UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Ena Yasidh Rivera González

Tesis de Licenciatura, Marzo 2024

Índice general

1. INTRODUCCIÓN **1**
1.1. Preliminares 2

2. TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA **11**

3. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA **29**

4. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA EN ESPACIOS DE BANACH **41**

5. ALGUNAS APLICACIONES Y CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA **53**
5.1. Multiplicadores de Lagrange 53
5.2. Bifurcación 56

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En el vasto terreno de las matemáticas, el Teorema de la Función Implícita se erige como una joya conceptual que ha fascinado a los matemáticos desde su formulación inicial. Este teorema, fundamental en el análisis matemático, despliega su poderosa influencia en diversas ramas, proporcionando herramientas esenciales para comprender fenómenos complejos y abriendo puertas a la resolución de problemas aparentemente intrincados.

El Teorema de la Función Implícita aborda situaciones en las cuales las ecuaciones definen implícitamente una función. Esta clase de problemas surge de manera natural en contextos tan diversos como la física, la economía y la ingeniería, donde la relación entre variables puede no expresarse de manera explícita. La capacidad de entender y manipular estas situaciones se vuelve crucial para modelar fenómenos del mundo real.

De manera más formal, si consideramos por ejemplo una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable, y dada la condición $f(x, y) = 0$ podemos determinar una función para lo cual la variable y se puede definir en términos de la variable x en una vecindad alrededor de un punto (a, b) en el cual $f(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ y en donde la función definida resulta ser también diferenciable. Del mismo modo, podemos hacer depender a la variable x de la variable y con las condiciones análogas determinadas para y.

Lo anterior es un caso particular de un resultado general, en donde podemos tomar cualquier función $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable que cumpla con los criterios establecidos en el teorema.

La demostración de este teorema se basa fuertemente en el hecho de que las transformaciones lineales continuamente diferenciables en la mayoría de los casos se comportan localmente como sus derivadas.

Este teorema tiene su generalización en espacios de Banach en donde la completez de los espacios vectoriales normados en donde están definidas las funciones nos dan condiciones para aplicar una versión análoga a la que se tiene en los espacios euclidianos.

Otro de los teoremas importantes dentro del análisis matemático es el Teorema de la Función Inversa, el cual se considera equivalente al Teorema de la Función Implícita. En el presente trabajo probaremos el Teorema de la Función Implícita a partir del Teorema de la Función Inversa en espacios euclidianos; y posteriormente probaremos el Teorema de la Función Inversa a partir del Teorema de la Función Implícita en espacios de Banach. Como corolario se tiene el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange en el caso de dimensión finita el cual es muy usado dentro de las aplicaciones del cálculo.

Hasta antes del siglo XIX las funciones implícitas principalmente eran usadas para determinar el comportamiento de la solución de una ecuación y no se había visto en la necesidad de probar la existencia de estas. Se sabe que Isaac Newton fue uno de los primeros en analizar y determinar el comportamiento de una función definida implícitamente. Posteriormente en 1770 J. Lagrange probó un resultado conocido hoy en día como el Teorema de Inversión de Lagrange, lo que para muchos es una primer versión del Teorema de la Función Implícita, y que en estos tiempos se considera un caso particular de este para series de potencia.

Posteriormente Cauchy en su empeño por formalizar la matemática y tomando en cuenta los resultados de Lagrange, escribió en sus memorias de Turín lo que se considera como la primer versión rigurosa del Teorema de la Función Implícita.

Este trabajo pretende desarrollar el Teorema de la Función Implícita tanto en espacios euclidianos como en espacios de Banach. La tesis está estructurada en 5 capítulos, cada uno abordando aspectos específicos del Teorema de la Función Implícita.

El primer capítulo presenta definiciones y resultados preliminares que usaremos a lo largo del trabajo. Los capítulos subsiguientes se centran en la demostración y aplicación del teorema, explorando sus conexiones con otros conceptos matemáticos y sus implicaciones prácticas.

En resumen, esta investigación se propone desentrañar las complejidades del Teorema de la Función Implícita, destacando su importancia en el panorama matemático y su impacto en la resolución de problemas.

1.1. Preliminares

Este capítulo proporciona una sólida base teórica que contextualiza y respalda la investigación realizada en esta tesis.

Se centra en establecer los conceptos clave, definiciones fundamentales y teoremas relevantes que son esenciales para comprender el marco conceptual y metodológico del estudio. Estos elementos teóricos proporcionan la base matemática y lógica necesaria para abordar las preguntas del presente trabajo y validar los resultados.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$, se llama* ***métrica*** *o* ***distancia*** *sobre X, si cumple las siguientes condiciones:*

(i) Para todo x,$y \in X$ se tiene que $d(x, y) \geq 0$; (Definida positiva)
(ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$;
(iii) Para todo x,$y \in X$ se cumple que $d(x, y) = d(y, x)$; (Simétrica)
(iv) Para todo x,y,$z \in X$ se satisface que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Desigualdad del triángulo)

Para x,$y \in X$ el número real $d(x, y)$ se llama la ***distancia entre** x **y** y**.*** *Al par (X, d) se le dice* ***espacio métrico****.*

Observemos que todo subconjunto Y de un espacio métrico X, es a su vez un espacio métrico, con la misma función distancia.

Ejemplo 1.2 *Como ejemplos importantes de espacios métricos, tenemos los espacios euclidianos $\mathbb{R}^k$, especialmente $\mathbb{R}^1$ (la recta real) con las métricas usuales definidas como siguen:*

1. $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}$, donde $x = (x_1, \ldots, x_k)$ y $y = (y_1, \ldots, y_k)$.
2. $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.
3. Si $C([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$, entonces la función d es una métrica en $C([0, 1], \mathbb{R})$ la cual es llamada la métrica del supremo.

Definición 1.3 *Sean (X, d) un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $r > 0$. Una* ***bola abierta*** *con centro en x_0 y radio r es el conjunto $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. A la* ***bola cerrada*** *se le denota como $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$.*

Definición 1.4 *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Diremos que A es un* ***conjunto abierto****, si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.*

Definición 1.5 *Sean (X, d) un espacio métrico y $F \subseteq X$. Diremos que F es un* ***conjunto cerrado****, si F^c es un conjunto abierto.*

Definición 1.6 *Sean (X,d) un espacio métrico y $B \subseteq X$. Definimos el **interior** de B como $int(B) = \{x \in B : \text{existe } r > 0 \text{ donde } B(x,r) \subseteq B\}$.*

No es difícil probar que un conjunto $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $int(A) = A$.

Definición 1.7 *Sean (X,d) un espacio métrico y $B \subseteq X$. Definimos la **cerradura** de B como $\overline{B} = \{x \in X : \text{ para todo } r > 0,\ B(x,r) \cap B \neq \emptyset\}$.*

Es fácil probar que un conjunto $B \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $\overline{B} = B$.

Proposición 1.8 *Sean (X,d) un espacio métrico y $x \in X$. Si U es un abierto que contiene a x, entonces existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. [1, Propiedad 2.2, p.141].*

Definición 1.9 *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que $x \in X$, es un punto frontera de A si para todo conjunto abierto U de X se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A^c \neq \emptyset$. Al conjunto de puntos frontera de A le llamaremos la **frontera** de A y la denotaremos por $Fr(A)$.*

Definición 1.10 *Un subconjunto S de un espacio métrico (X,d) está **acotado** si existe $r > 0$ tal que para todo r, $t \in S$, se tiene que $d(s,t) < r$. En particular esto implica que un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe un número real $M > 0$ tal que $d(x,0) \leq M$ para toda $x \in K$, o de otra manera $K \subseteq B(0,M)$.*

Definición 1.11 *Un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es **compacto** si y solo si es cerrado y acotado.*

La definición de compacidad suele ser más abstracta, sin embargo debido a los espacios usados en este trabajo podemos considerar lo anterior como definición de compacidad en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.12 *Sean $a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3, \ldots, a_n < b_n$ números reales. Definimos un **rectángulo cerrado** de $\mathbb{R}^n$ como el conjunto $\prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ y un **rectángulo abierto** como el conjunto $\prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$.*

Definición 1.13 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos, $x_0 \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Diremos que f* ***es continua en*** *x_0 si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$; esto es, si $d_1(x, x_0) < \delta$ entonces $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Se dice que f es* ***continua*** *si es continua en cada $x \in X$.*

Teorema 1.14 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. f es continua si y sólo si para cada conjunto abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.* [*12, Teorema 4.8, p.93*].

Definición 1.15 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos, $x_0 \in X$ y $f : X \to Y$ una función. Diremos que f* ***es uniformemente continua*** *si para si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x, y) < \delta$ entonces $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

No es difícil ver que toda función uniformemente continua es continua.

Definición 1.16 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Diremos que la función es de* ***Lipschitz*** *si existe $c \geq 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) \leq cd_1(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*

Nótese que si una función f es de Lipschitz entonces es uniformemente continua y por tanto es continua.

Definición 1.17 *Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ se dice que es* ***contractiva de razón*** *k, si $0 \leq k < 1$ y $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo x,$y \in X$.*

Nótese que toda función contractiva es uniformemente continua.

Definición 1.18 *Dada una función $g : (X, d) \to (X, d)$, a cada punto $x \in X$ tal que $g(x) = x$ se le llama un* ***punto fijo*** *de g.*

Teorema 1.19 *(Weierstrass) Si $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y K es compacto entonces existen $x_0, y_0 \in K$ tales que $f(y_0) \leq f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in K$.* [*5, Teorema 3, p.168*].

De hecho, el teorema anterior puede escribirse para cuando el conjunto compacto K está contenido en espacios topológicos cualquiera.

Definición 1.20 *Sea (X, d) un espacio métrico. Una **sucesión** en X es una función $s : \mathbb{N} \to X$. Denotaremos a $s(n) = x_n$ y a $s = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a $x \in X$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$.*

*En este caso x es único y se le llama el **límite de la sucesión** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ó $x_n \to x$, par decir que una sucesión converge a x.*

*La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es llamada **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo n,$m \geq N$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, esto se conoce como la **Propiedad de Cauchy**.*

*Un espacio métrico (X, d) se llama **completo** si cada sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a algún $x \in X$.*

Teorema 1.21 *Sean (X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ que converge a x_0, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$. [5, Teorema 2, p.152].*

En la siguiente definición se recuerda el concepto de espacio vectorial, que nos sirve para construir a los espacios de Banach que se analizarán más adelante.

Definición 1.22 *Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) sobre un campo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) consiste de un conjunto V no vacío, en el que están definidas dos operaciones tales que:*

1. Adición: para cualquier par de elementos x y y en V existe un único elemento $x + y$ en V.

2. Multiplicación por escalar: para cada elemento a en $\mathbb{F}$ y cada elemento x en V existe un único elemento ax en V.

De manera que se cumplen las siguientes condiciones:

(i) Para toda x,y en V, $x + y = y + x$.
(ii) Para toda x,y,z en V, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
(iii) Existe un elemento en V denotado por 0 tal que $x + 0 = x$ para toda x en V.
(iv) Para cada elemento x en V, existe un elemento y en V tal que $x + y = 0$.
(v) Para cada elemento x en V, $1x = x$.
(vi) Para cada par de elementos a,b en $\mathbb{F}$ y cada elemento x en V,

$$(ab)x = a(bx).$$

(vii) Para cada elemento a en $\mathbb{F}$ y cada par de elementos x,y en V,

$$a(x+y) = ax + ay.$$

(viii) Para cada par de elementos a,b en $\mathbb{F}$ y cada elemento x en V,

$$(a+b)x = ax + bx.$$

Los elementos del campo $\mathbb{F}$ se llaman escalares y los elementos del espacio vectorial V se llaman vectores.

Para dar una estructura topológica a los espacios lineales, damos la siguiente definición.

Definición 1.23 *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es llamada **norma** si cumple las siguientes condiciones:*

(i) Para $v \in V$, $\|v\| \geq 0$. (Definida positiva)
(ii) $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.
(iii) Para $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$.
(iv)Para v, $w \in V$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (Desigualdad del triángulo)

*Un espacio vectorial V con una norma $\|\cdot\|$ se llama **espacio vectorial normado** el cual denotaremos por $(V, \|\cdot\|)$.*

Nótese que dada una norma en un espacio vectorial podemos definir una distancia dada por $d(u, v) = \|u - v\|$. Lo que hace a V un espacio métrico.

Definición 1.24 *Sean V,W espacios vectoriales y $\mathbb{F}$ un campo. Una función $f : V \to W$ es una **transformación lineal** si para todo u,$v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ se tiene que $f(u+v) = f(u) + f(v)$ y $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.*

Teorema 1.25 *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces existe $\mu > 0$ tal que $\|T(\overline{x})\| \leq \mu \, \|(\overline{x})\|$ para todo $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. [12, Teorema 2, p.225].*

Esta condición hace que T sea una función continua en $\overline{0}$ y usando la linealidad se puede ver que es continua en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.26 *Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ es llamado **completo**, o **espacio de Banach**, si como espacio métrico es un espacio completo. Un subconjunto A de un espacio de Banach es llamado cerrado si cada sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ implica $v \in A$.*

Definición 1.27 *Sean (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X. Diremos que la sucesión es **acotada** si existen $M > 0$ y $p \in X$ tal que $x_n \in B(p, M)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.28 *Sean V un espacio de Banach y $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Entonces la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ es denotada por $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ y es llamada la **serie** con términos a_k. Si la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $b \in V$, entonces decimos que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **converge** a b. Una serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que satisface la **Propiedad de Cauchy** si la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la Propiedad de Cauchy.*

Definición 1.29 *Se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente** si converge la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$. Es decir, una serie se dice que converge absolutamente si la "suma"de las normas de los términos de la serie es finita.*

Teorema 1.30 *Sea V un espacio de Banach y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces converge.*

Proposición 1.31 *Dado un espacio lineal normado X, los siguientes enunciados son equivalentes: [13, Teorema 4, p.167]*

1. El espacio X es un espacio de Banach.

2. Toda serie con términos en X que es absolutamente convergente, es también convergente.

Proposición 1.32 *Sean X un espacio de Banach y $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Si la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge absolutamente, entonces para cada reordenamiento de la sucesión, también la serie obtenida converge absolutamente e incondicionalmente a un cierto $x \in X$.*

Demostración: Como consecuencia de la Proposición 1.31, tenemos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge en X a un cierto $x \in X$, por ser X un espacio de Banach.

Consideramos ahora un reordenamiento $k \to \sigma(k)$ de $\mathbb{N}$. Sea $N_n \in \mathbb{N}$ el primer número natural tal que todos los términos en la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ aparece en la suma parcial $\sum_{j=1}^{N_n} x_j$. De esta manera tenemos,

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{j=1}^{N_n} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$$

Como toda sucesión de números reales acotada y no decreciente converge, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ converge absolutamente.

Usando la Proposición 1.31, resulta que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ converge en X, a un cierto $y \in X$.

Afirmamos que $x = y$.

Para la prueba, consideremos $\varepsilon > 0$ y fijemos $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} x_j - x\right\| < \varepsilon \ y \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon$$

Además, seleccionemos una suma parcial $\sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)}$ tal que todos los términos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ aparecen en ella.

En efecto, como σ es una biyección, deben existir $n_1, n_2, \ldots, n_N$ tal que $\sigma(n_j) = j$, para $1 \leq j \leq N$. Reordenando los valores n_j, si es necesario, podemos suponer que $n_1 < \ldots < n_N$. Finalmente, agregamos a $\{\sigma(n_1), \ldots, \sigma(n_N)\}$, si es necesario, todos los valores intermedios, a fin de obtener $\{1, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n_N)\}$.

Si elegimos $M \geq n_N$, podemos asegurarnos que también ocurre

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y \right\| < \varepsilon$$

Así,

$$\begin{aligned} \|x - y\| \quad \leq \quad & \underbrace{\left\| x - \sum_{j=1}^{N} x_j \right\|}_{\text{(i)}} + \underbrace{\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} \right\|}_{\text{(ii)}} \\ & + \underbrace{\left\| \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} - y \right\|}_{\text{(iii)}} \end{aligned}$$

La elección de N implica que el término (i) es menor que ε. En cuanto a (ii),

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} x_j - \sum_{k=1}^{M} x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{\text{ciertos } \sigma(k) \geq N+1} \left\| x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \|x_j\| < \varepsilon$$

Finalmente, por la manera en que hemos elegido M, (iii) es también menor que ε. De donde se desprende que $0 \leq \|x - y\| < 3\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Concluímos entonces que $x = y$. Esto completa la prueba de la proposición. ■

Capítulo 2

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

En este capítulo, exploraremos uno de los conceptos fundamentales en el ámbito del análisis matemático, conocido como el Teorema de la Función Inversa, aplicado específicamente a espacios euclidianos. Este teorema desempeña un papel crucial al proporcionar condiciones bajo las cuales una función puede ser invertida de manera local.

Además, analizaremos las condiciones necesarias para que una función sea localmente invertible en un entorno dado, examinando la diferenciabilidad e invertibilidad de la matriz jacobiana.

A lo largo de este capítulo, abordaremos casos específicos y ejemplos ilustrativos para reforzar la comprensión del teorema.

Además, destacaremos conexiones relevantes con otro teorema, como lo es el Teorema de la Función Implícita, que enunciaremos y demostraremos en capítulos posteriores.

Para ello, necesitamos de los siguientes resultados y definiciones básicas del cálculo.

Denotaremos al vector canónico $(0, \ldots, 1_j, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ por e_j.

Definición 2.1 *Una matriz $A \in M_{n\times n}$ es* ***invertible*** *si existe otra matriz $B \in M_{n\times n}$ tal que $AB = BA = Id$, donde Id es la matriz identidad.*

Teorema 2.2 *Una matriz $A \in M_{n\times n}$ es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$. Además $\det A = \det A^t$. (A^t denota la matriz transpuesta de A).* [*4, Teorema 4, p.159*]

Definición 2.3 *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\overline{x}_0 \in U$ y U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, donde $f = (f_1, \ldots f_m)$. Sean $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$la* ***derivada parcial*** *de f_i en $\overline{x}_0$ con respecto de la variable x_j que denotaremos por $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}_0)$, se define como $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f_i(\overline{x}_0 + he_j) - f_i(\overline{x}_0)}{h}$ si este existe.*

Definición 2.4 *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\overline{x}_0 \in U$ y U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Diremos que f es* ***diferenciable*** *en $\overline{x}_0$ si existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{\|f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - L(\overline{x} - \overline{x}_0)\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = 0$. En tal caso $L = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}_0))_{i,j}$ es llamada la* ***derivada*** *de f en $\overline{x}_0$ que denotaremos por $Df(\overline{x}_0)$.*

Se dice que una función es de **clase** C^1 si sus derivadas parciales de orden 1 existen en cada punto del dominio y como funciones son continuas.

Definición 2.5 *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\overline{x}_0 \in U$ y U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El* ***gradiente*** *de f en $\overline{x}_0$ se denota por $\nabla f(\overline{x}_0)$ y se define como el vector*

$$\left(\frac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

Los siguientes enunciados del cálculo de una variable determinan la existencia de la función inversa y su derivada. Su demostración se puede consultar en cualquier libro de cálculo avanzado.

1. Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua e inyectiva (I es un intervalo), entonces la función $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ existe y es continua.
2. Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva $a \in Int(I)$ y derivable en a, con $f'(a) = 0$ entonces $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ no es derivable en $f(a)$.
3. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva $a \in Int(I)$ y derivable en a con $f'(a) \neq 0$, entonces existe $f^{-1} : f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $b = f(a)$. Además, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} = (f'(a))^{-1}$. (Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}$).

¿Se podrá generalizar el resultado anterior cuando $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva y derivable en un abierto de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$? La respuesta es afirmativa y está dada por el Teorema de la Función Inversa, en el cual se muestran condiciones que aseguran la existencia y diferenciabilidad de la función inversa de manera local, el cual se enuncia a continuación y se demostrará más adelante.

Teorema 2.6 *Teorema de la función inversa. (Véase Figura 2.1)*

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de clase* C^1*, y* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto. Si* $a \in U$ *y* $\det Df(a) \neq 0$*, entonces existen* $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ *abiertos tales que:*

1. $a \in V \subseteq U$, $f(a) \in W$;
2. $f(V) = W$;
3. $f|_V : V \to W$ *es biyectiva;*
4. $f^{-1} : W \to V$ *es de clase* C^1;
5. *Para toda* $y \in W$, $Df^{-1}(y) = (Df(f^{-1}(y)))^{-1}$.

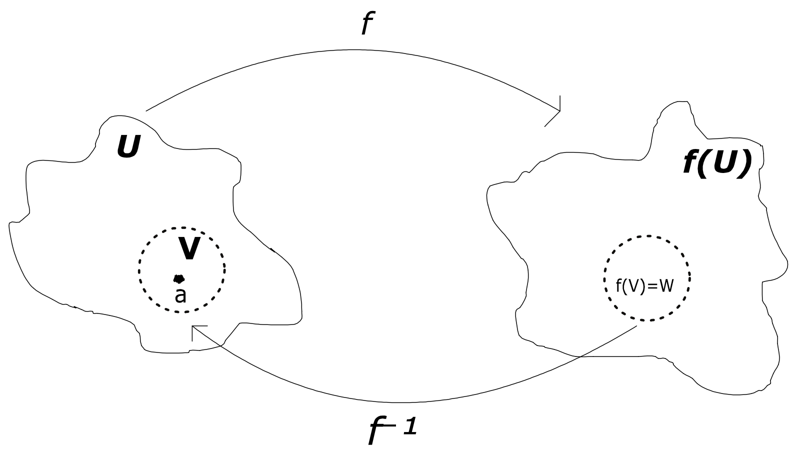

Figura 2.1: Teorema de la Función Inversa

Antes de demostrar el teorema analizaremos algunas funciones que ejemplifican la existencia y derivabilidad de la función inversa en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.7 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *dada por:* $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

Notemos que f *es lineal, por lo que podemos calcular la matriz asociada a la función vista como transformación lineal, que a su vez coincide con su derivada, la cual nos queda como*

$M_f = Df(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *para toda* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Como $\det(M_f) = -2 \neq 0$ *entonces* M_f *es invertible y el Teorema de la Función Inversa garantiza, en este caso, que* f *es invertible en todo* $\mathbb{R}^2$.

Para encontrar f^{-1} *podemos hacer lo siguiente:*

Como $f(x,y) = (x+y, x-y) = (u,v)$ con $u = x+y$ y $v = x-y$, despejamos a x y y en términos de u, v de la siguiente forma:

$$x = u - y \tag{2.1}$$

$$y = x - v \tag{2.2}$$

Sustituyendo 2.2 en 2.1 tenemos que $x = u - x + v$, de donde $2x = u + v$, así $x = \frac{u+v}{2}$.

Ahora sustituimos 2.1 en 2.2 y tenemos que $y = u - y - v$, de donde $2y = u - v$, así $y = \frac{u-v}{2}$.

Por lo tanto $f^{-1}(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$. Y además, $Df^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(Si sabemos calcular la inversa de una matriz, el cálculo es directo).

Ejemplo 2.8 *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = (2x+y, z-x, x+y+z)$.*

Note que f es lineal y $M_f = Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Observemos que,

$$\begin{aligned} \det(M_f) &= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1) - (-1-1) + 0 = -2 - (-2) \\ &= 0 \text{ para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el Teorema de la Función Inversa no garantiza que f sea invertible en cualquier abierto que contenga al punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.9 *Sea $f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.(Véase Figura 2.2)*

Veamos que para esta función en particular, no se puede garantizar que sea invertible en algún abierto de $\mathbb{R}^2$; ya que, en principio esta función no es inyectiva en todo $\mathbb{R}^2$.

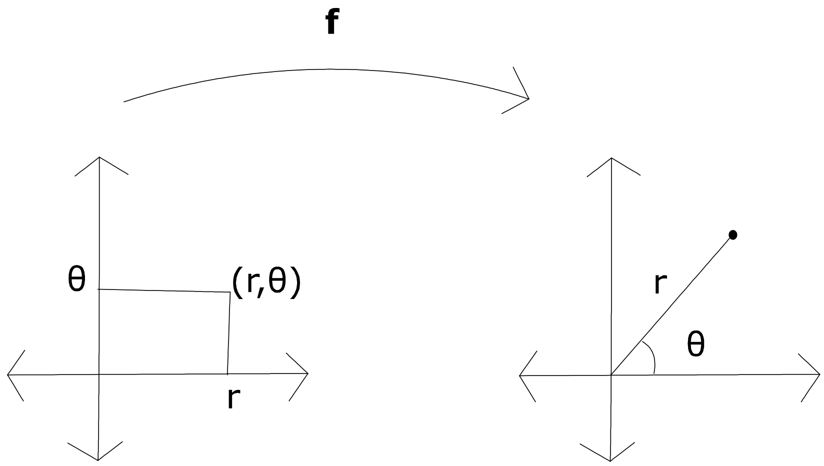

Figura 2.2: Cambio de coordenadas polares a cartesianas

Sea $(r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$, *¿existirá una vecindad* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *tal que* $(r_0, \theta_0) \in U$ *y* $f|_U$ *sea inyectiva y por lo tanto invertible?*

Para poder contestar esta pregunta consideremos dos casos:

I. Si $r_0 = 0$ *y* $\theta_0 = 0$ *entonces no existe dicha vecindad, ya que para todo* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *tal que* $(0, \theta_0) \in U$*, existe* $\theta \neq \theta_0$ *tal que* $(0, \theta) \in U$ *y* $f(0, \theta_0) = \overline{0} = f(0, \theta)$*, es decir, la función no es inyectiva.*

II. Si $(r_0, \theta_0) = (1, \frac{\pi}{2})$ *entonces el abierto* $U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ *nos funciona para determinar la inyectividad de la función. (Véase Figura 2.3)*

En general, si $r_0 \neq 0$*, entonces para* $U = (0, \infty) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ *y* $r_0 > 0$ *se cumple que* $f|_U$ *es inyectiva.*

Notemos además que $Df(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

De esta manera, $\det Df(r, \theta) = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$*, de donde* $\det Df(r, \theta) = 0$ *si y sólo si* $r = 0$*; esto es, el Teorema de la Función Inversa no me garantiza que la función sea invertible en abiertos que contengan a puntos de la forma* $(0, \theta)$.

Ahora bien, si $\det Df(r, \theta) \neq 0$ *entonces el Teorema de la Función Inversa me garantiza que para cada punto de la forma* (r, θ)*, (*$r \neq 0$*), existen abiertos en donde la función* f *es inyectiva.*

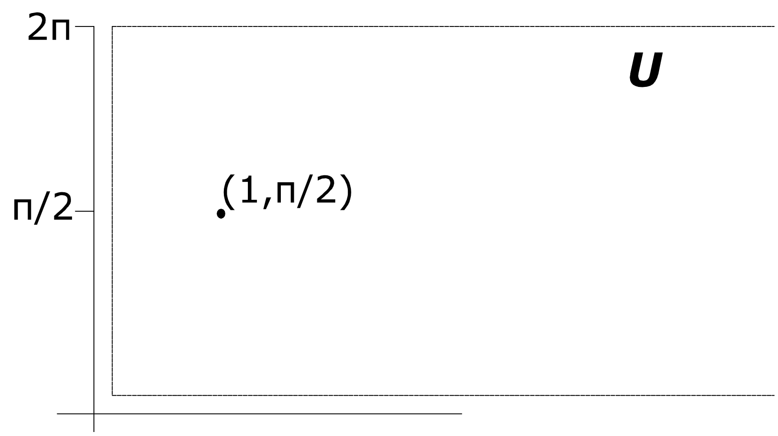

Figura 2.3: Figura 2.3

A continuación, para probar el Teorema de la Función Inversa, mostraremos una serie de resultados previos.

Lema 2.10 *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo y $f : A \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Supongamos que existe $\mu > 0$ tal que para todo $\overline{x} \in int(A)$ y para todo $i,j \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple que $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| \leq \mu$, donde $f = (f_1, \ldots, f_n)$, entonces, $\|f(\overline{x}) - f(\overline{y})\| \leq n^2\mu \|\overline{x} - \overline{y}\|$ para todo $\overline{x},\overline{y} \in int(A)$; es decir, f es Lipschitz en $int(A)$.*

Demostración: Sean $\overline{x}$, $\overline{y} \in int(A)$, $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Definamos los siguientes puntos en $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{gathered}
\overline{u}_0 = \overline{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n) \\
\overline{u}_1 = (y_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\overline{u}_2 = (y_1, y_2, \ldots, x_n) \\
\vdots \\
\overline{u}_n = \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{gathered}$$

Dicho de otra manera, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\overline{u}_k = (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, x_n)$.

Como $\overline{x}$, $\overline{y} \in int(A)$, el cual es un rectángulo abierto, entonces $\overline{u}_k \in int(A)$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Así,

$$f(\overline{y})-f(\overline{x}) = f(\overline{u}_n)-f(\overline{u}_{n-1})+f(\overline{u}_{n-1})-\cdots-f(\overline{u}_1)+f(\overline{u}_1)-f(\overline{u}_0) = \sum_{i=1}^{n}(f(\overline{u}_i)-f(\overline{u}_{i-1}))$$

Además, $\overline{u}_k - \overline{u}_{k-1} = (y_k - x_k)\cdot e_k$.

Entonces por el Teorema del Valor Medio aplicado a las derivadas parciales se tiene que para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$ y para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, existe $\overline{z}_{ik} \in \overline{\overline{u}_{k-1}\overline{u}_k}$ (donde $\overline{\overline{u}_{k-1}\overline{u}_k}$ denota el segmento de recta que va de $\overline{u}_{k-1}$ a $\overline{u}_k$) tal que

$$\begin{aligned} f_i(\overline{u}_k) - f_i(\overline{u}_{k-1}) &= (y_k - x_k)\cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\overline{z}_{ik}), \text{ por lo que} \\ f_i(\overline{y}) - f_i(\overline{x}) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\overline{z}_{ik})(y_k - x_k) \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} |\ f_i(\overline{y}) - f_i(\overline{x})| &\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\overline{z}_{ik})(y_k - x_k)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\mu\cdot\|\overline{x}-\overline{y}\| = n\mu\,\|\overline{x}-\overline{y}\| \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \|f(\overline{y}) - f(\overline{x})\| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\ f_i(\overline{y}) - f_i(\overline{x})| \text{ tenemos que} \\ \|f(\overline{y}) - f(\overline{x})\| &\leq \sum_{i=1}^{n}\mu n\,\|\overline{x}-\overline{y}\| = \mu n^2\,\|\overline{x}-\overline{y}\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|f(\overline{y}) - f(\overline{x})\| \leq n^2\mu\,\|\overline{x}-\overline{y}\|$ para todo $\overline{x}$, $\overline{y} \in int(A)$. ■

Lema 2.11 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Si existe $\overline{a} \in int(A)$ con $\det Df(\overline{a}) \neq 0$, entonces existe un abierto U tal que $\overline{a} \in U \subseteq int(A)$ y para todo $\overline{x} \in U$, se tiene que $\det Df(\overline{x}) \neq 0$.*

Demostración: Sea $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Como f es de clase C^1, entonces $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : A \to \mathbb{R}$ es continua, por lo que la función $\triangle : A \to \mathbb{R}$ dada por $\triangle(\overline{x}) = \det Df(\overline{x})$ es continua por ser un producto de funciones continuas.

Como $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es abierto y $\triangle(\overline{a}) \neq 0$ entonces $\triangle(\overline{a}) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. De la continuidad de $\triangle$, existe un abierto U tal que $\overline{a} \in U \subseteq int(A)$ tal que $\triangle(U) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Así, para toda $\overline{x} \in U$ y $\triangle(\overline{x}) \neq 0$. Por lo tanto, para toda $\overline{x} \in U$, $\det Df(\overline{x}) \neq 0$. ■

Lema 2.12 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si $\overline{a} \in int(A)$ y f es derivable en $\overline{a}$, con $Df(\overline{a}) = Id$. Entonces existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{a} \in U \subseteq int(A)$ y para todo $\overline{x} \in U\setminus\{\overline{a}\}$, $f(\overline{x}) \neq f(\overline{a})$.*

Demostración: Procedamos por contradicción. Supongamos que no existe tal abierto. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $\overline{x}_k \in B(\overline{a}, \frac{1}{k})\setminus\{\overline{a}\} \cap int(A)$ tal que $f(\overline{x}_k) = f(\overline{a})$, dicho de otra manera $f(\overline{x}_k) - f(\overline{a}) = 0$.

Como f es derivable en $\overline{a}$ y $Df(\overline{a}) = Id$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\overline{x}\to a} \frac{\|f(\overline{x}) - f(\overline{a}) - Df(\overline{a})(\overline{x} - \overline{a})\|}{\|\overline{x} - \overline{a}\|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\|f(\overline{x}_k) - f(\overline{a}) - Df(\overline{a})(\overline{x}_k - \overline{a})\|}{\|\overline{x}_k - \overline{a}\|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\|0 - Id(\overline{x}_k - \overline{a})\|}{\|\overline{x}_k - \overline{a}\|} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\|\overline{x}_k - \overline{a}\|}{\|\overline{x}_k - \overline{a}\|} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1
\end{aligned}$$

De donde tendríamos que $0 = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, sí existe un abierto $U \subseteq int(A)$ tal que $\overline{a} \in U$ y $f(\overline{x}) \neq f(\overline{a})$ para todo $\overline{x} \in U$. ■

Teorema 2.13 *(Caso particular del Teorema de la Función Inversa). Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 y U un abierto. Si $\overline{a} \in U$, con f diferenciable en a y $Df(\overline{a}) = Id$, entonces existen abiertos $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:*

1. $\overline{a} \in V \subseteq U$*;*
2. $f(V) = W$*;*
3. $f|_V : V \to W$ *es biyectiva;*
4. $f^{-1} : W \to V$ *es de clase* C^1*;*
5. Para toda $\overline{y} \in W$*,* $D(f^{-1})(\overline{y}) = (Df(f^{-1}(\overline{y})))^{-1}$*.*

Demostración: Procedamos primero a restringir nuestro dominio.

Sea $O_1 \subseteq U$ un abierto tal que $\overline{a} \in O_1$, y $f(\overline{x}) \neq f(\overline{a})$ para toda $\overline{x} \in O_1 \setminus \{\overline{a}\}$, el cual existe por el Lema 2.14.

Ahora por el Lema 2.13 existe un abierto $O_2 \subseteq O_1$ tal que $\overline{a} \in O_2$ y $\det Df(\overline{x}) \neq 0$ para toda $\overline{x} \in O_2$. Como f es de clase C^1, entonces existe un abierto $O_3 \subseteq O_2$ tal que $\overline{a} \in O_3$ y $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \frac{1}{2n^2}$ para toda $\overline{x} \in O_3$.

Dado que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico, existe un rectángulo abierto O tal que $\overline{a} \in O \subseteq \overline{O} \subseteq O_3$. (Véase Figura 2.4)

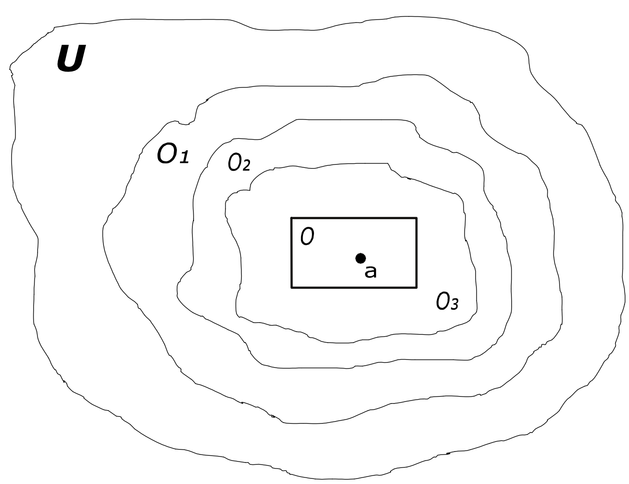

Figura 2.4: Restricción de dominio

De esta manera para toda $\overline{x} \in O$, se cumple que:
(a) $f(\overline{x}) \neq f(\overline{a})$ si $\overline{x} \neq \overline{a}$;
(b) $\det Df(\overline{x}) \neq 0$;
(c) $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| < \frac{1}{2n^2}$ para todo $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Definamos ahora una función $g : O \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$g(\overline{x}) = f(\overline{x}) - \overline{x} = (\underbrace{f_1(\overline{x}) - x_1}_{g_1(\overline{x})}, \underbrace{f_2(\overline{x}) - x_2}_{g_2(\overline{x})}, ..., \underbrace{f_n(\overline{x}) - x_n}_{g_n(\overline{x})})$$

Note que

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\overline{x}) = \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - 1 & \text{si } i = j \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) & \text{si } i \neq j \end{cases} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$ es la delta de Kronecker.

Por otro lado, como $Df(\overline{a}) = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

se tiene que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a}) = \delta_{ij}, \text{ de donde}$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\overline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) - \delta_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a})$$

Así, $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\overline{x})\right| = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{a})\right| < \frac{1}{2n^2}$ para toda $\overline{x} \in O$ por (c).

Por Lema 2.12:

$$\| g(\overline{x}) - g(\overline{y}) \| \leq \frac{1}{2} \| \overline{x} - \overline{y} \| \text{ para todo } \overline{x}, \overline{y} \in O \tag{2.3}$$

De la desigualdad del triángulo tenemos que si $\overline{x}, \overline{y} \in O$,

$$\begin{aligned} & \| \overline{x} - \overline{y} \| - \| f(\overline{x}) - f(\overline{y}) \| \\ \leq & \| f(\overline{x}) - f(\overline{y}) - (\overline{x} - \overline{y}) \| \\ = & \| g(\overline{x}) - g(\overline{y}) \| \\ \leq & \frac{1}{2} \| \overline{x} - \overline{y} \| \text{ por } 2.3 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{1}{2} \parallel \overline{x} - \overline{y} \parallel = \parallel \overline{x} - \overline{y} \parallel - \frac{1}{2} \parallel \overline{x} - \overline{y} \parallel \leq \parallel f(\overline{x}) - f(\overline{y}) \parallel$$

Por lo tanto,

$$\parallel \overline{x} - \overline{y} \parallel \leq 2 \parallel f(\overline{x}) - f(\overline{y}) \parallel \text{ para toda } \overline{x}, \overline{y} \in O \tag{2.4}$$

En particular, si $\overline{x}, \overline{y} \in O$, con $\overline{x} \neq \overline{y}$ se tiene que

$$0 < \parallel \overline{x} - \overline{y} \parallel \leq 2 \parallel f(\overline{x}) - f(\overline{y}) \parallel .$$

De donde se concluye $\parallel f(\overline{x}) - f(\overline{y}) \parallel > 0$.Por lo tanto $f(\overline{x}) \neq f(\overline{y})$ esto prueba que f es inyectiva en O.

Ahora bien, como $\mathbb{R}^n$ es métrico y $\overline{a} \in O$, existe un rectángulo abierto y acotado R tal que $\overline{a} \in R \subseteq \overline{R} \subseteq O$. (Véase figura 2.5)

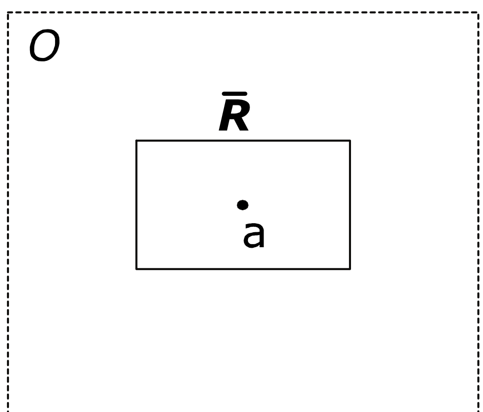

Figura 2.5: Figura 2.5

Por otro lado, como ∂R es cerrado y acotado se tiene que ∂R es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, y además, $\overline{a} \in R = int(R)$ y $f|_{\overline{R}}$ sigue siendo inyectiva.

De este modo si $\overline{x} \in \partial R$ sucede que $\overline{x} \neq \overline{a}$, por lo que $f(\overline{x}) \neq f(\overline{a})$. Por lo tanto, $f(\overline{a}) \notin f(\partial R)$.

Por otra parte, como f es continua, $f(\partial R)$ es compacto, en particular es cerrado, así existe $\delta > 0$ tal que $B(f(\overline{a}), \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \diagdown f(\partial R)$.

Dicho de otra manera,

$$\text{para todo } \overline{x} \in \partial R, \ \parallel f(\overline{a}) - f(\overline{x}) \parallel \geq \delta \tag{2.5}$$

(Véase Figura 2.6)

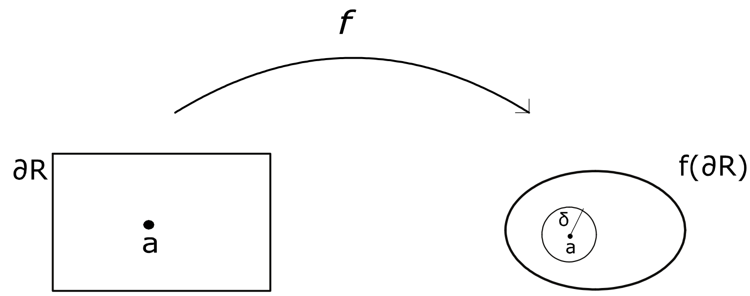

Figura 2.6: Figura 2.6

Sea $W = B(f(\overline{a}), \frac{\delta}{2})$. Notemos que si $\overline{y} \in W$ y $\overline{x} \in \partial R$, entonces

$$\begin{aligned} \delta &\leq \|f(\overline{x}) - f(\overline{a})\| \\ &\leq \|f(\overline{x}) - \overline{y}\| + \|\overline{y} - f(\overline{a})\| \\ &< \|f(\overline{x}) - \overline{y}\| + \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

así,

$$\frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta}{2} < \|f(\overline{x}) - \overline{y}\|$$

Entonces

$$\|\overline{y} - f(\overline{a})\| < \frac{\delta}{2} < \|f(\overline{x}) - \overline{y}\| \ \text{ para toda } \overline{y} \in W, \overline{x} \in \partial R \tag{2.6}$$

A continuación probaremos que W es una de las vecindades buscadas.

Afirmación 1: Para toda $\overline{y} \in W$, existe una única $\overline{x} \in R$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$

Prueba: Sea $\overline{y} \in W$ fijo, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

Sea $G : \overline{R} \to \mathbb{R}$ dada por $G(\overline{x}) = \|\overline{y} - f(\overline{x})\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i(\overline{x}))^2$.

Como G es continua y $\overline{R}$ es compacto, existe $\overline{x}_0 \in \overline{R}$ tal que $G(\overline{x}_0) \leq G(\overline{x})$ para toda $\overline{x} \in \overline{R}$.

Por 2.6, $G(\overline{a}) < G(\overline{x})$ para toda $\overline{x} \in \partial R$, esto nos dice que $\overline{x}_0 \notin \partial R$, pues de lo contrario $G(a) < G(\overline{x}_0)$ y $\overline{x}_0$ no es mínimo. Así $\overline{x}_0 \in R = int(R)$.

Como G es de clase C^1 y R es un abierto en donde ocurre que $\overline{x}_0$ es un mínimo local, se tiene que $\nabla G(\overline{x}_0) = \overline{0}$.

Así, $\frac{\partial G}{\partial x_j}(\overline{x}_0) = 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dado que

$$\frac{\partial G}{\partial x_j}(\overline{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - f_i(\overline{x}_0)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}_0) \text{ para toda } j \in \{1, \ldots, n\}\text{, tenemos que}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i(\overline{x}_0)) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}_0) \text{ para toda } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto nos determina un sistema de n ecuaciones lineales homogéneo con incógnitas $(y_i - f_i(\overline{x}_0))$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{array}{ccccc}
(y_1 - f_1(\overline{x}_0))\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & + \cdots + & (y_n - f_n(\overline{x}_0))\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x}_0) & = 0 \\
(y_1 - f_1(\overline{x}_0))\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{x}_0) & + \cdots + & (y_n - f_n(\overline{x}_0))\frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{x}_0) & = 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(y_1 - f_1(\overline{x}_0))\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x}_0) & + \cdots + & (y_n - f_n(\overline{x}_0))\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x}_0) & = 0
\end{array}$$

La matriz asociada a este sistema homogéneo de ecuaciones es $(Df(\overline{x}_0))^T$ y como $\det(Df(\overline{x}_0))^T = \det(Df(\overline{x}_0)) \neq 0$, ya que $\overline{x}_0 \in O$, por lo que la única solución al sistema es $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$; es decir, $(y_i - f_i(\overline{x}_0)) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De esta forma $f_i(\overline{x}_0) = y_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así $f(\overline{x}_0) = \overline{y}$.

Como $\overline{x}_0 \in R$ y f es inyectiva en R, $\overline{x}_0$ es único.

Esto demuestra la Afirmación 1.

Ahora, sea $V = f|_R^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap R$. (f^{-1} representa aquí la imagen inversa no la función inversa)

Como W y R son abiertos y f es continua, entonces V es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Además, como $f|_R$ es inyectiva y $V \subseteq R$, entonces $f|_V$ es inyectiva.

Por la Afirmación 1, para todo $\overline{y} \in W$, existe un único $\overline{x} \in R$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y} \in W$, entonces $\overline{x} \in R \cap f^{-1}(W) = V$.

Por lo tanto $f|_V : V \to W$ es biyectiva. Por lo que la función inversa $f^{-1} : W \to V$ existe.

Afirmación 2: f^{-1} es continua.

Prueba: Sean $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in W$. Entonces existen $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V \subseteq O$ tal que $f(\overline{x}_i) = \overline{y}_i$ $(i = 1, 2)$,

así $f^{-1}(\overline{y}_i) = \overline{x}_i$ $(i = 1, 2)$. De aquí,

$$\left\| f^{-1}(\overline{y}_1) - f^{-1}(\overline{y}_2) \right\| = \|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\| \underbrace{\leq}_{\text{por 2.4}} 2 \|f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2)\| = 2 \|\overline{y}_1 - \overline{y}_2\|$$

De donde

$$\left\| f^{-1}(\overline{y}_1) - f^{-1}(\overline{y}_2) \right\| \leq 2 \|\overline{y}_1 - \overline{y}_2\| \tag{2.7}$$

Entonces f^{-1} es Lipschiz y por tanto es continua.

Queda probada la Afirmación 2.

Afirmación 3: f^{-1} es derivable.

Prueba: Sea $\overline{y}_0 \in W$ y $f^{-1}(\overline{y}_0) = \overline{x}_0$. Si $\mu = Df(\overline{x}_0)$, probaremos que $Df^{-1}(\overline{y}_0) = \mu^{-1}$. Demostrando esto completamos la prueba.

Como $\overline{x}_0 \in V$, $\det \mu \neq 0$, entonces existe μ^{-1}.

P.D.

$$\lim_{\overline{y} \to \overline{y}_0} \frac{\|f^{-1}(\overline{y}) - f^{-1}(\overline{y}_0) - \mu^{-1}(\overline{y} - \overline{y}_0)\|}{\|\overline{y} - \overline{y}_0\|} = 0.$$

Sea $\varphi(\overline{h}) = f(\overline{x}_0 + \overline{h}) - f(\overline{x}_0) - \mu(\overline{h})$, entonces $\varphi(\overline{x} - \overline{x}_0) = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - \mu(\overline{x} - \overline{x}_0)$.

Como $Df(\overline{x}_0) = \mu$, entonces

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{\|\varphi(\overline{x} - \overline{x}_0)\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{\|f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) - \mu(\overline{x} - \overline{x}_0)\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} \frac{\|\varphi(\overline{x} - \overline{x}_0)\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = 0 \tag{2.8}$$

Notemos que $f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)=\mu(\overline{x}-\overline{x}_0)+\varphi(\overline{x}-\overline{x}_0)$. Como μ^{-1} es una transformación lineal, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}(f(\overline{x})-f(\overline{x}_0)) &= \mu^{-1}(\mu(\overline{x}-\overline{x}_0)+\varphi(\overline{x}-\overline{x}_0))\\
&= \mu^{-1}(\mu(\overline{x}-\overline{x}_0))+\mu^{-1}(\varphi(\overline{x}-\overline{x}_0\ ))\\
&= (\overline{x}-\overline{x}_0)+\mu^{-1}(\varphi(\overline{x}-\overline{x}_0\ ))
\end{aligned}$$

Así,

$$\mu^{-1}(\overline{y}-\overline{y}_0\ )=f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)+\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)))$$

De donde,

$$\mu^{-1}(\overline{y}-\overline{y}_0\ )-f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)=\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))) \tag{2.9}$$

Por 2.9 basta demostrar que:

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{y}_0}\frac{\|\mu^{-1}(\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)))\|}{\|\overline{y}-\overline{y}_0\|}=0 \tag{2.10}$$

Notemos primero que como μ^{-1} es una función lineal, entonces por el Teorema 1.25, existe $k>0$ tal que $\|\mu^{-1}(\overline{y})\|\leq k\,\|\overline{y}\|$, para todo $\overline{y}\in\mathbb{R}^n$.

De esta manera, para probar 2.10 basta demostrar que:

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{y}_0}\frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))\|}{\|\overline{y}-\overline{y}_0\|}=0$$

Nótese que,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))\|}{\|\overline{y}-\overline{y}_0\|}=\frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))\|\cdot\|f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)\|}{\|\overline{y}-\overline{y}_0\|\cdot\|f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)\|}\\
&= \frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))\|}{\|f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)\|}\cdot\frac{\|f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)\|}{\|\overline{y}-\overline{y}_0\|}\\
&\leq \frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))\|}{\|f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)\|}\cdot 2=2\frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0))\|}{\|f^{-1}(\overline{y})-f^{-1}(\overline{y}_0)\|}\ \text{por 2.7}
\end{aligned}$$

Dado que, f^{-1} es continua, si $\overline{y} \longrightarrow \overline{y}_0$ entonces $f^{-1}(\overline{y}) \longrightarrow f^{-1}(\overline{y}_0)$ de donde tenemos que

$$\lim_{\overline{y}\to\overline{y}_0} \frac{\|\varphi(f^{-1}(\overline{y}) - f^{-1}(y_0))\|}{\|f^{-1}(\overline{y}) - f^{-1}(\overline{y}_0)\|} = \lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0} \frac{\|\varphi(\overline{x} - \overline{x}_0)\|}{\|\overline{x} - \overline{x}_0\|} = 0 \text{ por } 2.8$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{\overline{y}\to\overline{y}_0} \frac{\left\|\varphi(f^{-1}(\overline{y}) - f^{-1}(\overline{y}_0))\right\|}{\|\overline{y}-\overline{y}_0\|} = 0$, lo cual completa la demostración de la Afirmación 3.

De modo que f^{-1} es derivable y su derivada es la inversa de la derivada de f en $\overline{x}_0$.

■

Teorema 2.14 *(Versión General del Teorema de la Función Inversa) (Véase Figura 2.7). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1. Si $\overline{a} \in U$ es tal que* $\det Df(\overline{a}) \neq 0$, *entonces existen dos abiertos $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:*

1. $\overline{a} \in V \subseteq U$, $f(\overline{a}) \in W$;
2. $f(V) = W$;
3. $f|_V : V \to W$ es biyectiva;
4. $f^{-1} : W \to V$ es de clase C^1;
5. Para todo $\overline{y} \in W$, $(Df^{-1})(\overline{y}) = (Df(f^{-1}(\overline{y})))^{-1}$.

Demostración: Sea $\lambda = Df(\overline{a})$. Como $\det \lambda \neq 0$, entonces existe $\lambda^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Como λ^{-1} es lineal, entonces λ^{-1} es de clase C^1.

Definamos $g = \lambda^{-1} \circ f : U \subseteq \mathbb{R}^n$, la cual es de clase C^1 por ser composición de funciones de clase C^1.

Por la regla de la cadena tenemos que $Dg(\overline{a}) = D\lambda^{-1}(f(\overline{a})) \circ Df(\overline{a}) = \lambda^{-1} \circ \lambda = Id$.

De aquí, g cumple las hipótesis del caso particular del Teorema de la Función Inversa.

De esta manera, existen dos abiertos $V, \widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que:

I. $\overline{a} \in V \subseteq U$;
II. $g(V) = \widetilde{W}$;
III. $g|_V : V \to \widetilde{W}$ es biyectiva;
IV. $g^{-1} : \widetilde{W} \to V$ es de clase C^1;
V. Para todo $\overline{y} \in W$, $(Dg^{-1})(\overline{y}) = (Dg(g^{-1}(\overline{y})))^{-1}$.

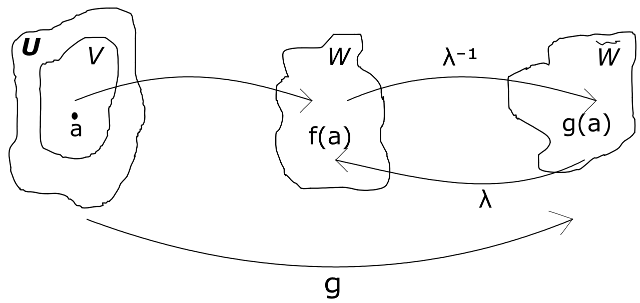

Figura 2.7: T. F. Inversa (Versión general)

Sea $W = \lambda(\widetilde{W}) = (\lambda^{-1})^{-1}(\widetilde{W})$. Como λ^{-1} es continua y $\widetilde{W}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces $(\lambda^{-1})^{-1}(W)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$, y así W es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Además $f(\overline{a}) = \lambda(\lambda^{-1}(f(\overline{a}))) = \lambda(g(\overline{a})) \in \lambda(\widetilde{W}) = W$. Por lo tanto $f(\overline{a}) \in W$.

Entonces V y W cumplen 1.

Nótese que $f(V) = \lambda(\lambda^{-1}(f(V))) = \lambda(g(V)) = \lambda(\widetilde{W}) = W$. Por lo tanto, se cumple 2, es decir, $f|_V : V \to W$ es suprayectiva.

Por otra parte si $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in V$ y $f(\overline{x}_1) = f(\overline{x}_2)$, entonces $g(\overline{x}_1) = \lambda^{-1}(f(\overline{x}_1)) = \lambda^{-1}(f(\overline{x}_2) = g(\overline{x}_2)$.

Así, $g(\overline{x}_1) = g(\overline{x}_2)$ y como $g|_V$ es inyectiva, entonces $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$. Por lo tanto, $f|_V$ es inyectiva. De esta manera, $f : V \to W$ es biyectiva. Así, se cumple 3. Lo que implica que $f^{-1} : W \to V$ existe.

Como $g = \lambda^{-1} \circ f$, entonces $g^{-1} = f^{-1} \circ (\lambda^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ \lambda$, de aquí, $g^{-1} \circ \lambda^{-1} = f^{-1} \circ \lambda \circ \lambda^{-1} = f^{-1}$.

Por lo tanto, $f^{-1} = g^{-1} \circ \lambda^{-1}$ y como g^{-1} y λ^{-1} son de clase C^1, se cumple 4.

Falta probar que $Df^{-1}(\overline{y}) = (Df(f^{-1}(\overline{y})))^{-1}$ para todo $y \in W$.

Como $Id = f \circ f^{-1}$ y f y f^{-1} son derivables, entonces para todo $\overline{y} \in W$ tenemos $Id = DId(v) = D(f(f^{-1}(\overline{y}))) \circ Df^{-1}(\overline{y})$.

Por lo que Df^{-1} es inversa derecha de $Df(f^{-1}(\overline{y}))$.

De esta manera, $D(f(f^{-1}(\overline{y})))$ es suprayectiva y como es una función lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces es biyectiva.

De esta forma, $D(f(f^{-1}(\overline{y})))^{-1} = D(f(f^{-1}(\overline{y})))^{-1} \circ D(f(f^{-1}(\overline{y}))) \circ Df^{-1}(\overline{y}) = Df^{-1}(\overline{y})$.

Por lo tanto $Df^{-1}(\overline{y}) = D(f(f^{-1}(v)))^{-1}$; es decir, se cumple 5. ∎

El siguiente ejemplo es otro caso donde se muestra que se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Inversa.

Ejemplo 2.15 *Sea* $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dada por:* $F(r, \theta, z) = (r \cos\theta, r \sin\theta, z)$.

Entonces $DF(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Así $\det DF(r, \theta, z) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0$ *si y sólo si* $r \neq 0$

Por lo tanto, si $r \neq 0$ *entonces* F *se puede invertir en una vecindad del punto* (r, θ, z).

Capítulo 3

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

El Teorema de la Función Implícita se erige como un pilar fundamental en el estudio de ecuaciones implícitas y sus soluciones en el ámbito de los espacios euclidianos. Este teorema, cuyos fundamentos se remontan a los trabajos pioneros de matemáticos como Banach y Frechet, despliega su riqueza en la capacidad para identificar condiciones bajo las cuales una ecuación puede ser implícitamente definida por una función.

En este capítulo se abordará la naturaleza de las ecuaciones implícitas, las restricciones impuestas sobre las funciones involucradas, y la garantía de existencia y unicidad de soluciones locales. A lo largo de este, nos sumergiremos en la esencia de la diferenciación en espacios euclidianos, destacando la importancia de las derivadas parciales y la matriz jacobiana.

Aquí se ve la conexión entre la topología de espacios euclidianos y la existencia de soluciones para ecuaciones que, a primera vista, podrían parecer intrincadas. Este análisis proporcionará una base sólida para la comprensión y aplicación del Teorema.

Es de notar que el Teorema de la Función Implícita es un resultado estrictamente local; geométricamente nos dice cuando una parte de S se puede ver como la gráfica de una función g, o más formalmente, nos dice como se comporta localmente una función en una parte de S haciendo uso de su derivada, sin a veces siquiera conocer la regla de correspondencia.

Para introducirnos al Teorema de la Función Implícita, veremos un ejemplo en concreto; para ello, necesitamos primero de la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. El* ***conjunto de nivel*** *c de f es el conjunto $S = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\overline{x}) = c\} = f^{-1}(c)$, es decir, es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ en donde f es constante.*

Ejemplo 3.2 *Consideremos la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$. *Notemos que el conjunto de soluciones de esta ecuación es el conjunto de nivel* 1 *de la función* $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Sabemos que los puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 = 1\} = S$ *forman una circunferencia, la cual no es la gráfica de ninguna función.*

Si (x_0, y_0) *es una solución de la ecuación* $x^2+y^2 = 1$*; es decir,* $(x_0, y_0) \in S$*, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿es posible despejar a* y_0 *en términos de* x_0*?*

De manera más formal, ¿es posible encontrar un intervalo abierto I *tal que* $x_0 \in I$ *y* $g : I \to \mathbb{R}$ *con* $x^2 + g(x)^2 = 1$ *para todo* $x \in I$ *?, es decir, ¿es posible escribir a la variable* y *en función de* x *en un intervalo abierto alrededor de* x_0*?*

Notemos que si x_0 *pertenece al intervalo abierto* $(-1, 1)$*, entonces hay dos funciones: (Véase Figura 3.1)*

1. $g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$. *Donde* $g_1 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$;

2. $g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. *Donde* $g_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

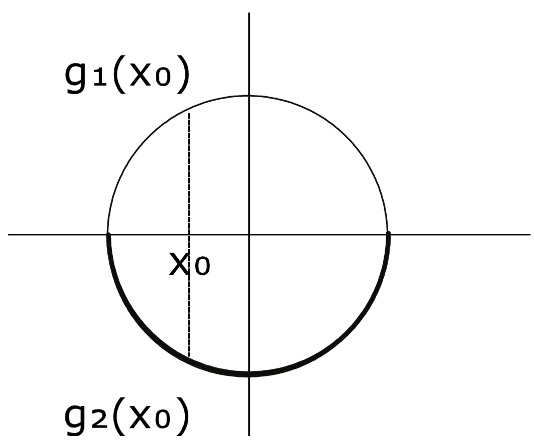

Figura 3.1: Figura 3.1

Si $y_0 < 0$ *entones* g_2 *resuelve nuestro problema.*

Si $y_0 > 0$ *entones* g_1 *resuelve nuestro problema.*

Además, podemos observar que tanto g_1 *como* g_2 *son funciones derivables.*

Veamos primero un caso particular del Teorema de la Función Implícita.

Teorema 3.3 *(Caso particular del Teorema de la Función Implícita). (Véase Figura 3.2). Sean* $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, y* $F : W \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1. *Sea* $S = F^{-1}(0) =$

$\{(\overline{x},z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : F(\overline{x},z)=0\}$. Supongamos que $\overline{a}\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}$ cumple que $(\overline{a},b)=(a_1,\ldots,a_n,b)\in S$; es decir, $F(\overline{a},b)=0$. Si $\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{a},b)\neq 0$, entonces existen dos conjuntos abiertos $W^*\subseteq\mathbb{R}^n$ y $V\subseteq\mathbb{R}$ tales que $\overline{a}\in W^*$, $b\in V$ y una única función $g:W^*\to V$ que satisface:

1. *$F(\overline{x},g(\overline{x}))=0$ para todo $\overline{x}\in W^*$;*
2. *$g(\overline{a})=b$;*
3. *g es de clase C^1;*
4. *$\nabla g(\overline{x})=\frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x},g(\overline{x}))}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x},g(\overline{x})),\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{x},g(\overline{x}))\right)$;*

es decir, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\overline{x})=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overline{x},g(\overline{x}))}{\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x},g(\overline{x}))}$ para toda $i=1,\ldots,n$.

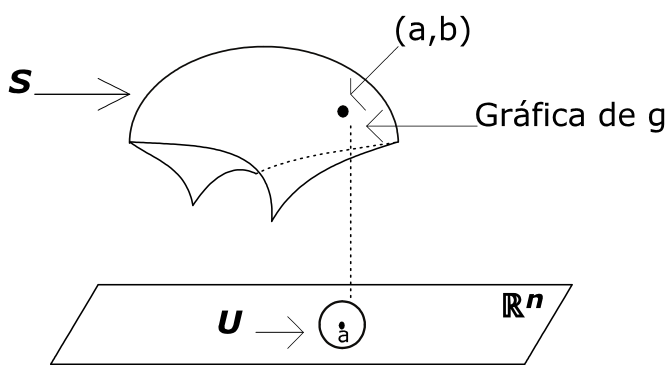

Figura 3.2: T. F. Implícita (Caso Particular)

Demostración: Sea $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} f(\overline{x},z) &= (\underbrace{\overline{x}}_{\mathbb{R}^n},\underbrace{F(\overline{x},z)}_{\mathbb{R}}) \text{ donde } \overline{x}=(x_1,\ldots,x_n) \\ &= (\underbrace{x_1}_{f_1},\underbrace{x_2}_{f_2},\ldots,\underbrace{x_n}_{f_n},\underbrace{F(\overline{x},z)}_{f_{n+1}=F}). \end{aligned}$$

Notemos que para toda $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x},z)=\delta_{ij}$ y $\frac{\partial f_i}{\partial z}=0$. ($\delta_{ij}$ es la delta de Kronecker)

De esta manera,

$$
\begin{aligned}
Df(\overline{x}, z) &= \begin{pmatrix} \nabla f_1(\overline{x}, z) \\ \nabla f_2(\overline{x}, z) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\overline{x}, z) \\ \nabla F(\overline{x}, z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}, z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x}, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\overline{x}, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{x}, z) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{x}, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\overline{x}, z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{x}, z) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{x}, z) & \frac{\partial f_n}{\partial z}(\overline{x}, z) \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x}, z) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{x}, z) & \frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x}, z) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(\overline{x}, z) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{x}, z) & \frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Así, $\det Df(\overline{a}, b) = \frac{\partial F}{\partial z}(\overline{a}, b) \neq 0$.

Lo anterior nos da las condiciones para aplicar el Teorema de la Función Inversa a la función f; esto es, existen dos abiertos W_1, $V_1 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y la función $f^{-1} : W_1 \to V_1$ tales que:

A. $(\overline{a}, b) \in V_1$;
B. f^{-1} es de clase C^1;
C. $f(V_1) = W_1$;
D. $(Df^{-1})(\overline{y}) = (Df(f^{-1}(\overline{y})))^{-1}$;
E. $\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z) \neq 0$ para todo $(\overline{x}, z) \in V_1$. (Esto se debe a la continuidad de las derivadas parciales.)

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que existen dos abiertos $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $V_1 = \widetilde{U} \times \widetilde{V}$. De otra manera, deben existir dos abiertos $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}$ tales que $(\overline{a}, b) \in \widetilde{U} \times \widetilde{V} \subseteq V_1$, en donde se puede definir $V_1' = \widetilde{U} \times \widetilde{V}$ y $W_1 = f(V_1')$.

Nótese que, como $f(\overline{x}, z) = (\overline{x}, F(\overline{x}, z))$ y si $(\overline{x}, u) \in W_1 = f(V_1)$ tenemos que $\overline{x} \in \widetilde{U}$ y existe $z \in \widetilde{V}$ tal que $(\overline{x}, u) = (\overline{x}, F(\overline{x}, z))$.

Así, $f^{-1}(\overline{x}, u) = f^{-1}(\overline{x}, F(\overline{x}, z)) = (\overline{x}, z) = (\overline{x}, h(\overline{x}, u)) \in \widetilde{U} \times \widetilde{V}$ para alguna función $h : W_1 \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}$ definida bajo el proceso anterior; es decir, $u = F(\overline{x}, z) \longleftrightarrow h(\overline{x}, u) = z$, esto significa, que u está determinada en función de z y viceversa. (Véase Figura 3.3)

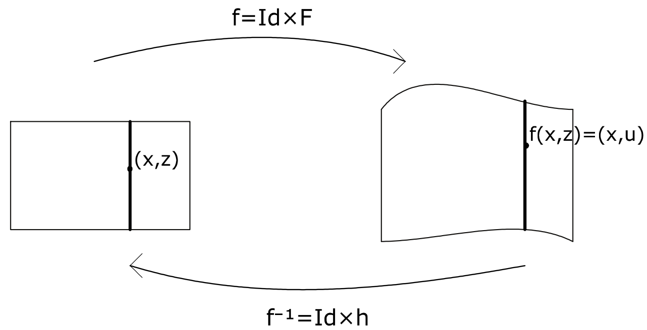

Figura 3.3: Figura 3.3

Además como f^{-1} es de clase C^1, entonces h es de clase C^1.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la proyección $\pi(\overline{x}, z) = z$. Así,

$F(\overline{x}, z) = (\pi \circ f)(\overline{x}, z)$; es decir, $F = \pi \circ f$ y $h(\overline{x}, u) = \pi \circ f^{-1}(\overline{x}, u)$; esto es, $h = \pi \circ f^{-1}$.

Observemos que como $(\overline{a}, b) \in \widetilde{U} \times \widetilde{V}$ y $F(\overline{a}, b) = 0$, entonces $f(\overline{a}, b) = (\overline{a}, 0) \in W_1$.

Además, para todo $(\overline{x}, u) \in W_1$, $h(\overline{x}, u) \in \widetilde{V}$.

Así $F(\overline{x}, h(\overline{x}, u)) = (F \circ f^{-1})(\overline{x}, u) = (\pi \circ f)(f^{-1}(\overline{x}, u)) = \pi(\overline{x}, u) = u$ para todo $x \in \widetilde{U}$.

De modo que si $u = 0$ entonces $F(\overline{x}, h(\overline{x}, 0)) = 0$ para todo $x \in \widetilde{U}$.

De lo anterior, g cumple 1.

Por lo que existe $W^* \subseteq \widetilde{U}$ un abierto en $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{a} \in W^*$ y $W^* \times \{0\} \subseteq W_1$. (Véase Figura 3.4)

Sea $g : W^* \to \widetilde{V} \subseteq \mathbb{R}$ la función dada por $g(\overline{x}) = h(\overline{x}, 0)$, entonces g está bien definida y es de clase C^1. De aquí que g cumple 3.

Como $F(\overline{a}, b) = 0$, entonces $f(\overline{a}, b) = (\overline{a}, 0)$, y $(\overline{a}, b) = f^{-1}(\overline{a}, 0) = (\overline{a}, h(\overline{a}, 0)) = (\overline{a}, g(\overline{a}))$.

Por lo tanto, $g(\overline{a}) = b$. Así, g cumple 2.

Ahora verifiquemos que se cumple 4.

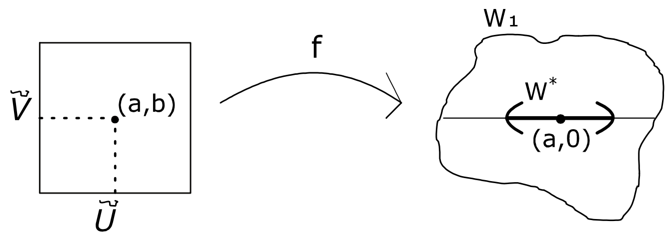

Figura 3.4: Figura 3.4

Definamos $\gamma : W^* \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ una función dada por $\gamma(\overline{x}) = (\overline{x}, g(\overline{x})) \subseteq W^* \times \widetilde{V}$. Sea $\widetilde{F} = F \circ \gamma : W^* \to \mathbb{R}$, entonces $\widetilde{F}(\overline{x}) = F(\overline{x}, g(\overline{x})) = 0$ para todo $\overline{x} \in W^*$.

De esta forma, para todo $\overline{x} \in W^*$,

$$\overline{0} = \overline{\nabla}\widetilde{F}(\overline{x}) = DF(\gamma(\overline{x})) \cdot D\gamma(\overline{x}) = \nabla F(\gamma(\overline{x})) \cdot D\gamma(\overline{x}).$$

Notemos que como $\gamma(\overline{x}) = (\overline{x}, g(\overline{x})) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, g(\overline{x}))$, se tiene que

$$D\gamma(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(\overline{x}) \end{pmatrix}$$

así,

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \nabla\widetilde{F}(\overline{x}) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\gamma(\overline{x})), \frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(\overline{x}))\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(\overline{x}) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma(\overline{x})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(\overline{x}))\frac{\partial g}{\partial x_1}(\overline{x}), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\gamma(\overline{x})) + \frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(\overline{x}))\frac{\partial g}{\partial x_n}(\overline{x})\right) \\
&= \frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, g(\overline{x}))\nabla g(\overline{x}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{x}, g(\overline{x}))\right)
\end{aligned}$$

entonces,

$$\nabla g(\overline{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, g(\overline{x}))}(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{x}, g(\overline{x})))$$

Por lo tanto, se cumple 4. ■

Para esta parte, si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ entonces, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y por cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$,

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = f(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\overline{x}}, \underbrace{y_1, \ldots, y_m}_{\overline{y}}) = (f_1(\overline{x}, \overline{y}), \ldots, f_m(\overline{x}, \overline{y}))$$

Teorema 3.4 *(Versión general del Teorema de la Función Implícita).*

Sean $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1, $(\overline{a}, \overline{b}) \in U$ con $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{b} \in \mathbb{R}^m$ tales que $f(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{0} \in \mathbb{R}^m$.

Sea M la matriz: $M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\overline{a}, \overline{b}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\overline{a}, \overline{b}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\overline{a}, \overline{b}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}(\overline{a}, \overline{b}) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\overline{a}, \overline{b}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\overline{a}, \overline{b}) \end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$.

Si $\det M \neq 0$, entonces existen dos abiertos $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ y una única función $g : A \to B$ de clase C^1 tales que:

1. *$\overline{a} \in A$, $\overline{b} \in B$, $A \times B \subseteq U$;*
2. *$g(\overline{a}) = \overline{b}$;*
3. *g es de clase C^1; $(g = (g_1, \ldots, g_m))$*
4. *Para todo $\overline{x} \in A$, $f(\overline{x}, g(\overline{x})) = 0$;*
5. *Dg se puede obtener por derivación implícita.*

Demostración: Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dada por: $F(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, f(\overline{x}, \overline{y})) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, f_1(\overline{x}, \overline{y}), f_2(\overline{x}, \overline{y}), \ldots, f_m(\overline{x}, \overline{y}))$.

Notemos que F es de clase C^1 y

$$
\begin{aligned}
DF(\overline{a},\overline{b}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & Df(\overline{a},\overline{b}) & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} & & & & \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)} & \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} & & & & M & \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

De esta manera, $\det DF(\overline{a},\overline{b}) = \det M \neq 0$.

Por el Teorema de la Función Inversa, existen dos abiertos $V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tales que $F|_V : V \to W$ es biyectiva, $F^{-1} : W \to V$ es de clase C^1 y $DF^{-1}(\overline{z}) = (DF(F^{-1}(\overline{z})))^{-1}$ para todo $\overline{z} \in V$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $V = \widetilde{A} \times B$ con $\widetilde{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$ rectángulos abiertos. Si no es así, consideramos un rectángulo abierto $R \subseteq V$ tal que $R = \widetilde{A} \times B$, con dos rectángulos abiertos $\widetilde{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^m$. Tomemos $W = F(R) = (F^{-1})^{-1}(R)$, el cual también es abierto.

Llamemos $H = F^{-1} : W \to \widetilde{A} \times B$. Como $F(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{x}, f(\overline{x},\overline{y})) = (\overline{x},\overline{u})$, entonces $H(\overline{x},\overline{u}) = (\overline{x}, k(\overline{x},\overline{u})) = (\overline{x},\overline{y})$ con $k : W \to B$ una función de clase C^1.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ la función dada por $\pi(\overline{x},\overline{y}) = \overline{y}$,
entonces, $\pi \circ F(\overline{x},\overline{y}) = \pi(\overline{x}, f(\overline{x},\overline{y})) = f(\overline{x},\overline{y})$,
además $f(\overline{x}, k(\overline{x},\overline{u})) = (f \circ H)(\overline{x},\overline{u}) = (\pi \circ F)(H(\overline{x},\overline{u})) = (\pi \circ F \circ F^{-1})(\overline{x},\overline{u}) = \pi(\overline{x},\overline{u}) = \overline{u}$.

$$\text{Así, } f(\overline{x}, k(\overline{x},\overline{0})) = 0 \text{ para todo } \overline{x} \in \widetilde{A} \text{ con } (\overline{x},\overline{0}) \in W \tag{3.1}$$

Como $(\overline{a},\overline{0}) = F(\overline{a},\overline{b}) \in W$ y W es abierto, existe $A \subseteq \widetilde{A}$ abierto tal que $A \times \{\overline{0}\} \subseteq W$. (Véase Figura 3.5)

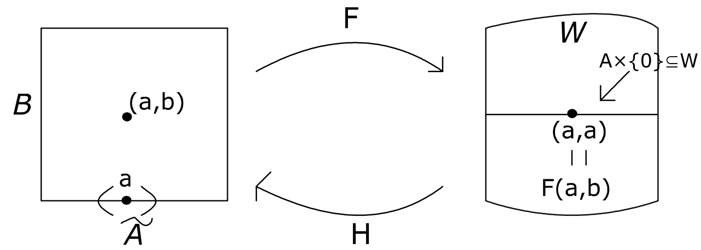

Figura 3.5: Figura 3.5

De esta manera, para todo $\overline{x} \in A$, $(\overline{x}, \overline{0}) \in W$.

Definamos una función $g : A \to B$ por $g(\overline{x}) = k(\overline{x}, \overline{0})$. Entonces g está bien definida.

Notemos además que $F(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, f(\overline{a}, \overline{b})) = (\overline{a}, \overline{0})$, por lo que $(\overline{a}, \overline{b}) = F^{-1}(F(\overline{a}, \overline{b})) = H(\overline{a}, \overline{0}) = (\overline{a}, k(\overline{a}, \overline{0})) = (\overline{a}, g(\overline{a}))$.

Por lo tanto $\overline{b} = g(\overline{a})$.

Además, por 3.1 tenemos que $f(\overline{x}, g(\overline{x})) = f(\overline{x}, k(\overline{x}, 0)) = 0$. De lo anterior g es la función buscada.

La unicidad de g se sigue del hecho de que F y H son biyectivas, ya que si existe otra función $\widetilde{g} : A \to B$ cumpliendo que $f(\overline{x}, \widetilde{g}(\overline{x})) = 0$ para todo $\overline{x} \in A$, entonces

$$\begin{aligned} F(\overline{x}, \widetilde{g}(\overline{x})) &= (\overline{x}, f(\overline{x}, \widetilde{g}(\overline{x}))) = (\overline{x}, \overline{0}) \\ &\text{y} \\ F(\overline{x}, g(\overline{x})) &= (\overline{x}, f(\overline{x}, g(\overline{x}))) = (\overline{x}, 0). \end{aligned}$$

Como F es biyectiva, entonces $(\overline{x}, g(\overline{x})) = (\overline{x}, \widetilde{g}(\overline{x}))$, de donde $g(\overline{x}) = \widetilde{g}(\overline{x})$. Por lo tanto g es única.

Sólo resta calcular la derivada de la función g.

Notemos que como $f(\overline{x}, g(\overline{x})) = \overline{0}$ para todo $\overline{x} \in A$, se tiene que
$f(\overline{x}, g(\overline{x})) = (f_1(\overline{x}, g(\overline{x})), f_2(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, f_m(\overline{x}, g(\overline{x}))) = (0, 0, \ldots, 0)$.
Así $f_i(\overline{x}, g(\overline{x})) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $\varphi_i : A \to \mathbb{R}$ una función dada por $\varphi_i(\overline{x}) = f_i(\overline{x}, g(\overline{x}))$. Como φ_i es constante es diferenciable y entonces $\nabla\varphi_i(\overline{x}) = \overline{0}$ para todo $x \in A$.

De esta manera, $0 = \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(\overline{x})$ para todo $\overline{x} \in A$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, y para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $\gamma(\overline{x}) = (\overline{x}, g(\overline{x}))$, entonces $\varphi_i(\overline{x}) = f_i \circ \gamma(\overline{x})$, así $\nabla\varphi_i(\overline{x}) = \nabla f_i(\overline{x}, g(\overline{x})) \circ D\gamma(\overline{x})$.

Notemos además que como $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dado por $g(\overline{x}) = (g_1(\overline{x}), \ldots, g_m(\overline{x}))$, entonces $\gamma(\overline{x}) = (x_1, \ldots, x_n, g_1(\overline{x}), \ldots, g_m(\overline{x}))$, de donde

$$D\gamma(\overline{x}) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \\ \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\overline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\overline{x}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\overline{x}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\overline{x}) \end{pmatrix} = M.$$

Por otro lado,

$$\nabla f_i(\overline{x}, g(\overline{x})) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}, g(\overline{x})), \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(\overline{x}, g(\overline{x})) \right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \overline{0} &= (0, 0, \ldots, 0) = \nabla\varphi_i(\overline{x}) = \nabla f_i(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot D\gamma(\overline{x}) \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}, g(\overline{x})), \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(\overline{x}, g(\overline{x})), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial y_m}(\overline{x}, g(\overline{x})) \right) M \\ &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}, g(\overline{x})) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(\overline{x}), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}, g(\overline{x})) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(\overline{x}) \right) \end{aligned}$$

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{x}, g(\overline{x})) + \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \tfrac{\partial g_j}{\partial x_1}(\overline{x}) = 0 \\ \vdots \\ \tfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{x}, g(\overline{x})) + \sum_{j=1}^{m} \tfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \tfrac{\partial g_j}{\partial x_n}(\overline{x}) = 0 \end{gathered}$$

o equivalentemente,

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\overline{x}, g(\overline{x})) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\overline{x}).(E_{ik}) \tag{3.2}$$

para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$

Entonces si queremos encontrar $\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\overline{x}), \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial x_k}(\overline{x})$, debemos resolver el sistema formado por $(E_{1k}), \cdots, (E_{mk})$:

$$\left(\begin{array}{cc} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\overline{x}) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\overline{x}, g(\overline{x})) & (E_{1k}) \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_m}{\partial y_j}(\overline{x}, g(\overline{x})) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(\overline{x}) = -\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\overline{x}, g(\overline{x})) & (E_{mk}) \end{array} \right).$$

Observemos que el determinante del sistema está dado por el det $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}(\overline{x}, g(\overline{x}))$, el cual es distinto de cero.

Por lo tanto, el sistema tiene solución. ■

Capítulo 4

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA EN ESPACIOS DE BANACH

En la vastedad de la teoría matemática, los espacios de Banach destacan como estructuras fundamentales donde la convergencia y la completitud se entrelazan de manera elegante. En este capítulo, exploramos el Teorema de la Función Implícita en el contexto de estos espacios, desentrañando las sutilezas y aplicaciones que surgen cuando se abordan ecuaciones implícitas en este marco analítico.

El Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach representa un hito conceptual que se erige sobre la obra de pensadores como Banach y Riesz. Nos sumergiremos en la topología de Banach, examinando las condiciones bajo las cuales una ecuación puede ser implicitamente definida por una función en estos espacios completos y normados.

A lo largo de este capítulo, destacaremos la importancia de las propiedades de continuidad y diferenciabilidad, esenciales para el desarrollo de este teorema en el contexto de los espacios de Banach. Exploraremos las conexiones intrínsecas entre la linealidad y la existencia de soluciones, así como las implicaciones de la inversibilidad local de la función en estudio. Este capítulo aspira a proporcionar una visión precisa de las condiciones que permiten la aplicación del Teorema de la Función Implícita en espacios de Banach.

Explícitamente, de manera más formal, si $f : \Omega \subseteq V \times W \to B$ es una función entre espacios de Banach tal que si $c \in B$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ son de tal forma que $f(x_0, y_0) = c$, podemos encontrar una función $x \to y = g(x)$ de manera local que satisfaga la ecuación

$$f(x, g(x)) = c \tag{4.1}$$

(Véase Figura 4.1)

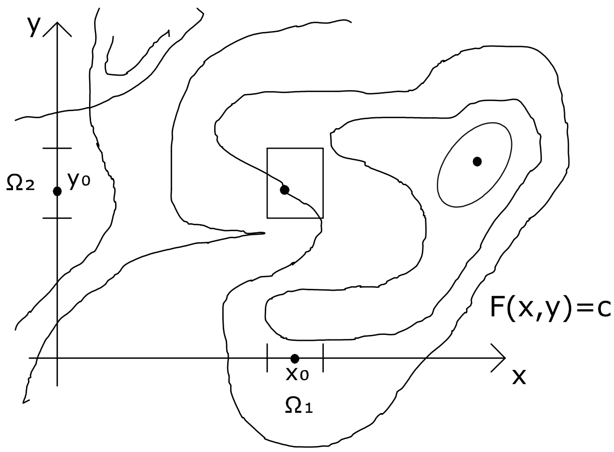

Figura 4.1: T. F. Implícita en espacios de Banach

Definición 4.1 *Sean V, W espacios normados con normas $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ respectivamente. Un operador lineal $L : V \to W$ es llamado **acotado** si existe $c \geq 0$ tal que*

$$\|L(x)\|_W \leq c\,\|x\|_V \text{ para toda } x \in V \tag{4.2}$$

Bajo la definición anterior, es fácil probar que se cumple el teorema siguiente.

Teorema 4.2 *Un operador lineal entre espacios vectoriales normados es continuo precisamente cuando este es acotado. En particular, cada función lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua. [7, Teorema 7.18, p.81].*

Definición 4.3 *Sean V y W espacios vectoriales normados. Denotamos el **conjunto de funciones lineales continuas** de V en W por $B(V, W)$.*

La función $\|\cdot\| : B(V, W) \to \mathbb{R}$ definida como $\|L\| = \sup\{\|L(x)\|_W : \|x\|_V = 1\}$ es una **norma** en $B(V, W)$. Notemos primero que el supremo existe, debido al Teorema 4.2 por lo que este número está bien determinado y además satisface las siguientes condiciones:

1. $\|L\| \geq 0$ para toda $L \in B(V,W)$.
2. $\|L\| = 0$ si y sólo si $L = 0$.
3. $\|\alpha L\| = |\alpha| \, \|L\|$ para todo α en el campo y para todo $L \in B(V,W)$.
4. $\|L+T\| \leq \|L\| + \|T\|$ para toda L, $T \in B(V,W)$.

Notémos que por linealidad, la norma se puede calcular con las siguientes equivalencias:

$$\|L\| = \sup \{\|L(x)\|_W : \|x\|_V \leq 1\} = \sup \left\{ \frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} : x \neq 0 \right\}.$$

Teorema 4.4 *Sean W un espacio de Banach y V un espacio vectorial normado. Entonces $B(V,W)$ es también un espacio de Banach, con la norma definida anteriormente. [7, Teorema 7.21, p.83].*

Teorema 4.5 *Sea $L_0 : V \to W$ una función lineal continua y biyectiva entre espacios de Banach, con inversa continua L_0^{-1}. Si $L \in B(V,W)$ satisface que $\|L - L_0\| < \left\|L_0^{-1}\right\|^{-1}$ entonces L es también biyectiva con inversa continua. [7, Teorema 7.22, p.83].*

Demostración: Para la prueba notemos primero que $L = L_0(Id - L_0^{-1}(L_0 - L))$. Probaremos que la inversa de L está dada por

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} (L_0^{-1}(L_0 - L))^i \right) L_0^{-1},$$

si podemos probar la convergencia de la serie. Para ello mostraremos que esta serie satisface la propiedad de Cauchy.

Veamos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=m}^{n} (L_0^{-1}(L_0 - L))^i \right\| &\leq \sum_{i=m}^{n} \left\| (L_0^{-1}(L_0 - L))^i \right\| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n} (\left\|L_0^{-1}\right\| \|L_0 - L\|)^i \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $\left\|L_0^{-1}\right\| \|L_0 - L\| < 1$, entonces la serie geométrica dada en 4.3 es convergente como serie de números reales y satisface la propiedad de Cauchy, así la serie

$\sum\limits_{i=m}^{n}(L_0^{-1}(L_0-L))^i$ satisface la propiedad de Cauchy, y como el espacio es completo esta converge a un operador lineal con norma finita.

Como se mostrará, este operador es el inverso del operador lineal L, y por el Teorema 4.2 se tiene su continuidad.

En efecto, sea $A=\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0-L))^i\right)L_0^{-1}$.

Demostraremos que $(A)(L)=Id$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\left(\left(\sum_{i=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0-L))^i\right)L_0^{-1}\right)L &= \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0-L))^i\right)L_0^{-1}\right)\big(L_0(Id-L_0^{-1}(L_0-L))\big)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0-L))^i\right)(Id-L_0^{-1}(L_0-L))\\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0-L))^i\right)-\left(\sum_{i=1}^{\infty}(L_0^{-1}(L_0-L))^i\right)=Id
\end{aligned}$$

Por lo que A es la inversa de L. ■

Teorema 4.6 *(TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH).*

Sea A un subespacio cerrado de un espacio de Banach B y sea $T:A\to A$ una función contractiva, es decir,

$$\|Ty_1-Ty_2\|\leq q\,\|y_1-y_2\|$$

para todo $y_1,y_2\in A$ con $q<1$ fijo. Entonces existe un único $y\in A$ tal que $Ty=y$.

Demostración: Sea $y_0\in A$ elegido arbitrariamente. Para probar que T tiene un punto fijo, definamos inductivamente una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: $y_n=Ty_{n-1}$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Vamos a probar que esta sucesión converge y el punto de convergencia será de hecho el punto fijo buscado.

Podemos observar primero que

$$y_n=\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1})+y_0=\sum_{k=1}^{n}(T^{k-1}y_1-T^{k-1}y_0)+y_0 \tag{4.4}$$

Para probar que y_n converge, basta probar que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(T^{k-1}y_1 - T^{k-1}y_0)$ converge. Para ello, probaremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(T^{k-1}y_1 - T^{k-1}y_0)$ converge absolutamente.

Notemos que como T es contractiva, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|T^{k-1}y_1 - T^{k-1}y_0\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \|y_1 - y_0\| \leq \frac{1}{1-q} \|y_1 - y_0\| \tag{4.5}$$

Por lo anterior la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada, por lo tanto la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|T^{k-1}y_1 - T^{k-1}y_0\right\|$ es convergente. Por lo que también la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(T^{k-1}y_1 - T^{k-1}y_0)$ converge. De lo anterior, la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento y y dado que A es cerrado, $y \in A$.

Debido a que T es contractiva, es continua, de donde se cumple que

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Ty_{n-1} = T(\lim_{n\to\infty} y_{n-1}) = Ty$$

es decir, y es un punto fijo de T.

Para probar la unicidad sean y_1,y_2 dos soluciones de $y = Ty$ entonces
$\|y_1 - y_2\| = \|Ty_1 - Ty_2\| \leq q\|y_1 - y_2\|$ y como $q < 1$, tenemos que $y_1 = y_2$. ■

Teorema 4.7 *Sean B un espacio de Banach, B_0 un subconjunto cerrado y acotado de B y $\Gamma = \{T_x : B_0 \to B_0 : x \in B_0$ y T_x es contractiva$\}$ con $0 \leq q < 1$ fijo que no depende de x tal que si $\sigma : A \longrightarrow \Gamma$ está definida por $\sigma(x) = T_x$, y es continua, donde A es un abierto en un espacio de Banach, entonces la función $\varphi : B_0 \longrightarrow \Gamma$ dada por $\varphi(x) = y_x$ es continua (donde y_x es el punto fijo de T_x).*

Demostración: Sean $y_0 \in B_0$ elegido arbitrariamente y para cada $x \in A$ consideremos el T_x correspondiente. De la misma forma que en el Teorema del punto fijo, podemos definir recursivamente una sucesión como sigue: $y_n^x = T_x y_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in A$. Prosiguiendo como en la primera parte de la demostración del Teorema del punto fijo, y dado que B_0 es acotado, obtenemos que:

$$y_n^x = \sum_{k=1}^{n}(y_k^x - y_{k-1}^x) + y_0 = \sum_{k=1}^{n}(T_x^{k-1}y_1^x - T_x^{k-1}y_0) + y_0$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| T_x^{k-1} y_1^x - T_x^{k-1} y_0 \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \left\| y_1^x - y_0 \right\| \leq \frac{1}{1-q} \left\| y_1^x - y_0 \right\| < \frac{1}{1-q} k \text{ para alguna } k > 0.$$

Por lo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| T_x^{k-1} y_1^x - T_x^{k-1} y_0 \right\|$ converge tanto absoluta como uniformemente. Por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_x^{k-1} y_1^x - T_x^{k-1} y_0 \right)$ converge a una función continua. De todo lo anterior, podemos concluir que la asignación $\varphi(x) = y_x$ es continua. ■

Definición 4.8 *Sean V, W espacios de Banach, $\Omega \subset V$ abierto, $f : \Omega \to W$ una función y $x_0 \in \Omega$. Decimos que la función f es **diferenciable** en x_0 si hay una función lineal continua $L : V \to W$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - L(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0.$$

*La función L es llamada la **derivada** de f en x_0 y la denotaremos por $Df(x_0)$. Se dice que f es diferenciable en Ω si es diferenciable en cada $x_0 \in \Omega$.*

Observemos que la continuidad de $Df(x_0)$ como función lineal no significa que la asignación donde a cada $x \in \Omega$ le asociamos la función lineal $Df(x)$ dependa continuamente de x.

Definición 4.9 *Sean V, W espacios de Banach, $\Omega \subset V$ abierto, $f : \Omega \to W$ una función diferenciable con derivada $Df(x)$ para $x \in \Omega$. La función f se dice que es **continuamente diferenciable** en Ω si la función que asigna a cada $x \in \Omega$ el operador $Df(x)$ es continua.*

Definición 4.10 *Sean $V_1, \ldots, V_m, W$ espacios de Banach y Ω abierto en $V = V_1 \times \ldots \times V_m$. Para $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \Omega$, se dice que una función $f : \Omega \to W$ es **parcialmente diferenciable** en a en la $j-$ésima variable ($j \in \{1, \ldots, m\}$), si la función $x_j \longmapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + x_j, a_{j+1}, \ldots, a_m)$ es diferenciable en $x_j = 0$. La derivada correspondiente se denota por $D_j f(a)$ y se llama la $j-$ ésima derivada parcial de f en a.*

Teorema 4.11 *(Teorema de la Función Implícita para espacios de Banach).*

Sean V_1, V_2 y W espacios de Banach, $\Omega \subset V_1 \times V_2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $F : \Omega \to W$ una función continuamente diferenciable en Ω.

Si $F(x_0, y_0) = c$, con $c \in W$ un vector costante y la función lineal (continua) $D_2F(x_0, y_0) : V \to W$ es invertible, con inversa igualmente continua, entonces existen vecindades abiertas Ω_1 de x_0 y Ω_2 de y_0 tales que $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$, y una función diferenciable $g : \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que

$$\begin{aligned} F(x, g(x)) &= c \text{ y} && (4.6)\\ Dg(x) &= -(D_2F(x, g(x)))^{-1} \circ D_1F(x, g(x)) \text{ para toda } x \in \Omega_1 && (4.7) \end{aligned}$$

Además, para cada $x \in \Omega_1$, $g(x)$ es la única solución de 4.7 en Ω_2.

Demostración: Sin pérdida de generalidad tomemos $c = 0$, pues de otro modo definimos una nueva función $\widetilde{F}(x, y) = F(x, y) - c$, de donde tenemos que $F(x_0, y_0) = c$. Además, veamos que $D_2F(x, y)$ y $D_2\widetilde{F}(x, y)$ tienen el mismo comportamiento, por lo cual basta con analizar el caso $F(x, y) = 0$.

Tomemos $L_0 = D_2F(x_0, y_0)$. Notemos primero que la ecuación $F(x, y) = 0$ es equivalente a $y = y - L_0^{-1}F(x, y)$.

Sea $G(x, y) = y - L_0^{-1}F(x, y)$, donde G está definida por $G : V_1 \times V_2 \longrightarrow W$, una función de igual forma continuamente diferenciable.

Ahora, por un lado tenemos que $(L_0^{-1} \circ L_0 = Id)$, y si y_1, y_2 están en V_2 tenemos que

$$\begin{aligned} G(x, y_1) - G(x, y_2) &= y_1 - L_0^{-1}F(x, y_1) - y_2 - L_0^{-1}F(x, y_2)\\ &= y_1 - y_2 - L_0^{-1}(F(x, y_1) - F(x, y_2))\\ &= Id(y_1 - y_2) - L_0^{-1}(F(x, y_1) - F(x, y_2))\\ &= (L_0^{-1} \circ L_0)(y_1 - y_2) - L_0^{-1}(F(x, y_1) - F(x, y_2))\\ &= L_0^{-1}(D_2F(x_0, y_0))(y_1 - y_2) - L_0^{-1}(F(x, y_1) - F(x, y_2))\\ G(x, y_1) - G(x, y_2) &= L_0^{-1}(D_2F(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (F(x, y_1) - F(x, y_2))). \end{aligned}$$

Vamos a demostrar que G es contractiva en la segunda variable.

Como L_0^{-1} es continua y V y W son espacios normados, entonces es acotada en una vecindad del punto (x_0, y_0); esto es, existen $k > 0$ y números reales $\delta_1 > 0$, $\eta > 0$ para los cuales se tiene que si $\|x - x_0\| \leq \delta_1$, $\|y_1 - y_0\| \leq \eta$, $\|y_2 - y_0\| \leq \eta$ (además se cumple que $\|y_1 - y_2\| \leq 2\eta$), entonces

$$\begin{aligned} & \left\| L_0^{-1} \left(D_2F(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (F(x, y_1) - F(x, y_2)) \right) \right\| \\ \leq \; & k \left\| D_2F(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (F(x, y_1) - F(x, y_2)) \right\| . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por otra parte, como F es diferenciable en (x_0, y_0) se tiene

$$\|D_2F(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (F(x, y_1) - F(x, y_2))\| \leq \frac{1}{4}k \|y_1 - y_2\| \tag{4.9}$$

De 4.8 y 4.9 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|G(x, y_1) - G(x, y_2)\| &= \left\| L_0^{-1}(D_2F(x_0, y_0)(y_1 - y_2) - (F(x, y_1) - F(x, y_2))) \right\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|y_1 - y_2\| \end{aligned} \tag{4.10}$$

Por lo tanto, de lo anterior G es contractiva en la segunda variable.

Lo siguiente es probar que $G(B_\eta^{V_2}(x_0, y_0)) \subseteq B_\eta^{V_2}(x_0, y_0)$.
Por la continuidad de G, existe un $\delta > 0$ para $\|x - x_0\| \leq \delta$ tal que

$$\|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\| \leq \frac{\eta}{2} \tag{4.11}$$

Si $\|y - y_0\| \leq \eta$, usando el hecho de que $G(x_0, y_0) = y_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \|G(x, y) - y_0\| &= \|G(x, y) - G(x_0, y_0)\| \\ &\leq \|G(x, y) - G(x, y_0)\| + \|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|y - y_0\| + \frac{\eta}{2} \\ &\leq \eta. \end{aligned}$$

De 4.10 y 4.11 se prueba que $G(B_\eta^{V_2}(x_0, y_0)) \subseteq B_\eta^{V_2}(x_0, y_0)$ para cada x con $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Por lo tanto G manda a la bola cerrada $U(y_0, \eta)$ sobre ella misma (y similarmente también con la bola abierta $B(y_0, \eta)$).

De esta forma, podemos aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach a la función $y \longmapsto G(x, y)$, y para cada x tal que $\|x - x_0\| \leq \delta$, existe por tanto un único $y = y(x)$ con $\|y - y_0\| \leq \eta$ y $y = G(x, y)$. De esta forma, $F(x, y) = 0$, y por el Teorema 4.7 y depende continuamente de x.

Sean los conjuntos $\Omega_1 := \{x : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ y $\Omega_2 := \{y : \|y - y_0\| \leq \eta\}$ y $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \Omega$ sin restricciones. Denotaremos cada y con $g(x)$, y de esta manera sólo queda demostrar la diferenciabillidad de g.

Sean $(x_1, y_1) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, donde la norma en este espacio está dada por $\|U + V\| = \|U\| + \|V\|$, y $y_1 = g(x_1)$. Como F es continuamente diferenciable en (x_1, y_1) tenemos $K = D_1F(x_1, y_1)$ y $L = D_2F(x_1, y_1)$, de donde por el Teorema de Taylor obtenemos que

$$F(x, y) = K(x - x_1) + L(y - y_1) + \varphi(x, y) \text{ para } (x, y) \in \Omega \tag{4.12}$$

Con

$$\lim_{(x,y)\to(x_1,y_1)} \frac{\|\varphi(x, y)\|}{\|(x - x_1, y - y_1)\|} = 0 \tag{4.13}$$

Debido a que F es continuamente diferenciable, podemos elegir a δ y η tan pequeños que nuestro operador L satisface las hipótesis del Teorema 4.5 y por lo tanto tenemos una inversa L^{-1} continua.

Como $F(x, g(x)) = 0$ se mantiene para $x \in \Omega_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= F(x, g(x)) = K(x - x_1) + L(g(x) - y_1) + \varphi(x, g(x)) \text{ Aplicando } L^{-1} \text{ tenemos} \\
0 &= L^{-1}(K(x - x_1) + L(g(x) - y_1) + \varphi(x, g(x))) \\
&= L^{-1}K(x - x_1) + L^{-1}L(g(x) - y_1) + L^{-1}\varphi(x, g(x)) \\
&= L^{-1}K(x - x_1) + g(x) - y_1 + L^{-1}\varphi(x, g(x)) \\
g(x) &= -L^{-1}K(x - x_1) + y_1 - L^{-1}\varphi(x, g(x)) \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Notemos que por 4.13 existen ρ_1, $\rho_2 > 0$ con la propiedad de

$$\|x - x_1\| \leq \rho_1, \ \ \|y - y_1\| \leq \rho_2$$

y

$$\|\varphi(x,y)\| \leq \frac{1}{2\left\|L^{-1}\right\|}(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|).$$

Así, obtenemos que

$$\|\varphi(x, g(x))\| \leq \frac{1}{2\left\|L^{-1}\right\|}(\|x - x_1\| + \|g(x) - g(x_1)\|) \tag{4.15}$$

Usando 4.14 y 4.15 resulta que

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(x_1)\| &= \left\|-L^{-1}K(x - x_1) + y_1 - L^{-1}\varphi(x, g(x)) - y_1\right\| \\
&= \left\|-L^{-1}K(x - x_1) - L^{-1}\varphi(x, g(x))\right\| \\
&\leq \left\|L^{-1}K\right\| \|x - x_1\| + \left\|L^{-1}\right\| \|\varphi(x, g(x))\| \\
&\leq \left\|L^{-1}K\right\| \|x - x_1\| + \frac{1}{2}\|x - x_1\| + \frac{1}{2}\|g(x) - g(x_1)\| \\
\|g(x) - g(x_1)\| &\leq 2\left\|L^{-1}K\right\| \|x - x_1\| + \|x - x_1\| \\
\|g(x) - g(x_1)\| &\leq \left(2\left\|L^{-1}K\right\| + 1\right) \|x - x_1\|
\end{aligned}$$

Por lo que tomando $c = 2\left\|L^{-1}K\right\| + 1$ tenemos que

$$\|g(x) - g(x_1)\| \leq c\,\|x - x_1\|.$$

Definiendo $\psi(x) = -L^{-1}(\varphi(x, g(x))$ se sigue de 4.14 que

$$\begin{aligned}
g(x) &= -L^{-1}K(x - x_1) + y_1 - L^{-1}\varphi(x, g(x) \\
g(x) - y_1 &= -L^{-1}K(x - x_1) - L^{-1}\varphi(x, g(x)) \\
g(x) - g(x_1) &= -L^{-1}K(x - x_1) + \psi(x)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Y ahora sólo nos resta probar que

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\psi(x)}{\|x - x_1\|} = 0 \tag{4.17}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Primero notemos que $\|\psi(x)\| \leq \|L^{-1}\| \, \|\varphi(x, g(x))\|$, esto anterior por definición de $\psi(x)$. Por 4.13 tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_1\| < \delta$ y $\|y - y_1\| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x, g(x))\| &< \varepsilon(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|) = \varepsilon \left[\|x - x_1\| + \|g(x) - g(x_1)\|\right] \\
&< \varepsilon \left[\|x - x_1\| + c \, \|x - x_1\|\right] \\
&< \varepsilon k \, \|x - x_1\|
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\|\psi(x)\| \leq \left\|L^{-1}\right\| \varepsilon k \, \|x - x_1\| = \varepsilon h \, \|x - x_1\| \text{ donde } h = k \left\|L^{-1}\right\|$$

Esto implica que g es diferenciable en x_1 con derivada

$$Dg(x_1) = -L^{-1} K = -(D_2 F(x_1, y_1))^{-1} D_1 F(x_1, y_1)$$

lo cual es equivalente a 4.7. ■

Una consecuencia directa es el siguiente Teorema.

Teorema 4.12 *(Teorema de la Función Inversa en espacios de Banach) Sean V y W espacios de Banach, Ω un abierto en V, $f : \Omega \longrightarrow W$ una función continuamente diferenciable y $y_0 \in \Omega$. Sea $Df(y_0)$ invertible y la inversa $(Df(y_0))^{-1}$ igualmente continua. Entonces existe una vecindad abierta $\Omega' \subset \Omega$ de y_0 que es mandada biyectivamente bajo la función f en una vecindad abierta Ω'' de $x_0 = f(y_0)$, y la función inversa $g = f^{-1} : \Omega'' \longrightarrow \Omega'$ es diferenciable con derivada*

$$Dg(x_0) = (Df(y_0))^{-1} \tag{4.18}$$

Demostración: Consideremos que $F(x, y) = f(y) - x$. Asumiremos que $D_2F(x_0, y_0) = Df(y_0)$ es invertible con inversa continua.

Por el Teorema de la Función Implícita existe una vecindad abierta Ω'' de x_0, y además una función diferenciable $g =: \Omega'' \longrightarrow V$ tal que $g(\Omega'') \subset \Omega_2$ para una vecindad Ω_2 de y_0. Por el hecho de que $F(x, g(x)) = 0$, entonces $f(g(x)) = x$ para $x \in \Omega''$, y $g(x_0) = y_0$.

Ahora, para la siguiente parte vamos a restringir f a $g(\Omega'')$, sin hacer cambio de notaciones.

Debido a que $f(g(x)) = x$, la función g es inyectiva en Ω''; y por lo tanto g establece una biyección de Ω'' sobre $g(\Omega'')$. Además, $g(\Omega'') = f^{-1}(\Omega'')$ es abierta, ya que f es continua.

De esta manera, establecemos en consecuencia $\Omega' = g(\Omega'')$. Así, f manda Ω' biyectivamente sobre Ω''.

Finalmente, 4.18 se sigue de 4.7 así como de la relación $f(g(x)) = x$, y de esta forma, por la regla de la cadena tenemos que

$$Df(g(x_0)) \circ Dg(x_0) = Id$$

■

Capítulo 5

ALGUNAS APLICACIONES Y CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

5.1. Multiplicadores de Lagrange

El Teorema de los Multiplicadores de Lagrange es un concepto fundamental en el campo de la optimización matemática, desarrollado por el matemático italiano Joseph-Louis Lagrange en el siglo XVIII. Este teorema proporciona un método eficaz para encontrar máximos y mínimos de funciones sujetas a restricciones.

La idea central del teorema es considerar una función objetivo (llamada función objetivo o función a optimizar) sujeta a una o más restricciones. La clave para resolver este tipo de problemas es introducir ciertos coeficientes llamados multiplicadores de Lagrange, los cuales están asociados a las restricciones. Estos multiplicadores permiten incorporar las restricciones en la función objetivo, creando una nueva función llamada "función Lagrangiana".

Matemáticamente, si tenemos una función objetivo $f(x_1, \ldots, x_n)$ que queremos optimizar sujeta a restricciones de la forma $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, entonces la función Lagrangiana asociada es:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \cdot g(x_1, \ldots, x_n).$$

Aquí, λ denota el multiplicador de Lagrange. Para encontrar los puntos críticos de la función Lagrangiana, se resuelven las derivadas parciales respecto a las variables x_i

y λ y se igualan a cero. Las soluciones de este sistema de ecuaciones nos proporcionan los valores óptimos de las variables, considerando las restricciones dadas.

El Teorema de los Multiplicadores de Lagrange es esencial en diversos campos como la economía, la física, la ingeniería y la estadística, donde la optimización con restricciones es común. Proporciona una herramienta poderosa y elegante para abordar problemas de optimización de manera sistemática.

Teorema 5.1 *(Multiplicadores de Lagrange) Sean $g_1, \ldots, g_m : U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en U. Supongamos que $S \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ está dado por:*

$S = \bigcap\limits_{i=1}^{m} g_i^{-1}(\{0\}) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k : g_i(x,y) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}\big\}$.

Sea $(x_0, y_0) \in S$ tal que $\{\nabla g_i(x_0,y_0), \ldots, \nabla g_m(x_0,y_0)\}$ es linealmente independiente.

Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y f alcanza un mínimo o máximo local en (x_0, y_0) sobre S, entonces existen $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ tales que:

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0,y_0) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(x_0,y_0).$$

Dicho de otra manera el gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$ pertenece al espacio vectorial generado por el conjunto $\{\nabla g_1(x_0,y_0), \ldots, \nabla g_m(x_0,y_0)\}$.

Demostración: Definamos $G : U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada de la forma $G(x,y) = (g_1(x,y), \ldots, g_m(x,y))$.

De esta manera,

$$DG(x,y) = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k)} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x,y) \\ \nabla g_2(x,y) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x,y) \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$DG(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(x_0,y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_k}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

Debido a que el conjunto $\{\nabla g_i(x_0,y_0)\}_{i=1}^{m}$ es linealmente independiente, la matriz $DG(x_0,y_0)$ tiene rango m; esto es $rg(DG(x_0,y_0)) = m$, de aquí existen m columnas linealmente independientes.

Ahora bien, sin pérdida de generalidad, supongamos que dichas columnas son las primeras m, por lo cual $\frac{\partial g_1,\ldots,g_m}{\partial x_1,\ldots,x_m}(x_0,y_0)$ tiene determinante distinto de cero.

Tenemos ahora condiciones para poder aplicar el Teorema de la Función Implícita a la función G.

Por el Teorema de la Función Implícita existen $A \subseteq \mathbb{R}^k$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos y una función $h : A \to B$ tales que:

(i) $h = (h_1, \ldots, h_m)$ es de clase C^1;

(ii) $h(y_0) = x_0$;

(iii) $G(h(y), y) = 0$ para toda $y \in A$, es decir, $(h(y), y) \in S$ para toda $y \in A$.

Para seguir con la demostración, definamos una función $H : A \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ dada por $H(y) = (h(y), y)$, de esta forma H es también una función de clase C^1.

Notemos que por (iii), para toda $y \in A$, tenemos que $G(H(y)) = G(h(y), y) = \overline{0}$, así $H(y) \in S$.

Por otro lado, $g_i(H(y)) = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, por lo que $g_i \circ H : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$, y además tenemos que $\nabla(g_i \circ H)(y) = \overline{0}$ para toda $y \in A$.

De esta manera, por la regla de la cadena tenemos que

$$\nabla(g_i \circ H)(y) = \nabla g_i(H(y)) \cdot DH(y) \tag{5.1}$$

Como $H(y) = (h(y), y) = (h_1(y), \ldots, h_m(y), y_1, \ldots, y_k)$, entonces

$$DH(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_k}(y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1}(y) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial y_k}(y) \\ 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, sea $w_j = (\frac{\partial h_1}{\partial y_j}(y_0) \cdots \frac{\partial h_m}{\partial y_j}(y_0), e_j) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, en otras palabras, la j-ésima columna de $DH(y_0)$.

Notemos que el conjunto $B = \{w_1, \ldots, w_k\}$ es linealmente independiente pues los últimos k renglones de $DH(y_0)$ son linealmente independientes. De esta forma, sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ de dimensión k generado por el conjunto B.

De 5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \nabla(g_i \circ H)(y_0) = \nabla g_i(H(y_0)) \cdot DH(y_0)\\ &= (\nabla g_i(H(y_0)) \cdot w_1, \ldots, \nabla g_i(H(y_0)) \cdot w_k) \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, m\}\end{aligned}$$

Así, $\nabla g_i(H(y_0)) \cdot w_j = 0$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como lo anterior podemos verlo como un producto interno, entonces tenemos que, $\nabla g_i(H(y_0)) \perp w_j$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Dado que $H(y_0) = (h(y_0), y_0) = (x_0, y_0)$, tenemos que $\nabla g_i(x_0, y_0) \perp w_j$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$.

De donde se obtiene que $\nabla g_i(x_0, y_0) \in W^\perp$ para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ (el conjunto $W^\perp$ representa el complemento ortogonal de W).

Ya que $\dim W = k$, tenemos que $\dim W^\perp = (m + k) - k = m$. Además, dado que el conjunto $\{\nabla g_i(x_0, y_0)\}_{i=1}^m$ es linealmente independiente y se queda contenido en $W^\perp$, se tiene que el conjunto $\{\nabla g_i(x_0, y_0)\}_{i=1}^m$ es base de $W^\perp$.

Debido a que f tiene un extremo local en $(x_0, y_0) = H(y_0)$, obtenemos que $f \circ H$ tiene un extremo local en y_0, así $\nabla(f \circ H)(y_0) = \overline{0}$.

Lo anterior lo podemos escribir como

$$\overline{0} = \nabla f(H(y_0)) \cdot DH(y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot DH(y_0) = (\nabla f(x_0, y_0) \cdot w_1, \ldots, \nabla f(x_0, y_0) \cdot w_k)$$

De esta manera, $\nabla f(x_0, y_0) \cdot w_j = 0$ para toda $j \in \{1, \ldots, k\}$, por lo que $\nabla f(x_0, y_0) \in W^\perp$. Por lo tanto, existen $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ tales que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g(x_0, y_0)$$

■

5.2. Bifurcación

El concepto de punto de bifurcación surge principalmente en el campo de la teoría de sistemas dinámicos y la teoría del caos. Se refiere a un momento crítico en el cual el comportamiento de un sistema cambia de manera significativa debido a pequeñas variaciones en los parámetros del sistema.

Matematicaménte, podemos escribir lo siguiente: Sean X, Y espacios de Banach con $x \in X$ y $\lambda \in Y$. El concepto de punto de bifurcación surge con el estudio de la ecuación

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{5.2}$$

La Teoría de Bifurcación estudia los cambios que ocurren en el conjunto de soluciones de 5.2 ante la variación del parámetro λ.

En un punto de bifurcación, un sistema dinámico puede pasar de un estado de equilibrio estable a otro, o puede experimentar cambios cualitativos en su comportamiento, como la aparición de oscilaciones periódicas o el caos. Estos cambios pueden ocurrir gradualmente a medida que los parámetros del sistema se ajustan, pero en un punto de bifurcación, incluso pequeñas variaciones pueden tener efectos dramáticos en el comportamiento futuro del sistema.

El concepto de punto de bifurcación es fundamental en la comprensión de fenómenos complejos en una amplia gama de disciplinas, incluyendo la física, la biología, la economía y la ecología, entre otras. Ayuda a explicar cómo pequeños cambios pueden desencadenar grandes transformaciones en sistemas dinámicos, lo que tiene implicaciones importantes para la predicción y el control de estos sistemas en la práctica.

Definición 5.2 *(Punto de bifurcación) Sean X, Y espacios de Banach y sea Λ un espacio topológico. Supongamos que $F : X \times \Lambda \longrightarrow Y$ es una función continua. Para $\lambda \in \Lambda$ sea $S_\lambda = \{x \in X : F(x, \lambda) = 0\}$ el conjunto solución de la ecuación $F(x, \lambda) = 0$, donde λ es el parámetro. Supongamos que $0 \in S_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces $(0, \lambda_0)$ es un punto de bifurcación, si para cada vecindad U de $(0, \lambda_0)$ existe $(x, \lambda) \in U$ con $x \in S_\lambda - \{0\}$.*

De la definición anterior tenemos que $(0, \lambda)$ es un punto de bifurcación si y sólo si existe una sucesión $\{(x_n, \lambda_n)\}$ tal que $F(x_n, \lambda_n) = 0$, cuando $x_n \longrightarrow 0$, $\lambda_n \longrightarrow \lambda_0$.

Ejemplo 5.3 *Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, \lambda) = x - \lambda x + x^3$, entonces $(0, \lambda)$ es solución de $F(x, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Si (x, λ) es solución, para $x \neq 0$ entonces $x^2 = \lambda - 1$.

Luego, para $\lambda \leq 1$ no existen más que soluciones triviales. Para $\lambda > 1$ el conjunto solución tiene como punto límite a $(0, 1)$. Así, $(0, 1)$ es punto de bifurcación y además $F_x(0, 1) = 0$.

Ejemplo 5.4 *Sean $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x, \lambda) = x - \lambda x^2$. Si $F(x, \lambda) = 0$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el punto $(0, \lambda)$ no es un punto de bifurcación.*

Puesto que el conjunto solución es $x - \lambda x^2 = 0$, que son las dos ramas de la hipérbola $x = \frac{1}{\lambda}$ en la cual $(0, \lambda)$ no es un punto límite. Nótese que $F_x(0, \lambda) = 1$.

La relación entre el Teorema de la Función Implícita y los puntos de bifurcación radica en el análisis de las soluciones de las ecuaciones diferenciales que modelan sistemas dinámicos. En muchos casos, las soluciones de estas ecuaciones no pueden expresarse explícitamente en términos de funciones elementales, lo que hace difícil entender cómo cambian las soluciones con respecto a los parámetros del sistema. Sin embargo, mediante el Teorema de la Función Implícita, podemos analizar la existencia y continuidad de soluciones alrededor de los puntos críticos, lo que nos permite identificar puntos de bifurcación donde se producen cambios cualitativos en el comportamiento del sistema.

En resumen, el Teorema de la Función Implícita proporciona una herramienta matemática importante para analizar la continuidad y la diferenciabilidad de las soluciones de ecuaciones que modelan sistemas dinámicos, lo que a su vez nos ayuda a identificar y comprender puntos de bifurcación en estos sistemas.

A continuación mencionaremos de manera general algunas aplicaciones específicas:

1. Geometría y Curvas Implícitas: El teorema se utiliza para estudiar curvas implícitas en el plano o en el espacio. Puede ayudar a determinar propiedades geométricas de curvas descritas por ecuaciones implícitas.

2. Ecuaciones Paramétricas: En algunos casos, las ecuaciones paramétricas pueden convertirse en ecuaciones implícitas mediante el Teorema de la Función Implícita, simplificando el análisis de las propiedades de la curva.

3. Problemas de Existencia y Unicidad: En análisis y ecuaciones diferenciales, el teorema se utiliza para probar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones que no se pueden resolver explícitamente.

4. Optimización y Restricciones: En problemas de optimización con restricciones, las ecuaciones de restricción pueden estar implícitas. El Teorema de la Función Implícita ayuda a entender las condiciones bajo las cuales se pueden resolver implícitamente estas ecuaciones para ciertas variables.

5. Economía y Teoría de Juegos: En modelos económicos y de teoría de juegos, el teorema se utiliza para analizar relaciones entre variables que pueden estar relacionadas de manera no explícita.

Ejemplo 5.5 *(Se suele tener un modelo que relaciona los valores de dos variables).*

El número (E) *de ingenieros de sofware que buscan trabajo y el salario mínimo* (S) *ofrecidos están relacionados. Cuando el sector está en auge, las empresas necesitan desarrolladores y pagan más para atraerlos. Cuando las escuelas gradúan más ingenieros de los que necesita la industria, los salarios iniciales son más bajos.*

Un economista podría hacer dos tipos de preguntas:

1. ¿Cómo puede un aumento de E *afectar a* S*?*

2. ¿Cómo puede un aumento de S *afectar a* E*?*

Se puede responder a estas preguntas utilizando una gráfica con E en un eje y S en el otro. Tendríamos una fórmula que modele a S *como una función* $f(E)$*, entonces la derivada de* f *respecto a* E *da solución a la pregunta número 1. Para la pregunta número 2, necesitaríamos la derivada implícita de* E *con respecto de* S*.*

Ejemplo 5.6 *Planteamos un modelo macroeconómico estándar formado por las siguientes dos ecuaciones:*

$$Y = C + I;\, C = f(Y)$$

Donde Y *define a la renta de un país como la suma entre el consumo privado* C *(compras de bienes y servicios en los hogares)y la inversión de las empresas* I*. Así mismo, se establece en este modelo que el consumo de los hogares* C *depende de la renta de la que desponen estos lugares* (Y)*.*

Este modelo también nos permite definir la propensión marginal a consumir, que se define como el incremento que se produce en el consumo cuando se incrementa la renta en una unidad. En este modelo la propensión marginal al consumo esta definida por $Df(Y)$*.*

Supongamos que $C = f(Y) = 95{,}05 + 0{,}712Y$*.*

Es de interés económico preguntarnos ¿cuánto aumenta la renta de un país cuando se incrementa la inversión de las empresas?. Para responder a esta pregunta, podemos hacer lo siguiente:

Escribiendo Y *en términos de* I*, tenemos* $Y = 95{,}05 + 0{,}712 + I$*.*

Despejando Y *llegaríamos a*

$$\begin{aligned} Y - 0{,}712Y &= 95{,}05 + I \\ (1 - 0{,}712)Y &= 95{,}05 + I \\ Y &= \frac{95{,}05 + I}{1 - 0{,}712} \\ &\approxeq 3{,}47I + 330{,}03 \end{aligned}$$

Por otro lado, hay una manera más fácil de contestar esta pregunta, y es aquí en donde entra la derivación implícita.

Teniendo en cuenta nuestro modelo macroeconómico estándar anterior, podemos escribir la siguiente función que depende de la renta y de la inversión:

$$f(Y, I) = (1 - 0{,}712)Y - 95{,}05 - I = 0$$

Y ahora podemos utilizar el Teorema de la Función Implícita, de tal forma que

$$\frac{dY}{dI} = -\frac{f_I(Y, I)}{f_Y(Y, I)} = -\frac{(-1)}{1 - 0{,}712} \approxeq 3{,}47$$

Por lo tanto, la respuesta a nuestra pregunta es que la renta de un país aumenta en un $\approxeq 3{,}47$.

6. Estudio de Superficies y Variedades: En el contexto de la geometría diferencial, el Teorema de la Función Implícita se aplica al estudio de superficies y variedades, ayudando a entender la relación entre coordenadas locales y globales.

7. Ecuaciones No Lineales en Física: En la modelización matemática de fenómenos físicos, especialmente en sistemas no lineales, el teorema se utiliza para analizar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones que pueden no tener soluciones explícitas.

Bibliografía

[1] J. Dugundji, *Topology,* Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[2] C. Duarte, *Algunas aplicaciones del Teorema de la Función Implícita a la Teoría de Bifurcación,* Facultad de Ciencias y Educación Bogotá, 2015.

[3] D. Hinrichsen, J.L.Fernández, A. Fraguela y A. Álvarez, *Topología General,* Aportaciones Matemáticas, Núm.22, 2003.

[4] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Lineal,* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1973.

[5] I.L. Iribarren, *Topología de Espacios Métricos,* Limusa, 1987.

[6] N.Jonard, *Notas de clase,* Cálculo 3, Facultad de Ciencias UNAM, 2022. http://sites.google.com/ciencias.unam.mx/calculo-3/inicio

[7] J. Jost, *Postmodern Analysis,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[8] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover Publications; Edición Dover Books on Mathematic, 1999.

[9] S. Krantz, *The Implicit Function Theorem*, Springer, New York, 1977.

[10] J. E. Marsden y A.J. Tromba, *Cálculo Vectorial,* Quinta Edición, Pearson, Addison Wesley, 2004.

[11] A. Rivera, *Bifurcación de soluciones periódicas en el problema de Sitnikov*, Facultad de Ciencias Granada, 2012.

[12] W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático,* McGraw-Hill 3a. edición, México, 1980.

[13] C. Swartz, *Measure, Integration And Function Spaces,* World Scientific, 1994.