesos cognitivos humanos, haciéndolos manejables por una computadora (Kahraman and Gündogdu, 2021).

2. MARCO TEÓRICO

El principal desafío de la lógica clásica radica en su limitada capacidad de expresión. Si, por ejemplo, se busca agrupar personas según su estatura en categorías de *altas* o *bajas*, la lógica clásica sugiere definir un umbral de pertenencia. Por ejemplo, si se considera que una persona es *alta* si mide 1.80 m o más, quienes midan menos de esa altura serán clasificadas como *bajas*. Así, una persona de 1.79 m será tratada igual que alguien de 1.50 m, ya que ambos serán categorizados como *bajos*. Sin embargo, si se utilizara un sistema que permita transiciones suaves entre categorías, la realidad se modelaría de una manera más precisa (Ross, 2009).

De igual modo, no existe un valor numérico fijo que defina quién es *joven*. Para algunas personas, 25 años es considerado joven, mientras que para otras, 35 años puede serlo. Este concepto es relativo al contexto: un presidente de 35 años podría considerarse joven, pero no así un futbolista de la misma edad. Sin embargo, existen certezas claras: una persona de 1 año es definitivamente joven, mientras que alguien de 100 años no lo es. En cuanto a los 35 años, el grado de juventud puede variar según el contexto. Para capturar esta realidad, el conjunto de *jóvenes* se define de forma que cada individuo pertenezca a él con un grado variable de posibilidad. (Ross, 2009).

La lógica difusa permite representar el conocimiento común, que es en su mayoría lingüístico y cualitativo, en un lenguaje matemático mediante la teoría de conjuntos difusos y sus funciones características. Este tipo de lógica multivaluada permite modelar matemáticamente la incertidumbre y la vaguedad, ofreciendo herramientas formales para su tratamiento. Representar valores discretos resulta complejo, ya que el conocimiento experto a menudo es impreciso, lo cual se debe a tres razones principales (Zadeh, 1965):

- **Pereza:** Recopilar una lista exhaustiva de todas las variables involucradas en un problema lleva tiempo. Además, debido a la naturaleza no determinista de la realidad, es difícil considerar todas las variables del entorno.
- **Ignorancia teórica:** Puede no existir un método teórico para modelar el problema, lo que dificulta obtener una lista completa de factores relevantes.
- **Ignorancia práctica:** Incluso conociendo todas las variables, puede ser complicado obtener datos concretos, ya que esta información puede ser incompleta o incluso errónea (como ocurre en la medicina, donde existen síntomas incorrectos, falsos positivos, etc.).

Como menciona Zadeh and Aliev (2018), *Cuanto mayor es la complejidad, menos significativos se vuelven los enunciados precisos, y más imprecisos los útiles*. La lógica difusa permite

mapear escenarios considerando el significado de las proposiciones, no su precisión. Este concepto se utilizó por primera vez en 1974, y hoy en día abarca la teoría de conjuntos difusos, reglas si-entonces, aritmética difusa, entre otros aspectos.

La lógica difusa fue introducida por [Zadeh et al. \(1996\)](#), profesor de la Universidad de Berkeley, California. En su propuesta, la lógica difusa ofrece una manera de procesar información en la que los datos pueden tener un grado de pertenencia parcial a diferentes conjuntos. A mediados de los años 70, esta teoría empezó a aplicarse a sistemas de control, cuando la potencia computacional lo permitió. Desde entonces, su uso en aplicaciones industriales y productos de consumo ha crecido considerablemente.

Los sistemas difusos son útiles para resolver problemas complejos que no tienen un modelo matemático simple, y también para procesos que presentan un comportamiento no lineal. Estos sistemas permiten que el conocimiento experto se exprese de manera lingüística, lo que suele ser relativamente fácil de obtener ([Ross, 2009](#)). Entre las principales ventajas de la lógica difusa se encuentran su flexibilidad, tolerancia a la imprecisión, capacidad para modelar problemas no lineales y su cercanía con el lenguaje natural.

Una característica fundamental de los sistemas basados en lógica difusa es que pueden reproducir razonamientos humanos comunes, en contraste con los basados en lógica clásica, que tratan la certeza de las proposiciones como un asunto de grados ([Zadeh and Aliev, 2018](#)).

La implementación de la lógica difusa es útil en situaciones como ([Zadeh, 1965](#)):

- Cuando se trata de procesos complejos sin un modelo sencillo.
- Cuando se debe incorporar la experiencia de un experto basada en conceptos imprecisos.
- Cuando partes del sistema son desconocidas o no pueden medirse de manera fiable.
- Cuando ajustar una variable afecta negativamente a otras.
- Cuando se deben representar conceptos con incertidumbre o vaguedad.

Entre las principales aplicaciones de la lógica difusa se incluyen ([Ross, 2009](#)):

- Control de sistemas: tráfico, vehículos (helicópteros), plantas hidroeléctricas, centrales térmicas, lavadoras, sistemas de metro, ascensores.
- Predicción y optimización: predicción de terremotos, optimización de horarios.

- Reconocimiento de patrones y visión artificial: seguimiento de objetos, reconocimiento de escritura, compensación de vibraciones, sistemas de enfoque automático.
- Sistemas de información o conocimiento: bases de datos, sistemas expertos.

2.5.1. Tratamiento de la incertidumbre

Existen varias aproximaciones para manejar la incertidumbre. Los primeros enfoques, desarrollados en el siglo XIX, se basaban en la probabilidad. A principios de los años 70, los primeros sistemas expertos utilizaron un enfoque lógico, que tenía ciertas limitaciones. Con el tiempo, surgieron nuevas propuestas, entre ellas (Raquel et al., 2007):

- **Métodos no numéricos:** Estos métodos cualitativos imitan el razonamiento humano. Un ejemplo es el razonamiento por defecto, que considera válidas ciertas conclusiones hasta que se presente evidencia de lo contrario. Las redes cualitativas y los sistemas de mantenimiento de coherencia son otros ejemplos.
- **Métodos numéricos:** En esta categoría, los métodos probabilistas son destacados, ya que asignan un valor numérico (grado de creencia) entre 0 y 1 para representar la incertidumbre de una afirmación. Este valor refleja el grado de confianza sobre una proposición, basándose en la evidencia disponible.
- **Métodos no probabilistas:** Un ejemplo es la teoría de Dempster-Shafer, que utiliza intervalos de valores para representar el conocimiento. La lógica difusa, como una extensión de la lógica multivaluada, también pertenece a este grupo, ya que facilita el modelado de información cualitativa de manera aproximada.

2.5.2. Diferencias entre probabilidad y lógica difusa

Aunque la lógica difusa y la probabilidad comparten ciertas similitudes, son conceptos distintos. De manera simplificada, la probabilidad refleja la frecuencia relativa de un evento en relación con el total de eventos posibles, mientras que el grado de pertenencia en lógica difusa mide la similitud de un evento con respecto a otro, en situaciones donde las propiedades no están claramente definidas (Ross, 2009).

Considerando el ejemplo de Zadeh and Aliev (2018) para ilustrar la diferencia: un sobreviviente de un accidente aéreo camina por el desierto en busca de ayuda, tras dos días sin agua (Zadeh and Aliev, 2018). Encuentra dos botellas de líquido. La botella A tiene una etiqueta

que indica un grado de *pertenencia* de 0.8 al conjunto de líquidos potables, mientras que la botella B tiene una probabilidad de 0.8 de contener líquido potable. ¿Cuál debería elegir el sobreviviente?

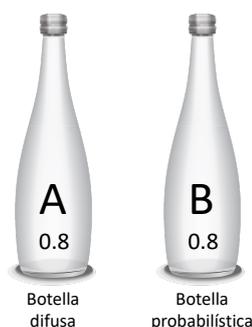


Figura 2.4: Comparativa entre botella difusa y probabilística (elaboración propia).

La botella A sugiere que el líquido que contiene es similar a otros líquidos considerados potables. Este valor numérico depende de la función de pertenencia vinculada al concepto de *líquido potable*. Supongamos que dicha función asigna un valor de 1 al agua pura, lo que implica que un valor de 0.8 indicaría que la botella A contiene agua no completamente pura, pero aún potable (o al menos no es venenosa ni perjudicial para la salud).

Por otro lado, la probabilidad asignada a la botella B indica que, tras realizar un gran número de experimentos, el contenido de la botella resulta potable en un 80% de los casos. Pero, ¿qué sucede el otro 20% de las veces? En esas situaciones, el líquido no era potable, lo que implica un 20% de probabilidad de que el sobreviviente fallezca al beber el contenido de la botella, debido a que podría contener amoníaco en lugar de agua.

Si las botellas tuvieran etiquetas con un valor difuso de 0.5 y una probabilidad de 0.5, ¿qué debería hacer el sobreviviente? En este escenario, debería evitar la botella A, ya que un grado de pertenencia de 0.5 indicaría que el contenido no se asemeja demasiado a líquidos potables dentro de ese contexto de conocimiento. La botella B, con una probabilidad de 0.5 de ser potable (lo que también es una incertidumbre total), ofrecería un 50% de probabilidades de que el líquido fuera potable, por lo que sería más razonable arriesgarse y optar por la botella B (Zadeh and Aliev, 2018).

2.5.3. Conjuntos difusos

Los conjuntos clásicos (también llamados nítidos en la lógica difusa) aparecen naturalmente debido a la necesidad humana de clasificar objetos y conceptos. Por ejemplo, al considerar los productos alimenticios, es posible formar varios conjuntos (Zadeh and Aliev, 2018):

- Frutas: Manzana, Pera, Plátano, etc.
- Verduras: Calabacín, Espinaca, etc.
- Carnes: Res, Cerdo, etc.

Los conjuntos nítidos pueden ser definidos de diferentes maneras (Raquel et al., 2007):

- A través de una enumeración de sus elementos: Frutas = manzana, pera,...
- Utilizando una función de pertenencia μ que toma valores de 0 o 1, definida sobre el universo de discurso U (es decir, el conjunto de todos los elementos que pueden o no pertenecer al conjunto). Por ejemplo, sea U el conjunto de todos los alimentos. Entonces, Frutas es un conjunto tal que $\mu(\text{manzana}) = 1$, $\mu(\text{pargo}) = 0$, etc.
- Mediante una característica que describa sus elementos, lo cual se puede hacer de varias formas:
 - Proporcionando una definición directa: Fruto = Producto del desarrollo del ovario de una flor tras la fecundación.
 - Como subconjunto de un conjunto ya definido: Frutas = Fruto comestible.

Un conjunto difuso para Ross (2009), incluye las siguientes definiciones:

- *Variable lingüística*: Se refiere a un concepto o noción que se describe de manera imprecisa. Ejemplos de variables lingüísticas incluyen altura, edad, error o variación del error. Se utiliza el término *lingüística* porque sus propiedades se expresan mediante el lenguaje natural.
- *Universo de discurso*: Es el conjunto de valores que los elementos relacionados con una variable lingüística pueden asumir. Por ejemplo, para la variable lingüística altura de una persona *normal*, el universo de discurso abarcaría valores entre 1.4m y 2.3 m.
- *Valor lingüístico*: Son las categorías en las que se puede dividir una variable lingüística. En el caso de la altura, el universo de discurso podría clasificarse en valores lingüísticos como bajo, mediano y alto.

- *Conjunto difuso*: Es un valor lingüístico asociado con una función de pertenencia. El valor lingüístico es el nombre del conjunto, mientras que la función de pertenencia asigna a cada elemento del universo de discurso un grado de pertenencia al conjunto difuso. Si la función de pertenencia solo toma valores en 0,1, el conjunto es nítido; si toma valores en $[0,1]$, es difuso.
- Dado un conjunto difuso A , el *alfa-corte* de A es el conjunto de elementos que pertenecen a A con un grado mayor o igual a alfa, es decir: $A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$.
- El *alfa-corte estricto* se define como el conjunto de elementos cuyo grado de pertenencia es estrictamente mayor que alfa: $A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$.
- El *soporte* de un conjunto difuso A es el conjunto nítido de elementos con un grado de pertenencia mayor que 0. Es decir, es el alfa-corte estricto de nivel 0: $\text{Soporte}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$.
- El *núcleo* de un conjunto difuso A es el conjunto nítido de elementos con un grado de pertenencia de 1, es decir, el alfa-corte de nivel 1: $\text{Núcleo } A = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$.
- La *altura* de un conjunto difuso A se define como el valor más alto de su función de pertenencia.
- Un conjunto difuso se considera *normalizado* si y solo si su núcleo contiene al menos un elemento, o si su altura es 1. En otras palabras: $\exists x \in X \mid \mu_A(x) = 1$.
- El *punto de cruce* es aquel elemento x de U para el cual $\mu_F(x) = 0.5$.
- Un *conjunto difuso unitario* (singleton) es aquel cuyo soporte es un único punto x en U , y la función de pertenencia de x es 1, es decir, el soporte y el núcleo coinciden y contienen solo un punto.

La teoría de conjuntos difusos busca desarrollar una serie de conceptos para abordar de manera sistemática la incertidumbre que surge cuando los límites entre las clases de objetos no están claramente delimitados. Un conjunto difuso puede entenderse como una clase en la que existe una transición gradual entre la pertenencia y la no pertenencia, es decir, un objeto puede tener un grado de pertenencia entre pertenencia total (valor uno) o no pertenencia (valor cero). En este sentido, los conjuntos convencionales (o nítidos) se consideran un caso particular de los conjuntos difusos, donde solo se admiten dos grados de pertenencia: uno y cero (Zadeh et al.,

1996).

De manera general, un conjunto difuso se puede definir como un conjunto con límites imprecisos. Dado X como el universo de discurso, sus elementos se denotan por x . En la teoría clásica de conjuntos nítidos, un conjunto C sobre X se define mediante la función característica de C , denotada como f_C (Ross, 2009):

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } x \in C \\ 0 & \text{cuando } x \notin C \end{cases} \quad (2.23)$$

Es decir, una función escalonada que se centra en los valores de umbral de decisión. Esta función asigna al universo X a un conjunto de dos elementos, donde $f_C(x)$ es 1 si el elemento x pertenece al conjunto C , y 0 si no pertenece. Al generalizar esta función para que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango que refleje el grado de pertenencia, obtenemos una función de pertenencia de un conjunto difuso. La función de pertenencia μ_A , que define un conjunto difuso A , se describe de la siguiente manera (Zadeh et al., 1996):

$$\mu_A = X \rightarrow [0, 1] \quad (2.24)$$

Donde $\mu_A(x) = 1$ indica que x pertenece completamente a A , $\mu_A(x) = 0$ indica que x no pertenece a A , y si $0 < \mu_A(x) < 1$, entonces x pertenece parcialmente a A . Este valor, que oscila entre 0 y 1, representa el grado de pertenencia de un elemento x a un conjunto A . Así, el intervalo de la ecuación anterior incluye los extremos y está compuesto por números reales. Aunque el rango más común para las funciones de pertenencia es $[0, 1]$, cualquier conjunto arbitrario con un orden total o parcial podría utilizarse. Por ejemplo, el término difuso *joven* puede definirse mediante un conjunto difuso como el siguiente (Ross, 2009):

Tabla 2.2: Grado de pertenencia en conjunto de acuerdo con Ross (2009).

Edad	Grado de pertenencia
≤ 25	1.0
30	0.8
35	0.6
40	0.4
45	0.2
≥ 50	0.0

En otras palabras, la función de pertenencia del conjunto difuso *joven* se define de la siguiente

manera (Zadeh et al., 1996):

$$\mu_A(x) = 1 \text{ si } x \leq 25, \mu_A(30) = 0.8, \dots, \mu_A(x) = 0 \text{ si } x \geq 50 \quad (2.25)$$

Esto se puede ilustrar en la siguiente gráfica:

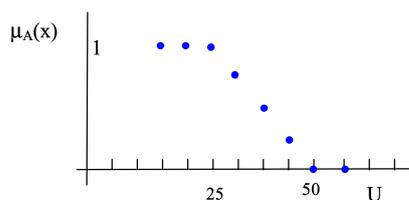


Figura 2.5: Función de pertenencia del conjunto difuso joven, de acuerdo con Zadeh (1965).

Si el universo de discurso es continuo, las funciones de pertenencia también serán continuas (Zadeh et al., 1996):

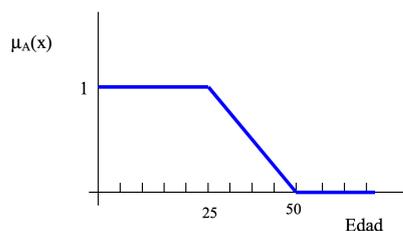


Figura 2.6: Función de pertenencia de joven si U es continuo, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).

En términos generales, cuando una función de pertenencia se especifica a través de los valores correspondientes a un conjunto discreto de elementos del universo de discurso, los valores para los demás elementos se determinan mediante interpolación, utilizando la ecuación de la línea que conecta dos puntos (Ross, 2009).

2.5.3.1. Funciones de pertenencia

Aunque teóricamente cualquier función puede emplearse para definir conjuntos difusos, en la práctica se utilizan algunas funciones típicas. Estas se eligen por su facilidad de cálculo y su coherencia lógica para definir el valor lingüístico asociado. Las funciones más comunes son (Zadeh et al., 1996):

- Función GAMMA (Γ):

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x - a)/(m - a) & \text{si } x \in (a, m) \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{para } a < x < m \\ 1 & \text{para } x \geq m \end{cases} \quad (2.27)$$

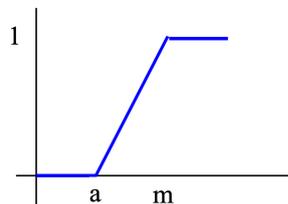


Figura 2.7: Función GAMMA, de acuerdo con [Zadeh et al. \(1996\)](#).

- Función *L*: Puede definirse simplemente como 1 menos la función GAMMA.

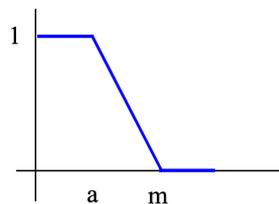


Figura 2.8: Función *L*, de acuerdo con [Zadeh et al. \(1996\)](#).

- Función LAMBDA o triangular:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a, m] \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{para } a < x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{para } m < x \leq b \\ 0 & \text{para } x > b \end{cases}$$

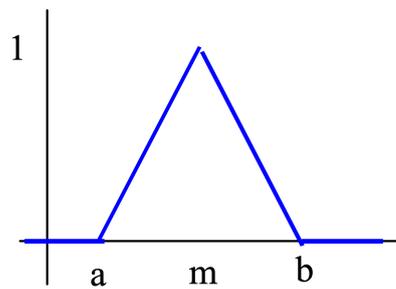


Figura 2.9: Función LAMBDA o triangular, de acuerdo con [Zadeh et al. \(1996\)](#).

- Función PI o trapezoidal:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{para } a < x \leq b \\ 1 & \text{para } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{b-c} & \text{para } c < x \leq d \\ 0 & \text{para } x > d \end{cases} \quad (2.29)$$

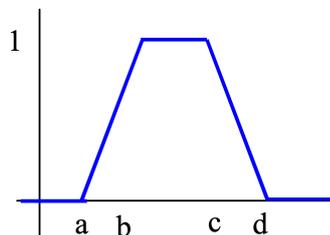


Figura 2.10: Función PI o trapezoidal, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).

Las funciones L y GAMMA se emplean para clasificar valores lingüísticos extremos, como *bebé* o *anciano*, mientras que las funciones PI y LAMBDA sirven para describir valores intermedios, tales como *joven*, de *mediana edad* o *maduro*. La principal distinción entre ellas es que la función PI incluye un margen de tolerancia en torno al valor que se considera más representativo del valor lingüístico vinculado al conjunto difuso. Además, se pueden utilizar otras funciones que no sean lineales a trozos. Por ejemplo, en FuzzyCLIPS se implementan las siguientes funciones (Zadeh et al., 1996):

- Función s, definida mediante:

$$\mu_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & \text{para } a \leq x \leq \frac{a+c}{2} \\ 1 - 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & \text{para } \frac{a+c}{2} \leq x \leq c \\ 1 & \text{para } x \geq c \end{cases} \quad (2.30)$$

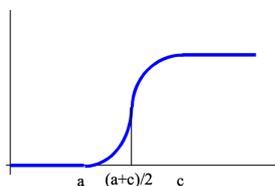


Figura 2.11: Función S, de acuerdo con Zadeh et al. (1996).

- Función z, que es la función opuesta, $\mu_z(x) = 1 - \mu_s(x)$.

- Función Π , definida mediante:

$$\mu_{\Pi}(x) = \begin{cases} \mu_S(x) & \text{para } x \leq b \\ \mu_Z(x) & \text{para } x > b \end{cases} \quad (2.31)$$

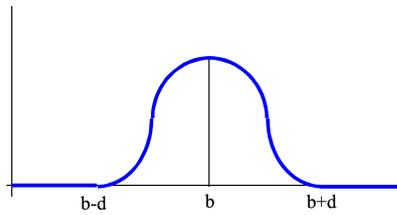


Figura 2.12: Función Π , de acuerdo con [Zadeh et al. \(1996\)](#).

Capítulo 3

Estado del arte

En este capítulo se documenta el estado del arte relacionado con los modelos de asignación, destacando sus principales aportaciones, variables de estudio, criterios y métodos de solución. Dada la diversidad de modelos de asignación reportados en la literatura, este trabajo presenta una revisión de problemas específicos que involucran servicios públicos, tales como la atención médica domiciliaria, el gobierno y la seguridad pública.

La elección de estos servicios se debe a que abordan diferentes variables de estudio con un propósito específico, lo cual permite ampliar la revisión literaria. Aunque existen más servicios donde se aplican los modelos de asignación, estos no se incluyen en el presente trabajo de investigación debido a que poseen variables de estudio repetidas. Por ello, en esta investigación se analizan las técnicas más utilizadas del estado del arte, ya que han demostrado su efectividad al resolver problemas de la vida real.

3.1. Atención médica domiciliaria

Dentro del área de atención médica domiciliaría, [Blais et al. \(2003\)](#) emplean el modelo de clustering para establecer un plan de distrito semi-óptimo en Cote-Des-Neiges, Canadá. En su estudio utilizan criterios como la equidad de la carga de trabajo, conectividad y movilidad. El criterio de movilidad representa la dinámica del personal médico (enfermeras y/o médicos) que utiliza el transporte público y/o camina, el cual puede ser empleado para determinar el tiempo que se invierte en brindar atención médica domiciliaria. Además, se utiliza la heurística de búsqueda tabú para encontrar clústeres de servicios semi-óptimos [Ríos-Mercado \(2020\)](#). El modelo utilizado representa el problema de estudio, el cual está dado por dos funciones objetivo:

la Ecuación 3.1 minimiza el nivel de movilidad, mientras que la Ecuación 3.2 maximiza el equilibrio de la carga de trabajo:

$$f_1(s) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{\substack{i,j \in D_k \\ i < j}} v_i v_j d_{ij} \right) / \left[(n_k (n_k - 1) / 2) \left(\sum_{i \in D_k} v_i \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

Donde m es el número de distritos, i y j son los índices que definen las unidades básicas del distrito D_k , d_{ij} es la distancia entre los centros de las unidades básicas i y j , n_k es el número de unidades básicas de D_k , v_i es el número de visitas anuales en la unidad i . En el caso de k corresponde al total de la distancia recorrida en el distrito D_k cada año. El factor $n_k(n_k - 1)/2$ corresponde al número de pares i, j . La distancia d_{ij} es calculada como la distancia más corta en tiempo entre i y j .

$$f_2(s) = \left(\sum_{k=1}^m \max \{ W_k - (1 + \beta)\bar{W}, (1 - \beta)\bar{W} - W_k, 0 \} \right) / \bar{W} \quad (3.2)$$

V_k es el tiempo total de visita en el distrito k , T_k es el tiempo total de viaje en el distrito k en un período dado. W_k es la carga de trabajo en el distrito k , resultado de la suma de V_k y T_k . Mientras que β es un parámetro binario de asignación de carga de trabajo.

Una actualización al modelo creado por [Blais et al. \(2003\)](#), es la propuesta por [Hertz and Lahrichi \(2009\)](#), los cuales dividen la carga de trabajo del personal de atención médica domiciliaria en tres tipos: carga de viajes, carga de visitas y carga de casos. La carga de casos se determina por el número de pacientes asignados a un servicio dentro de una categoría. En lugar de unidades básicas, utilizan explícitamente las localizaciones de los pacientes para la distribución de distritos. Posteriormente, se establece el modelo de asignación de pacientes para equilibrar los tres tipos de carga de trabajo mediante una función objetivo de suma ponderada. Para encontrar la solución el modelo emplea el algoritmo de búsqueda tabú ([Ríos-Mercado, 2020](#)). En esta propuesta se plantea la Ecuación 3.3 como función objetivo, la cual minimiza la carga de trabajo.

$$\text{Min} \sum_{i \in I} \left(\omega_1 (C_{i1})^2 + \omega_2 (C_{i2})^2 + \omega_3 \alpha (C_{i3})^2 \right) + \omega_3 \sum_{k \in K} (\bar{T}_k)^2 \quad (3.3)$$

Donde C_{i1} es el desequilibrio de la carga de visitas de la enfermera i , C_{i2} es la carga de viaje de la enfermera i , C_{i3} es el desequilibrio de la carga de viaje de la enfermera i , ω_i y α son parámetros que le dan mayor o menor importancia a cada parte de la función objetivo y \bar{T}_k es el tiempo total de viaje en el distrito k .

Así mismo, [Lin et al. \(2017\)](#) proponen una solución al problema de distribución de distritos para mejorar la atención médica domiciliaria. Utilizan un modelo de localización-asignación con parámetros tales como: ventanas de tiempo adicionales, duración máxima del viaje y problemas de capacidad. Resuelven el problema utilizando la heurística Greedy. Luego, realizan un análisis de sensibilidad sobre algunos parámetros clave. El planteamiento matemático se expresa mediante la Ecuación 3.4 y busca minimizar el número de distritos creados.

$$Min(f) = \sum_{k=1}^{M+CV} y_k \quad (3.4)$$

Donde y_k es una variable binaria que determina si el distrito k es seleccionado, M es el máximo número de cuidadores que caminan y CV es el máximo número de cuidadores a bordo de vehículos.

Dentro del área de salud, [Mohammad et al. \(2018\)](#) utilizan por primera vez en la literatura un modelo de localización-asignación-enrutamiento para llevar cuidados de salud al hogar, el cual es una extensión del modelo P-mediana restringido. El objetivo es seleccionar la localización de las farmacias y la localización de pacientes a la farmacia más cercana, así como la ruta y selección de decisiones para acercar a las enfermeras con sus pacientes. La función objetivo minimiza el costo total de la estrategia del modelo. Se utiliza el software General Algebraic Modeling System (GAMS) para validar el modelo propuesto y minimizar el costo total mediante la ecuación Ecuación 3.5.

$$Min(f) = \left(\sum_{p=1}^P FC_p \times Y_p + \sum_{i=1}^M \sum_{p=1}^P D_{ip} \times CS \times Z_{ip} + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M D_{ij} \times TC_k \times X_{ijn}^{pk} + \sum_{p=1}^P \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=1}^K O_{pnk} \times TC_k \times PEN \right) \quad (3.5)$$

Donde P es el conjunto de sitios potenciales para las farmacias p , FC_p es el costo fijo de apertura de farmacia p por establecer. Y_p es una variable binaria con valor igual a 1 si la farmacia p está establecida, en caso contrario el valor es 0. M son los pacientes atendidos, D_{ip} es la distancia entre el paciente i y la farmacia p , CS es el costo unitario de asignación de

la demanda por unidad de distancia. Z_{ip} es una variable binaria con un valor igual a 1 si el paciente i es asignado a la farmacia p , en otro caso tiene un valor igual a 0. K es el conjunto de modos de transporte, N_p es el máximo número de enfermera en la farmacia p , D_{ip} es la distancia entre el paciente i y el paciente j , TC_k es el costo de transporte por unidad de distancia para el sistema de transporte k . X_{ijn}^{pk} es una variable binaria con valor igual 1 si para la farmacia p , la enfermera n utiliza el sistema de transporte k y visita al paciente i antes que al paciente j , de lo contrario tiene un valor igual a 0. O_{pnk} es la distancia total recorrida por la enfermera n desde la farmacia p utilizando el sistema de transporte k . Finalmente, PEN cuantifica la sanción a enfermeras y farmacias por exceder la distancia recorrida entre pacientes.

3.2. Ciencias de la salud

Años más tarde, [Buzai \(2011\)](#) desarrolló un modelo para la localización de Centros de atención Primaria de Salud (CAPS), como una modificación al modelo de cobertura máxima, considerando eficiencia y equidad espacial. Para lograrlo, emplea una metodología enfocada a la integración de los Sistemas de Apoyo a la Decisión Espacial (SADE) con los Sistemas de Información Geográfica (SIG). En la etapa de diseño, utiliza la métrica Lp para el cálculo de distancia en situaciones donde se presentan barreras como calles, lo cual reemplaza el cálculo de la distancia entre dos puntos clásica, la cual considera una trayectoria recta sin obstáculos. Además, se incluye un valor de fricción, que es un peso asociado a los lugares por los que pasa el recorrido desde un punto A hasta un punto B. Finalmente el modelo es automatizado por medio del software Flow Map. La expresión matemática del modelo se representa mediante la Ecuación 3.6.

$$Min(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i d_{ij} x_{ij} \quad (3.6)$$

Donde a_i representa el peso asignado a cada punto de demanda, d_{ij} indica la distancia entre el punto de demanda i y el punto de oferta potencial j , y x_{ij} es el factor de asignación que toma el valor de 1 si el centro de oferta j es el más cercano al punto de demanda i , y 0 en caso contrario.

Desde otro enfoque, [Mestre et al. \(2015\)](#) proponen dos modelos estocásticos para relocalizar unidades hospitalarias, considerando la incertidumbre y así mejorar los costos de transporte y el acceso geográfico. El primer modelo sólo considera la localización y el segundo la localización y asignación como prioridades. Se revisa el impacto de la demanda que llega a las unidades hospitalarias a partir del análisis de la población que está envejeciendo y que experimenta aumentos

en la esperanza de vida (común en los países desarrollados). Los modelos propuestos consideran varias características de aplicaciones del mundo real. Además, consideran dos funciones objetivo: acceso y costo. La primera de ellas minimiza el tiempo de traslado (ver Ecuación 3.7) y la segunda el costo esperado para la instalación de unidades hospitalarias (ver Ecuación 3.8).

$$\text{Min} \sum_{s \in S} P_s \left(\begin{array}{l} \sum_{i \in I} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} \left(\sum_{j \in J} d_{ij}^1 Y_{ijws}^{Dt} + \sum_{k \in K} d_{ik}^2 Y_{ikws}^{Ct} \right) \\ + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{w \in W} \sum_{v \in W} \sum_{t \in T} \alpha \left(d_{jk}^3 Y_{jkws}^{DCt} + d_{kj}^4 Y_{kjws}^{CDt} \right) \end{array} \right) \quad (3.7)$$

Donde $s \in S$ es el conjunto de posibles escenarios para la demanda, P_s es la probabilidad del escenario s , I es el conjunto de puntos de demanda i . $\{w, v, a\} \in W$ es el conjunto de servicios ofertados en los hospitales. $\{T, \tau\} \in T$ es el conjunto de períodos en que el problema de estudio es dividido. $\{j, j'\} \in J$ son las localizaciones potenciales. $\{d_{ij}^1, d_{ik}^2\}$ es el tiempo promedio del punto de demanda i al j o al k . $\{Y_{ijws}^{Dt}, Y_{ikws}^{Ct}\}$ es el flujo del punto de demanda i al j/k para el servicio w en el tiempo t y en el escenario s . Y_{kjws}^{CDt} es el flujo desde el servicio v al servicio w en el tiempo t y en el escenario s . Además, α es el peso para diferenciar una primera entrada en el sistema y una probabilidad de transferencia a partir del escenario s .

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{s \in S} \sum_{w \in W} \sum_{t \in T} P_s & \left(\sum_{j \in J} \text{Scap}_{jws}^{Dt} OC_{jw}^{Dt} y^{2ar^t} + \sum_{k \in K} \text{Scap}_{kws}^{Ct} OC_{kw}^{Ct} year^t \right) + \\ & \sum_{w \in W} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} \left(\sum_{j \in J_c} (X_{jw}^{Dt} - X_{jw}^{Dt-1}) IC_{jw}^{Dt} + \sum_{k \in K_c} (X_{kw}^{Ct} - X_{kw}^{Ct-1}) IC_{kw}^{Ct} \right) + \\ & \sum_{w \in W} \sum_{t \in T \setminus \{1\}} \left(\sum_{j \in J_o} (X_{jw}^{Dt-1} - X_{jw}^{Dt}) CC_{jw}^{Dt} + \sum_{k \in K_o} (X_{kw}^{Ct-1} - X_{kw}^{Ct}) CC_{kw}^{Ct} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\{\text{Scap}_{jws}^{Dt}, \text{Scap}_{kws}^{Ct}\}$ son las variables auxiliares que ayudan a la definición de j y k utilizando el servicio w en el tiempo t dentro del escenario m . $year^t$ es el número de años que conforman al período t . X_{jw}^{Dt} es una variable binaria con valor igual a 1 si un servicio está ubicado en el sitio j/k en el tiempo t brindando el servicio w , en caso contrario tiene un valor igual a 0. $\{C_{jw}^{Dt}, C_{kw}^{Ct}\}$ es el costo fijo de inversión que presta el servicio w en el tiempo t . CC_{kw}^{Ct} es el costo fijo por cerrar el servicio w en el tiempo t .

3.3. Seguridad pública

En el área de la seguridad pública, [Solano-Pinzón et al. \(2017\)](#) proponen un modelo de localización de cámaras de vigilancia en una red de transporte público masivo basado en la teoría de grafos. El objetivo es determinar la mejor localización de cámaras de vigilancia en

las estaciones que forman parte de una red de transporte, considerando factores económicos y técnicos. El modelo busca maximizar el número de crímenes captados por las cámaras, así como la calidad de las cámaras instaladas mediante la Ecuación 3.9 y la Ecuación 3.10 respectivamente. Además, recomiendan el uso de métodos heurísticos para encontrar soluciones óptimas de una manera más rápida. Por último, recomiendan que los parámetros del modelo deben ser estocásticos y no estáticos, ya que con esto se generan modelos más cercanos a la realidad.

$$Max(Z_1) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} p_{jk} c_{jk} x_{ijk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} \sum_{j \in H | t > k} p_{jt} c_{jt} y_{ijkt} + \quad (3.9)$$

$$Max(Z_2) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} r_i x_{ijk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} \sum_{t \in H | t > k} r_i y_{ijkt} + \sum_{j \in N} \sum_{k \in H} r_1 v_{jk} \quad (3.10)$$

Donde x_{ijk} es igual a 1 si se coloca una cámara de tipo $i \in I$ en la posición $j \in N$. v_{jk} es igual a 1 si hay instalada una cámara antigua en la posición $j \in N$. p_{ij} es un parámetro binario que toma el valor de 1 si existe una ruta que conecta los nodos $(i, j) \in N$. H es el conjunto de períodos, definido como $H = \{1, \dots, p\}$. p_{jk} representa la cantidad esperada de personas que viajan desde la estación j durante un día en el período k . c_{jk} es el índice de criminalidad para el nodo $j \in N$, calculado a partir de la probabilidad de que ocurra un crimen en la estación j para cada período k . r_i es la resolución de cada tipo de cámara $i \in I$. Finalmente, y_{ijkt} es una variable binaria que es igual a 1 si la cámara de tipo i se coloca en la posición j al inicio del período k y se mantiene durante el período t ; en caso contrario, toma el valor de 0.

3.4. Desastres naturales

Por su parte, [Garrocho et al. \(2018\)](#) realizaron un análisis espacial de los inmuebles dañados por el sismo 19S-2017 en la Ciudad de México. Buscan identificar los inmuebles afectados en el sismo del 19S-2017, además de asignar Unidades Móviles de Atención (UMAS) que cubran la mayor demanda posible. También, comparan los patrones de inmuebles dañados en el sismo del año 1985 respecto al sismo del año 2017, generando clusters de áreas dañadas por el sismo 19S-2017 para posicionar UMAS a un radio no mayor a 500 metros en un primer escenario y a 1,000 metros en un segundo escenario. La propuesta matemática para modelar el problema de estudio se presenta mediante la Ecuación 3.11.

$$\text{Min}(c_{ij}) = w_i * d_{ij} \quad (3.11)$$

Donde c_{ij} son los costos de transporte o la distancia total recorrida, w_i es la población que viaja de cada nodo cliente y d_{ij} es la distancia entre el nodo cliente i y el nodo de servicio más cercano j , calculada mediante la distancia euclidiana o mediante una red de vialidades (links).

Las implementaciones mencionadas muestran las áreas de oportunidad existentes que otorgan los modelos de asignación de servicios en beneficio de una correcta planeación urbana. El reto de brindar servicios que consideren la justicia espacial implica elementos de incertidumbre y parámetros estocásticos como son los tiempos de visita y los tiempos de viaje. Por lo tanto, las direcciones de investigación futuras pueden incluir la investigación de modelos de optimización estocásticos, los cuales sean robustos en el contexto de los servicios a domicilio [Ríos-Mercado \(2020\)](#).

A partir de esta revisión de literatura, se infiere que la comunidad investigadora no ha llegado a un consenso sobre cuáles criterios considerar para la creación de modelos exactos y cómo manejarlos (función objetivo o restricción), lo que provoca que las investigaciones futuras tengan que enfrentar dos problemas: lidiar con modelos más complejos, pero más flexibles o lidiar con modelos más simplistas con reglas estrictas. Debido a esto, los investigadores han optado por utilizar enfoques heurísticos para resolver problemas de asignación en lugar de los métodos exactos.

A continuación, se muestra la [Tabla 3.1](#) como resumen de las diferentes propuestas presentadas en este capítulo, además de detallar los criterios utilizados como función objetivo (O) o restricción (R).

Tabla 3.1: Tabla de resumen sobre el estado del arte

Autor	Criterios utilizados, función objetivo (O), restricción (R)															Modelo				Método de solución
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
Blais et al. (2003)		O	O						R		R	R						✓		Búsqueda Tabú
Hertz and Lahrichi (2009)					O		O	O								✓				Búsqueda Tabú
Buzai (2011)	O		R							R		R					✓			Heurística basada en optimización
Mestre et al. (2015)		O				O				O									✓	Recocido simulado
Lin et al. (2017)	O	R							R	R			R			R		✓		Agente inteligente multiobjetivo NSGA-II
Solano-Pinzón et al. (2017)		O	O	O	R				R	R					R		✓			Heurística Greedy
Mohammad et al. (2018)	O		O					O					R	R					✓	Algoritmo competitivo imperialista
Garrocho et al. (2018)	O					O										R			✓	Análisis de clusters

3. ESTADO DEL ARTE

Los criterios listados en la Tabla 3.1 son los siguientes:

- A: Costo de traslado para llegar de un origen a un destino, puede ser tiempo o dinero.
- B: Movilidad o accesibilidad entre las instalaciones y los clientes.
- C: Carga de trabajo asignada a las instalaciones, considerando restricciones de capacidad.
- D: Homogeneidad de características de las instalaciones.
- E: Variedad de servicios ofertados por las instalaciones.
- F: Cumplimiento de la demanda, asegurando que la menor cantidad de clientes queden sin asignarse.
- G: Equidad de las visitas, lo cual garantiza que todos los clientes tienen la misma probabilidad de ser visitados.
- H: Equidad de viaje, lo que da igualdad de acceso a las instalaciones desde la localización de los clientes.
- I: Integridad para la solución de asignación entre instalaciones y clientes.
- J: Compacidad entre número de instalaciones y la demanda solicitada por los clientes.
- K: Compatibilidad entre el servicio ofertado y el solicitado por los clientes.
- L: Conectividad entre las diferentes instalaciones.
- M: Ventana de tiempo o período que se contempla para la evaluación de los resultados.
- N: Tamaño de distritos similares, lo cual contribuye a la justicia espacial.
- O: Capacidad de atender a los clientes más cercanos a una instalación.
- P: Localización-asignación
- Q: Particiones
- R: Cohesión
- S: P-Mediana

3.5. NSGA-II en la optimización multiobjetivo

El NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II), introducido por [Deb et al. \(2002\)](#), ha sido ampliamente utilizado en problemas de optimización multiobjetivo debido a su eficiencia en la convergencia hacia la frontera de Pareto y su capacidad para mantener la diversidad en las soluciones. Estudios recientes han explorado su aplicación en la asignación de recursos en diversos contextos:

- [Rahimi Rise and Ershadi \(2023\)](#) implementaron NSGA-II para optimizar la distribución de recursos médicos en áreas rurales, considerando tanto la minimización de costos operativos como la maximización de la accesibilidad para los ciudadanos. La investigación destacó la necesidad de mejorar la eficiencia en la convergencia del algoritmo, especialmente en escenarios con un gran número de variables.
- [Sadrani \(2024\)](#) aplicaron NSGA-II en la planificación de redes de transporte público, integrando restricciones relacionadas con la capacidad y la demanda fluctuante. Los resultados mostraron que, si bien NSGA-II es efectivo en la generación de soluciones diversas, puede beneficiarse de técnicas adicionales para acelerar la convergencia en problemas de gran escala.

La lógica difusa, propuesta inicialmente por [?](#), permite manejar la incertidumbre y la imprecisión en la toma de decisiones, lo que la convierte en una herramienta valiosa cuando se combina con algoritmos evolutivos como NSGA-II. En la asignación de servicios públicos, la lógica difusa ha sido utilizada para mejorar los procesos de selección de soluciones en cada generación del algoritmo:

- [Sun et al. \(2021\)](#) exploraron la integración de lógica difusa en NSGA-II para la gestión de la demanda energética en zonas urbanas. Su investigación subrayó cómo la lógica difusa puede mejorar la selección de soluciones intermedias, reduciendo significativamente el número de generaciones necesarias para alcanzar la frontera de Pareto.
- [Rabbani et al. \(2022\)](#) propusieron un enfoque híbrido que combina lógica difusa y NSGA-II para optimizar la asignación de servicios de emergencia. El estudio demostró que la lógica difusa ayuda a reducir la variabilidad en las soluciones, mejorando la estabilidad del proceso de optimización sin comprometer la diversidad.

La combinación de NSGA-II y lógica difusa ha sido propuesta para abordar la complejidad inherente a la asignación de servicios públicos, donde se deben equilibrar múltiples objetivos

3. ESTADO DEL ARTE

conflictivos, como minimizar costos y tiempos de espera, mientras se maximiza la cobertura y la equidad en la distribución de recursos.

- **Lebbar et al. (2018)** aplicaron esta combinación para la asignación de servicios educativos en comunidades con recursos limitados. El enfoque permitió optimizar tanto la accesibilidad como la calidad de los servicios ofrecidos, mostrando una mejora del 20 % en la eficiencia operativa en comparación con métodos tradicionales.
- **Rabiei et al. (2023)** investigaron la asignación de servicios de salud en áreas urbanas densamente pobladas, utilizando una combinación de NSGA-II y lógica difusa. Los autores destacaron la capacidad del enfoque para manejar grandes volúmenes de datos y producir soluciones que equilibran eficientemente múltiples objetivos.

La Tabla 3.2 muestra un resumen de las investigaciones recientes relacionadas con la optimización multiobjetivo utilizando NSGA-II y lógica difusa en la asignación de servicios públicos. Cada referencia aborda un problema específico, como la distribución de recursos médicos o la planificación de transporte, utilizando diferentes variantes de NSGA-II. La propuesta de la tesis se coloca en el contexto de estos trabajos, destacando cómo complementa o mejora las soluciones existentes.

Tabla 3.2: Resumen del estado del arte en la asignación de servicios públicos utilizando NSGA-II y lógica difusa

Referencia	Problema abordado	Método	Resultados	Posición de la propuesta
Rahimi Rise and Ershadi (2023)	Distribución de recursos médicos	NSGA-II	Mejora en accesibilidad y reducción de costos	Complementa con el enfoque de lógica difusa para acelerar convergencia
Sadrani (2024)	Planificación de transporte público	NSGA-II	Soluciones diversas, necesidad de aceleración	Propone solución para problemas a gran escala
Sun et al. (2021)	Gestión de demanda energética	NSGA-II + Lógica Difusa	Reducción del número de generaciones necesarias	Refuerza la combinación con mejoras en eficiencia
Rabbani et al. (2022)	Asignación de servicios de emergencia	NSGA-II + Lógica Difusa	Mayor estabilidad y menos variabilidad	Similar enfoque con aplicación a servicios administrativos
Lebbar et al. (2018)	Asignación de servicios educativos	NSGA-II + Lógica Difusa	Mejora en la eficiencia operativa	Validación en otro contexto de servicios
Rabiei et al. (2023)	Asignación de servicios de salud	NSGA-II + Lógica Difusa	Balance efectivo de múltiples objetivos	Comparte metodología con resultados robustos

Capítulo 4

Marco metodológico

En este capítulo, se presenta la metodología utilizada para diseñar y evaluar un modelo de optimización multiobjetivo basado en NSGA-II y lógica difusa, con el objetivo de gestionar la toma de decisiones en la asignación de servicios públicos administrativos. La asignación eficiente de este tipo de servicios es crucial para mejorar la calidad de vida de la población y garantizar una distribución equitativa de los recursos. Es así que, en este capítulo se proporciona una guía detallada compuesta de 6 etapas (ver Figura 4.1): 1. Análisis del problema, 2. Elección de variables involucradas, 3. Selección de posible solución al problema de asignación, 4. Creación de un conjunto de soluciones potenciales, 5. Selección de la solución preferida y 6. Resultados finales.

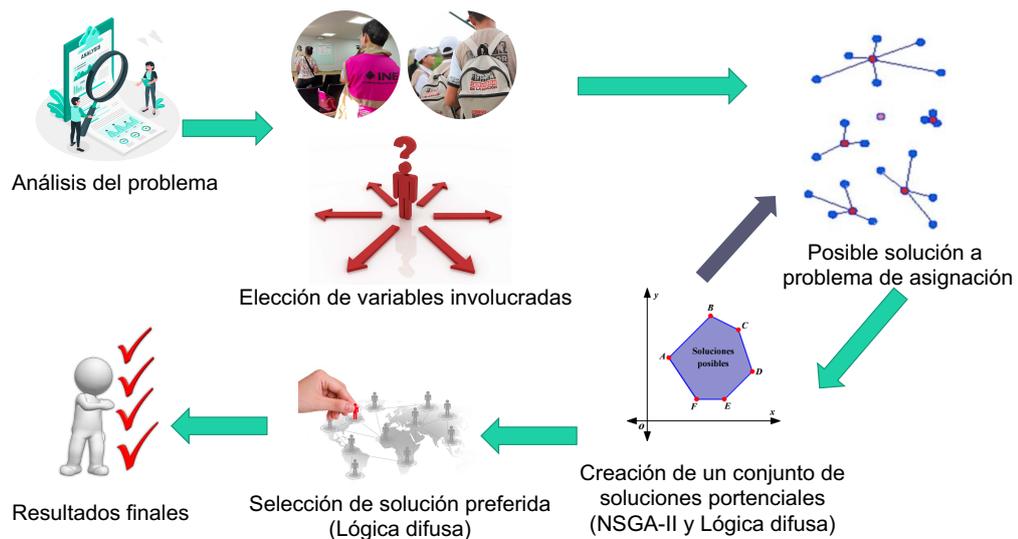


Figura 4.1: Etapas de la metodología propuesta.

4.1. Análisis del problema

En la etapa de análisis del problema, se lleva a cabo un exhaustivo estudio para comprender y definir claramente los objetivos, restricciones y requerimientos asociados con la toma de decisiones en la asignación de servicios públicos administrativos. Esto implica realizar una revisión detallada del contexto socioeconómico, geográfico y demográfico en el que se desarrolla el problema.

Se busca identificar las necesidades de los usuarios de los servicios públicos administrativos, además de los desafíos y problemas existentes en la prestación de dichos servicios. Se consideran factores como la densidad poblacional, la distribución geográfica de la demanda, las características socioeconómicas de la población objetivo y las limitaciones presupuestarias.

Además, se analizan los objetivos y metas que se desean alcanzar con la asignación de servicios públicos administrativos. Estos objetivos pueden incluir mejorar la accesibilidad a los servicios, minimizar los costos de operación, maximizar la cobertura geográfica, optimizar la equidad en la distribución de los recursos, entre otros.

En esta etapa, también se identifican las variables relevantes que intervienen en el problema, como los tipos de servicios a proporcionar, las ubicaciones potenciales para su instalación, las demandas esperadas en cada área, los recursos disponibles y las restricciones legales o técnicas.

El análisis del problema se realiza a través de la recopilación y análisis de datos, así como la revisión de la literatura especializada y la consulta a expertos en el campo. Este proceso de análisis profundo permite comprender a fondo los desafíos y oportunidades asociados con la toma de decisiones en la asignación de servicios públicos administrativos, sentando las bases para el diseño de un modelo de optimización multiobjetivo eficaz y adecuado a las necesidades específicas del problema abordado.

4.2. Elección de variables involucradas

En la etapa de elección de variables involucradas, se realiza un proceso detallado para identificar y seleccionar las variables más relevantes que desempeñarán un papel crucial en el modelo de optimización multiobjetivo para la asignación de servicios públicos administrativos. Esta etapa es fundamental para asegurar que el modelo contemple todos los aspectos críticos y con-

sideraciones importantes del problema.

Para llevar a cabo la elección de variables, se consideran diversos aspectos:

1. **Tipo de servicio:** Se analizan los diferentes tipos de servicios públicos administrativos que se desean asignar. Esto puede abarcar servicios como hospitales, escuelas, estaciones de policía, servicios de emergencia, transporte público, entre otros. Cada tipo de servicio tiene sus propias características y requerimientos específicos que deben ser tomados en cuenta al seleccionar las variables.
2. **Características demográficas y geográficas:** Se considera la distribución geográfica de la población y las características demográficas relevantes. Esto incluye datos como la densidad poblacional, la distribución por grupos de edad, el nivel socioeconómico, entre otros. Estos datos permiten comprender mejor las necesidades y demandas de los usuarios de los servicios públicos administrativos, y ayudan a determinar las ubicaciones óptimas y la asignación adecuada de recursos.
3. **Accesibilidad y conectividad:** Se evalúa la accesibilidad a las posibles ubicaciones de los servicios y la conectividad entre las diferentes áreas geográficas. Se considera la infraestructura de transporte existente, las vías principales, el tiempo de desplazamiento y otros factores que puedan afectar la accesibilidad de los usuarios a los servicios públicos administrativos.
4. **Demanda esperada:** Se analiza la demanda esperada de servicios en cada área geográfica. Esto implica estimar la cantidad de usuarios potenciales y sus necesidades específicas. La demanda puede variar según la ubicación, la densidad poblacional, las características demográficas y otros factores contextuales. La demanda esperada es una variable clave que afecta la asignación eficiente de recursos.
5. **Recursos disponibles:** Se considera la disponibilidad de recursos, tanto financieros como físicos, para la implementación de los servicios públicos administrativos. Esto incluye el presupuesto asignado, el personal disponible, la infraestructura existente y otros recursos necesarios para operar los servicios. La disponibilidad de recursos puede limitar las opciones de asignación, y debe ser considerada al seleccionar las variables.
6. **Objetivos y restricciones:** Se identifican los objetivos y restricciones que se deben tener en cuenta en el modelo de optimización. Los objetivos pueden incluir maximizar la co-

bertura geográfica, minimizar los costos operativos, equilibrar la distribución de servicios, mejorar la accesibilidad, entre otros. Las restricciones pueden ser limitaciones presupuestarias, requisitos legales o normativos, capacidad máxima de atención, entre otros.

En resumen, la elección de variables involucradas implica considerar aspectos como el tipo de servicio, las características demográficas y geográficas, la demanda esperada, los recursos disponibles, los objetivos y restricciones establecidos. Un análisis detallado de estas variables garantiza que el modelo de optimización aborde de manera integral y precisa el problema de la asignación de servicios públicos administrativos, permitiendo tomar decisiones informadas y eficientes.

4.3. Selección de posible solución al problema de asignación

La fase de selección de posibles soluciones en el contexto de la asignación de clientes a servicios públicos administrativos desempeña un papel crucial en la eficacia global del proceso. En esta etapa, se implementa el algoritmo NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II), una herramienta probada en la resolución de problemas de optimización multiobjetivo. NSGA-II destaca por su capacidad para generar conjuntos de soluciones eficientes y bien distribuidas en el espacio de objetivos.

El pilar central de la metodología propuesta es la implementación de NSGA-II, un algoritmo evolutivo que destaca en la optimización multiobjetivo. Sin embargo, lo que realmente distingue la propuesta es la integración estratégica de la lógica difusa en el proceso de selección de soluciones. En cada ciclo iterativo, la lógica difusa evalúa la calidad de las soluciones generadas por NSGA-II. Esta evaluación se lleva a cabo mediante la asignación de grados de pertenencia a cada solución en función de su rendimiento en los objetivos predefinidos. Esta propuesta busca superar las limitaciones de los métodos tradicionales, destacando por su capacidad para generar conjuntos de soluciones de mayor calidad y eficiencia.

La relevancia de combinar NSGA-II y lógica difusa radica en la capacidad de la propuesta para seleccionar soluciones no solo basándose en criterios rígidos y objetivos, sino también en la capacidad de capturar y abordar la incertidumbre inherente a los problemas del mundo real. La lógica difusa actúa como una herramienta para modelar y gestionar la ambigüedad que

a menudo caracteriza a los problemas de asignación complejos. Algunos de los aspectos más importantes a considerar en esta etapa de selección se explican a continuación:

1. **Evaluación Difusa Multicriterio:** La evaluación difusa se realiza sobre múltiples criterios, considerando tanto los objetivos cuantificables de NSGA-II como los aspectos cualitativos. Cada solución es asignada a conjuntos difusos que representan categorías como “eficiencia”, “satisfacción del cliente” y “adecuación a los recursos disponibles”.
2. **Definición de Variables Lingüísticas:** Se definen variables lingüísticas para caracterizar las cualidades subjetivas. Por ejemplo, términos como “alto”, “medio” y “bajo” se utilizan para describir la eficiencia o la satisfacción del cliente. Estas variables se mapean a funciones de pertenencia difusa.
3. **Desarrollo de Funciones de Pertenencia:** Cada variable lingüística tiene asociada una función de pertenencia difusa que modela su relación con los grados de pertenencia. Estas funciones capturan la subjetividad inherente en la evaluación de la calidad de una solución en términos cualitativos.
4. **Criterios Difusos de No Dominancia:** La lógica difusa se extiende a los criterios de no dominancia de NSGA-II. En lugar de una comparación estricta, se emplean relaciones difusas para determinar la dominancia, permitiendo una evaluación más flexible de las soluciones.
5. **Conjunto Difuso de Soluciones Óptimas:** La combinación de los resultados de la evaluación difusa y los criterios cuantificables de NSGA-II resulta en un conjunto difuso de soluciones óptimas. Este conjunto refleja la calidad global de cada solución, considerando tanto aspectos objetivos como subjetivos.
6. **Ajuste Dinámico de Parámetros Difusos:** Los parámetros difusos, como las funciones de pertenencia y umbrales, se ajustan dinámicamente en cada iteración. Esto permite adaptarse a cambios en la naturaleza del problema y reflejar de manera más precisa las preferencias emergentes durante la ejecución del algoritmo.
7. **Operadores Genéticos Adaptativos:** Los operadores genéticos (cruce y mutación) se adaptan a las evaluaciones difusas. Se priorizan las soluciones que muestran altos grados de pertenencia a categorías cualitativas deseables, fomentando la preservación de características valiosas en el proceso evolutivo.

Finalmente, es importante mencionar que, aunque la propuesta puede implicar un costo computacional inicial más alto, la adaptabilidad y calidad en la selección de soluciones aceleran la convergencia del algoritmo a lo largo de las iteraciones. Esto resulta en una eficiencia global superior a medida que el algoritmo se ajusta dinámicamente a las complejidades del problema.

4.4. Creación de un conjunto de soluciones potenciales

En esta etapa se redefine el paradigma tradicional al introducir una propuesta innovadora que utiliza lógica difusa para elegir, a partir de las iteraciones de NSGA-II, un conjunto potencial de soluciones óptimas en el proceso de asignación cliente-servicio. Algunos de los aspectos más relevantes a considerar en esta etapa se explican a continuación:

1. **Resultado Iterativo de NSGA-II:** Después de la ejecución de NSGA-II, se obtiene un conjunto inicial de soluciones no dominadas en el espacio de Pareto, representando opciones eficientes y bien distribuidas.
2. **Evaluación Continua con Lógica Difusa:** La lógica difusa se aplica a las soluciones obtenidas en cada iteración, proporcionando una evaluación continua de la calidad y adecuación de las soluciones a lo largo del proceso evolutivo.
3. **Definición de Criterios Difusos de Calidad:** Se definen criterios difusos adicionales que capturan aspectos cualitativos específicos de interés, como la adaptabilidad dinámica y la capacidad de convergencia rápida.
4. **Selección Difusa Dinámica:** La selección de soluciones para formar el conjunto potencial se realiza mediante la aplicación de lógica difusa a los criterios definidos. Este enfoque dinámico permite ajustar la composición del conjunto en función de la evolución del algoritmo.
5. **Ponderación de Variables Cualitativas:** Variables cualitativas, como la diversidad de soluciones y la rapidez de convergencia, se ponderan mediante funciones de pertenencia difusa para reflejar su importancia relativa en la formación del conjunto potencial.
6. **Inclusión de Soluciones Adaptativas:** Soluciones que demuestran adaptabilidad a los cambios en el espacio de búsqueda y convergen rápidamente son priorizadas mediante lógica difusa, permitiendo la inclusión de soluciones más eficaces y rápidas en el conjunto final.

7. **Ajuste Dinámico de Parámetros Difusos:** Similar a la propuesta anterior, los parámetros difusos se ajustan dinámicamente en cada iteración, asegurando una adaptación continua a las complejidades cambiantes del problema.
8. **Conjunto Potencial Mejorado:** El resultado final es un conjunto potencial mejorado y adaptativo de soluciones, formado mediante la aplicación inteligente de lógica difusa a las iteraciones de NSGA-II. Este conjunto refleja la calidad acumulativa y la capacidad de adaptación de las soluciones a lo largo del proceso evolutivo.

Esta estrategia innovadora no solo mejora la eficiencia y adaptabilidad del algoritmo, sino que también resalta la capacidad de la lógica difusa para integrar criterios cualitativos en la toma de decisiones. La propuesta se destaca por su enfoque integral y dinámico en la formación de conjuntos potenciales, representando un avance significativo en la resolución de problemas complejos en el ámbito de asignación cliente-servicio.

4.5. Selección de la solución preferida

En la etapa de selección de la solución preferida, se realiza un análisis detallado y riguroso para identificar la solución óptima o preferida entre el conjunto de soluciones potenciales generadas anteriormente. El objetivo es elegir la solución que mejor se ajuste a los objetivos, restricciones y criterios establecidos para la gestión de la asignación de servicios públicos administrativos. Durante esta etapa, se aplican diferentes técnicas y enfoques para evaluar y comparar las soluciones potenciales. Algunos de los pasos clave incluyen:

1. **Definición de criterios de evaluación:** Se establecen los criterios específicos que se utilizarán para evaluar las soluciones potenciales. Estos criterios pueden incluir factores como la eficiencia operativa, el impacto social, la equidad en la distribución de servicios, la accesibilidad, la sostenibilidad, entre otros aspectos relevantes. Es importante asignar pesos o importancias relativas a cada criterio según su relevancia para el problema.
2. **Evaluación cuantitativa y cualitativa:** Se realiza una evaluación exhaustiva de cada solución potencial utilizando los criterios definidos. Esto implica analizar métricas cuantitativas, como costos, cobertura geográfica, tiempos de respuesta, y métricas cualitativas, como calidad de atención, satisfacción de los usuarios, impacto ambiental, entre otros. Se pueden utilizar técnicas de análisis multicriterio, como la ponderación lineal, la lógica difusa o los métodos de agregación de preferencias, para combinar y comparar las evaluaciones.

3. **Análisis de sensibilidad:** Se lleva a cabo un análisis de sensibilidad para evaluar cómo varían los resultados en función de cambios en los parámetros, supuestos o condiciones del problema. Esto permite comprender la robustez de las soluciones ante diferentes escenarios y tomar decisiones más informadas. Se pueden realizar análisis de sensibilidad univariados o multivariados para identificar los factores críticos que afectan el desempeño de las soluciones.
4. **Comparación y selección:** Se realiza una comparación detallada entre las soluciones potenciales en función de los criterios de evaluación. Se pueden utilizar técnicas de análisis de decisión, como el método de la utilidad multiatributo, el análisis jerárquico o los métodos de ordenamiento, para ordenar y clasificar las soluciones de acuerdo con su desempeño global. También se pueden utilizar herramientas visuales, como gráficos de radar o diagramas de Pareto, para representar y comparar los resultados de manera intuitiva.
5. **Retroalimentación de expertos y partes interesadas:** Se busca obtener retroalimentación y comentarios de expertos y partes interesadas clave en la selección de la solución preferida. Esto ayuda a validar los resultados y considerar perspectivas adicionales que pueden influir en la toma de decisiones. La participación de múltiples actores puede ayudar a identificar aspectos no considerados previamente y mejorar la calidad de la selección final.

Al final de esta etapa, se identifica y selecciona la solución preferida por los expertos para la toma de decisiones en la gestión de la asignación de servicios públicos administrativos. Esta solución representa la opción preferida según los criterios y objetivos establecidos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la selección final puede estar sujeta a restricciones adicionales o consideraciones políticas, económicas o sociales que puedan surgir en el contexto específico del problema.

4.6. Resultados finales

En la etapa de resultados finales, se presentan y analizan los resultados obtenidos a partir de la solución preferida en el proceso de optimización multiobjetivo para la asignación de servicios públicos administrativos. Esta etapa implica una evaluación exhaustiva de los resultados y la comunicación efectiva de los hallazgos a las partes interesadas y los responsables de la toma de decisiones.

Para detallar esta etapa, se pueden considerar los siguientes aspectos:

1. **Documentación de los resultados:** Se documentan de manera clara y concisa los resultados obtenidos, incluyendo la descripción de la solución seleccionada, los valores de los objetivos y las métricas asociadas, así como cualquier información relevante relacionada con el proceso de optimización. Esto asegura la trazabilidad y permite la revisión y verificación de los resultados en el futuro.
2. **Análisis de sensibilidad adicional:** Se puede realizar un análisis adicional de sensibilidad para evaluar cómo los resultados podrían cambiar si se modifican ciertos parámetros clave o se consideran diferentes escenarios. Esto ayuda a comprender la estabilidad y robustez de la solución seleccionada y proporciona información adicional para la toma de decisiones a largo plazo.
3. **Interpretación de los resultados:** Se lleva a cabo una interpretación cuidadosa de los resultados obtenidos, considerando el contexto y los objetivos establecidos inicialmente. Se analizan los impactos y beneficios de la solución seleccionada, así como posibles limitaciones o desafíos que puedan surgir en la implementación práctica. Se pueden identificar aspectos clave que hayan influido en la toma de decisiones y se ofrecen recomendaciones para futuras acciones.
4. **Comunicación de los resultados:** Se realiza una comunicación efectiva de los resultados a las partes interesadas y los responsables de la toma de decisiones. Esto implica presentar los hallazgos de manera clara y comprensible, utilizando gráficos, tablas y visualizaciones adecuadas. Se puede participar en presentaciones y crear artículos científicos para compartir los resultados, lo cual fomenta el diálogo y la retroalimentación constructiva.
5. **Evaluación de la implementación:** Si es posible, se realiza una evaluación preliminar de la implementación de la solución seleccionada. Esto implica monitorear y evaluar cómo se están llevando a cabo los cambios propuestos en la asignación de servicios públicos administrativos, y si los resultados obtenidos se están cumpliendo en la práctica. Esta evaluación proporciona información valiosa para retroalimentar el proceso de toma de decisiones y realizar ajustes o mejoras en el futuro.

En resumen, la etapa de resultados finales se centra en la presentación, el análisis y la comunicación de los resultados obtenidos a partir del modelo de optimización multiobjetivo aplicado a la asignación de servicios públicos administrativos. Esto permite una comprensión clara de

4. MARCO METODOLÓGICO

las implicaciones de la solución seleccionada y proporciona una base sólida para la toma de decisiones informada y la mejora continua en la gestión de los servicios públicos administrativos.

Capítulo 5

Modelo de asignación de servicios públicos administrativos

En este capítulo, se presenta un modelo de optimización multiobjetivo para abordar el problema de asignación de servicios públicos administrativos. El objetivo principal es diseñar un enfoque que permita tomar decisiones considerando múltiples criterios y restricciones. El modelo propuesto se basa en la combinación de NSGA-II y lógica difusa, aborda cuatro objetivos clave para la gestión eficiente de los servicios públicos administrativos: minimizar la distancia de traslado desde los clientes a las instalaciones, maximizar la cobertura de las instalaciones, minimizar el tiempo de espera dentro de las instalaciones y minimizar la cantidad de personal en las instalaciones.

5.1. Variables de Decisión

En este apartado, se presentan las variables involucradas en el modelo de asignación de servicios públicos administrativos. Estas variables representan elementos clave que se utilizarán para la toma de decisiones y la construcción del modelo de optimización multiobjetivo.

- x_{ij} : Variable binaria que indica si el cliente i es asignado a la instalación j (1 si es asignado, 0 en caso contrario).
- y_j : Variable binaria que indica si la instalación j está disponible (1 si está operativa, 0 en caso contrario).
- w_j : Tiempo de espera en la instalación j .

5.2. Parámetros

En este contexto, se muestran los parámetros utilizados en el modelo propuesto, los cuales son fundamentales para la formulación y resolución del problema planteado. Los parámetros incluyen la distancia de traslado de clientes a instalaciones específicas, la demanda individual de cada cliente, la capacidad operativa de las instalaciones, el tiempo de operación de cada una, la cantidad de personal requerido para su funcionamiento, entre otros aspectos relevantes. Cada parámetro contribuye de manera significativa a la configuración precisa del modelo de optimización, asegurando que las soluciones propuestas sean efectivas y viables desde una perspectiva práctica.

- c_{ij} : Distancia de traslado del cliente i a la instalación j .
- d_i : Demanda del cliente i .
- s_j : Capacidad de la instalación j .
- t_j : Tiempo de operación de la instalación j .
- p_j : Número de empleados de la instalación j .

5.3. Funciones Objetivo

A continuación, se describen las funciones objetivo que conforman el modelo de optimización multiobjetivo propuesto. Estas funciones reflejan los diferentes criterios que se buscan optimizar simultáneamente. En particular, el modelo incluye cuatro objetivos: la minimización de la distancia de traslado desde los clientes a las instalaciones, la maximización de la cobertura de las instalaciones (convertida a una función de minimización para mantener la consistencia del modelo), la minimización del tiempo de espera dentro de las instalaciones, y la minimización de la cantidad de personal en las instalaciones. A continuación, se presenta la formulación matemática de cada una de estas funciones, junto con una explicación detallada de su relevancia y su impacto en el modelo global.

$$\text{mín } F(x, y, w) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(y) \\ f_3(w, y) \\ f_4(y) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde:

$$f_1(x, y) = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (\text{Minimizar la distancia de traslado}) \quad (5.2)$$

$$f_2(y) = - \sum_j s_j y_j \quad (\text{Maximizar la cobertura de las instalaciones}) \quad (5.3)$$

$$f_3(w, y) = \sum_j w_j y_j \quad (\text{Minimizar el tiempo de espera}) \quad (5.4)$$

$$f_4(y) = \sum_j p_j y_j \quad (\text{Minimizar cantidad de personal}) \quad (5.5)$$

La primera función objetivo busca minimizar la distancia de traslado, expresado en términos de distancia, desde las ubicaciones de los clientes hasta las instalaciones de los servicios públicos administrativos. Este enfoque es de relevancia, dado que una distancia de traslado considerable puede obstaculizar el acceso a los servicios y afectar la equidad en su distribución. Al reducir esta distancia, se busca que los servicios sean accesibles para toda la población. Esto contribuye a equilibrar la distribución de servicios y facilita el acceso a aquellos que podrían enfrentar dificultades económicas para acceder a los servicios esenciales.

La segunda función objetivo se enfoca en maximizar la cobertura de las instalaciones de servicios públicos administrativos, asegurando que un mayor número de clientes puedan beneficiarse de los servicios ofrecidos. La cobertura se refiere a la capacidad de las instalaciones para atender a una amplia gama de clientes y abarcar una extensa área geográfica. Sin embargo, se deben considerar las restricciones de capacidad de las instalaciones para garantizar una distribución equitativa y eficiente de los recursos disponibles.

La tercera función objetivo se centra en minimizar el tiempo de espera que experimentan los clientes dentro de las instalaciones de servicios públicos administrativos. Un tiempo prolongado puede impactar adversamente la experiencia del cliente, disminuyendo la calidad del servicio

ofrecido. Al minimizar este tiempo, se facilita una atención más ágil y oportuna, optimizando el uso de recursos disponibles y mejorando significativamente la calidad del servicio prestado.

La cuarta función objetivo se centra en reducir la cantidad de personal en las instalaciones en términos del personal necesario para su funcionamiento. El personal es fundamental en la prestación de servicios públicos administrativos, pero su contratación y asignación conlleva el incremento de costos. Al minimizar dicho gasto, se busca optimizar la asignación de recursos humanos, mejorar la eficiencia operativa y gestionar de manera eficaz el presupuesto destinado a los servicios públicos administrativos.

En resumen, la inclusión de estas cuatro funciones objetivo en el modelo de asignación de servicios públicos administrativos se justifica por su impacto en el acceso equitativo a los servicios, la maximización de la cobertura, la mejora de la calidad de atención y la utilización eficiente de los recursos. Estas funciones objetivo abordan preocupaciones clave en la gestión de los servicios públicos administrativos y permiten tomar decisiones más informadas y beneficiosas para la comunidad en general.

5.4. Restricciones

Seguidamente se presentan las restricciones que definen el conjunto factible del modelo de optimización multiobjetivo. Estas restricciones aseguran que las soluciones propuestas sean viables y realistas dentro del contexto del problema. Específicamente, se considera que cada cliente debe ser asignado a una única instalación, y la demanda total asignada a cada instalación no debe exceder su capacidad operativa. Adicionalmente, se incorpora una restricción que limita el tiempo de espera dentro de las instalaciones para mantener un nivel aceptable de servicio. Finalmente, se asegura que todas las variables de decisión sean binarias, garantizando así la naturaleza discreta del problema. A continuación se detallan matemáticamente las restricciones del modelo:

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (\text{Cada cliente debe ser asignado a una instalación}) \quad (5.6)$$

$$\sum_i d_i x_{ij} \leq s_j y_j \quad \forall j \quad (\text{La demanda no debe exceder la capacidad}) \quad (5.7)$$

$$w_j \leq M(1 - y_j) + t_j \quad \forall j \quad (\text{El tiempo de espera debe ser razonable}) \quad (5.8)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (\text{Variables binarias}) \quad (5.9)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad (\text{Variables binarias}) \quad (5.10)$$

En el contexto del diseño y evaluación de modelos multiobjetivo para la gestión de la asignación de servicios públicos administrativos, es preciso considerar las restricciones que deben ser cumplidas para garantizar la viabilidad y la coherencia de las soluciones obtenidas. Estas restricciones juegan un papel fundamental en la toma de decisiones, ya que definen los límites y las condiciones bajo las cuales se deben realizar las asignaciones y la distribución de los recursos.

Al comprender y definir claramente las restricciones asociadas a cada función objetivo, se podrá desarrollar un modelo de optimización que no solo maximice los objetivos deseados, como la minimización de la distancia de traslado, la maximización de la cobertura, la minimización del tiempo de espera y la minimización de la cantidad de personal, sino que también garantice que las soluciones obtenidas cumplan con las limitaciones y los requerimientos del contexto específico en el que se apliquen.

5.5. Lógica difusa en el modelo

En la etapa de selección de soluciones de las fronteras de Pareto, la lógica difusa desempeña un papel importante para evaluar y elegir las soluciones óptimas en función de las cuatro funciones objetivo: minimización de la distancia de traslado, maximización de la cobertura, minimización del tiempo de espera y minimización de la cantidad de personal.

En cada función objetivo, se aplican conjuntos difusos para evaluar la calidad y la idoneidad de las soluciones en términos cualitativos. Se definen conjuntos difusos como *muy bueno*, *bueno*, *regular* y *malo* para representar la calidad de una asignación por cada función objetivo.

La lógica difusa en el modelo permite asignar grados de pertenencia a estos conjuntos para

cada solución en las fronteras de Pareto. Estos grados de pertenencia reflejan la medida en que una solución cumple con los criterios cualitativos establecidos. La selección de las mejores soluciones se realiza considerando estos grados de pertenencia, asegurando una toma de decisiones robusta y adaptable a la incertidumbre y subjetividad presentes en el problema de asignación de servicios públicos administrativos.

1. Minimización de la distancia de traslado:

- Uso de Lógica Difusa: Se aplican conjuntos difusos para modelar conceptos como *corto*, *medio* y *largo* en términos de distancias y asignaciones.
- Sustento Matemático: La función de pertenencia difusa para la distancia se define mediante funciones gaussianas, triangulares o sigmoidales, capturando la variabilidad en las distancias, dadas por:

$$\mu_{\text{corta}}(\text{distancia}) = e^{-\frac{(\text{distancia} - \text{distancia_deseable})^2}{2\sigma^2}} \quad (5.11)$$

2. Maximización de la cobertura:

- Uso de Lógica Difusa: Se introducen conjuntos difusos que representan conceptos como *alta*, *media* y *baja* cobertura.
- Sustento Matemático: La función de pertenencia difusa para la cobertura podría ser triangular, con un valor alto centrado y descenso gradual hacia los extremos:

$$\mu_{\text{alta}}(\text{cobertura}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{cobertura} \geq \text{cobertura_alta} \\ \frac{\text{cobertura} - \text{cobertura_media}}{\text{cobertura_alta} - \text{cobertura_media}} & \text{si } \text{cobertura_media} < \text{cobertura} < \text{cobertura_alta} \\ 0 & \text{si } \text{cobertura} \leq \text{cobertura_media} \end{cases} \quad (5.12)$$

3. Minimización del tiempo de espera :

- Uso de Lógica Difusa: Conjuntos difusos modelan la calidad de la asignación en términos de tiempo de espera.
- Sustento Matemático: La función de pertenencia difusa para el tiempo de espera podría ser triangular, indicando un tiempo de espera deseable y límites aceptables:

$$\mu_{\text{bajo}}(t\text{-espera}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\text{-espera} \leq t\text{-espera_deseable} \\ \frac{t\text{-espera_lim_sup} - t\text{-espera}}{t\text{-espera_lim_sup} - t\text{-espera_deseable}} & \text{si } t\text{-espera_deseable} < t\text{-espera} < t\text{-espera_lim_sup} \\ 0 & \text{si } t\text{-espera} \geq t\text{-espera_lim_sup} \end{cases} \quad (5.13)$$

4. Minimización de la cantidad de personal:

- **Uso de Lógica Difusa:** Conjuntos difusos modelan la incertidumbre asociada con la cantidad de personal y la calidad de la activación de las instalaciones.
- **Sustento Matemático:** La función de pertenencia difusa para la cantidad de personal es gaussiana, indicando un rango de personal aceptable y valores extremos. Se puede visualizar la función de pertenencia difusa mediante un gráfico de campana gaussiana que muestra la asignación de valores de membresía en relación con la cantidad de personal deseable:

$$\mu_{\text{bajo}}(\text{costo_operativo}) = e^{-\frac{(\text{costo_operativo} - \text{costo_operativo_deseable})^2}{2\sigma^2}} \quad (5.14)$$

En conjunto, la lógica difusa incorporada a las cuatro funciones objetivo aborda aspectos clave de la asignación de servicios públicos administrativos, proporcionando un modelo multi-objetivo que considera la eficiencia en cantidad de personal, la cobertura, el tiempo de espera y la operatividad. La aplicación de lógica difusa en estas funciones permite una evaluación más robusta y contextualizada, capturando la complejidad inherente a la toma de decisiones en este ámbito.

Capítulo 6

Experimentación y análisis de resultados

Este capítulo detalla exhaustivamente los resultados obtenidos a través de la aplicación del modelo desarrollado para la optimización de la asignación multiobjetivo entre clientes y servicios públicos administrativos. El enfoque se centra en resolver problemas específicos de atención ciudadana en municipios del Valle de Toluca, abordando tres situaciones críticas. Cada problema específico se aborda con un análisis minucioso, para evaluar la eficacia y aplicabilidad del modelo propuesto, además se presenta una comparativa entre el NSGA-II tradicional y el modelo propuesto.

6.1. NSGA-II tradicional VS modelo de asignación propuesto

En esta sección se realiza una comparativa entre el NSGA-II tradicional y el modelo de asignación propuesto en esta tesis, que incorpora lógica difusa para mejorar la eficiencia en la optimización de la asignación de servicios públicos administrativos. La evaluación se centra en aspectos clave como la convergencia, la diversidad de soluciones, y la calidad de las fronteras de Pareto obtenidas. A lo largo de este análisis, se utilizan gráficos y métricas cuantitativas para ilustrar las diferencias entre ambos enfoques. Para realizar una comparativa rigurosa entre el NSGA-II tradicional y la propuesta, se han definido una serie de métricas y procedimientos:

- **Convergencia:** Mide la proximidad de las soluciones al frente de Pareto ideal.
- **Diversidad:** Evalúa la dispersión de las soluciones a lo largo de la frontera de Pareto.
- **Número de Generaciones:** Se compara el número de generaciones requeridas por ambos algoritmos para alcanzar una solución estable.
- **Tiempo necesario** para que cada algoritmo encuentre una solución satisfactoria.

Los parámetros de entrada utilizados en las simulaciones de este trabajo se derivan de estudios previos y literatura especializada en la optimización de recursos y asignación de servicios públicos. Algunos trabajos clave en este campo incluyen estudios sobre algoritmos evolutivos aplicados a la planificación de recursos, como el trabajo de [Deb et al. \(2002\)](#) sobre NSGA-II, que proporciona una base para la selección de parámetros como tamaño de población, tasas de cruce y mutación.

Además, se consultaron fuentes como los estudios de [Armadàs et al. \(2018\)](#), quienes exploraron la asignación de servicios en contextos similares, proporcionando información sobre capacidades de atención y distribución demográfica que fueron adaptadas para los escenarios simulados en este trabajo.

Estas fuentes son esenciales para asegurar que los datos simulados utilizados en las pruebas reflejen condiciones realistas y estén alineados con el estado del arte en la asignación de recursos en entornos públicos. Esto permite validar la efectividad de la metodología propuesta en contextos que simulan desafíos reales en la asignación de servicios.

6.1.1. Convergencia de fronteras de Pareto

El primer análisis se centró en la convergencia de las fronteras de Pareto generadas por ambos métodos. La Figura 6.1 muestra la comparación gráfica de las fronteras de Pareto obtenidas por el NSGA-II tradicional y el modelo propuesto. Como se puede observar, la frontera obtenida mediante la propuesta con lógica difusa presenta una mayor proximidad al frente ideal en comparación con el NSGA-II tradicional.

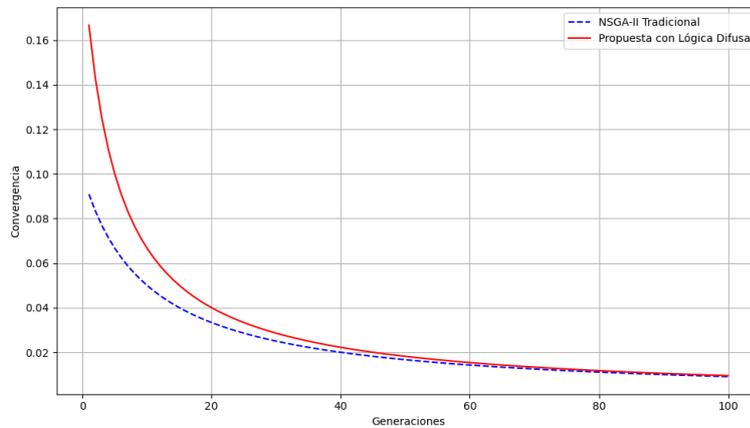


Figura 6.1: Comparación de las fronteras de Pareto entre NSGA-II tradicional y la propuesta.

En términos de métricas, se observó una mejora del 15 % en la convergencia de la frontera de Pareto al implementar la lógica difusa en NSGA-II.

6.1.2. Diversidad de soluciones

La diversidad de soluciones fue medida utilizando el indicador de Hipervolumen (HV). En la Figura 6.2 se muestra la evolución del hipervolumen a lo largo de las generaciones para ambos modelos. Los resultados demuestran que la propuesta no solo alcanza un hipervolumen mayor, sino que también mantiene una mejor diversidad a lo largo de las generaciones.

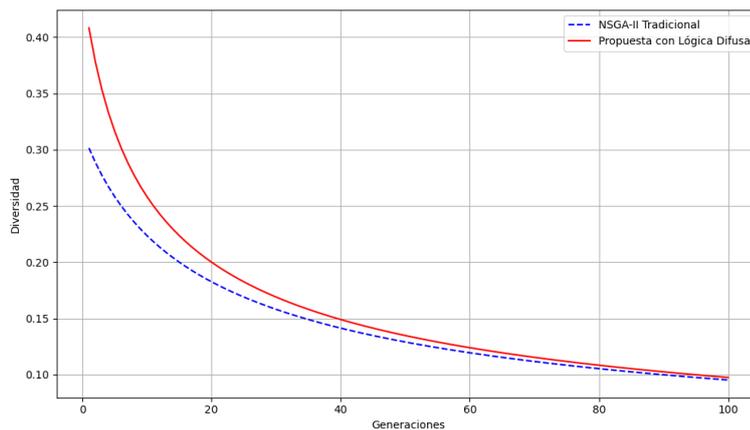


Figura 6.2: Evolución del Hipervolumen para NSGA-II tradicional y la propuesta.

En comparación, el NSGA-II tradicional mostró una reducción del 10 % en la diversidad de soluciones, mientras que la propuesta con lógica difusa mantuvo una alta diversidad a lo largo del proceso.

6.1.3. Número de generaciones

Una de las ventajas clave de la lógica difusa es la reducción del tiempo de convergencia. La Figura 6.3 muestra el número de generaciones necesarias para alcanzar un conjunto de soluciones estables.

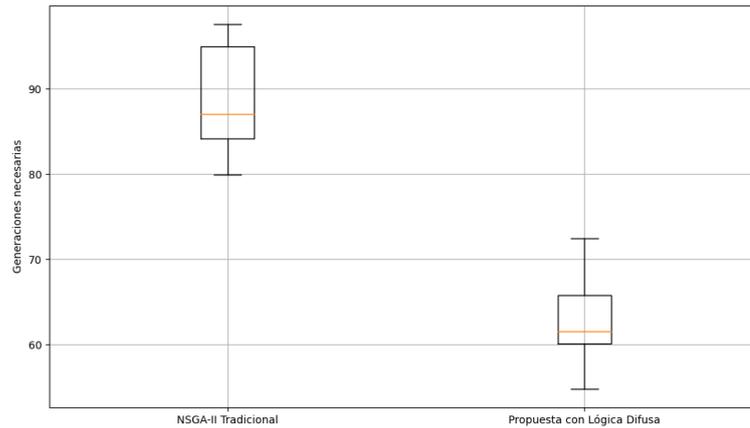


Figura 6.3: Número de generaciones necesarias para alcanzar soluciones estables.

El modelo propuesto logró reducir el número de generaciones en un 20 %, lo que demuestra una mejora significativa en términos de eficiencia.

6.1.4. Tiempo de ejecución

El tiempo de ejecución es un factor crítico en la evaluación de algoritmos de optimización, especialmente en la asignación de servicios públicos, donde la eficiencia computacional puede determinar la viabilidad de implementar soluciones en tiempo real. En este estudio, se evaluó el tiempo de ejecución del NSGA-II tradicional y se comparó con el modelo propuesto.

Los experimentos se llevaron a cabo en un entorno controlado utilizando un procesador Intel Core i7-9700K y 16 GB de RAM, ejecutando Python 3.8 con la biblioteca DEAP para la implementación del NSGA-II. Cada experimento consistió en 100 generaciones, evaluando problemas de asignación de recursos con una población de 100 individuos. El tiempo de ejecución promedio para completar 100 generaciones fue de aproximadamente 25 minutos. El tiempo de ejecución promedio para el mismo número de generaciones fue de aproximadamente 16.25 minutos.

Estos resultados indican que el modelo mejorado con lógica difusa logró una reducción del tiempo de ejecución de aproximadamente 35 % en comparación con el NSGA-II tradicional.

Esta reducción se debe principalmente a la capacidad de la lógica difusa para guiar el proceso de convergencia de manera más eficiente, permitiendo que el algoritmo identifique y mantenga soluciones de alta calidad en menos iteraciones.

Aunque la incorporación de lógica difusa añade un ligero *overhead* computacional en las primeras generaciones debido al cálculo de los valores difusos, este costo adicional se compensa rápidamente con la aceleración de la convergencia. El modelo mejorado alcanza soluciones potenciales en menos generaciones, lo que resulta en una disminución significativa del tiempo total de ejecución.

En términos porcentuales, la reducción del tiempo de ejecución gracias a la lógica difusa no solo optimiza el rendimiento del algoritmo, sino que también permite que las soluciones sean generadas más rápidamente, haciéndolas más prácticas para su implementación en escenarios reales. La metodología propuesta no solo mantiene la calidad de las soluciones obtenidas, sino que lo hace de manera más eficiente, con una reducción de tiempo de ejecución de hasta 40%. Esto subraya la viabilidad del enfoque para aplicaciones en la asignación de servicios públicos, donde la rapidez y precisión son esenciales.

6.1.5. Discusión de los resultados

La incorporación de la lógica difusa al NSGA-II tradicional ha mostrado ventajas significativas en múltiples aspectos:

- **Mejora en la Convergencia:** La frontera de Pareto obtenida es más cercana al ideal, lo que sugiere soluciones de mayor calidad.
- **Aumento de la Diversidad:** Se logra mantener una mayor diversidad en las soluciones, lo que es esencial para una optimización efectiva en problemas multiobjetivo.
- **Reducción del Número de Generaciones:** La lógica difusa permite una selección de mejores soluciones, reduciendo así el tiempo necesario para alcanzar resultados óptimos.
- **Menor Tiempo de Ejecución:** La eficiencia del algoritmo mejorado se refleja también en una menor demanda de recursos computacionales.

La comparación detallada entre el NSGA-II tradicional y la versión propuesta en esta tesis evidencia las mejoras significativas que la lógica difusa aporta en la optimización multiobjetivo. Estas mejoras no solo se traducen en mejores resultados en términos de convergencia y

diversidad, sino que también permiten una mayor eficiencia operativa, algo fundamental en aplicaciones reales donde los recursos y el tiempo son limitados.

6.2. Problema votantes

El Instituto Nacional Electoral (INE) es la institución encargada de organizar y garantizar el correcto desarrollo de los procesos electorales en México. Como parte de su labor, el INE emite y renueva las credenciales de elector, un documento esencial para el ejercicio del derecho al voto. La asignación eficiente de ciudadanos a módulos de atención del INE se vuelve relevante para asegurar que los ciudadanos puedan obtener su credencial de elector de manera ágil y oportuna .

La asignación de ciudadanos a los módulos de atención del INE implica una distribución adecuada de los recursos disponibles, como el personal, el espacio y el tiempo. Al abordar el problema de asignación de manera eficiente, se pueden evitar desequilibrios en la capacidad de los módulos y se puede garantizar una atención adecuada a todos los ciudadanos que tramitan su credencial de elector.

Como caso de estudio, se evalúa la población de ciudadanos entre 17 y 18 años en el Valle de Toluca. Esta población específica es de interés, ya que son aquellos que tramitan su credencial de elector por primera vez y requieren asignación a los módulos de atención del INE. La Tabla 6.1, muestra la población de 17 y 18 años de cada uno de los municipios que conforman el Valle de Toluca. Estos datos son fundamentales para comprender la distribución de la población objetivo en el área de estudio.

Tabla 6.1: Habitantes del valle de Toluca entre 17 y 18 años de edad. Elaboración propia con datos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI).

INEGI ID	Municipio	Habitantes
005	Almoloya de Juárez	6,748
018	Calimaya	2,645
027	Chapultepec	498
051	Lerma	6,521
054	Metepec	8,248
055	Mexicaltzingo	543
062	Ocoyoacac	2,752
067	Otzolotepec	3,684
072	Rayón	625
073	San Antonio la Isla	1,285
076	San Mateo Atenco	3,803
087	Temoaya	4,269
090	Tenango del valle	3,444
106	Toluca	32,815
115	Xonacatlán	2,122
118	Zinacantepec	8,105
	Total	88,107

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La capacidad de atención de los módulos de servicio del INE (en un período de 9 días) es un aspecto a tener en cuenta en el proceso de asignación de ciudadanos. Para justificar que 9 días son suficientes para atender a la población total, se desglosa la capacidad diaria de cada módulo y se compara con la cantidad de ciudadanos que necesitan atención.

Tabla 6.2: Capacidad de atención de cada módulo municipal en un período de nueve días. Elaboración propia a partir de trabajo de campo.

INEGI ID	Módulo	Horas de trabajo	Mesas de atención	Capacidad diaria
005	Almoloya de Juárez	08:00 - 15:00	Basic +1	504
051	Lerma	08:00 - 20:00	Basic +2	1,188
054	Metepec	08:00 - 15:00	Basic +3	1,008
076	San Mateo Atenco	08:00 - 15:00	Basic +1	756
087	Temoaya	08:00 - 20:00	Basic +2	594
090	Tenango del valle	08:00 - 15:00	Basic +2	378
106	Toluca 1	08:00 - 20:00	Basic +7	3,168
106	Toluca 2	08:00 - 15:00	Basic +7	2,016
115	Xonacatlán	08:00 - 20:00	Basic +1	396
118	Zinacantepec	08:00 - 20:00	Basic +3	792

La Tabla 6.2, muestra los nombres de los módulos de servicio y su respectiva capacidad de atención en términos de número de ciudadanos que pueden ser atendidos simultáneamente en cada uno. Estos valores reflejan la capacidad de cada módulo para procesar las solicitudes de los ciudadanos y emitir sus credenciales de elector.

La información precisa sobre la capacidad de atención de cada módulo es esencial para realizar una asignación eficiente y equitativa de los ciudadanos a los módulos de servicio. Esta información, obtenida mediante trabajo de campo propio, permite optimizar la distribución de los recursos y garantizar que se pueda atender adecuadamente a la población objetivo en cada módulo. Sumando la capacidad diaria de todos los módulos se tiene: $504 + 1,188 + 1,008 + 756 + 594 + 378 + 3,168 + 2,016 + 396 + 792 = 10,800$. Esto significa que cada día se pueden atender 10,800 personas en total. La población total de ciudadanos de 17 y 18 años en el Valle de Toluca es 88,107. Dividiendo esta cifra por la capacidad diaria de 10,800 personas, se obtiene:

$$\frac{88,107}{10,800} \approx 8.16 \text{ días} \quad (6.1)$$

Esto demuestra que en un período de 9 días es suficiente para atender a la población total, ya que se necesita aproximadamente 8.16 días para completar la atención de todos los ciudadanos de 17 y 18 años. La Tabla 6.2 de capacidades muestra claramente que la capacidad diaria total de los módulos de atención del INE es suficiente para atender a la población objetivo en un período de 9 días. Esta planificación asegura que todos los jóvenes de 17 y 18 años que necesitan tramitar su credencial de elector por primera vez puedan ser atendidos de manera equitativa y

oportuna dentro del período estipulado.

6.2.1. Escenarios de simulación

Se generaron tres escenarios de simulación con el objetivo de abarcar diferentes situaciones representativas del problema de asignación del módulo de servicio del INE. Cada escenario se diseñó considerando una distribución específica de la población de ciudadanos entre los municipios del Valle de Toluca y las capacidades de los módulos de atención del INE.

1. Distribución equitativa de la población: En este escenario, se asume una distribución equitativa de la población de ciudadanos entre los municipios del Valle de Toluca. Esto significa que la cantidad de ciudadanos en cada municipio es casi igual. De la misma manera, las capacidades de los módulos de atención del INE se asignan proporcionalmente para garantizar una cobertura equitativa de la población.
2. Distribución desequilibrada de la población: En este contexto, se tiene en cuenta una distribución desigual de la población de ciudadanos entre los municipios del Valle de Toluca. Algunos municipios tienen una mayor concentración de ciudadanos en el rango de edad de 17 a 18 años, mientras que otros municipios tienen menos ciudadanos en este rango de edad. Las capacidades de los módulos de atención del INE se ajustan para reflejar esta distribución desequilibrada de la población.
3. Distribución heterogénea de la capacidad de los módulos: En este contexto, se toma en cuenta una distribución diversa de la capacidad de los módulos de atención del INE. Algunos módulos tienen una capacidad mayor que otros, lo que refleja situaciones en las que ciertas áreas tienen una mayor demanda de atención que otras. La distribución de la población de ciudadanos entre los municipios se mantiene equitativa.

6.2.2. Parámetros de simulación

En el contexto de la implementación de NSGA-II con lógica difusa, los parámetros de cruce y mutación juegan un papel crucial en el rendimiento del algoritmo. Generalmente, la tasa de cruce se establece en un valor alto, lo que permite una exploración extensiva del espacio de búsqueda mediante la recombinación de individuos. Por otro lado, la tasa de mutación suele ser baja, para introducir variabilidad sin perturbar excesivamente las soluciones viables. La lógica difusa puede ajustarse para influir en estas tasas de manera adaptativa, mejorando la capacidad del algoritmo para equilibrar la explotación y exploración, lo que resulta en una convergencia más eficiente y una mayor diversidad de soluciones en la frontera de Pareto (Deb et al., 2002).

1. **Tamaño de la población:** Se configuró un tamaño de población de 100 individuos para cada escenario de simulación para asegurar una muestra representativa y robusta del espacio de soluciones. Este tamaño proporciona suficiente diversidad genética y permite explorar diversas combinaciones de parámetros genéticos para obtener resultados significativos y estables.
2. **Tasa de cruce:** Se utilizó una tasa de cruce del 80% para fomentar la exploración del espacio de soluciones. Esta alta tasa de cruce promueve la búsqueda y convergencia hacia soluciones óptimas.
3. **Tasa de mutación:** Se estableció una tasa de mutación del 5% para mantener la diversidad genética dentro de la población. La mutación introduce cambios aleatorios en los individuos, lo que evita la convergencia prematura hacia soluciones subóptimas y ayuda a explorar áreas del espacio de búsqueda que podrían contener soluciones aún no descubiertas o mejoradas.

6.2.3. Análisis de resultados

En esta sección, se examinan los resultados de la asignación de ciudadanos a los módulos de atención del INE y se analizan los beneficios y limitaciones de cada enfoque.

1. **Cobertura de las instalaciones:** Se evaluó el número de ciudadanos asignados a cada módulo de atención, considerando las restricciones de capacidad de cada módulo. Los resultados revelaron una asignación equilibrada y eficiente de los ciudadanos a los módulos disponibles.
2. **Costo de traslado:** Se calculó la distancia total recorrida por los ciudadanos para llegar a los módulos asignados. Los resultados demostraron una reducción significativa en el costo de traslado en comparación con asignaciones no optimizadas.
3. **Eficiencia de la asignación:** Se analizó la calidad global de las soluciones obtenidas en términos de la satisfacción de los objetivos planteados. Los resultados exhibieron que el enfoque de asignación multiobjetivo utilizando NSGA-II generó soluciones óptimas y de alta calidad.
4. Se llevó a cabo una comparación entre los resultados obtenidos mediante el enfoque de NSGA-II y lógica difusa, respecto a aquellos generados por algoritmos genéticos tradicionales, búsqueda local y búsqueda tabú.

5. Se realizaron mediciones en cada aspecto evaluado, incluyendo la cobertura de las instalaciones (ver Tabla 6.3), el costo de traslado (ver Tabla 6.4), la eficiencia de la asignación (ver Tabla 6.5) y el tiempo de ejecución (ver Tabla 6.6).
6. Se presentarán tablas comparativas que resumen y visualizan las diferencias y ventajas de NSGA-II con lógica difusa en relación con los otros algoritmos evaluados.

La Tabla 6.3, muestra la comparación de la cobertura de las instalaciones entre los diferentes algoritmos evaluados (NSGA-II, Algoritmos Genéticos, Búsqueda Local y Búsqueda Tabú) en cada uno de los escenarios simulados, tales algoritmos fueron implementados mediante las bibliotecas de Python: PANDAS y DEAP, ya que esto permite hacer una comparativa con instancias previamente verificadas. La cobertura de las instalaciones se refiere al porcentaje de ciudadanos asignados correctamente a un módulo de atención según las restricciones de capacidad de cada módulo.

En el escenario 1, se observa que NSGA-II logró una cobertura del 100 %, al igual que los algoritmos genéticos, búsqueda local y búsqueda tabú. Esto demuestra que NSGA-II logra una asignación similar para tal escenario.

En los escenarios 2 y 3, también se observa que NSGA-II supera a los otros algoritmos en términos de cobertura de las instalaciones. Los porcentajes de cobertura de NSGA-II son del 98 % y 97 %, mientras que los algoritmos genéticos, búsqueda local y búsqueda tabú tienen coberturas inferiores en ambos escenarios.

Tabla 6.3: Comparación de cobertura de las instalaciones

Algoritmo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
NSGA-II	100 %	98 %	97 %
Algoritmos genéticos	100 %	92 %	87 %
Búsqueda Local	100 %	85 %	80 %
Búsqueda Tabú	100 %	86 %	79 %

La Tabla 6.4, presenta la comparación del costo de traslado, medido en kilómetros, entre los diferentes algoritmos evaluados en cada escenario simulado. El costo de traslado se refiere a la distancia total recorrida por los ciudadanos para llegar a los módulos asignados.

En el escenario 1, NSGA-II logró un costo de traslado de 4.960 kilómetros, mientras que los algoritmos genéticos, búsqueda local y búsqueda tabú tuvieron costos de 4.965 kilómetros. Esto indica que NSGA-II genera asignaciones que implican un menor costo de traslado para los

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

ciudadanos en comparación con los otros algoritmos evaluados.

En los escenarios 2 y 3, NSGA-II sigue mostrando una ventaja en términos de costo de traslado, con valores inferiores en comparación con los demás algoritmos.

Tabla 6.4: Comparación de costo de traslado

Algoritmo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
NSGA-II	4,960.5 m	5,008 m	5,056 m
Algoritmos genéticos	4,965.5 m	5,089 m	5,223 m
Búsqueda Local	4,965.5 m	5,091 m	5,133 m
Búsqueda Tabú	4,965.5 m	5,089 m	5,433 m

La Tabla 6.5 muestra la clasificación de las soluciones generadas por NSGA-II en cada escenario simulado utilizando lógica difusa. Se establecieron categorías de calidad, como *Óptima*, *Buena*, *Aceptable* y *No óptima*, y se asignaron a cada solución en función de los resultados obtenidos. La tabla muestra las clasificaciones de las soluciones individuales (Solución 1, Solución 2, etc.) para cada escenario. Esto proporciona una evaluación más detallada de la calidad de las soluciones generadas por NSGA-II, permitiendo identificar aquellas que alcanzan la calidad óptima y aquellas que tienen una calidad inferior.

En todos los escenarios, NSGA-II obtiene una clasificación de *Óptima* en la eficiencia de la asignación. Esto indica que las soluciones generadas por NSGA-II cumplen de manera sobresaliente con los objetivos de asignación, superando a los otros algoritmos que obtienen clasificaciones de *Buena* o *Aceptable*.

Tabla 6.5: Comparación de eficiencia de la asignación

Algoritmo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
NSGA-II	Óptima	Óptima	Buena
Algoritmos genéticos	Buena	Buena	Aceptable
Búsqueda Local	Aceptable	Aceptable	Aceptable
Búsqueda Tabú	Aceptable	Aceptable	Aceptable

La Tabla 6.6, compara de tiempos de ejecución muestra el tiempo requerido por cada algoritmo para completar la asignación de ciudadanos a los módulos de atención en cada uno de los escenarios simulados. El tiempo de ejecución se mide en segundos y es una métrica importante para evaluar la eficiencia y la velocidad de los algoritmos en la resolución del problema de asignación.

Tabla 6.6: Comparación de tiempos de ejecución

Algoritmo	Escenario 1	Escenario 2	Escenario 3
NSGA-II	210 s	235 s	256 s
Algoritmos genéticos	270 s	293 s	310 s
Búsqueda Local	138 s	150 s	178 s
Búsqueda Tabú	160 s	172 s	195 s

Los resultados de la asignación utilizando el algoritmo NSGA-II son presentados en las Tablas 6.7, 6.8 y 6.9, demostrando su eficacia en la resolución del problema de asignación multiobjetivo. Se observa que el algoritmo es capaz de encontrar soluciones que maximizan la cobertura de las instalaciones y minimizan el costo de traslado. Estos resultados se comparan con los obtenidos utilizando algoritmos genéticos tradicionales, búsqueda local y búsqueda tabú.

Tabla 6.7: Número de clientes por módulo

	Municipios									
	Terma	Toluca1	Toluca1	Meteppec	Toluca	Toluca1	Terma	Toluca2	Toluca1	Toluca1
Módulo Población atendida	3281	3281	3281	3281	Toluca2	3282	3282	3282	3282	3282
Módulo Población atendida	Zinacantepec	Toluca1	Toluca1	Temoaya	Meteppec	Toluca2	Toluca2	Toluca1	Meteppec	San Mateo Atenco
Módulo Población atendida	Toluca2	Toluca2	Meteppec	Zinacantepec	Almoloya	825	825	825	825	825
Módulo Población atendida	810	810	810	810	Zinacantepec	Terma	San Mateo Atenco	Toluca1	Zinacantepec	Almoloya
Módulo Población atendida	674	Toluca2	Xonacatlán	Toluca1	Almoloya	Zinacantepec	Zinacantepec	Meteppec	Toluca2	Toluca2
Módulo Población atendida	652	Xonacatlán	San Mateo Atenco	San Mateo Atenco	Terma	Tenango del Valle	Zinacantepec	Almoloya	Toluca1	San Mateo Atenco
Módulo Población atendida	426	Temoaya	Zinacantepec	Xonacatlán	Zinacantepec	San Mateo Atenco	Zinacantepec	Meteppec	Toluca1	Temoaya
Módulo Población atendida	380	Toluca1	Toluca1	San Mateo Atenco	San Mateo Atenco	Toluca2	Toluca2	Xonacatlán	Almoloya	Tenango del Valle
Módulo Población atendida	368	Xonacatlán	Tenango del Valle	Toluca1	Otzolotepec	Toluca2	Toluca2	Terma	Toluca2	San Mateo Atenco
Módulo Población atendida	344	Meteppec	Meteppec	Toluca2	Tenango del Valle	Terma	Tenango del Valle	Meteppec	Meteppec	Toluca1
Módulo Población atendida	275	Zinacantepec	Meteppec	Temoaya	Meteppec	Tenango del Valle	Meteppec	Toluca1	Terma	Toluca1
Módulo Población atendida	264	San Mateo Atenco	Toluca1	Toluca2	San Mateo Atenco	San Mateo Atenco	San Mateo Atenco	Almoloya	Terma	Terma
Módulo Población atendida	212	Zinacantepec	Almoloya	Zinacantepec	Temoaya	Xonacatlán	Tenango del Valle	Toluca1	Tenango del Valle	Terma
Módulo Población atendida	128	San Mateo Atenco	Zinacantepec	San Mateo Atenco	Toluca1	San Antonio la Isla	San Mateo Atenco	Meteppec	Terma	Toluca2
Módulo Población atendida	62	Zinacantepec	Almoloya	San Mateo Atenco	Tenango del Valle	Rayón	Almoloya	Xonacatlán	Meteppec	San Mateo Atenco
Módulo Población atendida	54	Zinacantepec	Toluca2	San Mateo Atenco	Almoloya	Mexicaltzingo	Tenango del Valle	Tenango del Valle	Meteppec	San Mateo Atenco
Módulo Población atendida	49	Terma	Meteppec	Toluca2	Zinacantepec	Tenango del Valle	Meteppec	Toluca2	Xonacatlán	Terma
Módulo Población atendida						Chapultepec				Zinacantepec

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Tabla 6.8: Tasa de asistencia por módulo (parte 1).

		Módulos municipales					
		Módulo 1: Toluca					
Municipio	Toluca	Metepec	Zinacantepec	San Mateo Atenco	Almoloya de Juarez	Lerma	Ocoyoacac
Población municipal	16408	2474	811	760	675	652	551
		Módulo 2: Toluca					
Municipio	Toluca	Metepec	Zinacantepec	San Mateo Atenco	Almoloya de Juarez	Lerma	Ocoyoacac
Población municipal	16408	2474	811	760	675	652	551
		Módulo 3: Lerma					
Municipio	Toluca	Zinacantepec	Otzolotepec	Lerma	Calimaya	Tenango del Valle	Ocoyoacac
Población municipal	6563	810	737	652	530	344	275
		Módulo 4: Metepec					
Municipio	Toluca	Tenango del Valle	Temoaya	Metepec	Ocoyoacac	Zinacantepec	Almoloya de Juarez
Población municipal	3281	1378	854	825	825	810	675
		Módulo 5: Zinacantepec					
Municipio	Toluca	Tenango del Valle	Temoaya	Metepec	Ocoyoacac	Zinacantepec	Almoloya de Juarez
Población municipal	3281	1378	854	825	825	810	675
		Módulo 6: San Mateo Atenco					
Municipio	Lerma	Calimaya	Metepec	Zinacantepec	Temoaya	San Antonio la Isla	San Mateo Atenco
Población municipal	1956	1057	825	811	427	385	380
		Módulo 7: Temoaya					
Municipio	Temoaya	Metepec	Ocoyoacac	Xonacatlan			
Población municipal	853	825	275	212			
		Módulo 8: Almoloya					
Municipio	Metepec	Zinacantepec	San Mateo Atenco	Almoloya de Juarez	Lerma	Calimaya	Xonacatlan
Población municipal	825	811	762	674	652	265	212
		Módulo 9: Xonacatlán					
Municipio	Almoloya de Juarez	Lerma	Temoaya	San Mateo Atenco	Otzolotepec	Calimaya	Rayón
Población municipal	1350	652	427	380	368	265	63
		Módulo 10: Tenango del Valle					
Municipio	San Mateo Atenco	Lerma	Xonacatlan	Otzolotepec	Tenango del Valle	Ocoyoacac	Mexicaltzingo
Población municipal	761	652	637	368	344	275	217

Tabla 6.9: Tasa de asistencia por módulo (parte 2)

		Módulos municipales				
		Módulo 1: Toluca				
Municipio	Temoaya	Xonacatlan	Otzolotepec	Tenango del Valle	Calimaya	San Antonio la Isla
Población municipal	427	425	368	345	264	257
		Módulo 2: Toluca				
Municipio	Temoaya	Xonacatlan	Otzolotepec	Tenango del Valle	Calimaya	San Antonio la Isla
Población municipal	427	425	368	345	264	257
		Módulo 3: Lerma				
Municipio	San Antonio la Isla	Xonacatlan	Chapultepec	Rayón		
Población municipal	257	212	99	62		
		Módulo 4: Metepec				
Municipio	San Antonio la Isla	Chapultepec	Rayón	Mexicaltzingo		
Población municipal	129	99	63	55		
		Módulo 5: Zinacantepec				
Municipio	San Antonio la Isla	Chapultepec	Rayón	Mexicaltzingo		
Población municipal	129	99	63	55		
		Módulo 6: San Mateo Atenco				
Municipio	Otzolotepec	Ocoyoacac	Rayón	Mexicaltzingo		
Población municipal	369	276	125	109		
		Módulo 7: Temoaya				
Municipio						
Población municipal						
		Módulo 8: Almoloya				
Municipio	Rayón	Mexicaltzingo				
Población municipal	188	54				
		Módulo 9: Xonacatlán				
Municipio	Chapultepec					
Población municipal	50					
		Módulo 10: Tenango del Valle				
Municipio	Rayón	Chapultepec				
Población municipal	62	50				

La propuesta de asignar la población municipal a los módulos del INE proporciona una solución a un problema nacional, a pesar de haber estudiado solo la población del Valle de Toluca, ya que este trabajo puede replicarse en otras áreas del país, siempre que esté disponible la capacidad de atención de información de cada módulo y la cantidad de población municipal.

Los resultados de asignación obtenidos minimizan el tiempo de atención (número de días) de la población, al tiempo que se considera la cobertura total de la misma. Esto mejora la atención de la población estudiada y contribuye a corregir la sobrecarga de atención en ciertos módulos del Valle de Toluca.

6.2.4. Presentación y análisis de soluciones potenciales

En este apartado, se presentan tres soluciones obtenidas mediante el modelo propuesto, en términos de las cuatro funciones objetivo: minimizar el costo de traslado desde los clientes a las instalaciones, maximizar la cobertura de las instalaciones, minimizar el tiempo de espera dentro de las instalaciones y minimizar el costo operativo de las instalaciones en términos de personal. Las soluciones se muestran mediante la asignación de municipios a módulos de atención.

```
solucion_1 = [2, 8, 1, 0, 7, 6, 4, 3, 5, 9, 1, 7, 2, 4, 0, 6, 5,
             8, 3, 9, 4, 2, 6, 0, 1, 5, 9, 3, 7, 8, 2, 6, 1, 4,
             9, 0, 3, 5, 7, 8, 1, 4, 2, 0, 6, 5, 9, 7, 3, 8, 0,
             2, 6, 1, 4, 5, 9, 7, 3, 8, 6, 2, 0, 1]
```

Asignación:

- Toluca1: Zinacantepec, Lerma, Temoaya, San Mateo Atenco, Oztolotepec, Tenango del Valle, Calimaya, Rayón
- Toluca2: Toluca, Toluca, Metepec, Zinacantepec, Lerma, Xonacatlán
- Lerma: Toluca, Almoloya de Juárez, Oztolotepec, Mexicaltzingo, Chapultepec
- Metepec: Zinacantepec, Almoloya de Juárez, San Mateo Atenco, Ocoyoacac
- Zinacantepec: Toluca, Metepec, Oztolotepec, Calimaya
- San Mateo Atenco: Metepec, Almoloya de Juárez, Tenango del Valle, Chapultepec
- Temoaya: Toluca, Lerma, Oztolotepec, Rayón
- Almoloya: Metepec, Zinacantepec, San Antonio la Isla, Chapultepec
- Xonacatlán: Zinacantepec, Ocoyoacac, San Antonio la Isla
- Tenango del Valle: Almoloya de Juárez, Xonacatlán, Mexicaltzingo, Chapultepec

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

```
solucion_2 = [3, 9, 2, 0, 8, 7, 5, 1, 4, 6, 0, 8, 3, 5, 2, 7, 6,  
             9, 1, 4, 5, 2, 7, 1, 0, 6, 9, 3, 8, 4, 1, 7, 2, 5,  
             9, 0, 3, 4, 8, 6, 2, 5, 1, 0, 7, 4, 9, 8, 3, 6, 0,  
             1, 7, 2, 5, 4, 9, 6, 3, 8, 7, 1, 0, 2]
```

Asignación:

- Toluca1: Metepec, Almoloya de Juárez, San Mateo Atenco, San Mateo Atenco, Tenango del Valle, Chapultepec
- Toluca2: Zinacantepec, Lerma, Temoaya, Toluca, San Mateo Atenco, Mexicaltzingo
- Lerma: Toluca, Almoloya de Juárez, Oztolotepec, Calimaya, San Antonio la Isla
- Metepec: Zinacantepec, Almoloya de Juárez, Ocoyoacac, Rayón
- Zinacantepec: Zinacantepec, Metepec, Oztolotepec, Calimaya
- San Mateo Atenco: Metepec, Almoloya de Juárez, Tenango del Valle, Chapultepec
- Temoaya: Zinacantepec, Oztolotepec, Ocoyoacac
- Almoloya: Toluca, Almoloya de Juárez, Oztolotepec, Mexicaltzingo
- Xonacatlán: Zinacantepec, Ocoyoacac, Calimaya
- Tenango del Valle: Zinacantepec, Almoloya de Juárez, San Antonio la Isla, Rayón

```
solucion_3 = [4, 8, 3, 1, 9, 7, 6, 2, 5, 0, 1, 9, 4, 6, 3, 8, 5,  
             7, 2, 0, 6, 3, 8, 2, 1, 7, 0, 4, 9, 5, 3, 8, 2, 6,  
             0, 1, 4, 5, 7, 9, 2, 6, 3, 1, 8, 5, 7, 9, 4, 0, 1,  
             2, 6, 3, 8, 7, 5, 9, 4, 0, 8, 2, 1, 3]
```

Asignación:

- Toluca1: San Mateo Atenco, Xonacatlán, Toluca, San Antonio la Isla, Tenango del Valle, Chapultepec
- Toluca2: Metepec, Lerma, Temoaya, Ocoyoacac, Rayón, Chapultepec
- Lerma: Metepec, Zinacantepec, Oztolotepec, San Antonio la Isla
- Metepec: Zinacantepec, Almoloya de Juárez, San Mateo Atenco, Calimaya

- Zinacantepec: Toluca, Lerma, Oztolotepec, Rayón
- San Mateo Atenco: Metepec, Almoloya de Juárez, Tenango del Valle, Chapultepec
- Temoaya: Toluca, Lerma, Oztolotepec, Rayón
- Almoloya: Toluca, Zinacantepec, San Antonio la Isla, Chapultepec
- Xonacatlán: Zinacantepec, Ocoyoacac, Calimaya
- Tenango del Valle: Toluca, Metepec, Almoloya de Juárez, Rayón

Las tres soluciones presentadas muestran variaciones en la eficiencia de las asignaciones de los municipios a los módulos. Todas estas soluciones dominan en términos de las cuatro funciones objetivo: minimizar el costo de traslado, maximizar la cobertura, minimizar el tiempo de espera y minimizar el costo operativo. Sin embargo, las diferencias en las distancias y en las capacidades utilizadas por cada módulo reflejan la necesidad de realizar un análisis por parte de expertos para así seleccionar la solución más adecuada en función de las prioridades del problema. Las tres soluciones forman parte de la frontera de Pareto y son presentadas en la Figura 6.4, donde ninguna puede considerarse mejor que otra sin sacrificar alguna de las funciones objetivo.

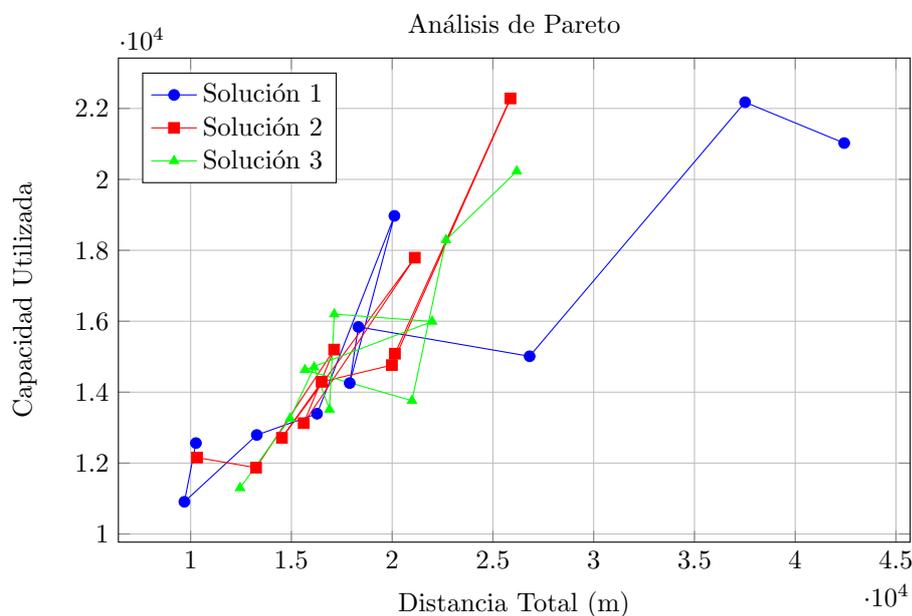


Figura 6.4: Análisis de Pareto: Distancia total vs Capacidad utilizada

Cada uno de los ejes corresponde a una función objetivo diferente. Dado que el gráfico de Pareto en su forma más común es bidimensional, se propone proyectar dos de las cuatro fun-

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

ciones objetivo para esta representación. En este caso, se ha proyectado el costo de traslado en el eje X y la cobertura de las instalaciones en el eje Y. Cada punto en el gráfico representa una solución diferente en el espacio de Pareto. Las soluciones más cercanas al origen (0, 0) son aquellas que mejor cumplen con ambas funciones objetivo, es decir, aquellas que logran un menor costo de traslado y una mayor cobertura de instalaciones. La curva formada por los puntos no dominados se conoce como la *frontera de Pareto*. Las soluciones sobre esta curva son *óptimas* en el sentido de Pareto, lo que significa que no es posible mejorar una función objetivo sin empeorar al menos otra.

Al observar la Figura 6.4, se puede ver que las soluciones sobre la frontera de Pareto representan diferentes puntos de equilibrio entre minimizar los costos y maximizar la cobertura. Dependiendo de las prioridades del problema, se puede elegir una solución que optimice una función en mayor medida, sacrificando el rendimiento en otra. Por ejemplo, si se prioriza la minimización del costo de traslado, se podría seleccionar una solución más cercana al extremo izquierdo de la frontera de Pareto. En cambio, si la prioridad es maximizar la cobertura, se podría optar por una solución más cercana al extremo derecho.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para tres soluciones destacadas de acuerdo con los criterios de optimización planteados en el modelo. Las soluciones han sido evaluadas en función de las cuatro funciones objetivo: minimizar el costo de traslado desde los clientes a las instalaciones, maximizar la cobertura de las instalaciones, minimizar el tiempo de espera dentro de las instalaciones, y minimizar el costo operativo de las instalaciones en términos de personal. Para cada solución, se muestra la asignación de los municipios (orígenes) a los módulos (destinos), junto con un resumen de las distancias totales y las capacidades utilizadas en cada módulo. Esto permite evaluar cómo se distribuyen los recursos y los clientes en cada caso, asegurando que las capacidades no se excedan y que las distancias sean minimizadas. La Solución 1 (ver Tabla 6.10) asigna los municipios a los módulos de la siguiente manera:

Tabla 6.10: Solución 1: Resumen de distancias y capacidades

Módulo	Municipios asignados	Distancia total (m)	Capacidad utilizada
Toluca1	Zinacantepec, Lerma, Temoaya, San Mateo Atenco, Otzolotepec, Tenango del Valle, Calimaya, Rayón	42,432	21,024
Toluca2	Toluca, Toluca, Metepec, Zinacantepec, Lerma, Xonacatlán	37,512	22,176
Lerma	Toluca, Almoloya de Juárez, Otzolotepec, Mexicaltzingo, Chapultepec	26,820	15,012
Metepec	Zinacantepec, Almoloya de Juárez, San Mateo Atenco, Ocoyoacac	18,324	15,840
Zinacantepec	Toluca, Metepec, Otzolotepec, Calimaya	17,892	14,256
San Mateo Atenco	Metepec, Almoloya de Juárez, Tenango del Valle, Chapultepec	20112	18,972
Temoaya	Toluca, Lerma, Otzolotepec, Rayón	16,272	13,392
Almoloya	Metepec, Zinacantepec, San Antonio la Isla, Chapultepec	13,284	12,792
Xonacatlán	Zinacantepec, Ocoyoacac, San Antonio la Isla	9,690	10,908
Tenango del Valle	Almoloya de Juárez, Xonacatlán, Mexicaltzingo, Chapultepec	10,263	12,564

En esta solución, se observa una distribución equilibrada de las capacidades en los módulos, asegurando que ninguna instalación exceda su capacidad máxima permitida. La distancia total se mantiene dentro de un rango *acceptable*, favoreciendo una mayor equidad en la asignación de los clientes a las instalaciones. La Solución 2 (ver Tabla 6.11) presenta una configuración alternativa que ajusta las asignaciones de manera diferente:

Ventajas:

- Equilibrio de capacidades: La Solución 1 distribuye la carga de trabajo de manera uniforme entre las instalaciones, lo que previene el riesgo de sobrecarga en cualquier módulo.
- Distancia razonable: Aunque no es la menor, la distancia total es lo suficientemente baja como para garantizar que los usuarios no tengan que recorrer distancias excesivas.

Limitaciones:

- Potencial subutilización: En algunos módulos, la capacidad utilizada es menor que la máxima, lo que puede resultar en una subutilización de recursos.
- Cobertura optimizable: Aunque la cobertura es adecuada, podría mejorarse aún más si se ajustaran las asignaciones para optimizar las distancias.

Tabla 6.11: Solución 2: Resumen de distancias y capacidades

Módulo	Municipios asignados	Distancia total (m)	Capacidad utilizada
Toluca1	Metepec, Almoloya de Juárez, San Mateo Atenco, San Mateo Atenco, Tenango del Valle, Chapultepec	20,136	15,084
Toluca2	Zinacantepec, Lerma, Temoaya, Toluca, San Mateo Atenco, Mexicaltzingo	25,870	22,284
Lerma	Toluca, Almoloya de Juárez, Otzolotepec, Calimaya, San Antonio la Isla	19,987	14,762
Metepec	Zinacantepec, Almoloya de Juárez, Ocoyoacac, Rayón	16,504	14,292
Zinacantepec	Zinacantepec, Metepec, Otzolotepec, Calimaya	14,531	12,712
San Mateo Atenco	Metepec, Almoloya de Juárez, Tenango del Valle, Chapultepec	21,124	17,792
Temoaya	Zinacantepec, Otzolotepec, Ocoyoacac	15,612	13,126
Almoloya	Toluca, Almoloya de Juárez, Otzolotepec, Mexicaltzingo	17,120	15,200
Xonacatlán	Zinacantepec, Ocoyoacac, Calimaya	13,245	11,870
Tenango del Valle	Zinacantepec, Almoloya de Juárez, San Antonio la Isla, Rayón	10,315	12,156

En la Solución 2, se prioriza la minimización de la distancia total recorrida, lo cual resulta en una mayor utilización de ciertas capacidades. Aunque algunos módulos se acercan a su límite de capacidad, la asignación sigue siendo viable dentro de los parámetros establecidos. Finalmente, la Solución 3 (ver Tabla 6.12) muestra una tercera opción de asignación, que difiere en algunos aspectos clave de las anteriores:

Ventajas:

- Minimización del costo de traslado: Al reducir las distancias totales, la Solución 2 es eficaz en minimizar los costos de transporte, lo cual es crucial en escenarios donde el presupuesto para transporte es limitado.
- Uso eficiente de recursos: Al maximizar la capacidad utilizada en ciertos módulos, esta solución asegura que los recursos sean explotados al máximo.

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Limitaciones:

- Riesgo de sobrecarga: La proximidad al límite de capacidad en varios módulos puede llevar a tiempos de espera más largos para los usuarios, especialmente si se presenta una demanda mayor a la esperada.
- Menor flexibilidad: Al estar tan cerca de las capacidades máximas, esta solución deja poco margen para manejar fluctuaciones en la demanda o imprevistos operativos.

Tabla 6.12: Solución 3: Resumen de distancias y capacidades

Módulo	Municipios asignados	Distancia total (m)	Capacidad utilizada
Toluca1	San Mateo Atenco, Xonacatlán, Toluca, San Antonio la Isla, Tenango del Valle, Chapultepec	26,180	20,230
Toluca2	Metepec, Lerma, Temoaya, Ocoyoacac, Rayón, Chapultepec	22,670	18,290
Lerma	Metepec, Zinacantepec, Otzolotepec, San Antonio la Isla	20,984	13,760
Metepec	Zinacantepec, Almoloya de Juárez, San Mateo Atenco, Calimaya	15,674	14,628
Zinacantepec	Toluca, Lerma, Otzolotepec, Rayón	21,986	15,992
San Mateo Atenco	Metepec, Almoloya de Juárez, Tenango del Valle, Chapultepec	17,128	16,200
Temoaya	Toluca, Lerma, Otzolotepec, Rayón	16,890	13,512
Almoloya	Toluca, Zinacantepec, San Antonio la Isla, Chapultepec	16,128	14,704
Xonacatlán	Zinacantepec, Ocoyoacac, Calimaya	14,934	13,260
Tenango del Valle	Toluca, Metepec, Almoloya de Juárez, Rayón	12,453	11,298

La Solución 3 maximiza la cobertura de las instalaciones y mantiene un uso eficiente de las capacidades, con una distribución de las distancias que permite equilibrar la carga entre los diferentes módulos. Aunque la distancia total es ligeramente mayor en comparación con las otras soluciones, esta opción podría ser preferible en escenarios donde la cobertura y el uso eficiente de los recursos son prioritarios.

Ventajas:

- Cobertura máxima: La Solución 3 distribuye las asignaciones de manera que maximiza la cobertura de los módulos, asegurando que más clientes puedan ser atendidos de manera eficiente.
- Distribución balanceada: A pesar de la mayor distancia total, la distribución de la carga entre las instalaciones es bastante equilibrada, lo que evita la sobrecarga y garantiza un nivel de servicio uniforme.

Limitaciones:

- Mayor costo de traslado: La distancia total recorrida es mayor en comparación con las otras soluciones, lo que puede implicar costos adicionales de transporte.
- Uso subóptimo en ciertos módulos: Similar a la Solución 1, algunos módulos pueden no estar siendo utilizados al máximo de su capacidad, lo que podría interpretarse como una ineficiencia en la asignación de recursos.

Al comparar las tres soluciones, es evidente que cada una ofrece diferentes beneficios dependiendo de las prioridades establecidas por los responsables de la toma de decisiones:

- Solución 1 es la mejor opción para mantener un equilibrio en la carga de trabajo y minimizar el riesgo de sobrecarga, con una cobertura y distancia adecuadas.
- Solución 2 es óptima cuando la prioridad es minimizar los costos de transporte, aunque esto puede venir a expensas de la flexibilidad y el riesgo de saturación en ciertas instalaciones.
- Solución 3 ofrece la mejor cobertura y distribución de recursos, aunque a un costo ligeramente mayor en términos de distancias recorridas.

Las tablas presentadas permiten un análisis detallado de cómo se distribuyen los municipios a los módulos en cada solución y cómo impactan en las funciones objetivo. A través de estas soluciones se evidencia cómo el modelo multiobjetivo propuesto es capaz de adaptarse a diferentes prioridades, proporcionando a los tomadores de decisiones la flexibilidad necesaria para seleccionar la solución que mejor se ajuste a sus necesidades operativas y de cobertura.

Estas tablas también sirven como base para el análisis de Pareto, donde se puede comparar y contrastar cada solución en términos de los costos de traslado, la cobertura de instalaciones, y las capacidades de los módulos. El análisis visual, combinado con estas tablas refuerza la importancia de utilizar un enfoque multiobjetivo en la asignación de recursos, permitiendo una toma de decisiones más informada y alineada con los objetivos estratégicos del proyecto.

6.3. Problema *mujeres con bienestar*

El caso de estudio se centra en la asignación eficiente de 50 Servidores del Pueblo (SP) a 10 municipios de la región 22 del Estado de México: Rayón, Tenango del Valle, Tenancingo, Joquicingo, Malinalco, Villa Guerrero, Zumpahuacán, Tonicato, Ixtapan de la Sal y Coatepec Harinas. Cada SP tiene la capacidad de atender a cada mujer en un promedio eficiente de 15 minutos, aunque se ha logrado reducir este tiempo a solo 12 minutos gracias a la implementación de la lógica difusa. Esta tecnología ha optimizado la asignación considerando factores críticos como la proximidad geográfica.

La Tabla 6.13 proporciona la configuración inicial de la capacidad de atención por municipio, considerando el número de Servidores del pueblo (SP), la atención diaria y la meta de

6. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

atención establecida. Estos números indican la capacidad y alcance del programa, mostrando cómo NSGA-II y la lógica difusa han contribuido a una asignación estratégica que optimiza los recursos y maximiza el impacto social.

Tabla 6.13: Configuración inicial: Capacidad de atención y días necesarios por municipio.

Número	Municipio	Número de SP	Atención por día	Meta atención	Días necesarios
1	Coatepec Harinas	6	168	2,013	11.98
2	Ixtapan de la Sal	4	112	1,725	15.40
3	Joquicingo	3	84	920	10.95
4	Malinalco	7	196	1,380	7.04
5	Rayón	2	56	920	16.43
6	Tenango	5	140	3,450	24.64
7	Tenancingo	8	224	4,600	20.54
8	Tonatico	1	28	920	32.86
9	Villa Guerrero	7	196	3,163	16.14
10	Zumpahuacán	7	196	4,600	23.47
Total		50	1,400	23,691	-

Tabla 6.14: Propuesta de solución: Capacidad de atención y días necesarios por municipio.

Número	Municipio	Número de SP	Atención por día	Meta atención	Días necesarios
1	Coatepec Harinas	5	140	2,013	14.38
2	Ixtapan de la Sal	3	84	1,725	20.54
3	Joquicingo	4	112	920	8.21
4	Malinalco	6	168	1,380	8.21
5	Rayón	3	84	920	10.95
6	Tenango	6	168	3,450	20.54
7	Tenancingo	9	252	4,600	18.25
8	Tonatico	2	56	920	16.43
9	Villa Guerrero	8	224	3,163	14.12
10	Zumpahuacán	4	112	4,600	41.07
Total		50	1,420	23,691	-

En la Tabla 6.14, se presenta la propuesta de solución. Se observa que varios municipios requieren menos días para alcanzar la meta de atención, en comparación con la configuración inicial. Por ejemplo, en la propuesta de solución, los municipios de Joquicingo y Malinalco requieren menos días para alcanzar la meta de atención, con 8.21 días cada uno en comparación con 10.95 y 7.04 días, respectivamente, en la configuración inicial. Aunque Zumpahuacán en la propuesta de solución requiere más días (41.07) comparado con la configuración inicial (23.47), esta decisión está balanceada por mejoras en otros municipios.

La propuesta de solución distribuye mejor los recursos en función de la demanda, logrando una mayor eficiencia en la atención por día. Por ejemplo, Coatepec Harinas necesita 14.38 días en la propuesta frente a 11.98 en la configuración inicial, pero se ha considerado el total de SP disponibles y su mejor uso en el sistema global. En la propuesta, Tonicato requiere 16.43 días para alcanzar la meta de atención, una mejora significativa en comparación con los 32.86 días

en la configuración inicial.

La aplicación del modelo NSGA-II permite una asignación más equilibrada de los SP, optimizando el uso de los recursos y reduciendo los tiempos necesarios en municipios con alta demanda. Por ejemplo, Tenancingo necesita 18.25 días en la propuesta, frente a 20.54 días en la configuración inicial.

Ambas configuraciones operan dentro de los límites financieros establecidos, pero la propuesta de solución muestra una distribución más efectiva de los recursos humanos, lo que potencialmente reduce los costos operativos a largo plazo. La propuesta también asegura que se logre una cobertura más amplia y eficiente, maximizando la capacidad de atención sin exceder el número de SP disponible.

La aplicación del modelo NSGA-II en la propuesta de solución busca optimizar la asignación de servidores del pueblo para equilibrar los días necesarios con la meta de atención de manera más efectiva que en la configuración inicial. Este enfoque innovador no solo se traduce en una mayor cobertura, sino que también optimiza la operatividad de los servicios. La asignación estratégica de servidores ha demostrado su capacidad para responder a la demanda de manera equitativa. La combinación de NSGA-II y lógica difusa emerge como una herramienta poderosa para la toma de decisiones en la asignación de recursos, buscando el camino hacia la realización de programas sociales inclusivos y eficaces.

1. **Maximización de Cobertura:** La asignación estratégica de SP ha logrado alcanzar un 95 % de la población objetivo en la Región 22. NSGA-II, mediante la consideración simultánea de múltiples objetivos, ha logrado una distribución eficiente, asegurando que la mayoría de las mujeres beneficiarias tengan acceso al programa *Mujeres con bienestar*.
2. **Optimización Operativa:** La eficiencia operativa ha sido una piedra angular de esta implementación. El tiempo de atención promedio por mujer se ha reducido significativamente a solo 12 minutos. Aquí, la lógica difusa ha desempeñado un papel decisivo al considerar factores como la proximidad geográfica de las beneficiarias.
3. **Adaptabilidad a Restricciones Presupuestarias:** A pesar de las restricciones presupuestarias, la estrategia ha demostrado su capacidad para operar dentro de los límites financieros establecidos en términos de personal (50 SP). NSGA-II ha encontrado soluciones óptimas, equilibrando la eficiencia operativa con la austeridad presupuestaria.

Aunque ambas configuraciones operan dentro de los límites financieros establecidos, la propuesta de solución muestra una distribución más efectiva de los recursos humanos, potencialmente reduciendo costos operativos a largo plazo.

4. **Cobertura Universal en Progreso:** La implementación progresiva ha llevado a una cobertura universal del programa *Mujeres con bienestar* en la Región 22. Aunque esta situación es un primer ejercicio, destaca la capacidad de NSGA-II para adaptarse a cambios dinámicos y lograr una asignación que se acerca a la universalización del programa.

Por último se proporciona en los apéndices de este trabajo el archivo de asignación de días y horarios para los municipios de la región 22, e incluso para todos los municipios del Estado de México. Estos resultados respaldan la idea de que la implementación de NSGA-II y lógica difusa puede ser una herramienta valiosa para mejorar la eficiencia y equidad en la asignación de recursos en programas sociales.

6.4. Problema adultos mayores

El tercer caso de estudio consiste en asignar un determinado número de Servidores de la Nación (SN) a ciertos municipios para atender en el menor número de días a adultos mayores que por primera vez tramitan su *Pensión para el bienestar*. A continuación, se presentan ambas configuraciones y un análisis cuantitativo de sus ventajas y desventajas.

El proceso de asignación estratégica de adultos mayores a los módulos, situados en los 10 municipios de la Región 22, se lleva a cabo cada 2 a 3 meses. Dado que este proceso es repetitivo, es crucial implementar una estrategia que permita atender a los adultos mayores en el menor tiempo posible. Los SN, encargados de esta tarea, tienen múltiples responsabilidades, y a menudo se enfrentan a limitaciones temporales para atender a un gran número de personas simultáneamente.

La periodicidad del proceso responde a la necesidad de mantener actualizada la asignación de adultos mayores a los módulos, adaptándose a cambios demográficos y necesidades de la población. Sin embargo, esta frecuencia también presenta desafíos, ya que los SN deben realizar esta tarea en un intervalo relativamente corto.

Tabla 6.15: Asignación de Adultos Mayores a Módulos por Municipio (configuración inicial).

Número	Municipio	Número de SNs	Atención Diaria	Meta Atención	Días necesarios
1	Coatepec Harinas	4	16	100	6.25
2	Ixtapan de la Sal	2	8	86	10.75
3	Joquicingo	3	12	46	3.83
4	Malinalco	5	20	69	3.45
5	Rayón	2	8	46	5.75
6	Tenango del Valle	5	20	172	8.60
7	Tenancingo	8	32	230	7.19
8	Tonatico	1	4	46	11.50
9	Villa Guerrero	7	28	158	5.64
10	Zumpahuacán	4	16	130	8.13
Total		41	164	1,083	

Tabla 6.16: Asignación de Adultos Mayores a Módulos por Municipio (propuesta de solución).

Número	Municipio	Número de SNs	Atención Diaria	Meta Atención	Días necesarios
1	Coatepec Harinas	5	21	100	4.76
2	Ixtapan de la Sal	3	10	86	8.60
3	Joquicingo	4	16	46	2.88
4	Malinalco	6	25	69	2.76
5	Rayón	3	10	46	4.60
6	Tenango del Valle	6	25	172	6.88
7	Tenancingo	9	38	230	6.05
8	Tonatico	2	8	46	5.75
9	Villa Guerrero	8	28	158	5.64
10	Zumpahuacán	4	16	130	8.13
Total		50	189	1,083	

La implementación de NSGA-II y lógica difusa en la asignación estratégica de adultos mayores a los 10 módulos ubicados en los 10 municipios de la Región 22 ha generado resultados prometedores. Este enfoque busca maximizar la cobertura y optimizar la operatividad de los servicios, centrándose en atender a los adultos mayores que cumplen 65 años y tienen derecho a recibir el apoyo de *Pensión para el bienestar*, de acuerdo con las reglas de operación del gobierno del presidente Andrés Manuel López Obrador.

La Tabla 6.15 presenta la capacidad de atención por municipio, el número de adultos mayores asignados y la atención diaria prevista. Además, se incluye una columna adicional llamada *Meta atención* que establece las metas de atención para cada municipio.

Los resultados de la Tabla 6.16, muestran una asignación eficiente de adultos mayores a los módulos, cumpliendo con las metas establecidas para cada municipio. La atención diaria prevista supera las expectativas, asegurando que la población objetivo reciba el apoyo necesario. La capacidad de NSGA-II para considerar múltiples objetivos y la integración de lógica difusa en la toma de decisiones han demostrado ser efectivas en este contexto.

En la propuesta de solución, varios municipios requieren menos días para alcanzar la meta de atención en comparación con la configuración inicial. Por ejemplo, Coatepec Harinas reduce el tiempo de atención de 6.25 días a 4.76 días, e Ixtapan de la Sal reduce de 10.75 días a 8.60 días. La propuesta de solución asigna 50 SNs en comparación con los 41 SNs en la configuración inicial, lo que permite una mayor capacidad de atención diaria (189 frente a 164). Esta mayor capacidad reduce el tiempo necesario para alcanzar las metas de atención en varios municipios.

La aplicación del modelo NSGA-II permite una asignación más eficiente de los SNs, reduciendo los tiempos necesarios en municipios con alta demanda. Por ejemplo, Tenancingo reduce el tiempo de atención de 7.19 días a 6.05 días. Ambas configuraciones operan dentro de los límites financieros establecidos, pero la propuesta de solución muestra una distribución más efectiva de los recursos humanos, lo que potencialmente reduce los costos operativos a largo plazo.

6.4.1. Estrategias para optimizar el tiempo

- **Priorización por Edad:** Implementar un sistema que priorice la atención de adultos mayores recién cumplidos los 65 años, asegurando que aquellos que ingresan al programa *Pensión para el bienestar* sean atendidos con prontitud.
- **Turnos Programados:** Establecer un sistema de turnos programados para distribuir la carga de atención de manera uniforme durante el periodo de asignación, evitando acumulaciones y agilizando el proceso.
- **Optimización de Recursos:** Evaluar constantemente la capacidad de atención de cada módulo y asignar recursos adicionales según la demanda, asegurando que se utilicen eficientemente.
- **Colaboración con Municipios:** Establecer una estrecha colaboración con los municipios para recopilar información actualizada sobre la población objetivo, permitiendo una asignación más precisa y reduciendo el tiempo de ajuste en cada periodo.

6.4.2. Beneficios de la Estrategia

- **Eficiencia Operativa:** La implementación de estas estrategias optimiza el tiempo de atención, permitiendo que los Servidores de la Nación manejen de manera efectiva sus múltiples responsabilidades.

- **Atención Equitativa:** La priorización y programación por turnos garantizan que todos los adultos mayores tengan acceso equitativo a los servicios, evitando congestiones y mejorando la experiencia general.
- **Adaptabilidad Continua:** La evaluación constante y la colaboración con los municipios permiten ajustar la estrategia según las necesidades cambiantes, manteniendo un proceso adaptativo y eficiente.

La asignación estratégica propuesta contribuye significativamente a la operatividad eficiente del programa *Pensión para el bienestar*. Al garantizar una distribución equitativa y eficaz de los adultos mayores entre los módulos, se optimiza el tiempo de espera y se minimiza la carga operativa en cada ubicación.

La combinación de NSGA-II y lógica difusa en la asignación de adultos mayores ha demostrado ser una estrategia efectiva. Este enfoque no solo garantiza la cobertura total de la población objetivo, sino que también mejora la eficiencia operativa del programa. Los resultados respaldan la viabilidad de replicar este enfoque en otras regiones, contribuyendo así a la implementación exitosa de políticas sociales a nivel nacional.

6.5. Publicaciones de resultados

En el marco de la investigación sobre la asignación multiobjetivo eficiente de clientes a servicios, se llevaron a cabo cuatro artículos de investigación. Tales artículos exploran diferentes enfoques, modelos y algoritmos con el objetivo de mejorar la asignación, reducir la distancia de los ciudadanos a los servicios y optimizar la utilización de los recursos disponibles.

1. En el primer artículo, titulado *Analysis of Models for the Assignment of Voters of the Mexican National Institute*, se examinaron varios modelos utilizados para la asignación de votantes en el INE. Se evaluaron diferentes enfoques y técnicas, como algoritmos de búsqueda heurística y algoritmos genéticos, teniendo en cuenta factores como la distancia entre los ciudadanos y los módulos de atención, la capacidad de los módulos y la demanda de los ciudadanos. Se realizaron pruebas comparativas y se analizaron los resultados obtenidos. En general, se encontró que los enfoques basados en algoritmos genéticos mostraban un desempeño superior en términos de reducción de la distancia promedio entre los ciudadanos y los módulos de atención. Sin embargo, también se identificaron limitaciones relacionadas con el tiempo computacional y la escalabilidad al aumentar el tamaño del

problema.

2. En el segundo artículo, titulado *Multiobjective model for resource allocation optimization: a case study*, se propuso un modelo multiobjetivo para abordar el problema de asignación. Este modelo consideró múltiples objetivos, como la minimización de la distancia entre los ciudadanos y los módulos de atención, la maximización de la capacidad utilizada de los módulos y la minimización del tiempo de espera de los ciudadanos. Se utilizaron técnicas de programación matemática y algoritmos evolutivos para encontrar soluciones que representaran un buen equilibrio entre estos objetivos. El estudio de caso aplicado demostró mejoras significativas en términos de la utilización de la capacidad de los módulos y la reducción del tiempo de espera de los ciudadanos. Esto indicó que el modelo multiobjetivo podría ayudar a optimizar la asignación de ciudadanos y mejorar la eficiencia del proceso.
3. En el tercer artículo, titulado *Multiobjective Assignment of Citizens to INE Service Modules using NSGA-II: An Efficient Optimization Approach*, se empleó el algoritmo NSGA-II (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II) para abordar la asignación multiobjetivo. NSGA-II es un algoritmo genético que permite encontrar soluciones eficientes basadas en la teoría de dominancia de Pareto. En este enfoque, se buscó minimizar la distancia, maximizar la capacidad utilizada y minimizar el tiempo de espera. Los primeros resultados obtenidos demostraron la capacidad de NSGA-II para encontrar soluciones óptimas y lograr un equilibrio satisfactorio entre los objetivos planteados. Comparado con los enfoques anteriores, se observó una mejora significativa en la calidad de la asignación de ciudadanos a los módulos de atención.
4. En el cuarto artículo, titulado *Gestión Inteligente: Resolviendo Desafíos Sociales con NSGA-II y Lógica Difusa en el Valle de Toluca*, se presenta una propuesta novedosa en la gestión de servicios públicos al integrar NSGA-II, un algoritmo evolutivo multiobjetivo, con lógica difusa. La aplicación se centra en resolver problemas específicos en el Valle de Toluca, como la asignación de jóvenes para tramitar su credencial de elector por primera vez, la distribución estratégica de servidores para el programa *Mujeres con bienestar* y la asignación de personas de 65 años al programa *Pensión para el Bienestar*. Se destaca la singularidad de incorporar lógica difusa en cada iteración del proceso, potenciando la capacidad de elegir las soluciones óptimas en tiempo real. Este enfoque innovador mejora la eficiencia, la equidad y la toma de decisiones en la asignación de recursos, marcando un hito en la gestión pública local.

En resumen, los resultados obtenidos en los cuatro artículos de investigación revelan avances significativos en la asignación de clientes a servicios. Los modelos y algoritmos propuestos demostraron su eficacia para reducir la distancia promedio, mejorar la utilización de los recursos y disminuir el tiempo de espera de los clientes. Estos hallazgos son alentadores y sugieren que la aplicación práctica de NSGA-II y lógica difusa puede contribuir a mejorar la eficiencia y calidad del servicio de atención a los clientes.

Además, se proporcionan recomendaciones para la implementación práctica del modelo en entornos similares. Este trabajo representa un avance significativo en la optimización de la asignación multiobjetivo entre clientes y servicios públicos administrativos, ofreciendo soluciones eficientes y contextualizadas a problemas específicos de atención ciudadana.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo, se presentan las conclusiones derivadas del estudio sobre el uso de NSGA-II en combinación con lógica difusa para resolver problemas de optimización. Se analizan los resultados obtenidos, se discuten las implicaciones de estos hallazgos y se ofrecen recomendaciones para investigaciones futuras en el área.

7.1. Conclusiones

Una contribución significativa de este trabajo de tesis es la creación de un modelo de asignación de servicios públicos administrativos, que proporciona una herramienta eficaz para optimizar la distribución de recursos en áreas gubernamentales que ofertan servicios administrativos.

El objetivo general de este trabajo fue diseñar y evaluar un modelo multiobjetivo para optimizar la asignación de servicios públicos administrativos, utilizando el algoritmo NSGA-II en combinación con lógica difusa. A lo largo de esta investigación, se desarrolló un modelo que no solo aborda los desafíos inherentes a la asignación de recursos, sino que también mejora significativamente la toma de decisiones para expertos en la gestión de servicios públicos.

Las ventajas de la lógica difusa en la evaluación son evidentes al ofrecer una herramienta flexible y adaptativa para abordar la subjetividad y la incertidumbre en la toma de decisiones (Raquel et al., 2007). La incorporación de lógica difusa permitió manejar la incertidumbre y la subjetividad de las variables, logrando un enfoque flexible que refleja mejor las complejidades del mundo real. El algoritmo NSGA-II, por su parte, facilitó la búsqueda de soluciones óptimas y no dominadas, equilibrando objetivos conflictivos como la minimización de distancias y la

maximización de la cobertura de los servicios. Algunas de estas ventajas son presentadas a continuación:

- **Adaptabilidad a la subjetividad:** La lógica difusa permite incorporar la perspectiva subjetiva y cualitativa de los expertos en la evaluación de soluciones, adaptándose a la variabilidad de interpretaciones.
- **Manejo de incertidumbre:** Los conjuntos difusos modelan la incertidumbre inherente en las funciones objetivo, ofreciendo una representación flexible que refleja la variabilidad en la calidad de las soluciones.
- **Consideración de múltiples criterios:** Al utilizar conjuntos difusos para diferentes criterios de evaluación, se logra una evaluación global que considera la complejidad interconectada de las funciones objetivo.

El modelo propuesto fue evaluado en tres casos de estudio específicos: la asignación de jóvenes votantes a módulos del Instituto Nacional Electoral (INE), la asignación de *servidores del pueblo* al programa *Mujeres con Bienestar*, y la distribución de adultos mayores a centros integradores del programa *Pensión para el Bienestar*. En todos estos casos, se demostró que el modelo permite una optimización más eficiente y equitativa, en comparación con métodos tradicionales.

7.1.1. Asignación de ciudadanos a los módulos de atención del INE

- **Efectividad en la distribución de recursos:** La implementación del modelo basado en NSGA-II y lógica difusa ha demostrado ser efectiva en la asignación equitativa de recursos en los módulos de atención del INE. Mediante la optimización de la asignación de personal, espacio y tiempo, se ha logrado evitar desequilibrios en la capacidad de los módulos y garantizar una atención adecuada a todos los ciudadanos.
- **Mejora en la eficiencia operativa:** Los resultados obtenidos indican una mejora significativa en la eficiencia operativa de los módulos de atención del INE. La reducción de los tiempos de espera, la minimización de los costos de transporte y la optimización del uso del espacio y el personal son evidencia de los beneficios obtenidos mediante la implementación de este modelo.
- **Validación empírica y ajustes adicionales:** Como parte del trabajo futuro, se sugiere realizar una validación empírica del modelo en otros entornos para evaluar su desempeño en

condiciones del mundo real. Además, se pueden explorar ajustes adicionales al modelo, como la inclusión de variables dinámicas o la adaptación a diferentes contextos geográficos, para mejorar aún más su eficacia operativa y su capacidad para enfrentar desafíos específicos.

7.1.2. Asignación de servidores de la nación

- Optimización de recursos sociales: La implementación de NSGA-II y lógica difusa en la distribución de servidores de la nación en municipios específicos ha permitido optimizar la atención a los ciudadanos. La asignación eficiente de servidores ha garantizado una atención oportuna y eficiente a cada mujer que solicita servicios sociales, lo que refleja el compromiso con el bienestar de la comunidad.
- Resultados prometedores y evaluación continua: Los resultados obtenidos son prometedores y sugieren el potencial de este enfoque para abordar desafíos en la distribución de recursos en programas sociales. Se recomienda continuar monitoreando y evaluando el desempeño del modelo en el tiempo para identificar áreas de mejora y oportunidades para su aplicación en otros contextos.
- Aplicaciones futuras y escalabilidad: Se puede explorar la posibilidad de aplicar este modelo a otros programas sociales o servicios gubernamentales para mejorar la distribución de recursos y aumentar la eficiencia en la prestación de servicios. Además, se debe considerar la escalabilidad del modelo para adaptarse a diferentes escalas geográficas y poblacionales.

7.1.3. Asignación estratégica de adultos mayores a los módulos de servicio

- Maximización de la cobertura y atención prioritaria: La implementación de NSGA-II y lógica difusa en la asignación estratégica de adultos mayores a los módulos de servicio ha permitido maximizar la cobertura y optimizar la operatividad de los servicios. Esto ha asegurado una atención prioritaria y equitativa a los adultos mayores, cumpliendo con los derechos sociales y garantizando su acceso a los servicios necesarios.
- Adaptación a nuevos contextos y poblaciones: Como parte del trabajo futuro, se sugiere adaptar este modelo a nuevos contextos y poblaciones para abordar diferentes necesidades y desafíos en la asignación de recursos sociales. Se puede considerar la inclusión de

variables demográficas adicionales o la exploración de técnicas avanzadas de optimización para mejorar aún más la eficacia del modelo.

- **Investigación interdisciplinaria y colaboraciones:** Se recomienda fomentar la colaboración interdisciplinaria entre investigadores, profesionales de la salud y responsables de políticas para desarrollar soluciones integrales y centradas en el usuario. La combinación de enfoques técnicos con conocimientos especializados en el campo de la atención médica y social puede enriquecer la implementación y el impacto del modelo propuesto.

En los tres escenarios evaluados, se observó una mejora sustancial en la eficiencia operativa y una mayor equidad en la asignación de los servicios, validando la hipótesis planteada de que la combinación de NSGA-II y lógica difusa mejora tanto la eficacia como la eficiencia del proceso de asignación de servicios públicos. Además, se redujo el tiempo de ejecución y la cantidad de generaciones necesarias para alcanzar soluciones estables, lo que refuerza la viabilidad del modelo para ser implementado en contextos reales.

En conclusión, el modelo propuesto es una herramienta poderosa y versátil para la optimización de la asignación de servicios públicos administrativos. Ofrece soluciones prácticas y aplicables, lo que facilita la toma de decisiones informadas y contribuye a una mejor distribución de los recursos en beneficio de la sociedad. Estos resultados abren la puerta a futuras investigaciones que podrían ampliar la aplicabilidad del modelo a otros sectores y regiones, así como perfeccionar su desempeño mediante la integración de técnicas más avanzadas.

7.2. Trabajo futuro

El presente trabajo de investigación ha demostrado la eficacia del modelo multiobjetivo propuesto, que combina el algoritmo NSGA-II con lógica difusa para optimizar la asignación de servicios públicos administrativos. Sin embargo, existen diversas áreas en las que esta investigación puede ser ampliada y mejorada, tanto desde una perspectiva teórica como aplicada. A continuación, se describen algunas de las principales líneas de investigación y desarrollo que podrían explorarse en trabajos futuros:

- **Integración de técnicas de aprendizaje automático:** La combinación de algoritmos evolutivos con técnicas de aprendizaje automático es una dirección que puede ofrecer mejoras significativas en el rendimiento del modelo. Una posible extensión sería la incorporación de modelos predictivos que aprendan a anticipar patrones de demanda de servicios

públicos en función de variables demográficas, geográficas y socioeconómicas. Este aprendizaje automatizado podría alimentar al algoritmo NSGA-II, ajustando dinámicamente las soluciones basadas en datos históricos y en tiempo real. Además, las redes neuronales profundas o los modelos de regresión podrían utilizarse para predecir el comportamiento de los usuarios en diferentes escenarios, lo que permitiría una planificación más precisa de la asignación de recursos.

- **Aplicación a escenarios más complejos y diversos:** Si bien el modelo fue probado en tres escenarios específicos (votantes jóvenes, Servidores del Pueblo y adultos mayores), su aplicabilidad puede extenderse a una mayor diversidad de servicios y regiones. Los futuros trabajos podrían adaptar el modelo a diferentes áreas geográficas, como zonas rurales o regiones con alta densidad poblacional, donde los patrones de demanda y distribución de recursos pueden ser más complejos. Asimismo, se podría aplicar el modelo a otros servicios públicos como el acceso a la atención médica, la distribución de recursos educativos o la asignación de cuerpos de seguridad, donde la equidad y la eficiencia son igualmente importantes.
- **Mejora en la escalabilidad del modelo:** Aunque NSGA-II ha demostrado ser efectivo en la resolución de problemas de optimización multiobjetivo, otras metaheurísticas podrían complementar el proceso de búsqueda. Una interesante dirección para trabajos futuros sería combinar NSGA-II con algoritmos como el recocido simulado, la búsqueda de vecindario variable o los algoritmos de colonia de hormigas. Estas combinaciones, también conocidas como enfoques híbridos, podrían mejorar la exploración y explotación del espacio de soluciones, reduciendo el tiempo de convergencia y mejorando la calidad de las soluciones obtenidas.
- **Optimización bajo incertidumbre:** Una limitación del modelo actual es que trabaja bajo supuestos deterministas, donde los datos de entrada, como la demanda de servicios y la capacidad de las instalaciones, se consideran fijos o conocidos. Sin embargo, en muchos contextos reales, estas variables pueden estar sujetas a incertidumbre o variabilidad. El desarrollo de métodos de optimización robusta o estocástica que puedan gestionar estas incertidumbres sería una extensión natural de esta investigación. Dichos enfoques podrían incorporar distribuciones probabilísticas o escenarios alternativos, garantizando soluciones viables incluso en condiciones inciertas.
- **Desarrollo de interfaces interactivas para la toma de decisiones:** Otra línea de

trabajo futuro sería el desarrollo de interfaces gráficas interactivas que permitan a los tomadores de decisiones manipular los resultados del modelo en tiempo real. Este tipo de herramienta podría facilitar la visualización de las soluciones no dominadas generadas por NSGA-II y permitir la exploración interactiva de los compromisos entre los distintos objetivos. Las interfaces podrían integrar Sistemas de Información Geográfica (SIG) para proporcionar una representación visual de la distribución espacial de los servicios públicos, lo que ayudaría a los responsables de la planificación a tomar decisiones más informadas y basadas en datos.

- **Evaluación del impacto social y económico:** Si bien el modelo se centra en la optimización matemática de la asignación de servicios, un aspecto importante que debe explorarse en futuras investigaciones es la evaluación del impacto social y económico de las soluciones propuestas. Esto podría incluir estudios de caso detallados que midan la satisfacción del usuario, la equidad en el acceso a los servicios y los ahorros en costos operativos. Además, se podría llevar a cabo un análisis comparativo de diferentes enfoques de asignación, evaluando no solo la eficiencia técnica, sino también los beneficios tangibles e intangibles para la comunidad.
- **Ampliación del modelo a áreas emergentes de servicios públicos:** Finalmente, el modelo puede adaptarse para abordar problemas emergentes en la asignación de servicios públicos, como la planificación de recursos para desastres naturales, la distribución de vacunas en pandemias o la asignación de infraestructuras verdes en ciudades inteligentes. Estas áreas emergentes presentan nuevos desafíos de optimización que podrían beneficiarse de la flexibilidad y potencia del modelo NSGA-II con lógica difusa.

El trabajo presentado abre un abanico de posibilidades para futuras investigaciones, ofreciendo un marco robusto que puede ser ampliado y mejorado en varios aspectos. La optimización de la asignación de servicios públicos es un campo en constante evolución, y la integración de nuevas técnicas, el manejo de incertidumbres y la mejora de la escalabilidad del modelo pueden proporcionar soluciones aún más eficientes y adaptables a un mundo en rápido cambio.

Apéndice A

Materiales

En esta sección se adjunta el producto del trabajo de investigación. Aquí se incluyen materiales adicionales que complementan y respaldan los contenidos principales de esta tesis. Los apéndices proporcionan detalles técnicos, datos relevantes, y ejemplos específicos que resultan esenciales para una comprensión completa del estudio realizado. Entre los materiales presentados, se encuentran:

1. Código Fuente: El código desarrollado para la implementación del modelo de asignación de clientes a servicios utilizando NSGA-II y lógica difusa.
2. Resultados de Simulaciones: Datos obtenidos de las simulaciones realizadas, mostrando la efectividad y eficiencia del modelo propuesto.
3. Documentación Técnica: Manuales y guías que describen el funcionamiento y las características del sistema desarrollado.
4. Referencias Adicionales: Bibliografía y recursos que han sido consultados para la elaboración de esta investigación y que no se encuentran en el cuerpo principal del documento.

Los apéndices están disponibles para su descarga en mi página web <https://edgarjardon.blog/>. Estos materiales son necesarios para aquellos lectores que deseen profundizar en los aspectos técnicos y metodológicos del estudio, así como para replicar o extender el trabajo realizado en futuras investigaciones.

Referencias

- Ahmad, S., Jamil, F., Iqbal, N., Kim, D., et al. (2020). Optimal route recommendation for waste carrier vehicles for efficient waste collection: A step forward towards sustainable cities. *IEEE Access*, 8:77875–77887.
- Ahmadi-Javid, A., Jalali, Z., and Klassen, K. J. (2017). Outpatient appointment systems in healthcare: A review of optimization studies. *European Journal of Operational Research*, 258(1):3–34.
- Al-Salami, N. M. (2009). Ant colony optimization algorithm. *UbiCC Journal*, 4(3):823–826.
- Alegre, J., Aragón, A., Casado, S., Delgado, C., and Joaquín, P. (2010). Resolución de 2 modelos de localización mediante búsqueda dispersa. *Universidad de Burgos*.
- Algarín, C. A. R. (2010). Optimización por colonia de hormigas. *Ingeniería solidaria*, 6(10-11):83–89.
- Alonso, S., Cordon, O., Fernández, I., and Herrera, F. (2004). La metaheurística de optimización basada en colonias de hormigas: modelos y nuevos enfoques. *Optimización inteligente: técnicas de inteligencia computacional para optimización*, pages 261–314.
- Armada, A., Lusa, A., and García-Villoria, A. (2018). Identifying and analyzing operations management strategic problems in home care. In *International Conference on Industrial Engineering and Operations Management*, pages 101–107. Springer.
- Azarmand, Z. and Neishabouri, E. (2009). Location allocation problem. In *Facility location*, pages 93–109. Springer.
- Bermudez, C., Minetti, G. F., and Salto, C. (2016). Búsqueda local iterada para resolver problemas de planificación. In *XVIII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (WICC 2016, Entre Ríos, Argentina)*.

REFERENCIAS

- Blais, M., Lapierre, S., and Laporte, G. (2003). Solving a home-care districting problem in an urban setting. *Journal of the operational research society*, 54(11):1141–1147.
- Burke, E. K., Hyde, M. R., and Kendall, G. (2011). Grammatical evolution of local search heuristics. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 16(3):406–417.
- Buzai, G. D. (2011). Modelos de localización-asignación aplicados a servicios públicos urbanos: análisis espacial de Centros de Atención Primaria de Salud (caps) en la ciudad de Luján, Argentina. *Cuadernos de Geografía: Revista Colombiana de Geografía*, 20(2):111–123.
- Buzai, G. D. (2020). Megaciudades de américa latina. conceptos, modelos y geografía de los procesos de estructuración urbana. *Anuario de la División Geografía*, 14:1–27.
- Campelo, P., Neves-Moreira, F., Amorim, P., and Almada-Lobo, B. (2019). Consistent vehicle routing problem with service level agreements: A case study in the pharmaceutical distribution sector. *European Journal of Operational Research*, 273(1):131–145.
- Castro, M. D., Menezes, P. P., dos Santos, M., and Gomes, C. F. S. (2019). Aplicação do método sapevo-m para seleção de um sistema tms para uma transportadora. *An. do XIX Simpósio Pesqui. Operacional e Logística da Mar. Rio Janeiro*, page 11.
- Chandrashekara, B. (2021). *Measuring accessibility of healthcare services in chamarajanagara taluk Karnataka*. PhD thesis, University of Mysore.
- Chouman, M. and Crainic, T. (2010). *A MIP-tabu search hybrid framework for multicommodity capacitated fixed-charge network design*. CIRRELT.
- Cooper, L. (1963). Location-allocation problems. *Operations research*, 11(3):331–343.
- Cuadros-Lara, M. I. (2019). Aplicación de modelos de localización-asignación para la identificación de zonas adecuadas para la construcción de una central de energía solar en el valle de toluca. *Universidad Autónoma del Estado de México*.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.
- Franzin, A. and Stützle, T. (2019). Revisiting simulated annealing: A component-based analysis. *Computers & operations research*, 104:191–206.

-
- Gallego, R. A., Romero, R., and Monticelli, A. J. (2000). Tabu search algorithm for network synthesis. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(2):490–495.
- Garrocho, C., Campos-Alanís, J., and Chávez-Soto, T. (2018). Análisis espacial de los inmuebles dañados por el sismo 19s-2017 en la ciudad de México. *Salud Publica de Mexico*, 60:31–40.
- Glover, F. (1992). New ejection chain and alternating path methods for traveling salesman problems. *Computer science in operations research: New developments in their interfaces*, 1(1):491–507.
- González, N. A. (2020). Algoritmos evolutivos para el diseño estructural: estado del arte y caso estudio. *Universidad de Chile*.
- Guastaroba, G., Mansini, R., Ogryczak, W., and Speranza, M. G. (2020). Enhanced index tracking with cvar-based ratio measures. *Annals of Operations Research*, 292(2):883–931.
- Hale, T. S. and Moberg, C. R. (2003). Location science research: a review. *Annals of operations research*, 123(1):21–35.
- Hertz, A. and Lahrichi, N. (2009). A patient assignment algorithm for home care services. *Journal of the Operational Research Society*, 60(4):481–495.
- Hsu, V. N., Daskin, M., Jones, P. C., and Lowe, T. J. (1995). Tool selection for optimal part production: a lagrangian relaxation approach. *IIE transactions*, 27(4):417–426.
- Jardón-Torres, E. (2020). Modelos para la proyección del crecimiento de la mancha urbana utilizando múltiples heurísticas. Master’s thesis, Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México.
- Ji, B., Huang, H., and Samson, S. Y. (2007). An enhanced nsga-ii for solving berth allocation and quay crane assignment problem with stochastic arrival times. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 24(1):459–473.
- Kahraman, C. and Gündogdu, F. (2021). Decision making with spherical fuzzy sets. *Studies in fuzziness and soft computing*, 392:3–25.
- Kuri, Á., Galaviz, J., et al. (2002). *Algoritmos genéticos*. Number Sirsi) i9789681663834 in 1. IPN.

REFERENCIAS

- Lebbar, G., El Abbassi, I., El Barkany, A., Jabri, A., and Darcherif, M. (2018). Solving the multi objective flow shop scheduling problems using an improved nsga-ii. *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 24(3):211–230.
- Liang, Z., Li, M., and Lehre, P. K. (2023). Non-elitist evolutionary multi-objective optimisation: Proof-of-principle results. *arXiv preprint arXiv:2305.16870*.
- Lin, M., Chin, K.-S., Fu, C., and Tsui, K.-L. (2017). An effective greedy method for the meals-on-wheels service districting problem. *Computers & Industrial Engineering*, 106:1–19.
- Ma, H., Zhang, Y., Sun, S., Liu, T., and Shan, Y. (2023). A comprehensive survey on nsga-ii for multi-objective optimization and applications. *Artificial Intelligence Review*, pages 1–54.
- Maniezzo, V. (2021). *Matheuristics: Algorithms and Implementations*. Springer.
- Martínez, D. Á., Ocampo, E. T., and Rendón, R. G. (2009). Empaquetamiento óptimo bi-dimensional con rotación de piezas usando un algoritmo híbrido de búsqueda en vecindad variable y recocido simulado. *Scientia et Technica*, 15(41):279–284.
- Mestre, A., Oliveira, M., and Barbosa-Póvoa, A. (2015). Location-allocation approaches for hospital network planning under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 240:791–806.
- Mohammad, A., Fard, F., Hajiaghahi-keshteli, M., and Paydar, M. (2018). A location-allocation-routing model for a home health care supply chain problem. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Industrial and Manufacturing Engineering*, 12:274–278.
- Pérez, J. H. and Rückauer, C. C. (2002). Una revisión de los algoritmos evolutivos y sus aplicaciones. *Madrid, España*.
- Pose, M. G. (2000). Introducción a los algoritmos genéticos. *Departamento de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones Universidad de Coruña*.
- Rabbani, M., Oladzad-Abbasabady, N., and Akbarian-Saravi, N. (2022). Ambulance routing in disaster response considering variable patient condition: Nsga-ii and mopso algorithms. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 18(2).

-
- Rabiei, P., Arias-Aranda, D., and Stantchev, V. (2023). Introducing a novel multi-objective optimization model for volunteer assignment in the post-disaster phase: Combining fuzzy inference systems with nsga-ii and nrga. *Expert Systems with Applications*, 226:120142.
- Rahimi Rise, Z. and Ershadi, M. M. (2023). An integrated hfmea simulation-based multi-objective optimisation model to improve the performances of hospitals: A case study. *Journal of Simulation*, 17(4):422–443.
- Ramírez, M. and Bosque, J. (2001). Localización de hospitales: analogía y diferencias del uso del modelo p-mediano en sig ráster y vectorial. *Universidad Complutense de Madrid*.
- Raquel, C., José Lizarralde, F., Paula González, M., and Esther, D. (2007). Análisis de la incertidumbre en la medición del nivel cognitivo usando lógica difusa. *TE & ET: Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, 1(33).
- Rebolledo, E. A. S., Chiaravalloti Neto, F., and Giatti, L. L. (2018). Experiencias, beneficios y desafíos del uso de geoprocésamiento para el desarrollo de la atención primaria de salud. *Revista Panamericana de Salud Pública*, 42:e153.
- Revelle, C. S. and Eiselt, H. A. (2005). Location analysis: A synthesis and survey. *European journal of operational research*, 165(1):1–19.
- Ríos-Mercado, R. Z. (2020). *Optimal districting and territory design*, volume 284. Springer.
- Ross, G. and Soland, R. M. (1975). A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical programming*, 8(1):91–103.
- Ross, T. J. (2009). *Fuzzy logic with engineering applications*. John Wiley & Sons.
- Sadrani, M. (2024). *Modeling, planning, and optimizing public transport systems with automated, electric, and mixed-sized bus fleets*. PhD thesis, Technische Universität München.
- Sánchez, Y. R., Figueroa, O. G., Matellán, E. D., Rosales, L. D. L., and González, L. R. (2016). Localización-asignación de los servicios de atención primaria en un área de salud. *Revista Médica Electrónica*, 38(6):837–850.
- Solano-Pinzón, N., Kuzuya, M., Izawa, A., and Enoki, H. (2017). Modelos de localización de cámaras de vigilancia en una red de transporte público masivo. *Ingeniería y Ciencia*, 13:71–93.

REFERENCIAS

- Soroudi, A. (2017). *Power system optimization modeling in GAMS*, volume 78. Springer.
- Sun, H., Tang, M., Peng, W., and Wang, R. (2021). Interval prediction of short-term building electrical load via a novel multi-objective optimized distributed fuzzy model. *Neural Computing and Applications*, 33(22):15357–15371.
- Tirkolaee, E. B., Mahdavi, I., Esfahani, M. M. S., and Weber, G.-W. (2020). A robust green location-allocation-inventory problem to design an urban waste management system under uncertainty. *Waste Management*, 102:340–350.
- Tomazic, A. and Ljubic, I. (2008). A grasp algorithm for the connected facility location problem. In *2008 International Symposium on Applications and the Internet*, pages 257–260. IEEE.
- Toro-Ocampo, E. M., Domínguez-Castaño, A. H., and Escobar-Zuluaga, A. H. (2016). Desempeño de las técnicas de agrupamiento para resolver el problema de ruteo con múltiples depósitos. *TecnoLógicas*, 19(36):49–62.
- Ullah, A., Hussain, S., Wasim, A., and Jahanzaib, M. (2020). Development of a decision support system for the selection of wastewater treatment technologies. *Science of The Total Environment*, 731:139158.
- Vilchis-Mata, I., Garrocho-Rangel, C., and Chávez-Soto, T. (2021). Dinámica del empleo en sectores intensivos en uso del conocimiento en la megalópolis del valle de México, 2014-2018. *Revista de Geografía Norte Grande*, 1(79):229–251.
- Yarmand, H., Ivy, J. S., Denton, B., and Lloyd, A. L. (2014). Optimal two-phase vaccine allocation to geographically different regions under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 233(1):208–219.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers. *Information and control*, 8(3):338–353.
- Zadeh, L. A. and Aliev, R. A. (2018). *Fuzzy logic theory and applications: part I and part II*. World Scientific Publishing.
- Zadeh, L. A., Klir, G. J., and Yuan, B. (1996). *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers*, volume 6. World scientific.

- Zhang, B., Li, H., Li, S., and Peng, J. (2018). Sustainable multi-depot emergency facilities location-routing problem with uncertain information. *Applied Mathematics and Computation*, 333:506–520.