



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL  
ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

“DINAMICA DE ESTRUCTURAS OSCILANTES EN LA ECUACION NO  
LINEAL DE CAMPO DE KLEIN-GORDON”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

FISICO

P R E S E N T A:  
LEONARDO ROJAS LOPEZ

ASESOR DE TESIS:

DR. MAXIMO AUGUSTO AGÜERO GRANADOS

CO-ASESORA DE TESIS

DRA. TATYANA BELYAEVA LEONIDOVNA



TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

AGOSTO 2023

# INDICE GENERAL

DEDICATORIA.....	3
INTRODUCCION.....	4
CAPÍTULO 1. ....	6
SOLUCIONES SOLITONICAS EN LA ECUACIÓN NOLINEAL CUBICA DE KLEIN GORDON.....	6
1.1 Soluciones unidimensionales de la ecuación de Klein-Gordon.....	7
CAPITULO 2. ....	13
EL PROCESO GENERAL DE INESTABILIDAD MODULACIONAL.....	13
2.1 Conceptos fundamentales .....	13
CAPITULO 3. ....	18
ESTUDIODE LAS PERTURBACIONES.....	18
MODULACIONALES.....	18
3.1 Teoria de Whitham.....	18
3.2Criterio de Lighthill inestabilidad y modulación. ....	20
CAPITULO 4. ....	22
METODO ANALÍTICO DE MULTI-ESCALAS.....	22
4.1 Versión de la ecuación cubica de Schrödinger .....	22
4.2 Inestabilidad modulacional de la ecuacion no lineal de campo.....	30
4.3Solución estacionaria de la ecuación no lineal de Duffing-Schrodinger .....	34
4.4 Solución solitónica brillante como perturbación en la ecuación Klein-Gordon nolineal.....	36
CAPITULO 5. ....	39
RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	39

## INTRODUCCION

Recientemente se ha prestado mucha atención al estudio de ecuaciones no lineales evolutivas (ENE) de la física matemática, incluidos los problemas de física, biología, química, etc. Dado que la ENE describe modelos físicos y matemáticos, las soluciones analíticas de tales ecuaciones son de gran importancia en la aplicación de avances teóricos de resultados a fenómenos naturales. Entre las posibles soluciones de la ENE, hay algunas soluciones de tipo especial, como los solitones que solo pueden depender de una combinación de variables. En física matemática un solitón es una ola auto sostenida un paquete de olas o un impulso que conserva su forma mientras se mueve a una velocidad constante. La emergencia de solitones se debe a la presencia de efectos no lineales y de dispersión en el medio. Los efectos de dispersión ocurren en ambientes en los que la velocidad de las ondas depende de la frecuencia. Los solitones son soluciones de una amplia clase de dispersión débilmente no lineal de ecuaciones diferenciales parciales que describen sistemas físicos. El fenómeno de un solitón fue descrito por primera vez D.S Russel, quien observó una ola solitaria en el Canal la Unión de Escocia. Reprodujo este fenómeno en una reserva de olas y lo llamo "onda de transmisión" (solución para ondas viajeras o solitones) [1]. Como regla general, las soluciones para un solitón se obtienen transformando el problema inverso de dispersión y son estables debido a la integrabilidad de las ecuaciones de campo [2].

Como se sabe, la forma general de ecuación (1) constituye uno de los protocolos más simples y más ampliamente aplicados de ecuaciones de ondas y de campo en física matemática. La ecuación no lineal de Klein-Gordon (ENKG) (1) generaliza la ecuación relativista lineal para una partícula cargada en un campo electromagnético derivado por Klein [3] y Gordon [4] una variante de la ENKG es la denominada ecuación de Sine-Gordon y que apareció por primera vez en el contexto de propagación de ondas no lineales, en el estudio de la geometría de superficies con curvaturas gaussianas negativas. [5]. La ecuación no lineal de Klein Gordon surge en modelos para la teoría de fluidos magnéticos [6], teoría no lineal masónica [7], física de estado sólido [8] y en las teorías clásicas de seno-Gordon y de campo  $\varphi^4$ [9].

La importancia de un estudio asociado con la propagación de paquetes de ondas cuasi-armónicas es crucial en la ciencia moderna y es el objeto del presente trabajo de tesis. Por ejemplo, la transmisión de información en el rango óptico, de microondas o de radio se realiza modulando una onda de alta frecuencia con una señal de información de baja frecuencia. El espectro de tiempo de la señal modulada se concentra cerca de la frecuencia portadora. En este caso la ecuación diferencial no lineal se escribe como sigue con no linealidad cubica que se denomina Ecuación cubica no lineal de Klein-Gordon.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_c^2 u - \beta u^3 = 0 \quad (1)$$

Este trabajo de tesis consta de una introducción y 5 capítulos. En la introducción se menciona a grandes rasgos las características principales de la ecuación no lineal de Klein Gordon y su relación con problemas físicos concretos. En el siguiente capítulo I se relata sobre propiedades y de las soluciones solitonicas en teoría no lineal de campos descrito por la ecuación de Klein Gordon no lineal. En el segundo capítulo II se hace mención a que es la inestabilidad modulacional como un fenómeno el que una onda continua inicialmente perturbada tiende a romperse espontáneamente en un tren de pulsos periódicos. En el capítulo III se analiza una solución aproximada de la ecuación de Klein Gordon con no linealidad cubica usando las ecuaciones de Whitham y el criterio de Lighthill para ver la inestabilidad es causada por la interacción de una onda portadora con frecuencia y perturbaciones llamados satélites. Posteriormente en el capítulo IV se analiza mediante el método de escalas múltiples, las pequeñas perturbaciones son inestables en un rango específico de números de onda para los cuales se obtiene como perturbación a la ecuación no lineal de Schrödinger. Finalmente, el capítulo V está dedicado a mencionar los resultados y las conclusiones.

## CAPÍTULO 1.

### SOLUCIONES SOLITONICAS EN LA ECUACIÓN NOLINEAL CUBICA DE KLEIN GORDON

Los fenómenos no lineales, que aparecen en muchas áreas de procesos naturales y sociales, como la física del estado sólido, la física de plasma, la dinámica de fluidos, la biología - matemática y la cinética química pueden modelarse mediante ecuaciones diferenciales parciales o integro-diferenciales. Se utilizó una amplia clase de métodos de solución analítica y métodos de solución numérica para manejar estos problemas.

El problema de valor inicial de la ecuación unidimensional no lineal de Klein-Gordon viene dado por la siguiente ecuación.

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + g(u) = f(x, t)$$

Donde  $u = u(x, t)$  representa el desplazamiento de la onda en la posición  $x$  y en el tiempo  $t$ ,  $\alpha$  es una constante conocida y  $g(u)$  es la fuerza no lineal. En la conocida ecuación de Sine-Gordon la fuerza no lineal viene dada por  $g(u) = \text{sen } u$ . En las aplicaciones físicas, la fuerza no lineal  $g(u)$  también tiene otras formas[10]. Los casos  $g(u) = \text{sen } u + 2\text{sen } u$  y  $g(u) = \text{senh } u + \text{senh } 2u$  se denominan ecuación de doble seno-Gordon, y ecuación doble seno-Gordon respectivamente. Las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales anteriores son ecuaciones diferenciales parciales hamiltonianas y para una amplia clase de fuerza  $g(u)$  tiene la cantidad hamiltoniana conservada (o energía)

$$H = \int \left( \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + G(u) \right),$$

$$\text{Donde } G'(u) = g(u)$$

La ecuación no lineal de Klein-Gordon juega un papel importante en muchas aplicaciones científicas, como la física del estado sólido, la óptica no lineal y la teoría cuántica de campos [11]. Los métodos para investigarlo son variados, como el método de dispersión inversa, la transformación de Bäcklund, el método de la ecuación auxiliar [12,13], el método de trazas de Wadati. Las formas bilineales de Hirota, el método pseudoespectral, el método  $\tanh - \text{sech}$ , se utilizaron en la ecuación de seno-coseno, las funciones elípticas de Jacobi y el método de expansión de la ecuación de Ricatti se utilizaron para investigar este tipo de ecuaciones.

La ecuación de Klein-Gordon juega un papel importante en la física matemática [14,15], la ecuación ha llamado mucho la atención en el estudio de los solitones y la física de la materia condensada [16], en la investigación de la interacción del solitón en un plasma sin colisiones, la recurrencia de estados iniciales y al examinar las ecuaciones de onda no lineales [17], el método de expansión racional de la ecuación elíptica y el método de la función F extendida. Sirendaoreji [12] utilizó el método de la ecuación auxiliar para construir más tipos de nuevas soluciones de ondas viajeras exactas de la ecuación no-lineal de Klein-Gordon con no linealidad cuadrática y cubica.

### 1.1 Soluciones unidimensionales de la ecuación de Klein-Gordon.

En esta parte vamos a ver la ecuación no lineal de Klein-Gordon unidimensional.

$$U_{tt} - U_{xx} + \Phi'(u) = 0, \quad -\infty < x, t < +\infty \quad (1.1.1)$$

Cuando el potencial es suficientemente liso la ecuación (1.1.1) se obtiene del principio variacional siguiente.

$$\delta \int dt \int dx \mathcal{L}(u, u_x, u_t) = 0 \quad (1.1.2)$$

Cuando la densidad de Lagrange es

$$\mathcal{L} = 2^{-1}(u_t^2 - u_x^2) - \Phi(u). \quad (1.1.3)$$

Para encontrar soluciones concentradas ondulatorias  $u(z) = u(x - ct)$ , con  $c = \text{const}$  pasamos en la ecuación (1.1.1) a usar la variable  $z = x - ct$  independiente. Entonces tenemos

$$(c^2 - 1)u_{zz} + \Phi'(u) = 0 \quad (1.1.4)$$

Esta ecuación posee un sentido mecánico simple. Si  $z$  representa el “tiempo”, ella describe un oscilador anarmónico con energía potencial  $\Phi(u)$ . Ahora multiplicamos (1.1.4) por  $u_z$  e integramos obtenemos la ley de la conservación de la energía.

$$2^{-1}(c^2 - 1)u_z^2 + \Phi(u) = E = \text{constante} \quad (1.1.5)$$

Para este tipo de oscilador, veamos un caso concreto  $|c| > 1$ . (el caso  $|c| < 1$  se analiza de la misma manera y en este caso las variantes cambian de lugar). Entonces de la ecuación (1.1.5) se obtiene la siguiente fórmula.

$$z - z_0 = \pm \sqrt{\frac{c^2 - 1}{2}} \int_{u_1}^u \frac{d\xi}{\sqrt{E - \Phi(\xi)}}, \quad u_1 \leq u(z) \leq u_2. \quad (1.1.6)$$

Aquí  $z_0$  es una constante arbitraria  $u_1$  y  $u_2$  son raíces consecutivas de la ecuación.

$$E - \Phi(u) = 0, \quad (1.1.7)$$

La expresión debajo de la raíz se supone que es positiva siempre y cuando  $u_1 < \xi < u_2$ . Consideramos ahora en (1.1.6) el signo positivo, las fórmulas del tipo (1.1.6) permiten calcular la solución de la ecuación (1.1.4) y al mismo tiempo muchas propiedades de las soluciones están claras al analizar la integral (1.1.6)

Las propiedades de las soluciones para la ecuación de KG dependen del tipo de funciones  $\Phi(u)$ . Así las soluciones periódicas en  $z$  de la ecuación (1.1.4) aparecen si en la ecuación (1.1.7) se tiene dos raíces simples  $u_1(E)$  y  $u_2(E) > u_1$  dependiente de  $E - \Phi(u) \gg 0$  es mayor que  $u_1 \ll u \ll u_2$ . Para la aparición de soluciones concentradas es necesario que algunas de las raíces  $u_1, u_2$  sea múltiple. En este caso la integral (1.1.6) se torna limitada.

veamos dos casos simples de aparición de soluciones concentradas que corresponden al potencial  $\Phi(u)$  con dos máximos de altura idéntica  $E_0$  y el caso de potencial con 2 mínimos. en ambos casos del comportamiento de las soluciones del tipo (1.1.6) depende sustancialmente del parámetro  $E$ . Uno de sus extremos lo consideramos con coincidente con la del origen de coordenadas que no quita la generalidad.

En el caso A) cuando  $E > E_0 = \Phi(u^\pm)$  la solución tiene carácter aperiódico o en general existe solamente en forma local, para no todos los valores de  $z$ . Cuando  $E < E_0$  la solución de la ecuación (1.1.4) es periódica con el siguiente periodo.

$$T(E) = \sqrt{2} \sqrt{c^2 - 1} \int_{u_1(E)}^{u_2(E)} \frac{d\xi}{\sqrt{E - \Phi(\xi)}}, \quad (1.1.8)$$

$u_1, u_2$  como antes son raíces vecinas de la ecuación (1.1.7). en este caso

$u_- < u_1 < 0 < u_2 < u_+$ . Si  $E = E_0$  el comportamiento de la solución se entiende de las siguientes consideraciones. La expresión debajo de la raíz no es negativa si  $u_- \leq \xi \leq u_+$ . La integral (1.1.6) (así como en la integral 1.1.8) cuando  $\xi \rightarrow u_\pm$  logarítmicamente diverge debido a que

$$E_0 - \Phi(\xi)_{\xi \rightarrow u_\pm} = 2^{-1} |\Phi''(u_\pm)| (\xi - u_\pm)^2 + o[(\xi - u_\pm)^3].$$

De esta expresión se desprende que la solución  $u(z)$  crece monótonicamente (cuando se toma el signo superior en la parte derecha de (1.1.6) y tiene una forma asintótica siguiente



$$u(z)_{z \rightarrow \pm\infty} = u_{\pm} \mp c_{\pm} \exp(-k_{\pm}|z|), \quad (1.1.9)$$

Siendo  $c_{\pm}$  y  $k_{\pm}$  constantes positivos. De la invariancia translacional se concluye que si  $u(z)$  es solución entonces también es solución  $u(z - z_0)$ . Si ponemos  $u(0) = 0$ . entonces para la solución tenemos una gráfica que lleva el nombre de kink [18] Fig1.

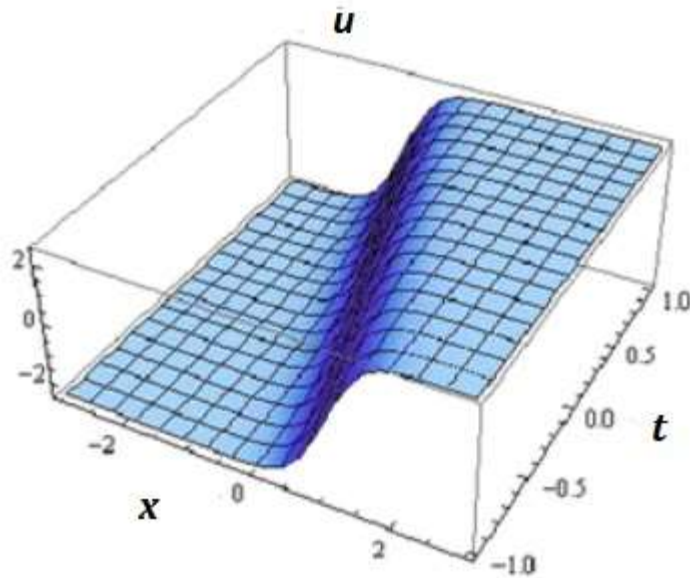


Fig1. Grafica de una solución tipo escalón o kink de la ec. (1.1.11)

Veamos algunas consideraciones. La forma general del potencial  $\Phi(u)$  para los cuales se garantiza la existencia de los kinks se puede describir de la siguiente manera, que este potencial tenga como mínimo 2 máximos locales no degenerados de altura equivalente en unos puntos en los cuales denotaremos como  $u = u_-$  y  $u = u_+$  ( $u_- < u_+$ ) tal que  $\Phi(u) < \Phi(u_{\pm})$  cuando  $u_- < u < u_+$ .

2. el potencial  $\Phi(u)$  para la existencia de kink no esta obligado a ser par. Pero si es impar entonces cuando  $u(0) = 0$  el kink  $u(z)$  será una función impar de  $z$

3. un ejemplo de este tipo de este potencial par puede ser el siguiente ejemplar

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} a u^2 - \frac{1}{p+2b} |u|^{p+2}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad p > 0 \quad (1.1.10)$$

Este potencial cuando  $p = 2$  se obtiene una formula exacta para el kink

$$u(z) = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} \operatorname{th} \left[ \left(\frac{a}{2(c^2-1)}\right)^{1/2} (z - z_0) \right]. \quad (1.1.11)$$

En el plano de fase  $(u, u_z)$  al kink  $u(z)$  le corresponde una curva sólida y al kink  $(-z)$  descrito por la formula (1.1.6) para el signo inferior le corresponde la línea punteada. Veamos el caso b ahora la solución periódica de la ecuación (1.1.4) aparece si  $-E_0 < E < 0$  en cada uno de estos pozos potenciales. El carácter de la solución bajo diferentes valores de  $E$  y en particular si  $E = 0$  facilmente se aclara en base a la integral (1.1,5) y el retrato de fase en el plano de fase  $(u, u_z)$

La curva de fase que corresponde  $E = 0$  tiene auto atravesamiento en el origen de coordenadas del plano debido a que  $u_z^2$  y  $E - \Phi(u)$  tienen en este punto los ceros de segundo orden ( $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 0, \Phi''(0) < 0$ ). La restricción en esta curva sucede debido a que  $E - \Phi < 0$  cuando  $u > u_{max}$  y  $u < u_{min}$  esta curva se le llama separatista ósea separa regiones en la solución de los movimientos aperiódicos si  $E > 0$  de la región periódica si  $E < 0$ . Como en el caso a la formula (1.1.8) también es cierta para el periodo  $T(E)$  que  $E \rightarrow -0 \quad T(E) \rightarrow \infty$ . La integral (1.1.8) diverge Si colocamos  $u'(0) = 0$  entonces de la simetría de las curvas de fase con relación al cambio de  $u_z$  por  $-u_z$  si infiere la paridad de la solución  $u(z)$  cuando  $E = 0$ . La función  $u(z)$  que corresponde a la parte derecha de las separaciones tiene un extremo único de altura  $u_{max} \Phi(u_{max}) = 0$  esta forma de solución en forma de jorobase le llama solito.

$$u(z)_{z \rightarrow \pm\infty} = O(\exp(-k_{\pm}|z|)), \quad k_{\pm} > 0 \quad (1.1.12)$$

En la literatura de física comúnmente se le llama él solito nosotros vamos a usar también este tipo de nomenclatura cuando sea necesario al mismo a tiempo hablar de solitón, skins etc. y todos sus análogos en varias dimensiones vamos a usar el término de soluciones concentradas así la parte derecha de la separatrizas responde a los solicitantes con asíntota (1.1.12) cuando  $k_- = k_+$ , análogamente la parte izquierda de las separatrizas en el corresponde al solito no con polaridad negativa y con profundidad de mínimo único definido por la magnitud  $u_{min}$  es necesario mencionar que las propiedades de las soluciones tipo quick y tipo solitones fácilmente se explican con la ayuda de plano no tradicional  $(u, E)$  donde la energía  $E$  está definida por la igualdad (1.1.5) [19,20,21]

La existencia de las soluciones solitónicas está garantizado si el potencial  $\Phi(u)$  satisface las condiciones

$$\Phi(0) = 0; \quad \Phi(u) \leq au^2 \text{ donde } u \rightarrow 0; \quad \Phi(u) \geq b|u|^{2+p} \text{ donde } |u| \rightarrow \infty \quad (1.1.13)$$

$\Phi'(u) = 0$  Solamente en un punto en el cual  $u > 0$ ;  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $p > 0$ . Estas exigencias se cumplen por ejemplo para este potencial.

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2}a_1u^2 + \frac{1}{p+2}b_1|u|^{2+p}, \quad p > 0, \quad a_1 > 0, \quad b_1 > 0 \quad (1.1.14)$$

En caso de que (1.1.14) cuando  $p > 0$  los solicitantes de polaridad positiva se dan mediante las formulas simples siguientes

$$u(z) = \left(\frac{(p+2)a_1}{2b_1}\right)^{1/p} ch^{2/p} \left(\sqrt{\frac{a_1}{c^2-1}} \frac{p}{2} z\right). \quad (1.1.15)$$

La solución tipo kinks se diferencian de acuerdo a su clasificación topológica. Se introduce una carga topológica.

$$S = (u_+ - u_-)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u_z dz, \quad (1.1.17)$$

Que es igual a 1 en el caso del kink creciente y a -1 en el caso de anti kink

## **CAPITULO 2. EL PROCESO GENERAL DE INESTABILIDAD MODULACIONAL**

### **2.1 Conceptos fundamentales**

La inestabilidad modulacional puede considerarse como un criterio al momento de clasificar el comportamiento cualitativo de ondas moduladas tales como paquetes de ondas. El paquete de ondas, también llamado envolvente, es una superposición lineal de ondas, la cual puede tomar forma de un pulso y se desplaza de forma relativamente compacta antes de dispersarse, esto en caso de que la velocidad de fase sea diferente a la velocidad de grupo. A este fenómeno se le llama dispersión. En muchos sistemas en los cuales las ecuaciones dinámicas admiten soluciones periódicas, representadas por trenes de onda, es posible que se presente inestabilidad modulacional bajo ciertos parámetros. La inestabilidad modulacional se presenta cuando perturbaciones oscilatorias son introducidas a estados estacionarios de tipo tren de onda, las cuales generan un crecimiento exponencial en la amplitud de la onda, conforme transcurre el tiempo, lo que a su vez genera un rompimiento en la envolvente [22].

Los estudios sobre inestabilidad modulacional se iniciaron en 1960, de manera independiente, por los científicos del oeste (Estados Unidos y Europa), y científicos soviéticos. Por lo general estos estudios estaban orientados a diferentes aplicaciones en física. La mayoría de los primeros trabajos en el oeste estaban relacionados con hidrodinámica: ondas de agua, convección, etc. Por otro lado, los trabajos sobre inestabilidad modulacional de los científicos soviéticos estaban vinculados con, los entonces recientes, progresos en: electrodinámica, incluyendo óptica no lineal (lasers, auto focalización, ondas de radio no lineales etc.) y física de plasma [23].

La inestabilidad modulacional (IM) se refiere al fenómeno en el que una onda continua inicialmente perturbada (cw) tiende a romperse espontáneamente en un tren de pulsos periódico similar a un solitón mientras se propaga a través de un medio dispersivo no lineal, como una fibra óptica. En el dominio de la frecuencia, este fenómeno se puede

interpretar como un proceso de mezcla de cuatro ondas, parcialmente degenerado con emparejamiento de fase en el que una onda de bombeo intensa produce energía a un par de ondas de banda lateral débiles, es decir, un Stokes (desplazado al rojo) y un anti-Stokes (desplazamiento al azul), ubicada simétricamente en los dos lados de la onda de la bomba. Como lo veremos más adelante.

La primera observación reportada en la literatura de una inestabilidad modulacional se cree fue realizada por N. F. Pilipetskii y A. R. Rustamov en 1965 al estudiar láseres de alta potencia en solventes orgánicos, pero esta solo es reportada en su estudio como una inestabilidad, la cual aparece durante la propagación de una onda electromagnética en un fluido y no desarrollaron un estudio profundo sobre este tipo de inestabilidades en su investigación. Análogamente en el año de 1965 se estaba desarrollando las bases para la observación de inestabilidades modulacionales en otras áreas, Gerald Beresford Whitham planteó un formalismo de ondas cuasi-periódicas basado en un principio variacional promediado [24], asociando así un lagrangiano a la propagación de una onda y mediante la cual se podían obtener ecuaciones que describían las características de ondas que varían lentamente, esto mediante la aplicación de las leyes de conservación.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (2.1.1)$$

Sir Michael James Lighthill uso el formalismo de Whitham para estudiar ondas con pequeñas no linealidades, en particular, propuso un lagrangiano de la forma.

$$\mathcal{L}(\omega, k, a) = G(\omega, k)a^2 + B(\omega, k)a^4 \quad (2.1.2)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia,  $k$  el número de onda y  $a$  la amplitud de la onda. Con base a este lagrangiano y a las leyes de conservación Lighthill obtuvo una ecuación para la dispersión.

$$\omega = \omega_0(k) + \omega_1(k)a^2 \quad (2.1.3)$$

y un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial(v_{gr}a^2)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_1 a^2)}{\partial x} = 0 \quad (2.1.5)$$

Aquí  $v_{gr} = \frac{-G_k}{G_\omega} = \frac{d\omega_0}{dk}$  es la velocidad de grupo lineal. Mediante este conjunto de ecuaciones el obtuvo una fórmula para la velocidad característica.

$$C_{\pm} = v_{gr}(k) \pm \sqrt{v'_{gr}\omega_1 a^2 + O(a^2)} \quad (2.1.6)$$

la cual es considerada de tipo hiperbólico si  $C$  es real y por ende  $\beta = v'_{gr}\omega_1 > 0$  o de tipo elíptico si  $C$  es compleja y  $\beta < 0$ . Estas desigualdades fueron consideradas como el primer criterio desarrollado para el estudio de las inestabilidades modulacionales, lo que se conoce como criterio de Benjamin-FeirLighthill. Ya que si se linealizan las ecuaciones (2.1.4) y (2.1.5) alrededor de la onda armónica de constantes  $a, \omega$  y  $k$ . Y se consideran perturbaciones de la forma  $\exp(ikx - \Omega t)$ , las cuales interactúan con las ondas armónicas a partir de una modulación en la frecuencia de estas mediante bandas laterales  $\omega + \Omega$ , para una frecuencia  $\Omega$  dada. Se obtiene que la frecuencia de la perturbación satisface la igualdad.

$$\Omega = C_{\pm}k \quad (2.1.7)$$

Así, para el caso hiperbólico, la onda armónica es estable y, de acuerdo con (2.1.6), puede propagarse con dos velocidades de grupo ligeramente diferentes. En el caso elíptico por la parte imaginaria que surge en (2.1.6) al ser  $\beta < 0$  y su influencia en (2.1.7) se considera a la onda armónica inestable con respecto a una pequeña modulación. Lighthill explico esta modulación de la siguiente manera, Supóngase que en algún momento durante la propagación de una onda armónica aparece una protuberancia en

la intensidad, si por ejemplo  $\omega_1 > 0$  en (2.1.3) entonces la derivada  $\omega_x$  es positiva antes de la protuberancia y negativa después de esta. De acuerdo con la conservación de la fase expresada en la última ecuación de (2.1.1)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

$k_t < 0$  antes del máximo de la protuberancia y  $k_t > 0$  después de este. Si la dispersión en la velocidad de grupo es  $\omega_{kk} = \frac{\partial v_{gr}}{\partial k} < 0$ , implica que la velocidad de grupo tiende a incrementarse detrás del máximo de la amplitud y decrecer enfrente de esta. Esto quiere decir, que los grupos de ondas vecinos, al máximo de amplitud tienden a comprimir la protuberancia, debido a la conservación de la energía, y la amplitud aumenta acumulativamente. El mismo razonamiento muestra que un valle inicial de una onda armónica se profundizaría. Este es el caso de inestabilidad modulacional. En el caso en que  $\omega_{kk} > 0$ , el efecto es lo contrario la protuberancia en la intensidad tiende a crecer, este es el caso de estabilidad neutral. Desde el punto de vista espectral, una simple interpretación del criterio de Benjamin-Feir-Lighthill es que las pequeñas bandas laterales interactúan con las fuertes ondas portadoras, para su interacción efectiva, se necesita el cumplimiento simultáneo de la condición de resonancia (sincronismo) la cual está descrita mediante la aplicación de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 2\omega_c, & k_1 + k_2 &= 2k_c \\ \omega_{1,2} &= \omega_c \pm \Omega, & k_{1,2} &= k_c \pm k \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

las últimas dos igualdades son para modulaciones consideradas lentas, es decir cuando los valores de  $\omega$  y  $k$  son pequeños. Aquí los sub-índices  $c, 1, 2$  corresponden a la onda portadora y a las ondas de las bandas laterales, respectivamente. En el caso lineal estas condiciones no se cumplen debido a la dispersión, pero en el caso no lineal sí y la

velocidad de esas ondas se dieran debido a dos factores (debido a la dispersión y la no linealidad). Así en el caso cuando las desafinaciones son del mismo signo, no ocurre sincronismo 4 y las bandas laterales no aumentan (caso hiperbólico). Sin embargo, si estas desafinaciones difieren en un signo, pueden compensarse entre sí, y las ondas interactúan de manera resonante, lo que resulta en amplificaciones



### CAPITULO 3. ESTUDIODE LAS PERTURBACIONES MODULACIONALES

#### 3.1 Teoría de Whitham

El primer intento de un estudio sistemático de modulación no lineal nuevas olas lo estaba emprendiendo Jae Whitham a mediados de la década de 1960. En sus obras, partió de la representación de ecuaciones en forma lagrangiana [25], Sin embargo, esto no es obligatorio. Una demostración de las ideas principales La teoría de Whitham sobre el ejemplo de la ecuación no lineal de Klein-Gordon con no linealidad cubica.

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_c^2 u - \beta u^3 = 0 \quad (3.1.1)$$

La ecuación (3.1.1) se puede considerar como una variante lineal de la ecuación de Sine-Gordon obtenida al expandir  $\sin u$  en una serie ( $\beta = \omega_c^2/6$ ).

Buscaremos una solución a la ecuación (3.1.1) en la forma

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots,$$

Con

$$u_0 = A(x, t) e^{i\theta(x, t)} + C.C$$

Donde  $\varepsilon \ll 1$ , C.C. significa compleja conjugada, e introducir las cantidades  $\omega(x, t) = -\theta_t$ ,  $k(x, t) = \theta_x$  que son la frecuencia instantánea y el número de onda. En primer lugar, notamos que, por definición de  $\omega$  y  $k$ , se realizará

$$k_t + \omega_x = 0. \quad (3.1.2)$$

Y no es más que la ley de conservación del número de onda. Asumiremos que Las funciones  $A$ ,  $\omega$  y  $k$  cambian lentamente ( $A_t, A_x \sim \varepsilon$  etc). Entonces se puede considerarlos como funciones de variables lentas  $T = \varepsilon t$ ,  $X = \varepsilon x$ . Es fácil calcular que

$$u_t = (-i\omega A + \varepsilon A_T) e^{i\theta} + C.C.,$$

$$u_{tt} = (-\omega^2 A - i\varepsilon(\omega_T A + 2\omega A_T)) e^{i\theta} + C.C$$

Se pueden obtener expresiones similares para  $u_x, u_{xx}$ . Sustituimos las relaciones obtenidas en la ecuación (3.1.1), multiplicamos por  $\exp(-i\theta)$  y promedio durante el período  $2\pi/\omega$ . Entonces para términos de orden 1 y  $\varepsilon$  Respectivamente, obtenemos las ecuaciones

$$\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2 - 3\beta |A|^2. \quad (3.1.3)$$

$$(\omega A^2)_T + c^2 (k A^2)_X = 0. \quad (3.1.4)$$

La ecuación (3.1.3) se denomina relación de dispersión no lineal.

De ello se sigue que, en primera aproximación, los efectos no lineales se expresan. En función de la frecuencia de la onda, en la amplitud. Esta analogía es con las oscilaciones de un oscilador no lineal, cuyo período depende de la energía [26,27,28]. Cambian las diversas características de la propagación de una onda en un medio no lineal, al cambiar su amplitud por el nombre de auto-acción. Algunos fenómenos asociados a los efectos de la auto-acción (auto-modulación, auto-enfoque) se consideran en los siguientes párrafos.

La ecuación (3.1.4), teniendo en cuenta las relaciones (3.1.2), (3.1.3), se puede escribir Como

$$(A^2)_T + (\omega' A^2)_X = 0 \quad (3.1.5)$$

Donde  $\omega' = \partial\omega/\partial k$  es la velocidad del grupo. Esta ecuación es la conservación de la acción de ondas que es similar a la ley de conservación de la energía.

### 3.2 Criterio de Lighthill inestabilidad y modulación.

El sistema de ecuaciones de Whitham consiste en las leyes de conservación de la onda Número (3.1.2) y acción de onda (3.1.5), así como la relación de dispersión no lineal.

$$\omega = \omega(k, |A|^2), \quad (3.2.1)$$

Por ejemplo, para ondas en la superficie de aguas profundas. Una relación de este tipo.

$$\omega^2 = gk(1 + k^2|A|^2) \quad (3.2.2)$$

fue obtenido por Stokes quien encontró una solución en forma de una onda estacionaria cuyo periodo depende de la amplitud, obviamente en el límite lineal ( $|A|^2 \rightarrow 0$ ) la ecuación (3.2.1) debe cambiar a dispersión lineal  $\omega = \omega_0(k)$ . En el caso de no linealidad débil es posible representar la relación (3.2.1) como.

$$\omega \approx \omega_0(k) + \omega_2(k)|A|^2 + \dots$$

Un resultado importante fue obtenido por Lighthill[29] quien demostró que en caso

$$\omega_0'' \omega_2 < 0 \quad (3.2.3)$$

La condición (3.2.3) se denomina criterio de Lighthill.

La inestabilidad fue descubierta por Benjamin y Feir como resultado de un intento fallido de realizar experimentalmente la onda de Stokes en la superficie de aguas profundas. En el trabajo [30] se ha demostrado que la inestabilidad es causada por la interacción de una

onda portadora con frecuencia  $\omega_0$  y perturbaciones llamados satélites con frecuencias cercanas simétricamente separados de los inexistentes ( $\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Delta$ , ejemplo  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ) Si se cumple el criterio de Lighthill (3.2.3) los satélites aumentan sacando energía de la onda principal. Este proceso puede considerarse como una resonancia de cuatro ondas.

$$2\omega_0 = \omega_+ + \omega_-, \quad (3.2.4)$$

$$2k(\omega_0) = k(\omega_+) + k(\omega_-) \quad (3.2.5)$$

Ya que  $\Delta\omega$  pequeño, es posible expandir la relación de dispersión en una serie  $k(\omega) = k(\omega_0) + k'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \dots$  de esto se ve que la igualdad (3.2.5) se lleva a cabo con precisión hasta términos de segundo orden de pequeñez. Si multiplicas las ecuaciones (3.2.4) y (3.2.5) por la constante de Planck es claro que expresan las leyes de conservación de la energía y el impulso en el proceso de descomposición dos quantums de la onda portadora en quantums de onda-satelitales.

Perturbaciones con frecuencias cercanas a  $\omega_0$  para los cuales se cumplen las condiciones de resonancia pueden considerarse como una modulación de onda principal. Con este fin la inestabilidad de Benjamin-Feir recibió el nombre de modulación. Para las ondas en el agua la solución tiene la forma de una serie cuyo miembro principal parece

$$A \cos(kx - \omega(k, A^2)t).$$

Donde  $\omega(k, A^2)$  determinado por la relación (3.2.2) fue obtenida por J. Stokes en 1849. La convergencia de esta serie fue probada por T. Levi Civita en 1925. Sin embargo, la convergencia no significa estabilidad de la solución, requiriendo así más de 120 años para entender que la ola de Stokes no es estable en agua profunda.

## CAPITULO 4.

### METODO ANALÍTICO DE MULTI-ESCALAS

#### 4.1 Versión de la ecuación cubica de Schrödinger

Otro enfoque para estudiar la dinámica de los paquetes de ondas envolventes está asociado con la obtención de una ecuación parabólica no lineal, llamada ecuación no lineal de Schrödinger. Existe un método más estricto para su obtención (y otras ecuaciones envolventes) llamado el método de multi-escalas. [26,31].

Volvamos a la ecuación no lineal de Klein-Gordon (3.1.1) usamos la siguiente serie para resolver esta ecuación.

$$u = \sum_i \varepsilon^i u_i$$

Además  $u_i$  serán pequeñas variables de varias funciones espaciales y temporales  $X_n = \varepsilon^n x$ ,  $T_n = \varepsilon^n t$ , al mismo tiempo las derivadas se convierten así:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (4.1.2)$$

Sustituyendo  $u$  en la ecuación (1.1.1) tenemos

$$\left( \sum_i \varepsilon^i u_i \right)_{tt} - c^2 \left( \sum_i \varepsilon^i u_i \right)_{xx} + \omega_c^2 \left( \sum_i \varepsilon^i u_i \right) - \beta \left( \sum_i \varepsilon^i u_i \right)^3 = 0 \quad (4.1.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2) en la ecuación (4.1.3) obtenemos las siguientes derivadas parciales

Primera derivada parcial con respecto a  $t$ .



De la misma forma para las derivadas parciales respecto a  $x$  tenemos. Primera derivada parcial con respecto a  $x$

$$u_x = \left( \sum_i \varepsilon^i u_i \right)_x = (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 \dots)_x$$

$$u_x = \frac{\partial u_0}{\partial X_0} + \varepsilon \left[ \frac{\partial u_0}{\partial X_0} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial u_0}{\partial X_0} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right]$$

$$+ \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial u_0}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_0} \right]$$

Segunda derivada parcial con respecto a  $x$ , agrupando términos tenemos

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_0} \right) +$$

$$+ \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_0} \right) + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_0} \right) \right]$$

$$+ \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_0} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_0} \right) + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_2} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_0} \right) \right]$$

$$+ \varepsilon^3 \left[ \frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_0} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_0} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_2} \right) + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_0} \right) + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_3} \right) + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial X_0} \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_0} \right) \right] + \dots \quad (4.1.5)$$

Para obtener  $u^3$  lo desarrollamos de la siguiente manera (tomando solo en cuenta los términos  $\varepsilon^3$ ).

$$u^3 = (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots)^2 (u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= (u_0^2 + \varepsilon^2 u_1^2 + 2\varepsilon u_0 u_1 + 2\varepsilon^2 u_0 u_2 + 2\varepsilon^3 u_1 u_2 + 2\varepsilon^3 u_0 u_3)(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 \\
&\quad + \varepsilon^3 u_3 + \dots) \\
&= u_0^3 + \varepsilon(2u_0^2 u_1 + u_1 u_0^2) + \varepsilon^2(u_0 u_1^2 + 2u_0^2 u_2 + 2u_0 u_1^2 + u_0^2 u_2) \\
&\quad + \varepsilon^3(2u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_3 u_0^2 + u_1^3) + \dots \quad (4.1.6)
\end{aligned}$$

Agregando todos los términos de las ecuaciones (4.1.4), (4.1.5) y (4.1.6) a las expresiones  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3$  de la ecuación (1.1.1) tenemos.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \omega_c^2 u_0 - \beta u_0^3 \\
&\quad + \varepsilon \left[ \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1 \partial T_0} - c^2 \left( \frac{\partial u_0}{\partial X_0 \partial X_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1 \partial X_0} \right) + \omega_c^2 u_1 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \beta(2u_0^2 u_1 + u_1 u_0^2) + \right] \\
&\quad \quad \quad + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial T_0 \partial T_1} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - c^2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0 \partial X_2} + 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_0 \partial X_1} \right) + \omega_c^2 u_2 - \beta(3u_0 u_1^2 + 3u_0^2 u_2) \right] \\
&\quad \quad \quad + \varepsilon^3 \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0 \partial T_1} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_3} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1 \partial T_2} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - c^2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_0 \partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0 \partial X_3} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0 \partial X_2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_1 \partial X_2} \right) + \omega_c^2 u_3 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. - \beta(2u_0^2 u_3 + 6u_0 u_1 u_2 + u_3 u_0^2 + u_1^3) \right] + \dots \quad (4.1.7)
\end{aligned}$$

Para las expresiones de orden cero  $\varepsilon^0 = 1$  de la ecuación (4.1.7) tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial X_0^2} + \omega_c^2 u_0 - \beta u_0^3 = 0 \\
&\quad \hat{L}u_0 = 0 \quad (4.1.8)
\end{aligned}$$



Para el caso de las expresiones de orden  $\epsilon^1$  de la ecuación (4.1.7) tenemos

$$\hat{L}u_1 = 0 \quad (4.1.9)$$

Donde

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial X_0^2} + \omega_c^2$$

Es el operador correspondiente a la parte lineal de la ecuación de Klein-Gordon. Elegiremos la solución de la ecuación (4.1.9) de la forma de una onda-cuasi-armónica con una amplitud que depende de transferencias lentas.

$$u_1 = A(X_1, X_2 \dots ; T_1, T_2 \dots) e^{i\theta} + C.C$$

Donde  $\theta = k_0 X_0 - \omega_0 T_0$  notablemente  $\omega_0$  y  $k_0$  están relacionados por la relación de dispersión

$$\omega_0^2 = \omega_c^2 + c^2 k_0^2 \quad (4.1.10)$$

Las expresiones de la ecuación (4.1.7) de orden  $\epsilon^2$  conducen a la ecuación.

$$\hat{L}u_2 = -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} + 2c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0 \partial X_1} =$$

Calculando las derivadas parciales obtenemos

$$\begin{aligned} -2 \frac{\partial}{\partial T_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial T_1} \right) &= -2 \frac{\partial}{\partial T_1} \left( \frac{\partial A e^{i\theta}}{\partial T_0} + A e^{i\theta} i \frac{\partial \theta}{\partial T_0} \right) \\ &= -2 e^{i\theta} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial T_0 \partial T_1} - i \omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_1} \right] + C.C \end{aligned}$$

Para el siguiente termino

$$\begin{aligned}
2c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X_0 \partial X_1} &= 2c^2 \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial A e^{i\theta}}{\partial X_0} + A e^{i\theta} i \frac{\partial \theta}{\partial X_0} \right) \\
&= 2c^2 e^{i\theta} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial X_0 \partial X_1} + ik_0 \frac{\partial A}{\partial X_1} \right] + C.C
\end{aligned}$$

Como  $u_1$  no depende de  $X_0$  y  $T_0$  nos queda solo

$$= 2i \left( \omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_1} + c^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_1} \right) e^{i\theta} + C.C \quad (4.1.11)$$

Dado que la acción del operador  $\hat{L}$  en la función  $\exp(i\theta)$ , donde  $\omega_0$  y  $k_0$  satisface (4.1.10) da cero. La solución de la ecuación (4.1.11) tiene un carácter secular ( $u_2 \sim \theta \exp(i\theta)$ ). La única manera de evitarlo es que se establezca este valor en cero para igualar en cero los términos que están en lado derecho

$$\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_1} + c^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0$$

Teniendo en cuenta la relación de dispersión (4.1.10) esta ecuación puede ser escrita en la forma

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + v_y \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0 \quad (4.1.12)$$

Donde  $v_y = d\omega_0/dk$  es la velocidad de grupo. De esta manera al principio aproxima perturbaciones de la propagación de la flexión con la velocidad de grupo.

Ahora la ecuación (4.1.11) tiene la forma

$$\hat{L}u_2 = 0$$

Por lo tanto es posible postular  $u_2 = 0$ . Entonces para los miembros de la orden  $\varepsilon^3$  nosotros recibimos

$$\varepsilon^3 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_0 \partial X_2} - \beta u_1^3 \right)$$

Obteniendo las derivadas tenemos.

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_2} &= 2 \frac{\partial}{\partial T_2} \left( \frac{\partial A e^{i\theta}}{\partial T_0} + A e^{i\theta} i \frac{\partial \theta}{\partial T_0} \right) \\ &= 2 e^{i\theta} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial T_2 \partial T_0} - i \omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} \right] + C.C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_2 \partial X_0} &= -2c^2 \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial A e^{i\theta}}{\partial X_0} + A e^{i\theta} i \frac{\partial \theta}{\partial X_0} \right) \\ &= -2c^2 e^{i\theta} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial X_2 \partial X_0} + i k_0 \frac{\partial A}{\partial X_2} \right] + C.C \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_1^2} = \frac{\partial^2 A e^{i\theta}}{\partial T_1^2} + C.C$$

$$-c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} = -c^2 \frac{\partial^2 A e^{i\theta}}{\partial X_1^2} + C.C$$

$$\begin{aligned} -\beta u_1^3 &= A^3 e^{3i\theta} + A^{-3} e^{-3i\theta} + 3|A|^2 A e^{i\theta} + 3A|A|^2 A e^{-i\theta} \\ &= -\beta A^3 e^{3i\theta} - 3\beta |A|^2 A e^{i\theta} \end{aligned}$$

Agrupando términos tenemos.

$$\left[ \frac{\partial^2 A e^{i\theta}}{\partial T_1^2} + 2e^{i\theta} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial T_2 \partial T_0} - i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} \right] - c^2 \frac{\partial^2 A e^{i\theta}}{\partial X_1^2} - 2c^2 e^{i\theta} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial X_2 \partial X_0} + ik_0 \frac{\partial A}{\partial X_2} \right] - \beta A^3 e^{3i\theta} - 3\beta |A|^2 A e^{i\theta} \right]$$

Como  $u_1$  no depende de  $X_0$  y  $T_0$  obtenemos

$$\hat{L}u_3 = - \left( \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} - c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} - 2ic^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_2} - 3\beta |A|^2 A \right) e^{i\theta} + \beta A^3 e^{3i\theta} + C.C \quad (4.1.13)$$

El miembro proporcional a  $\exp(i\theta)$  como antes solo producirá soluciones seculares nuevamente por lo tanto, para resolverlo es necesario igualarlos a cero

$$2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial T_2} + 2ic^2 k_0 \frac{\partial A}{\partial X_2} - \frac{\partial^2 A}{\partial T_1^2} + c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + 3\beta |A|^2 A = 0$$

Teniendo en cuenta las razones (4.1.10) y (4.1.12) obtenemos

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_y \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \frac{3\beta}{2\omega_0} |A|^2 A = 0$$

Donde

$$\omega_0'' = \frac{d^2 \omega_0}{dk^2} = c^2 \omega_c^2 / \omega_0^3,$$

finalmente pasando al sistema de referencia con la velocidad de grupo llegamos a la siguiente ecuación no lineal de Schrödinger

$$i \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{\omega_0''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + q|A|^2 A = 0 \quad (4.1.14)$$

Donde  $T \equiv T_2$ ,  $X \equiv X_1$ ,  $q = 3\beta/2\omega_0$  que fue obtenido por ejemplo para ondas en la superficie de un líquido infinitamente profundo por Zakharov [32] con la ayuda del formalismo hamiltoniano. Para una profundidad aleatoria arbitraria donde se demostró que el criterio de Lighthill se cumple cuando  $k_0 H > 1.36$ . Donde H es la profundidad de la capa. De esta manera esta condición puede ser considerada como una especie de frontera entre las aproximaciones de aguas poco profundas y aguas profundas.

Notemos que para (4.1.14) el criterio (3.2.3) toma la forma

$$\omega_0'' q > 0 \quad (4.1.15)$$

Dado que la relación de dispersión es consistente (4.1.10)  $\omega_0'' > 0$  en caso  $\beta > 0$ , se cumple la condición (4.1.15) lo que indica la inestabilidad de la modulación. Consideremos esta inestabilidad con más detalle

## 4.2 Inestabilidad modulacional de la ecuación no lineal de campo.

Anteriormente en el capítulo anterior se obtuvo en primera aproximación, cuando el parámetro  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, la ecuación no lineal de Schrödinger. Analicemos esta ecuación con más detalle, para ello lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$i \frac{\partial A}{\partial T} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + R|A|^2 A = 0, \quad (4.2.1)$$

Donde  $T = T_2$ ,  $X = X_1$ ,  $R = \frac{3\beta}{2\omega_0}$ ,  $D = \omega_0''$ . Esta ecuación describe la evolución de una envolvente de funciones complejas que varían lentamente  $A(X, T)$  con el tiempo  $T$  y la distancia de propagación  $X$ . El modelo incluye la dispersión de velocidad de grupo

descrita por el parámetro  $D$  y la no linealidad cubica - quinta de Kerr con parámetro característico  $R$

Representamos la solución como

$$A(X, T) = \sqrt{\rho(X, T)} e^{i\sigma(X, T)}, \quad (4.2.2)$$

que al reemplazarlo en la ec. (4.2.1), produce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para las magnitudes  $\rho, \sigma$

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + D \left( \frac{\partial \sigma}{\partial X} \frac{\partial \rho}{\partial X} + \rho \frac{\partial^2 \sigma}{\partial X^2} \right) = 0 \quad (4.2.3)$$

$$R \rho - \frac{\partial \sigma}{\partial T} + D \left\{ \frac{1}{4\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} - \frac{1}{8\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial X} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial X} \right)^2 \right\} = 0 \quad (4.2.4)$$

Ahora veamos pequeñas modulaciones a través del parámetro  $\varepsilon$  de la forma

$$\rho(X, T) = \rho_0(T) + \varepsilon \text{Re}(\rho_1(T) e^{i\Omega X}) \quad (4.2.5)$$

$$\sigma(X, T) = \sigma_0(T) + \varepsilon \text{Re}(\sigma_1(T) e^{-i\Omega X}) \quad (4.2.6)$$

Conseguimos la aproximación de orden cero

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial T} = 0, \quad \rho_0 = \text{cte} \quad (4.2.7)$$

$$\rho_0 R = \frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \quad (4.2.8)$$

que también se puede escribir así

$$\sigma_0 = \rho_0 \int_0^T R dT \quad (4.2.9)$$

Para la aproximación de primer orden en  $\varepsilon$ , las ecuaciones para las amplitudes y la fase de las bandas adyacentes, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial T} = \Omega^2 \rho_0 \sigma_1(T) D \quad (4.2.10)$$

$$\frac{\sigma_1}{\partial T} = \rho_1(T) \left[ R - \Omega^2 \frac{D}{4\rho_0} \right] \quad (4.2.11)$$

Para el caso de nuestra ecuación no-autónoma, la amplitud de Fourier se puede representar en forma general de la siguiente manera

$$\rho_1(T) = Re \left\{ \rho_1 \exp \left[ i \int_0^T K(T) dT \right] \right\} \quad (4.2.12)$$

$$\sigma_1(T) = Re \left\{ \sigma_1 \exp \left[ i \int_0^T K(T) dT \right] \right\} \quad (4.2.13)$$

Seguidamente derivamos la ecuación ordinaria de segundo orden considerando las variables de los coeficientes

$$\frac{d^2 \rho_1}{dT^2} = \Omega^2 \rho_0 \rho_1(T) D \left( R - \Omega^2 \frac{D}{4\rho_0} \right) \quad (4.2.14)$$

que tiene el aspecto formal de la ecuación bien conocida

$$\frac{d^2 Y}{dT^2} + k_0^2(T) Y = 0 \quad (4.2.15)$$

Entonces, el potencial de oscilación típica tomará la forma

$$U(T, Y) = k_0^2(T) Y^2 / 2 \quad (4.2.16)$$

Denotando  $k_0 = K$  obtenemos la relación de dispersión en ese determinado potencial de oscilación, por lo tanto

$$K = \pm \Omega \left\{ \rho_0 D \left( \Omega^2 \frac{D}{4\rho_0} - R \right) \right\}^{1/2} \quad (4.2.17)$$

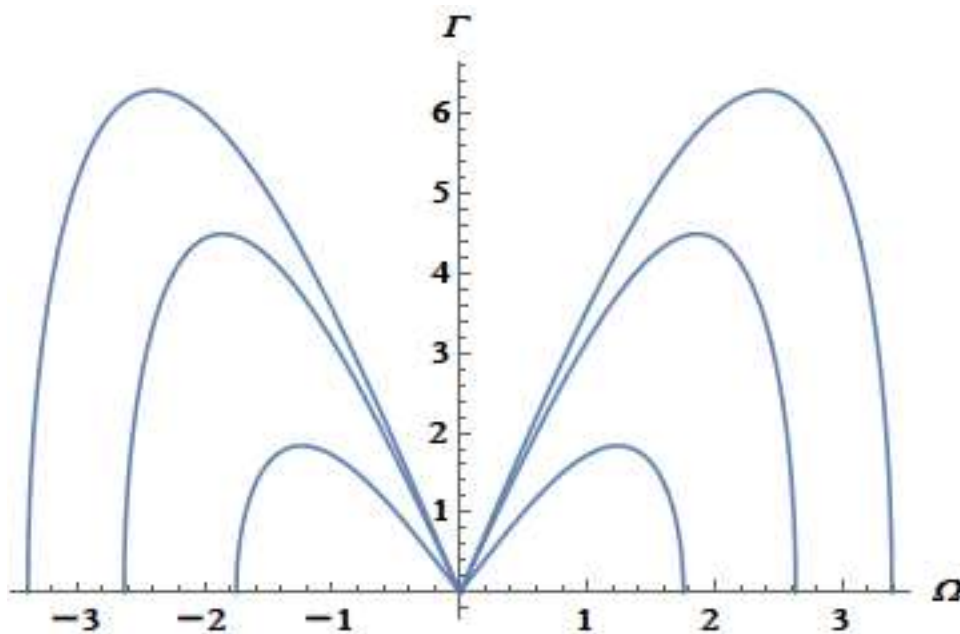
Esta relación de dispersión es totalmente dependiente del signo del término dentro de la raíz cuadrada, ya que, si es positivo, el número de onda será real, correspondiente a meras oscilaciones alrededor de la solución no perturbada, mientras que, si es negativo, el número de onda se volverá imaginario, correspondiente al crecimiento exponencial y por tanto tendremos inestabilidad. Volviendo a los parámetros iniciales cuando

$$R = \frac{3\beta}{2\omega_0''}, D = \omega_0''$$

La inestabilidad ocurrirá cuando.

$$|\Omega| < \frac{2}{\omega_0''} \sqrt{\frac{3}{2}\beta\rho_0} \quad (4.2.18)$$

El espectro se puede describir definiendo un parámetro de ganancia como  $G \equiv 2|Im K|$ . Visualizamos la dependencia del parámetro de ganancia  $G$  de la distancia  $Z$  y de la frecuencia  $\Omega$ . Cuando la no linealidad es de tercer orden o sea termino proporcional a cubico orden, tenemos la típica gráfica de la ganancia:



*Figura 2. Dependencia típica de la ganancia. Los máximos de la ganancia nos dan las dos frecuencias de las ondas armónicas como producto de la inestabilidad.*

La inestabilidad de modulación se manifiesta por las dos bandas laterales espectrales ubicado simétricamente en los máximos de las frecuencias  $\Omega_{max}$  a cada lado de la línea central. Con el tiempo, la onda continua se convierte en un tren de pulsos periódicos con un periodo  $T_m = 2\pi/\Omega_{max}$ .



Estas oscilaciones se refuerzas y logran después de un tiempo a formar el pulso inicial periódicamente al estilo del fenómeno de recurrencia de Fermi, Pasta y Ulam

#### 4.3 Solución estacionaria de la ecuación no lineal de Duffing-Schrodinger

La solución aproximada con variables lentas de la ecuación no lineal de Klein-Gordon, ahora lo obtendremos utilizando la solución solitónica de la ecuación no lineal de Schrödinger. Para ello buscaremos la solución de (4.1.14) como

$$A = a(\xi)\exp(\varphi(\zeta)) \quad (4.3.1)$$

Donde  $a = a(\xi)$ ,  $\varphi = \varphi(\zeta)$  con  $\xi = X - UT$ ,  $\zeta = X - VT$ . Esta solución se caracteriza porque tiene dos velocidades:  $U, V$ .

Reemplazando (11.22) en la NSE (a), se derivan dos ecuaciones de la siguiente forma

$$\begin{aligned} -\alpha\varphi_T + \frac{\omega_0''}{2}(\alpha_{XX} - \alpha(\varphi_X)^2 + q\alpha^3) &= 0. \\ a_T + \frac{\omega_0''}{2}(2a_X\varphi_X + \alpha\varphi_{XX}) &= 0 \quad (a) \end{aligned}$$

$$aV\varphi' + \frac{\omega_0''}{2}(a'' - a(\varphi'')^2) + qa^3 = 0 \quad (4.3.2)$$

$$-U(a^2)' + \omega_0''(a^2\varphi')' = 0 \quad (4.3.3)$$

Integrando la ecuación (4.3.3) con condiciones de frontera cero obtenemos que  $\varphi' = U/\omega_0''$  donde

$$\varphi = \frac{U\zeta}{\omega_0''}$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (4.3.2) llegamos a la ecuación del oscilador no lineal

$$a'' - \frac{U(U-2V)}{(\omega_0'')^2} a + \frac{2q}{\omega_0''} a^3 = 0 \quad (4.3.4)$$

Llamado ecuación del oscilador no lineal de Duffing.

Veamos con cierto detalle las soluciones posibles de esta ecuación para lo cual

multiplicamos por la incógnita  $a(\xi)$  e integramos. Denotamos  $\Omega^2 = \frac{U(U-2V)}{(\omega_0'')^2}$ ,  $\gamma =$

$\frac{2q}{(\omega_0'')^2}$  entonces tenemos para la función incógnita  $a$  la ecuación

$$\begin{aligned} a'' - \Omega^2 a + \gamma a^3 &= 0 \\ a' a'' &= (\Omega^2 a - \gamma a^3) a' \\ \frac{1}{2} \frac{da'^2}{d\xi} &= (\Omega^2 a - \gamma a^3) \frac{da}{d\xi} \\ \frac{d}{d\xi} \left( \frac{a'^2}{2} \right) &= \frac{dQ}{d\xi} \end{aligned}$$

Integrando una vez más tenemos para la función incógnita  $a$  la relación

$$a'^2 = 2Q(a) + c \quad (4.3.5)$$

Siendo  $Q(a)$  la energía potencial

$$Q(a) = \frac{\Omega^2 a^2}{2} - \frac{a^4 \gamma}{4} \quad (4.3.6)$$

Finalmente la ecuación en el espacio fase  $\left( A, \frac{\partial A}{\partial \varphi} \right)$  sera

$$\frac{da}{d\xi} = \pm \sqrt{c - \frac{a^4}{2}\gamma + \Omega^2 a^2} \quad (4.3.7)$$

#### 4.4 Solución solitónica brillante como perturbación en la ecuación Klein-Gordon no lineal

De las posibles soluciones que tenga el oscilador no lineal de Duffing un interés especial son las soluciones tipo solitónicas.

La solución de la ecuación (4.3.4) integrando (4.3.7) tipo solitónica se obtienen cuando la constante de integración C se hace nula y cuando  $U > 2V$  tiene la siguiente forma.

$$a = \frac{\Omega\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{sech}(\xi \Omega) \quad (4.4.1)$$

Finalmente, en primera aproximación para las soluciones periódicas de la ecuación cubica no lineal de Klein Gordon tenemos la solución

$$u = u_0 + \varepsilon u_1$$

Siendo  $u_1 = A(X_1, X_2, \dots, T_1, T_2, \dots) e^{i\theta} + c.c$

$$y \quad A = \Omega \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(\Omega \xi) * \exp\left(\frac{i U \zeta}{\omega_0''}\right) \quad (4.4.2)$$

Con  $\zeta = X - VT$  tenemos la siguiente solución

$$A = \Omega \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(\Omega \xi) \exp\left(\frac{i U (X - VT)}{\omega_0''}\right) \quad (4.4.3)$$

Sustituyendo  $\xi = (X - UT)$  en la ecuación anterior y tomando en cuenta que

$X = X_1 = \varepsilon x$  y  $T = T_2 = \varepsilon^2 t$  obtenemos

$$A = \Omega \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(\Omega(\varepsilon x - U\varepsilon^2 t)) \exp\left(\frac{i U(\varepsilon x - V\varepsilon^2 t)}{\omega_0''}\right) \quad (4.4.4)$$

Sustituyendo  $u_1$  en la ecuación para  $u$  obtenemos.

$$u = u_0 + \varepsilon(Ae^{i\theta} + c.c)$$

Como de costumbre  $cc$  significa compleja conjugada. En términos de las primeras variables  $x, t$  la solución final será.

$$u = u_0 + \varepsilon \left( \Omega \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(\Omega(\varepsilon x - U\varepsilon^2 t)) e^{\frac{iU(\varepsilon x - V\varepsilon^2 t)}{\omega_0''}} \right) * e^{i\theta} + cc. \quad (4.4.5)$$

Considerando la parte compleja obtenemos

$$u = u_0 + \varepsilon \left( \Omega \sqrt{\frac{2}{\gamma}} 2 \operatorname{sech}(\Omega(\varepsilon x - U\varepsilon^2 t)) \cos \left[ \frac{U(\varepsilon x - V\varepsilon^2 t)}{\omega_0''} + \theta \right] \right) \quad (4.4.6)$$

Nosotros sabemos que  $\theta = k_0 X_0 - \omega_0 T_0$  y tomando en cuenta  $X_0 = x$  y  $T_0 = t$ .

Sustituyendo  $\theta$  y resolviendo la parte derecha de  $u$ , agrupando los términos de  $x$  y  $t$  obtenemos la siguiente solución final de la ecuación no lineal de Klein Gordon.

$$u = u_0 + \varepsilon \left( 2\Omega \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \operatorname{sech}(\Omega(\varepsilon x - U\varepsilon^2 t)) \cos \left[ \frac{x(U\varepsilon + k_0) - t(UV\varepsilon^2 + \omega_0)\omega_0''}{\omega_0''} \right] \right)$$

La función  $u_0$  satisface la ecuación (4.1.8). La inestabilidad de las soluciones armónicas se ve reflejada por la presencia de un tren de soluciones solitónicas que surgen como consecuencia de la no linealidad dispersiva en variables lentas. Recordemos que la ecuación de Schrödinger no lineal posee  $N$  integrales de movimiento, por lo tanto, pueden aparecer en el medio físico donde se modela el campo no lineal mediante la ecuación de Klein-Gordon  $n$ -solitones, de amplitud reducida. La representación gráfica de esta solución para el caso de que la solución de Klein Gordon  $u = u_0$  tenga aproximación cuasi-armónica descrito por la ecuación y cuando esta misma posee solución solitónica para  $u = u_0$

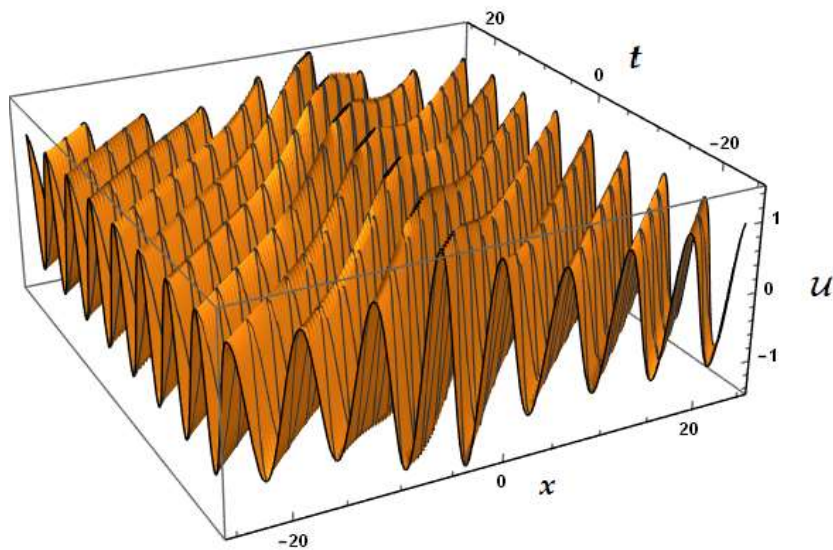


Figura 3. Grafica de la solución perturbada de la ecuación de Klein-Gordon cuando la original soporta solución cuasi armónica, con el parámetro pequeño  $\epsilon = 0.01$

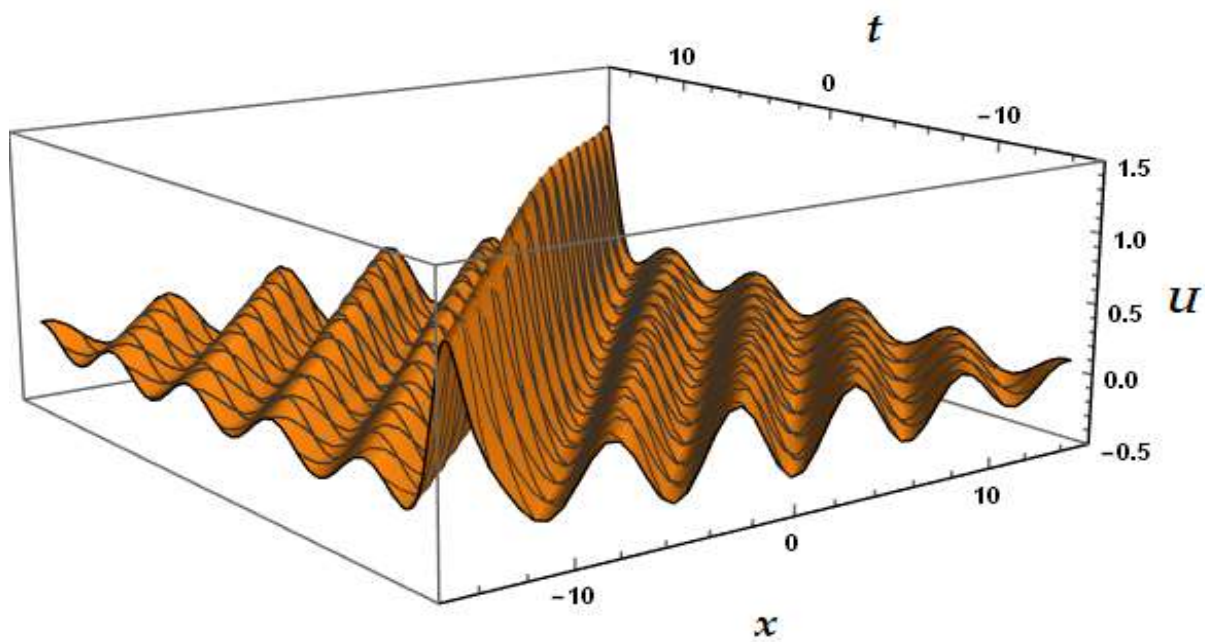


Figura 4. Representación gráfica de la solución solitónica perturbada de Klein Gordon donde se observa el surgimiento de perturbación armónica debido a la inestabilidad modulacional. El parámetro  $\epsilon=0.01$ .

## **CAPITULO 5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.**

Se analiza la ecuación cubica no lineal de Klein Gordon que surge en el estudio de procesos naturales físicos diversos. Inicialmente se hace una introducción de sobre la historia y soluciones exactas de esta ecuación.

En el primer capítulo se estudian algunas soluciones unidimensionales de la ecuación de KG concretamente se analizan dos casos de soluciones concentradas que corresponden a un potencial el caso con dos máximos de altura idéntica y el caso con dos mínimos. En el primer caso la solución recibe el nombre de kink en el que se describe de la siguiente manera que su potencial tenga como mínimo dos máximos locales no degenerados de altura equivalente en unos puntos, el potencial para la existencia del kink no está obligado a ser par, para el segundo caso de la solución concertada se le da el nombre de solito.

En el segundo capítulo se hace mención a que es la inestabilidad modulacional el cual nos podemos referir a la (IM) como un fenómeno el que una onda continua inicialmente perturbada tiende a romperse espontáneamente en un tren de pulsos periódico similar a un solitón mientras se propaga a través de un medio dispersivo

En el tercer capítulo se analiza una solución de la ecuación de Klein Gordon con no linealidad cubica usando las ecuaciones de Whitham y el criterio de Lighthill para ver la inestabilidad causada por la interacción de una onda portadora con frecuencia y perturbaciones llamados satélites. En este caso se asume que las funciones cambian lentamente, entonces se pueden considerar como funciones de variables lentas

Posteriormente se analiza mediante el método de escalas múltiples, la modulación inestable de la misma. Se consideran dos casos. La primera cuando la ecuación no lineal de Klein Gordon en el límite lineal se considera como soluciones armónicas y se discute la inestabilidad modulacional para estas soluciones basados en el criterio de que las pequeñas perturbaciones son inestables en un rango específico de números de ondas.

En el segundo caso, cuando las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon son de tipo solitónico. En este caso las perturbaciones son no lineales y pertenecen a las soluciones exactas estacionarias de la ecuación no lineal de Schrödinger (ENLS) La expresión (4.3.7) describe el cambio lento en amplitud y fase (paquete de ondas).

Una vez realizado el análisis obtenemos que, en presencia de inestabilidad de modulación, las pequeñas modulaciones de una banda de ondas espacialmente homogénea aumentan gradualmente es decir se produce la automodulación, como resultado el paquete de ondas se desmorona y en su lugar surgen una serie de solitones tipo Schrödinger no lineal que son las soluciones (4.3.7).

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Scott Russell J. Report on waves. Rep. Of the 14th meeting of the British association for the advancement of science, York, Sep. 1844. London, 1845. P. 311-390.
- [2] Ablowitz M. J. H. Segur. Solitons and inverse scattering Transforms- Philadelphia SIAM 1981
- [3] O. Klein, Elektrodynamik und Wellenmechanik vom standpunkt des korrespondenzprinzip, Z. Phys. 41 (1927), pp 407-442.
- [4] W. Gordon, Der Comptoeffekt nach der Schrödingerschen theorie, Z. Phys. 40 (1926), PP. 117-133.
- [5] L. P. Eisenhart. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Ginn and Co. Boston 1909.
- [6] S. K. Malik and M. Sinha, Modulational instability in magnetic fluids, Quart. Appl. Math. 43 (1985), no. 1. Pp 57-64.
- [7] L. S. Schiff, nonlinear meson theory of nuclear force I. Neutral scalar mesons with point-contact repulsion, Phys. Rev. 84(1951), no. 1, pp.1-9
- J. K. Perring and T. H. R. Skyrme, A model unified field equation, Nuclear, Phys. 31 (1962), pp 550-555.
- S. Coleman, Quantum Sine-Gordon equation as the massive Thirring model, Phys. Rev. D 11 1975 n8 pp. 2088-2097
- [8] A. R. Bishop, J. A. Krumhansl and S. E. Trullinger, solitons in condensed matter: a paradigm, Phys. D 1 (1980), no.1, pp. 1-14.
- J. Frenkel and T. Kontorova, On the theory of plastic deformation and twinning, Acad. Sci. U.S.S. J. Phys. 1(1939), pp. 137-149.
- [9] V. G. Makhan
- [10] H. Han, Z. Zhang, Split local absorbing conditions for one-dimensional nonlinear Klein-Gordon equation on unbounded domain, J. Comput. Phys. 227(2208) 8992-9004
- [11] A.M. Wazwaz, New travelling wave solutions to the Boussinesq and the Klein-Gordon equations, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 13 (2008) 889-901.



- [12] Sirendaoreji, Auxiliary equation method and new solutions of Klein-Gordon equations, *Chaos Solitons Fractals* 31 (4) (2007) 943-950.
- [13] Sirendaoreji, A new auxiliary equation and exact travelling wave solutions of nonlinear equations, *Phys. Lett. A* 356 (2) (2006) 124-130.
- [14] A.M Wazwaz, The tanh and the sine-cosine method for compact and noncompact solutions of the nonlinear Klein-Gordon equation, *Appl. Math. Comput.* 167 (2005) 1179-1195.
- [15] S. M. El- Sayed, the decomposition method for studying the Klein-Gordon equation, *Chaos Solitons Fractals* 18 (2003) 1025-1030.
- [16] P. J. Caudrey, I.C. Eibeck. J.D. Gibbon, The sine- Gordon equation as a model classical field theory, *Nuovo Cimento* 25 (1975) 497-511.
- [17] R.K Dodd, I.C. Eibeck. J.D. Gibbon, H.C Morris, *Solitons and Nonlinear wave equations*, Academic, London, 1982.
- [18] R. RAJARAMAN *Soliton and instantons an introduction to Solitons and Instanton in quantum field theory*.
- [19] Pitaevsky L. P. *espirales en un gas de Bose ideal Journal of experimental and theoretical physics* 1961 Volumen 40 no. 2.
- [20] Dezehen P. *física de cristales líquidos* editorial MIR 1977.
- [21] *Solitons . Capítulos del libro. Redacción Vullough and F. Caudry* 1983 editorial MIR.
- [22] Alwin. Scott *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Taylor and Francis Group (2005)
- [23] V.E Zakharov and L.A Ostrovsky *Modulational Instability: the beginning Elsevier, Physica, D* 238, (2009) 540-548
- [24] G.B. Whitham. A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. *J. Fluid Mech.* 22 (1965) 273-283.
- [25] Whitham J. *Ondas lineales y no lineales*. M.: Mir, 1977.
- [26] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S. P., Ryskin N.M *Fluctuaciones no lineales*. Moscú: Fizmatlit, 2002 (1ª edición), 2005 (2ª edición).
- [27] Ravinovich M.I., Trubetskov D.I *Introducción a la teoría de las oscilaciones de las ondas*. Moscú: Nauka, 1984.

[28] Zaslavsky G.M., Sagdeev. R. Z. introducción a la física no lineal. De péndulo a la turbulencia y al caos. Moscú: Nauka 1988

[29] Lighthill M. J. contribución a la teoría de ondas no lineal en sistema dispersivos // M. J. Contribuciones a la teoría de ondas no lineal de sistemas dispersivos // J. Inst. Matematicas. Aplicacion 1965 vol. 1, num. 3. Pags. 269-306.

[30] Benjamin T. B., Feir J. E. La desintegración de los trenes de olas e aguas profundas. Pinta. I Teoria // J. Fluid Mech 1967 vol. 27, num. 3. Pags. 417- 430.

[31] Naife. A. Introduccion a los métodos de perturbación. M.: Mir, 1984.

[32] Zajarov V.E. Estabilidad de ondas periódicas de amplitud finita en la superficie de un liquido profundo. Prikl. 1968. No 2. S. 86-94.