UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL HIPERESPACIO PIXLEY-ROY

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

MIGUEL ANGEL MORALES BAUTISTA

DIRECTORES DEL TRABAJO:
DAVID MAYA ESCUDERO
FERNANDO OROZCO ZITLI

TOLUCA, MÉXICO, NOVIEMBRE 2022

Índice general

Introducción

La Teoría de hiperespacios vio sus inicios en el año de 1922 con los trabajos de Leopold Vietoris y Felix Hausdorff. Sus trabajos con el análisis de la hoy llamada topología de Vietoris son considerados como el inicio en el estudio de los hiperespacios.

En 1969, en la conferencia anual de topología celebrada en la Universidad de Auburn, Carl Pixley y Prabir Roy presentaron por primera vez la construcción de un importante ejemplo para el estudio de los espacios de Moore, un espacio de Moore que no cumple la condición de cadena numerable. Dotaron con una topología a la colección de todos los subconjuntos finitos no vacíos de un espacio topológico T_1. Incluso hasta nuestros días, el comportamiento topológico del espacio de Pixley y Roy es un objeto de estudio de gran interés [1, 8–11].

Sea X un espacio topológico T_1. Denotamos por $\mathcal{F}[X]$ a la colección de todos los subconjuntos finitos no vacíos de X. Para cada miembro F de $\mathcal{F}[X]$ y para cada subconjunto abierto de U de X definimos $[F, U]$ como el conjunto $\{G \in \mathcal{F}[X] : F \subseteq G \subseteq U\}$. La familia que consiste de todos los subconjuntos de $\mathcal{F}[X]$ con la forma $[F, U]$ es una base para una topología τ_{PR} para $\mathcal{F}[X]$. Al espacio topológico $(\mathcal{F}[X], \tau_{PR})$ le llamaremos *el hiperespacio Pixley-Roy de X*.

En este trabajo de tesis estudiaremos algunas de las propiedades del hiperespacio Pixley-Roy de un espacio topológico T_1. El primer capítulo consta de conceptos básicos y resultados tanto de teoría de conjuntos como de topología los cuales son fundamentales para una lectura accesible.

El segundo capítulo comienza con un análisis de las propiedades básicas del conjunto $\mathcal{F}[X]$, seguido de una introducción mas profunda del hiperespacio de Pixley-Roy, su comportamiento topológico y los axiomas de separación con los cuales cuenta.

En el tercer capítulo analizaremos el comportamiento topológico que surge

como consecuencia de dotar al hiperespacio de Pixley-Roy con las propiedades secuencial, Fréchet-Urysohn y Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
En el cuarto y último capítulo mostraremos la equivalencia que existe entre el primer axioma de numerabilidad y ser un espacio de Moore que satisface el hiperespacio de Pixley-Roy.

Capítulo 1

Preliminares

Para obtener resultados dentro de la topología es inevitable emplear el álgebra de conjuntos como herramienta fundamental. Este hecho nos motiva a presentar un breve repaso de la teoría de conjuntos y junto con ella una serie de proposiciones conocidas de la topología general.

1.1. Teoría de Conjuntos

Las definiciones de esta sección pueden ser consultadas en [5].

Definición 1.1. Un **conjunto parcialmente ordenado**, también llamado **po-conjunto** o **poset**, es un par $(P, \leq)$ en donde P es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden, o sea una relación que cumple:

1. (Reflexiva) Para todo $x \in P$ se tiene $x \leq x$.
2. (Antisimétrica) Para $x, y \in P$ se tiene que $x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$.
3. (Transitiva) Para $x, y, z \in P$ se tiene que $x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Definición 1.2. Un conjunto parcialmente ordenado P se llama **orden total** o **cadena** si para cualquier par de elementos $x, y \in P$ tenemos que x y y son comparables, es decir, $x \leq y$ o $y \leq x$.

Definición 1.3. Sea P un poset. Para un subconjunto A de P decimos que $u \in P$ es una **cota superior de** A si $u \geq x$ para todo $x \in A$.

Definición 1.4. A un elemento $x \in P$ se le llama **maximal** si no hay un elemento $z \in P$ tal que $z > x$.

La demostración del siguiente lema puede ser consultada en [5, Teorema 8.10, pág. 184].

Lema 1.5. *Zorn-Kuratowski. Si X es un conjunto no vacío y parcialmente ordenado en el cual toda cadena posee una cota superior, entonces X contiene, al menos, un elemento maximal.*

Definición 1.6. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos no vacíos de un conjunto no vacío X. Diremos que un subconjunto $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$ es **MAP** si cumple las siguientes condiciones:

1. para cada $A, B \in \mathcal{G}$ se tiene que $A = B$ ó $A \cap B = \emptyset$,
2. para cada $F \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{G}$ existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $F \cap G \neq \emptyset$.

Lema 1.7. *Sea X un conjunto no vacío. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{A}$ contiene un subconjunto MAP.*

Demostración. Definamos $\mathfrak{N} = \{\mathcal{K} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) : A = B$ ó $A \cap B = \emptyset$ para cada $A, B \in \mathcal{K}\}$ donde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ es el conjunto potencia de $\mathcal{A}$. Usaremos el Lema de Zorn-Kuratowski 1.5 para demostrar que el conjunto ordenado $(\mathfrak{N}, \subseteq)$ tiene un maximal.
Para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\{A\} \in \mathfrak{N}$. Con lo cual $\mathfrak{N} \neq \emptyset$.
Sea $\mathfrak{C}$ una cadena de $\mathfrak{N}$. Hacemos $\mathcal{M} = \bigcup \mathfrak{C}$. Veamos que $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$. Sea $T \in \mathcal{M}$. Entonces existe $\mathcal{I} \in \mathfrak{C}$ tal que $T \in \mathcal{I} \in \mathfrak{N}$. Por lo que $\mathcal{I} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y en consecuencia $T \in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$. Con esto tenemos que, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$, es decir $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Sean $R, S \in \mathcal{M}$ tales que $R \neq S$. Observemos que existen $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathfrak{C}$ tales que $R \in \mathcal{E}$ y $S \in \mathcal{F}$. Dado que $\mathfrak{C}$ es una cadena de $\mathfrak{N}$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ ó $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$. Supongamos que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. En consecuencia, $R, S \in \mathcal{F}$, así $R \cap S = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$. Observemos que para todo $\mathcal{J} \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{J} \subseteq \bigcup \mathfrak{C} = \mathcal{M}$. Con lo cual $\mathcal{M}$ es cota superior de $\mathfrak{C}$.
Por Lema 1.5, existe un elemento maximal $\mathcal{G}$ de $(\mathfrak{N}, \subseteq)$. Afirmamos que $\mathcal{G}$ es un subconjunto MAP de $\mathcal{A}$.
Del hecho que $\mathcal{G} \in \mathfrak{N}$ se tiene que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ y, $E = H$ ó $E \cap H = \emptyset$ para todo $E, H \in \mathcal{G}$. Finalmente si $Q \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{G} \cup \{Q\} \notin \mathfrak{N}$, esto implica que existe $P \in \mathcal{G}$ de tal forma que $P \cap Q \neq \emptyset$. En conclusión $\mathcal{G}$ es un subconjunto MAP de $\mathcal{A}$. $\square$

Definición 1.8. Sea X un conjunto no vacío. Diremos que X es **numerable** si y sólo si existe una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en X.

A partir de la siguiente sección presentaremos conceptos topológicos los cuales fueron extraídos de [2,7], sin embargo pueden ser consultados en cualquier otro libro de topología básica.

1.2. Espacios topológicos

Definición 1.9. Una **topología** en un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes condiciones:

1. el conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a τ,
2. si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$, y
3. si $\mathcal{A} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.

Definición 1.10. Si τ es una topología en un conjunto X, a la pareja (X, τ) le llamaremos **espacio topológico**, abreviado como X *es un espacio topológico* cuando no exista confusión sobre τ.

Definición 1.11. Si X es un espacio topológico, a los elementos que pertenecen a la topología de X reciben el nombre de **subconjuntos abiertos** de X, que con el fin de simplificar notación abreviaremos como $U \in \tau_X$.

Definición 1.12. Sea X un espacio topológico. Si Y es un subconjunto de X, la colección $\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$ es una topología sobre Y, denominada **topología de subespacio o topología relativa**. Con esta topología Y se denomina **subespacio** de X.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Diremos que $\mathcal{B}$ es **base** para una topología sobre X si satisface:

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$, y
2. si B_1 y B_2 son elementos de $\mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces, la colección $\tau_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X : \text{ existe } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ tal que } A = \bigcup \mathcal{A}\}$ es una topología en X que tiene a $\mathcal{B}$ como base.

Definición 1.14. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Diremos que una familia $\mathcal{B}_x$ de elementos de τ es **base local para τ en x** si satisface:

1. $x \in V$ para cada $V \in \mathcal{B}_x$, y
2. si $W \in \tau$ tal que $x \in W$, entonces existe $U \in \mathcal{B}_x$ de tal forma que $U \subseteq W$.

Teorema 1.15. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es un subconjunto abierto de X si y sólo si para cada $y \in A$ existe $V \in \tau_X$ tal que $y \in V \subseteq A$.*

Demostración. Supongamos que $A \in \tau_X$. Sea $y \in A$. Observemos que $y \in A \subseteq A$.

Ahora supongamos que para cada $y \in A$, existe $V \in \tau_X$ tal que $y \in V \subseteq A$. Notemos que $W = \bigcup\{V \in \tau_X : V \subseteq A\} \in \tau_X$ y $W \subseteq A$. Por último veamos que $A \subseteq W$. Sea $b \in A$. Entonces existe $U \in \tau_X$ de tal forma que $b \in U \subseteq A$. Así, $b \in U \subseteq W$. Con lo cual $A \subseteq W$. Por lo tanto, $W = A$ y A es un subconjunto abierto de X. $\square$

Definición 1.16. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. Decimos que E es un **subconjunto cerrado** de X si $X \setminus E \in \tau_X$.

Definición 1.17. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. El **interior de** E, el cual denotaremos con $Int(E)$, es la unión de la colección de subconjuntos de E que son elementos de τ_X. A los puntos que pertenecen a $Int(E)$ les llamaremos **puntos interiores de** E.

Revisar [2, Proposición 2.9, pág. 57] para ver una prueba de la siguiente proposición.

Proposición 1.18. *Sea X un espacio topológico y A, B y E subconjuntos de X. Se cumple que:*
(1.18.1) *$Int(E)$ es un subconjunto abierto de X.*
(1.18.2) *$Int(E)$ es el mayor abierto que está contenido en E, es decir, si A es un abierto en X contenido en E, entonces $A \subseteq Int(E) \subseteq E$.*
(1.18.3) *Si $A \subseteq B$, entonces $Int(A) \subseteq Int(B)$.*
(1.18.4) *$E \in \tau_X$ si y sólo si $Int(E) = E$.*

Definición 1.19. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación de** E si cada $V \in \tau_X$ que contenga a x cumple que $(E \cap V) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Definición 1.20. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. El **conjunto derivado de** E, que denotaremos por $Dv(E)$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de E.

Definición 1.21. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. La **cerradura de** E es el subconjunto $Cl(E) = E \cup Dv(E)$.

Definición 1.22. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ es un **punto de adherencia a** E si cada $V \in \tau_X$ que contenga a x cumple que $E \cap V \neq \emptyset$.

Teorema 1.23. *Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. Entonces $Cl(E) = \{x \in X : x \text{ es punto adherente a } E\}$.*

Demostración. Sea $x \in Cl(E)$. De esto, $x \in E$ ó $x \in Dv(D)$. Si x perteneciese a E, todo subconjunto abierto U que contenga a x cumpliría que $U \cap E \neq \emptyset$. Por otro lado, en el caso que x perteneciera a $Dv(E) \setminus E$ se tendría que $(E \cap U) \setminus \{x\} = (E \cap U) \neq \emptyset$ para todo subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Con esto se concluye que x es un punto adherente a E.
Ahora, sea y un punto adherente a E. Si $y \in E$, se tendría que $y \in Cl(E)$. En caso que $y \notin E$, todo subconjunto abierto U de X tal que $y \in U$, satisfaría que $(U \cap E) \setminus \{y\} = U \cap E \neq \emptyset$. Con esto, $y \in Cl(E)$.

Por lo tanto, $Cl(E) = \{x \in X : x \text{ es punto adherente a } E\}$. $\square$

La prueba de la siguiente proposición se considera como en [2, Proposición 2.6, pág. 54].

Proposición 1.24. *Sea X un espacio topológico y E un subconjunto de X. Se cumple que:*
(1.24.1) *$Cl(E)$ es un subconjunto cerrado de X.*
(1.24.2) *E es un subconjunto cerrado de X si y sólo si $Cl(E) = E$.*

Lema 1.25. *Sea Z un espacio topológico. Si G es un subconjunto de Z, entonces $Cl_Z(A) = Cl_G(A)$ para todo $A \subseteq G$.*

Demostración. Consideremos $Cl_Z(A)$ como la cerradura de A en el espacio Z y $Cl_G(A)$ como la cerradura de A en el subespacio Y. Sea $A \subseteq G$. Para probar la primera parte, sean $x \in Cl_Z(A)$ y V un subconjunto abierto de G de tal forma que $x \in V$. De esto, existe W un subconjunto abierto de Z tal que $G \cap W = V$. Del hecho que $x \in W$ se sigue que $W \cap A \neq \emptyset$. En consecuencia $(G \cap W) \cap A \neq \emptyset$. Es decir, $x \in Cl_G(A)$.

Por último, sean $y \in Cl_G(A)$ y Q un subconjunto abierto de Z tal que $y \in Q$. Observemos que $G \cap Q$ es un subconjunto abierto de G que cumple que $y \in G \cap Q$. Por lo que $(G \cap Q) \cap A \neq \emptyset$. De este modo, $A \cap Q \neq \emptyset$ y así, $y \in Cl_Z(A)$.

Por lo tanto, $Cl_Z(A) = Cl_G(A)$. □

Definición 1.26. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. Un punto $x \in X$ es un **punto aislado de** E si $x \in E \setminus Dv(E)$.

Teorema 1.27. *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto de X.*

(1.27.1) *Un punto $x \in X$ es un punto aislado de A si y sólo si existe un abierto U tal que $U \cap A = \{x\}$.*

(1.27.2) *Un punto $x \in X$ es aislado de X si y sólo si $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X.*

Demostración. Para demostrar (1.27.1), sea x un punto aislado de A. Entonces $x \in A \setminus Dv(A)$, es decir, $x \in A$ y $x \notin Dv(A)$. La condición $x \notin Dv(A)$ implica que existe U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$ y $(A \cap U) \setminus \{x\} = \emptyset$. De esto se concluye que $A \cap U = \{x\}$.
Ahora, supongamos que existe U un subconjunto abierto de X tal que $A \cap U = \{x\}$. En consecuencia $x \notin Dv(A)$. Así, $x \in A \setminus Dv(A)$, es decir, x es un punto aislado de A.

Para demostrar (1.27.2) sea $y \in X$. Por Teorema (1.27.1), y es un punto aislado de X si y sólo si existe V un subconjunto abierto de X tal que $V \cap X = \{y\}$. Observemos que $V \cap X = \{x\}$ es un subconjunto abierto de X. Por lo que concluimos que y es un punto aislado de X si y sólo si $\{y\}$ es un subconjunto abierto de X. □

Definición 1.28. Sea X un espacio topológico. Una **sucesión** en X es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. La sucesión f se representa por el símbolo $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y los valores de f, esto es, los elementos $f(n)$, se llaman términos de la sucesión. Para denotar una sucesión sólo lo haremos por sus elementos en lugar de hacerlo por la función. Si f es una sucesión y $f(n) = x_n$, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denotará a f.

Definición 1.29. Sea X un espacio topológico. Decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X **converge a un punto** $w \in X$, si para cualquier $U \in \tau_X$ tal que $w \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n \geq m$. Representamos el concepto anterior escribiendo $x_n \to w$ ó $\lim x_n = w$.

Definición 1.30. Sea E un subconjunto de un espacio topológico X. Diremos que E es un **subconjunto denso en** X si y sólo si cada $A \in \tau_X \setminus \{\emptyset\}$ satisface $A \cap E \neq \emptyset$.

Definición 1.31. Sea X un espacio topológico.

1. El espacio X es primero numerable si cada punto $x \in X$ posee una base local numerable.

2. El espacio X es segundo numerable si existe una base numerable para τ

Definición 1.32. Sean X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Decimos que Y es un subconjunto **compacto** de X si y sólo si para toda colección $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ de subconjuntos abiertos de X tal que $Y \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{I}} U_\alpha$, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \cdots, U_{\alpha_n}\}$ tal que $Y \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$.

1.3. Axiomas de separación

Definición 1.33. Diremos que un espacio topológico X es un espacio T_1 si cada subconjunto finito de X es un subconjunto cerrado de X.

Consideraremos la demostración del siguiente teorema dada en [7, Teorema 19.7, pág. 112].

Teorema 1.34. *Sea X un espacio T_1. Un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** de un subconjunto E de X si, y sólo si, cada abierto que contiene a x contiene también una cantidad infinita de puntos del conjunto E.*

Definición 1.35. Un espacio topológico X es un espacio de **Hausdorff** o T_2 si X satisface la siguiente condición: para cuales quiera puntos distintos x y y de X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.36. Un espacio topológico X es **regular** o T_3 si satisface las siguientes condiciones:

1. X es un espacio T_1,

2. Para cualquier punto $x \in X$ y cualquier $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$, existe $V \in \tau_X$ tal que $x \in V \subseteq Cl(V) \subseteq U$.

Las demostraciones del siguiente teorema y el siguiente corolario pueden ser consultados en [2, Teorema 7.8, pág. 245] y [2, Corolario 7.9, pág. 246] respectivamente.

Teorema 1.37.

1. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de X y $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, entonces existen U y V subconjuntos abiertos ajenos de X tales que $K_1 \subseteq U$ y $K_2 \subseteq V$.*

2. *Sea X un espacio regular. Si F es un subconjunto cerrado de X, K es un subconjunto compacto de X y $F \cap K = \emptyset$, entonces existen subconjutos abiertos ajenos U y V tales que $F \subseteq U$ y $K \subseteq V$.*

Corolario 1.38. *Si X es un espacio de Hausdorff y K es subconjunto compacto de X, entonces K es cerrado en X.*

Lema 1.39. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Si $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ es un subconjunto finito de X, entonces existen $U_1, U_2, \cdots, U_k$ subconjuntos abiertos de X tales que $x_i \in U_i$ para todo $i \leq k$ y para $i \neq j$ se cumple que $U_i \cap U_j = \emptyset$.*

Demostración. Sean $i, j \in \{1, \cdots, k\}$ distintos. Entonces del hecho que X es un espacio de Hausdorff, para $x_i, x_j \in A$, existen subconjuntos abiertos $W_{i,j}$ y $W_{j,i}$ tales que $x_i \in W_{i,j}$, $x_j \in W_{j,i}$ y $W_{i,j} \cap W_{j,i} = \emptyset$. Para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, definamos $U_i = \bigcap\{W_{i,j} : j \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{i\}\}$. Observemos que $x_i \in U_i$ y en consecuencia que U_i es intersección finita de subconjuntos abiertos se tiene que U_i es un subconjunto abierto. Sean $l, q \in \{1, \cdots, k\}$ distintos. Notemos que $U_l = \bigcap\{W_{l,j} : j \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{l\}\} \subseteq W_{l,q}$. Del mismo modo, $U_q = \bigcap\{W_{q,j} : j \in \{1, \cdots, k\} \setminus \{q\}\} \subseteq W_{q,l}$. De ahí, la condición $W_{l,q} \cap W_{q,l} = \emptyset$ implica que $U_l \cap U_q = \emptyset$. $\square$

Definición 1.40. Sea X un espacio topológico T_1. Diremos que X es **completamente regular** o **Tychonoff** si y sólo si existe una base $\mathcal{B}$ de τ_X tal que:

1. Para cada $x \in X$ y cualquier $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$ y $X = U \cup V$.

2. Si $U, V \in \mathcal{B}$ son tales que $X = U \cup V$, entonces existen $A, B \in \mathcal{B}$ tales que $X \setminus V \subseteq A$, $X \setminus U \subseteq B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Definición 1.41. Un espacio topológico X es **normal** o T_4 si X satisface las siguientes:

1. X es un espacio T_1; y

2. para cualesquiera subconjuntos cerrados y ajenos F_1 y F_2 de X, existen abiertos ajenos U_1 y U_2 de X tales que $F_1 \subseteq U_1$ y $F_2 \subseteq U_2$.

Definición 1.42. Un subconjunto de un espacio topológico X es G_δ si es la intersección de una colección numerable de subconjuntos abiertos de X y un subconjunto es F_σ si es la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados de X.

Definición 1.43. Un espacio topológico X es **perfectamente normal** si X es normal y cada subconjunto cerrado de X es G_δ.

1.4. Funciones continuas y homeomosfismos

Definición 1.44. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es una **función continua** si para cualquier subconjunto abierto U de Y, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X.

Definición 1.45. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Se dice que f es **homeomorfismo** si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. f es biyectiva

2. f es continua

3. f^{-1} es continua

Diremos que los espacios X y Y son **homeomorfos** denotado por $X \cong Y$ si existe un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$.

Definición 1.46. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función.

1. f es una función abierta si la imagen bajo f de cualquier subconjunto abierto de X es un subconjunto abierto en Y.

2. f es una función cerrada si la imagen bajo f de cualquier subconjunto cerrado de X es un subconjunto cerrado en Y.

Para consultar una prueba de la siguiente proposicion ver [2, Proposición 3.17, pág. 99]

Proposición 1.47. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*
(1.47.1) *f^{-1} es continua.*
(1.47.2) *f es abierta.*
(1.47.3) *f es cerrada.*

Definición 1.48. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X esta encajado en Y si existe una función continua que $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f : X \longrightarrow f(X)$ es un homeomorfismo.

Capítulo 2

El hiperespacio Pixley-Roy

El hiperespacio Pixley-Roy se introdujo para mostrar la existencia de un espacio de Moore no separable que satisface la condición de cadena numerable. Después de cumplir con su cometido se convirtió en una máquina de contraejemplos que atrajo el interés de expertos. En este capítulo presentamos las propiedades que posee.
A lo largo de este trabajo, X será un espacio topológico infinito y T_1.

2.1. Propiedades básicas

Definición 2.1. Definimos

$$\mathcal{F}[X] = \{A \subseteq X : A \text{ es finito}, \ A \neq \emptyset\}.$$

Para cada $F \in \mathcal{F}[X]$ y para cada $V \subseteq X$, la colección $\{B \in \mathcal{F}[X] : F \subseteq B \subseteq V\}$ se denotará por $[F, V]$.

Definición 2.2. Para un subconjunto A de X, definimos

$$\mathcal{F}[A] = \{B \in \mathcal{F}[X] : B \subseteq A\}.$$

Lema 2.3. *Sean $C, D \in \mathcal{F}[X]$ y R, S subconjuntos de X. Se cumplen las siguientes condiciones:*
(2.3.1) *Si $L \subseteq C$, entonces $C \in [L, X]$.*
(2.3.2) $[C, R] \cap [D, S] = [C \cup D, R \cap S]$.
(2.3.3) $[D, S] \subseteq [C, R]$ *si y solo si* $C \subseteq D$ *y* $S \subseteq R$
(2.3.4) $[C, R] \cap \mathcal{F}[S] = [C, R \cap S]$.

Demostración. Dado que $L \subseteq C \subseteq X$, concluimos que $C \in [L, X]$. Esto prueba (2.3.1).

Sea $B \in [C, R] \cap [D, S]$. Entonces $C \subseteq B \subseteq R$ y $D \subseteq B \subseteq S$. Esto implica que $C \cup D \subseteq B \subseteq R \cap S$, es decir, $B \in [C \cup D, R \cap S]$. Por lo tanto, $[C, R] \cap [D, S]$ está contenido en $[C \cup D, R \cap S]$. Si $K \in [C \cup D, R \cap S]$, entonces $C \subseteq C \cup D \subseteq K \subseteq R \cap S \subseteq R$ y $D \subseteq C \cup D \subseteq K \subseteq R \cap S \subseteq S$, por lo que equivale a $K \in [C, R]$ y $K \in [D, S]$. En conclusión, $[C \cup D, R \cap S]$ es un subconjunto de $[C, R] \cap [D, S]$. Con esto queda demostrado (2.3.2).

Ahora demostraremos (2.3.3). Supongamos que $[D, S] \subseteq [C, R]$. Entonces $D \in [C, R]$, es decir, $C \subseteq D$. Sea $p \in S$. Notemos que $D \cup \{p\} \in [D, S]$. De esto $C \subseteq D \cup \{p\} \subseteq R$ lo que implica $p \in R$, y así, $S \subseteq R$. Para probar la segunda parte, supongamos que $C \subseteq D$ y $S \subseteq R$. Sea $K \in [D, S]$. Entonces $C \subseteq D \subseteq K \subseteq S \subseteq R$ y con esto $K \in [C, R]$. Concluimos que $[D, S]$ esta contenido en $[C, R]$.

Por último, demostraremos (2.3.4). Sea $Q \in [C, R] \cap \mathcal{F}[S]$. Del hecho que $C \subseteq Q \subseteq R$ y $Q \subseteq S$ se sigue que $C \subseteq Q \subseteq R \cap S$, es decir, $Q \in [C, R \cap S]$. Así, $[C, R] \cap \mathcal{F}[S] \subseteq [C, R \cap S]$. Ahora, sea $P \in [C, R \cap S]$. Entonces, por un lado tenemos que $C \subseteq P \subseteq R \cap S \subseteq R$, es decir, $P \in [C, R]$. Por otro lado, la condición $P \subseteq R \cap S \subseteq S$ implica que $P \in \mathcal{F}[S]$. Con lo cual se concluye que $P \in [C, R] \cap \mathcal{F}[S]$ □

Lema 2.4. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. Entonces no existen $F, G \in \mathcal{F}[X]$ y $U, V \in \tau_X$ tales que $\mathcal{F}[X] = [F, U] \cup [G, V]$.*

Demostración. Sean $F, G \in \mathcal{F}[X]$ y $U, V \in \tau_X$ tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$. Del hecho que X es un subconjunto infinito, se sigue que $F \cup G \subsetneq X$. Así, existe $x \in X$ tal que $x \notin F \cup G$. De esto, $F \nsubseteq \{x\}$ y $G \nsubseteq \{x\}$, por lo que $\{x\} \notin [F, U] \cup [G, V]$. □

Teorema 2.5. *Sea (X, τ_X) un espacio topológico. La familia $\mathcal{B} = \{[F, U] : F \in \mathcal{F}[X], U \in \tau_X\}$ es base para alguna topología de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Primero veamos que $\bigcup \mathcal{B} = \mathcal{F}[X]$. Notemos que los elementos de la familia $\mathcal{B}$ son subconjuntos de $\mathcal{F}[X]$, por consiguiente $\bigcup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}[X]$. Sea $C \in \mathcal{F}[X]$. Con esto $C \in [C, X] \in \mathcal{B}$. Por lo que $C \in \bigcup \mathcal{B}$. Con esto hemos demostrado que $\bigcup \mathcal{B} = \mathcal{F}[X]$.

Ahora sean $G \in \mathcal{F}[X]$ y $[D, V], [E, W] \in \mathcal{B}$ de tal forma que $G \in [D, V] \cap [E, W]$. Por Lema (2.3.2), $[D, V] \cap [E, W] = [D \cup E, V \cap W]$. Entonces $[D \cup E, V \cap W] \in \mathcal{B}$ es tal que $G \in [D \cup E, V \cap W] \subseteq [D, V] \cap [E, W]$.

Por lo tanto tenemos que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología de $\mathcal{F}[X]$ $\square$

La topología para $\mathcal{F}[X]$ garantizada en el teorema anterior se conoce como topología **Pixley-Roy** denotada por τ_{PR} y al espacio topológico $(\mathcal{F}[X], \tau_{PR})$ se le conoce como el hiperespacio de **Pixley-Roy** del espacio topológico X, abreviado como $\mathcal{F}[X]$ es el *hiperespacio Pixley-Roy del espacio topológico* X.

Teorema 2.6. *Si $G \in \mathcal{F}[X]$ y $G \subseteq U \subseteq X$, entonces $[G, U]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Veamos que $\mathcal{F}[X] \backslash [G, U] \in \tau_{PR}$ empleando Teorema 1.15. Sea $H \in \mathcal{F}[X] \backslash [G, U]$. Entonces se cumple que $G \nsubseteq H$ ó $H \nsubseteq U$.

Caso 1. $G \nsubseteq H$.

Entonces existe $q \in G$ tal que $q \notin H$. Del hecho que X es T_1, se sigue que $X \backslash \{q\} \in \tau_X$. De esto $H \in [H, X \backslash \{q\}] \in \tau_{PR}$. Mostremos que $[H, X \backslash \{q\}] \subseteq \mathcal{F}[X] \backslash [G, U]$. Sea $K \in [H, X \backslash \{q\}]$. Esto implica que $H \subseteq K \subseteq X \setminus \{q\}$. Por lo que $q \in G \setminus K$, es decir, $G \nsubseteq K$. Entonces $K \notin [G, U]$. Por lo tanto, $H \in [H, X \backslash \{q\}] \subseteq \mathcal{F}[X] \backslash [G, U]$.

Caso 2. $H \nsubseteq U$.

Notemos $H \in [H, X] \in \tau_{PR}$. Probaremos que $[H, X]$ está contenido en $\mathcal{F}[X] \backslash [G, U]$. Sea $L \in [H, X]$. Entonces se sigue que $H \subseteq L$. Como consecuencia de que $H \nsubseteq U$, tenemos que $L \nsubseteq U$. Con lo cual concluimos que $L \notin [G, U]$. Por lo tanto, $H \in [H, X] \subseteq \mathcal{F}[X] \backslash [G, U]$.

Por los casos anteriores se concluye que $\mathcal{F}[X] \backslash [G, U]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$, y así $[G, U]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. $\square$

Corolario 2.7. *La base $\mathcal{B} = \{[F, U] : F \in \mathcal{F}[X], U \in \tau_X\}$ de la topología τ_{PR} consta de subconjuntos abiertos y cerrados.*

Definición 2.8. Un espacio topológico X es **cero dimensional o de dimensión cero** si tiene una base que comprende subconjuntos abiertos y cerrados de X.Ver [13, Definición 29.4 pág. 210].

Corolario 2.9. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es de dimensión cero.*

Teorema 2.10. *Si U es un subconjunto abierto de X, entonces $\mathcal{F}[U]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Basta probar que $\mathcal{F}[U] = \bigcup\{[\{x\}, U] : x \in U\}$. Para cada $P \in \mathcal{F}[U]$, si $x \in P$, entonces $x \in U$ y $P \in [\{x\}, U]$. Esto demuestra que $\mathcal{F}[U] \subseteq \bigcup\{[\{x\}, U] : x \in U\}$. Ahora, sea $Q \in \bigcup\{[\{x\}, U] : x \in U\}$. Entonces existe $w \in U$ tal que $Q \in [\{w\}, U]$. Así $\{w\} \subseteq Q \subseteq U$ y con lo cual $Q \in \mathcal{F}[U]$. Por lo tanto, $\mathcal{F}[U] = \bigcup\{[\{x\}, U] : x \in U\}$. □

Teorema 2.11. *Si A es un subconjunto de X, entonces $\mathcal{F}[Int(A)] = Int(\mathcal{F}[A])$.*

Demostración. Sabemos que $Int(A) \subseteq A$. De esto se desprende el hecho que $\mathcal{F}[Int(A)] \subseteq \mathcal{F}[A]$. Por Teorema 2.10, $\mathcal{F}[Int(A)] \in \tau_{PR}$. Por lo anterior $\mathcal{F}[Int(A)] \subseteq Int(\mathcal{F}[A])$. Ahora sea $B \in Int(F[A])$. Entonces existen $F \in \mathcal{F}[X]$ y $U \in \tau_X$ tales que $B \in [F, U] \subseteq F[A]$. Esto implica que $F \subseteq B \subseteq U$. Veremos que $U \subseteq A$. Sea $z \in U$. Así $B \cup \{z\} \in [F, U] \subseteq \mathcal{F}[A]$. En consecuencia, $z \in A$. De lo anterior $B \subseteq U \subseteq A$ y con esto $B \subseteq Int(A)$, es decir, $B \in \mathcal{F}[Int(A)]$.

Por lo tanto, $Int(\mathcal{F}[A]) = \mathcal{F}[Int(A)]$. □

Teorema 2.12. *Si A es un subconjunto de X, entonces el conjunto derivado de $\mathcal{F}[A]$ es $Dv(\mathcal{F}[A]) = \{P \in \mathcal{F}[A] : P \cap Dv(A) \neq \emptyset\}$.*

Demostración. Sea $P \in Dv(\mathcal{F}[A])$. Veamos que $P \in \mathcal{F}[A]$ y $P \cap Dv(A) \neq \emptyset$. Primero, dado que $P \in [P, X] \in \tau_{PR}$, existe $Q \in [P, X] \cap F[A]$ tal que $Q \neq P$. Esto implica que $P \subseteq Q \subseteq X$ y $Q \subseteq A$. Con esto último $P \subseteq A$, es decir, $P \in \mathcal{F}[A]$. Para demostrar que $P \cap Dv(A) \neq \emptyset$, supongamos lo contrario. Entonces para cada $z \in P$, existe $U_z \in \tau_X$ que cumple que $z \in U_z$ y $(U_z \cap A) \setminus \{z\} = \emptyset$. Observemos que $W = \bigcup\{U_z : z \in P\} \in \tau_X$ y $P \subseteq W$. Así tenemos que $P \in [P, W] \in \tau_{PR}$. Del hecho que $P \in Dv(\mathcal{F}[A])$, existe $R \in [P, W] \cap \mathcal{F}[A]$ tal que $R \neq P$. Sea $x \in R \setminus P$. Entonces $x \in A$ y $x \in W$. La condición $x \in W$ implica que existe $z \in P$ tal que $x \in U_z$. Con lo anterior tenemos $x \in (U_z \cap A) \setminus \{z\}$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $Dv(\mathcal{F}[A]) \subseteq \{P \in \mathcal{F}[A] : P \cap Dv(A) \neq \emptyset\}$.

Ahora, sea $T \in \mathcal{F}[A]$ de tal forma que $T \cap Dv(A) \neq \emptyset$. Sean $F \in \mathcal{F}[X]$ y $W \in \tau_X$ tales que $T \in [F, W]$. Veamos que $([F, W] \cap \mathcal{F}[A]) \setminus \{T\} \neq \emptyset$. Sea $x \in T \cap Dv(A)$. Del hecho que $T \subseteq W$, se sigue que $x \in W$. Por Teorema 1.34, $W \cap A$ es un subconjunto infinito de X. Así existe $w \in W \cap A$ de tal forma que $w \notin T$. Con lo cual $T \cup \{w\} \in ([F, W] \cap \mathcal{F}[A]) \setminus \{T\}$. Con esto concluimos que $T \in Dv(\mathcal{F}[A])$. □

Corolario 2.13. *Si A es un subconjunto de X, entonces $\mathcal{F}[A]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Sabemos que $Cl(\mathcal{F}[A]) = Dv(\mathcal{F}[A]) \cup \mathcal{F}[A]$. De Teorema 2.12, $Dv(\mathcal{F}[A])$ es un subconjunto de $\mathcal{F}[A]$. Con lo anterior concluimos que $Cl(\mathcal{F}[A]) = \mathcal{F}[A]$. □

Teorema 2.14. *Si K es un subconjunto compacto e infinito de X, entonces $\mathcal{F}[K]$ no es compacto.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C} = \{[\{x\}, X] : x \in K\}$ una cubierta abierta de $\mathcal{F}[K]$. De la hipótesis K un subconjunto infinito de X y de la condición $\{k\} \in [\{x\}, X]$ si y sólo si $k = x$, se verifica que no existe una subcubierta finita de $\mathfrak{C}$. De esto se concluye que $\mathcal{F}[K]$ no es compacto. □

Definición 2.15. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\mathcal{F}_n[X] = \{F \in \mathcal{F}[X] : |F| \leq n\}.$$

Teorema 2.16. *Si X es un conjunto numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es numerable.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $H \in \mathcal{F}_k[X] \setminus \mathcal{F}_{k-1}[X]$. Del hecho que X es numerable existe $M_H \subseteq \mathbb{N}$ tal que $H = \{h_m : m \in M_H\}$. Consideremos $f_k : \mathcal{F}_k[X] \setminus \mathcal{F}_{k-1}[X] \longrightarrow \mathbb{N}^k$ dada por $f_k(H) = (m_1, \cdots, m_k)$ donde $\{m_1, \cdots, m_k\} = M_H$ y $m_i < m_j$ para $i < j$. Notemos que f_k es inyectiva pues para $K, L \in \mathcal{F}_k[X] \setminus \mathcal{F}_{k-1}[X]$, $f_k(K) = (m_1, \cdots, m_r) = f_k(L)$ si y sólo si $M_K = M_L$, es decir, $f_r(K) = f_r(L)$ si y sólo si $K = L$. Del hecho que $\mathbb{N}^k$ es numerable se sigue que $\mathcal{F}_k[X] \setminus \mathcal{F}_{k-1}[X]$ es numerable.
Por lo tanto, como consecuencia que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable y que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{F}_n[X] \setminus \mathcal{F}_{n-1}[X]) = \mathcal{F}[X]$, se concluye que $\mathcal{F}[X]$ es numerable. □

Lema 2.17. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}_n[X]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Empleando Teorema 1.15, veamos que $\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$. Sea $T \in \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$. Notemos que para todo $G \in [T, X]$, $n < |T| \leq |G|$. Esto implica que $[T, X] \subseteq \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$. Con esto concluimos que $\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$. En consecuencia $\mathcal{F}_n[X]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. □

Lema 2.18. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$Int(\mathcal{F}_n[X]) = \{Q \in \mathcal{F}_n[X] : Q \text{ consta de puntos aislados de } X\}.$$

Demostración. Sea $Q \in Int(\mathcal{F}_n[X])$. Entonces existen $U \in \tau_X$ y $F \in \mathcal{F}[X]$ tales que $Q \in [F, U] \subseteq \mathcal{F}_n[X]$. Del hecho que $[F, U] \subseteq \mathcal{F}_n[X]$ se sigue que $|U| \leq n$. Sea $y \in Q$. Por ser X un espacio T_1, $U \setminus \{y\}$ es un subconjunto cerrado de X, con lo cual $(X \setminus (U \setminus \{y\})) \cap U = \{y\}$ es un subconjunto abierto de X.
Sea $Q \in \mathcal{F}_n[X]$ tal que Q consta de puntos aislados de X. Por Teorema (1.27.2), Q es un subconjunto abierto de X. Sea $x \in Q$. Observemos que $Q \in [\{x\}, Q] \subseteq \mathcal{F}_n[X]$. Por lo que $Q \in Int(\mathcal{F}_n[X])$. $\square$

Proposición 2.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Un punto C de $\mathcal{F}_n[X]$ es un punto no aislado si y sólo si C consta a lo mas $n-1$ puntos distintos de X y contiene al menos un punto no aislado de X.*

Demostración. Supongamos que C es un punto no aislado de $\mathcal{F}_n[X]$. Si C constara de n puntos distintos de X, entonces la igualdad $[C, X] \cap \mathcal{F}_n[X] = \{C\}$ verificaría que C es un punto aislado de $\mathcal{F}_n[X]$. De esto obtenemos que C tiene a lo mas $n-1$ elementos.
Ahora, si C constara únicamente de puntos aislado de X, entonces $[C, C] \cap \mathcal{F}_n[X] = \{C\}$ implicaría que C es un punto aislado de $\mathcal{F}_n[X]$. En conclusión C contiene al menos un punto asilado de X.
Para demostrar la segunda parte, supongamos que C tiene a lo mas $n-1$ puntos distntos de X y contiene al menos un punto no asilado z de X. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $C \subseteq U$. Del hecho que z es no aislado, existe $y \in U \setminus C$. Entonces $C \cup \{y\} \in [C, U] \cap \mathcal{F}_n[X]$. Con esto, C no es un punto aislado de $\mathcal{F}_n[X]$. $\square$

Corolario 2.20. *Un punto C de $\mathcal{F}_2[X]$ es un punto aislado si y sólo si C consta de dos puntos distintos de X ó C consta de un único punto asilado de X.*

Teorema 2.21. *Cada conjunto de la forma $\mathcal{F}_{n+1}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$ es un subespacio discreto de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Sea $G \in \mathcal{F}_{n+1}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$. Observemos que las condiciones $[G, X] \in \tau_{PR}$ y $(\mathcal{F}_{n+1}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]) \cap [G, X] = \{G\}$ implican que $\{G\}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_{n+1}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}_{n+1}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]$ es un espacio discreto. $\square$

Las siguientes definiciones pueden ser consultadas en [13].

Definición 2.22. Una colección de subconjuntos de un espacio topológico se dice **punto finito** si cada punto de X se encuentra en un numero finito de subconjuntos.

Definición 2.23. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de un espacio topológico. Decimos que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento de** $\mathcal{C}$ si para cualquier $V \in \mathcal{V}$, existe $C \in \mathcal{C}$ de tal forma que $V \subseteq C$.

Definición 2.24. Un espacio es **metacompacto** si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto punto finito.

Definición 2.25. Un espacio es **hereditariamente metacompacto** si cada uno de sus subespacios es metacompacto.

Teorema 2.26. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es hereditariamente metacompacto.*

Demostración. Sean $\mathcal{H}$ un subespacio de $\mathcal{F}[X]$ y $\mathfrak{K}$ una cubierta abierta de $\mathcal{H}$. Para cada $Y \in \mathcal{H}$, consideremos $\mathcal{K}_Y \in \mathfrak{K}$ de tal forma que $Y \in \mathcal{K}_Y$. Definamos $\mathcal{W}_Y = ([Y, X] \cap \mathcal{H}) \cap \mathcal{K}_Y$ para cada $Y \in \mathcal{H}$. Afirmamos que $\mathfrak{W} = \{\mathcal{W}_Y : Y \in \mathcal{H}\}$ es un refinamiento abierto punto finito de $\mathfrak{K}$. Observemos que para todo $Y \in \mathcal{H}$, $\mathcal{W}_Y \subseteq \mathcal{K}_Y$. Del hecho que $[Y, X] \cap \mathcal{H}$ y $\mathcal{K}_Y$ son subconjuntos abiertos en $\mathcal{H}$, se sigue que $\mathcal{W}_Y$ es abierto en $\mathcal{H}$. Por último, sea $S \in \mathcal{H}$. Entonces $S \in \mathcal{W}_Y$ si y sólo si $Y \subseteq S$. Con lo cual S pertenece a lo más a $2^{|S|} - 1$ elementos de $\mathfrak{W}$. De esto se concluye que $\mathcal{F}[X]$ es hereditariamente metacompacto. $\square$

Corolario 2.27. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es metacompacto.*

Lema 2.28. *Sea Y un subespacio de X. Entonces $\mathcal{F}[Y]$ con la topología de Pixley-Roy es homeomorfo al subespacio cerrado $\{A \in \mathcal{F}[X] : A \subseteq Y\}$ de $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Definimos $f : \mathcal{F}[Y] \longrightarrow \mathcal{F}[Y]$ como $f(A) = A$. Observemos que f es una función biyectiva, por Proposición 1.47, es suficiente demostrar que f es una función continua y abierta. Primero veamos que f es una función continua. Sean $F \in \mathcal{F}[X]$ y $U \in \tau_X$ tales que $[F, U] \cap \mathcal{F}[Y]$ es un subconjunto abierto no vacío del subespacio $\mathcal{F}[Y]$. Entonces, por Lema (2.3.4), $f^{-1}([F, U] \cap \mathcal{F}[Y]) = f^{-1}([F, U \cap Y]) = [F, U \cap Y]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[Y]$. Así, f es una función continua.
Ahora veamos que f es una función abierta. Sean $H \in \mathcal{F}[Y]$ y $W \in \tau_X$ tales que $[H, W \cap Y]$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{F}[Y]$. Por lema (2.3.4)

se tiene que $f([H, W \cap Y]) = [H, W \cap Y] = [H, W] \cap \mathcal{F}[Y]$ es un subconjunto abierto del subespacio $\mathcal{F}[Y]$. Por lo que f es una función abierta.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[Y]$ con la topología de Pixley-Roy es homeomorfo al subespacio cerrado $\{A \in \mathcal{F}[X] : A \subseteq Y\}$ de $\mathcal{F}[X]$. $\square$

Teorema 2.29. *Sean $X_1, \cdots, X_k$ espacios topológicos. Entonces $\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]$ puede ser encajado en el hiperespacio $\mathcal{F}[X_1 \times \cdots \times X_k]$.*

Demostración. Definamos $f : \mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k] \longrightarrow \mathcal{F}[X_1 \times \cdots \times X_k]$ dada por $f[(A_1, \cdots, A_k)] = A_1 \times \cdots \times A_k$. Notemos que $A_1 \times \cdots \times A_k \in \mathcal{F}[X_1 \times \cdots \times X_k]$ pues $|A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdots |A_k|$. Para probar que f es un encaje, primero veamos que f es inyectiva. Sean $(A_1, \cdots, A_k), (B_1, \cdots, B_k) \in \mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]$ tales que $f[(A_1, \cdots, A_k)] = f[(B_1, \cdots, B_k)]$. Observemos que $A_1 \times \cdots \times A_k = B_1 \times \cdots \times B_k$ si y sólo si $A_i = B_i$ para toda $i \in \{1, \cdots, k\}$. Con esto, $(A_1, \cdots, A_k) = (B_1, \cdots, B_k)$, y en consecuencia, f es inyectiva.
Ahora, veamos que f es continua. Sean $\bar{G} \in \mathcal{F}[X_1 \times \cdots \times X_k]$ y $\bar{W}$ un subconjunto abierto de $X_1 \times \cdots \times X_k$ tal que $\bar{G} \subseteq \bar{W}$. Sea $(H_1, \cdots, H_k) \in f^{-1}[[\bar{G}, \bar{W}]]$. Afirmamos que $[H_1, \pi_1(W)] \times \cdots \times [H_k, \pi_k(W)] \subseteq f^{-1}[[\bar{G}, \bar{W}]]$. Sea $(T_1, \cdots, T_k) \in [H_1, \pi_1(W)] \times \cdots \times [H_k, \pi_k(W)]$. Observemos que se cumple que $\bar{G} \subseteq f[(H_1, \cdots, H_k)] \subseteq f[(T_1, \cdots, T_k)] \subseteq f[(\pi_1(W), \cdots, \pi_k(W))] = \bar{W}$, es decir, $T_1 \times \cdots \times T_k \in [\bar{G}, \bar{W}]$. De esto, $(T_1, \cdots, T_k) = f^{-1}[T_1 \times \cdots \times T_k] \in f^{-1}[[\bar{G}, \bar{W}]]$. Con esto queda demostrado que f es una función continua.
Por último, veamos que $f : \mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k] \longrightarrow f[\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]]$ es una función abierta. Para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$ sean $F_i \in \mathcal{F}[X_i]$ y $U_i \in \tau_{X_i}$ tales que $F_i \subseteq U_i$. Veamos que $f[[F_1, U_1] \times \cdots \times [F_k, U_k]]$ es un subconjunto abierto de $f[\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]]$. Sea $G_1 \times \cdots \times G_k \in f[[F_1, U_1] \times \cdots \times [F_k, U_k]]$. Notemos que $[G_1 \times \cdots \times G_k, U_1 \times \cdots \times U_k]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X_1 \times \cdots \times X_k]$. Sea $Q_1 \times \cdots \times Q_k \in [G_1 \times \cdots \times G_k, U_1 \times \cdots \times U_k] \cap f[\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]]$. Del hecho que para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$ se cumple que $F_i \subseteq G_i \subseteq Q_i \subseteq U_i$, se tiene que $Q_i \in [F_i, U_i]$. En consecuencia, $Q_1 \times \cdots \times Q_k \in f[[F_1, U_1] \times \cdots \times [F_k, U_k]]$. Con lo cual, $f[[F_1, U_1] \times \cdots \times [F_k, U_k]]$ es un subconjunto abierto de $f[\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]]$. Así concluimos que $f : \mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k] \longrightarrow f[\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]]$ es una función abierta y como consecuencia de Proposición 1.47 un homeomorfismo.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X_1] \times \cdots \times \mathcal{F}[X_k]$ puede ser encajado en el hiperespacio $\mathcal{F}[X_1 \times \cdots \times X_k]$. $\square$

2.2. Axiomas de separación

A continuación exhibiremos los axiomas de separación propios del hiperespacio de Pixley-Roy y daremos una caracterización del axioma perfectamente normal.

Teorema 2.30. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es de Hausdorff.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{F}[X]$ con $A \neq B$. De esto podemos decir que $A \backslash B \neq \emptyset$ o $B \backslash A \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $p \in A \backslash B$. Dado que X es T_1, tenemos que $X \backslash \{p\} \in \tau_X$.

Notemos que $[B, X\backslash\{p\}], [A, X] \in \tau_{PR}$, $B \in [B, X\backslash\{p\}]$ y $A \in [A, X]$. Solo falta probar qué $[B, X\backslash\{p\}]$ y $[A, X]$ son ajenos. Supongamos que existe $D \in [B, X\backslash\{p\}] \cap [A, X]$. De esto $A \subseteq D \subseteq X\backslash\{p\}$, lo cual contradice el hecho que $p \in A$. Así concluimos que $[B, X\backslash\{p\}] \cap [A, X] = \emptyset$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Hausdorff. $\square$

Teorema 2.31. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un espacio regular.*

Demostración. Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Hausdorff por Teorema 2.30, se sigue que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio T_1.
Sean $A \in \mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{D} \in \tau_{PR}$ de tal forma que $A \in \mathcal{D}$. De la definición de τ_{PR}, existen $F \in \mathcal{F}[X]$ y $U \in \tau_X$ tales que $A \in [F, U] \subseteq \mathcal{D}$. Por Teorema 2.6, $[F, U]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. En consecuencia, se cumple que $Cl([F, U]) = [F, U]$. Así, $A \in [F, U] \subseteq Cl([F, U]) \subseteq \mathcal{D}$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es un espacio regular. $\square$

Teorema 2.32. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es completamente regular.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C} = \mathcal{B} \cup \{\mathcal{F}[X] \setminus [F, U] : [F, U] \in \mathcal{B}\}$. Por Teorema 2.6, $[F, U]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. Con lo cual $\mathfrak{C}$ es base para τ_{PR}.
Sean $Q \in \mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{T} \in \mathfrak{C}$ tales que $Q \in \mathcal{T}$. Debido a la construcción de $\mathfrak{C}$, $\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{T} \in \mathfrak{C}$. De este modo, $Q \notin \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{T}$ y $\mathcal{F}[X] = \mathcal{T} \cup (\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{T})$. Esto demuestra la primera parte.
Ahora, sean $\mathcal{R}, \mathcal{P} \in \mathfrak{C}$ de tal forma que $\mathcal{R} \cup \mathcal{P} = \mathcal{F}[X]$. Por Lema 2.4, $\mathcal{R} \notin \mathcal{B}$ ó $\mathcal{P} \notin \mathcal{B}$. Sin perder generalidad, supongamos que $\mathcal{P} \notin \mathcal{B}$. Entonces existen $H \in \mathcal{F}[X]$ y $W \in \tau_X$ tales que $\mathcal{P} = \mathcal{F}[X] \setminus [H, W]$.
Caso 1. Existen $G \in \mathcal{F}[X]$ y $Z \in \tau_X$ tales que $\mathcal{R} = [G, Z]$. Del hecho que $\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, se sigue que $[H, W] \subseteq [G, Z]$. Hacemos $\mathcal{A} = [G, Z]$ y $\mathcal{B} = \mathcal{F}[X] \setminus [G, Z]$. Notemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cumplen las condiciones requeridas.

Caso 2. Existen $L \in \mathcal{F}[X]$ y $Q \in \tau_X$ tales que $\mathcal{R} = \mathcal{F}[X] \setminus [L, Q]$. Observemos que $H \cup L \in \mathcal{F}[X]$. Por consiguiente, $H \cup L \in \mathcal{R}$ ó $H \cup L \in \mathcal{P}$. Sin perder generalidad supongamos que $H \cup L \in \mathcal{R}$, es decir, $L \cup H \in \mathcal{F}[X] \setminus [L, Q]$. Las proposiciones $L \subseteq L \cup H$ y $L \cup H \notin [L, Q]$ implican que $L \cup H \nsubseteq Q$. En consecuencia, $(L \cup H) \nsubseteq (Q \cap W)$. De ahí que, $[L \cup H, Q \cap W] = \emptyset$. Por Lema (2.3.2), $[L, Q] \cap [H, W] = \emptyset$. Hacemos $\mathcal{A} = [H, W]$ y $\mathcal{B} = [L, Q]$. Notemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cumplen las condiciones requeridas.
Por los casos 1 y 2, se demuestra la segunda parte.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es un espacio completamente regular. $\square$

Teorema 2.33. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es perfectamente normal si y sólo si $\mathcal{F}[X]$ es normal y cada subconjunto unipuntual de X es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es perfectamente normal. Probaremos que todo subconjunto unipuntal de X es un subconjunto G_δ de X. Sea $x \in X$. Como consecuencia de Corolario 2.13, $\mathcal{F}[\{x\}] = \{\{x\}\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. Así $\{\{x\}\}$ un subconjunto G_δ de $\mathcal{F}[X]$. De ahí existe una familia $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ tales que $\{\{x\}\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $F_n \in \mathcal{F}[X]$ y $V_n \in \tau_x$ tales que $\{x\} \in [F_n, V_n] \subseteq \mathcal{U}_n$. Del hecho que $F_n \subseteq \{x\}$, se sigue que $\{x\} = F_n$. Ahora, veamos que $\{x\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sucede que $\{x\} \subseteq V_n$. Por lo cual $\{x\} \subseteq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Por otro lado, sea $y \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{x\} \subseteq \{x, y\} \subseteq V_n$, es decir, $\{x, y\} \in [F_n, V_n]$. Por lo que $\{x, y\} \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [F_n, V_n] \subseteq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n = \{\{x\}\}$. Notemos que $\{x, y\} \in \{\{x\}\}$ es verdadero si y sólo si $x = y$. En conclusión, $\{x\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Por lo tanto, $\{x\}$ es un subconjunto G_δ de X. Esto completa la prueba de la primera parte.

Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es normal y cada subconjunto unipuntual de X es G_δ de X. Con el fin de demostrar que todo subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$ es G_δ, para cada $x \in X$ sea $\{U(x, n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos abiertos de X tales que $U(x, n+1) \subseteq U(x, n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{x\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U(x, n)$.
Para cada $B \in \mathcal{F}[X]$, sea $S_B = \{k \in \mathbb{N} : \text{ si } x \in B, \text{ entonces } \{x\} = B \cap U(x, k)\}$.

Afirmación 1. Para cada $B \in \mathcal{F}[X]$, S_B es no vacío.

Sean $x, y \in X$ distintos. Definimos $N_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} : x \notin U(y,n) \text{ y } y \notin U(x,n)\}$. La condición $N_{x,y} = \emptyset$ implicaría que $y \in U(x,n)$ ó $x \in U(y,n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U(x,n)$ ó $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U(y,n)$. Esto sería una contradicción. Sea $k_{x,y} \in N_{x,y}$. Definimos $l = max\{k_{x,y} : x, y \in B \text{ y } x \neq y\}$.
Sean $a, b \in B$ distintos. Veamos que $b \notin U(a,l)$. Del hecho que $k_{a,b} \leq l$ se sigue que $U(a,l) \subseteq U(a,k_{a,b})$. Con lo cual, $b \notin U(a,l)$. Así, $l \in S_B$. Por lo tanto, S_B es no vacío como se quería demostrar.

Sea $\varphi : \mathcal{F}[X] \longrightarrow \mathbb{N}$ la función dada por $\varphi(B) = \min S_B$. De la Afirmación 1 se sigue que φ está bien definida.
Para cada $T \in \mathcal{F}[X]$ y $l \in \mathbb{N}$, definimos $V(T,l) = \bigcup\{U(t, \varphi(T) - 1 + l) : t \in T\}$. Notemos que cada $V(T,l)$ es un subconjunto abierto de X y $T \subseteq V(T,l)$.
Finalmente, sea $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$. Expondremos una sucesión de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ cuya intersección es $\mathcal{H}$. Para cada $r \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{W}(r) = \bigcup\{[T, V(T,r)] : T \in \mathcal{H}\}$. Observemos que cada $\mathcal{W}(r)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ y se cumple que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{W}(r+1) \subseteq \mathcal{W}(r)$. Solo hace falta probar que $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{W}(r) \subseteq \mathcal{H}$. Sea $S \in \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{W}(r)$. La inclusión $S \in \mathcal{W}(\varphi(S))$ implica que existe $K \in \mathcal{H}$ tal que $S \in [K, V(K, \varphi(S))]$, es decir, $K \subseteq S \subseteq V(K, \varphi(S))$. Sea $s \in S$. Entonces $s \in V(K, \varphi(S)) = \bigcup\{U(k, \varphi(K) - 1 + \varphi(S)) : k \in K\}$. De ahí que existe $k_0 \in K$ de tal forma que $s \in U(k_0, \varphi(K) - 1 + \varphi(S))$. Dado que $U(k_0, \varphi(K) - 1 + \varphi(S)) \subseteq U(k_0, \varphi(S))$, se tiene que $s = k_0 \in K$. De este modo $S = K$. Con ello se concluye que $\bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{W}(r) \subseteq \mathcal{H}$.
Por lo tanto, el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es perfectamente normal. □

2.3. Otras propiedades

En esta sección caracterizaremos algunas propiedades del hiperespacio, así como las consecuencias de dotar al mismo con propiedades específicas.

Teorema 2.34. *El hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es discreto si y sólo si X es discreto.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es discreto. Sea $y \in X$. Observemos que $\{\{y\}\} = [\{y\}, \{y\}]$. Entonces existen $F \in \mathcal{F}[X]$ y $U \in \tau_X$ tales que $\{y\} \in [F, U] \subseteq [\{y\}, \{y\}]$. Esto implica que $\{y\} \subseteq U$, y por Lema (2.3.3) se cumple que $U \subseteq \{y\}$. Con lo cual $U = \{y\} \in \tau_X$. Por lo tanto, X es discreto.

Supongamos que X es discreto. Sea $T \in \mathcal{F}[X]$. Dado que $T \in \tau_X$, se tiene que $\{T\} = [T, T] \in \tau_{PR}$. Concluimos que $\mathcal{F}[X]$ es discreto. $\square$

Definición 2.35. Decimos que un espacio topológico X es **Lindelöf** si toda cubierta abierta tiene una subcubierta numerable. Ver [13, Definición 16.5, pág. 110].

Teorema 2.36. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf, entonces X es numerable.*

Demostración. Sea $\mathfrak{C} = \{[\{x\}, X] : x \in X\}$. Observemos que cada elemento de $\mathfrak{C}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ y si $A \in \mathcal{F}[X]$ y $x \in A$, entonces $A \in [\{x\}, X]$. Esto prueba que $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$. La condición $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf garantiza la existencia de una subcolección numerable $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ tal que $\mathcal{F}[X] = \bigcup \mathfrak{D}$. Sea $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{D}$ una función sobreyectiva y definamos $h : \mathfrak{D} \longrightarrow X$ como $h([\{x\}, X]) = x$. Veamos que h es sobreyectiva. Sea $p \in X$. Como $\mathfrak{D}$ cubre a $\mathcal{F}[X]$, existe $[\{q\}, X] \in \mathfrak{D}$ tal que $\{p\} \in [\{q\}, X]$. Del hecho que $\{q\} \subseteq \{p\}$, se sigue que $q = p$. Con lo cual $h([\{q\}, X]) = p$, es decir h es sobreyectiva. Así, $h \circ g$ es una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en X, es decir, X es numerable. $\square$

Definición 2.37. Diremos que un espacio topológico X es un **espacio de Baire** si para toda sucesión de subconjuntos abiertos densos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X, se tiene que $\bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso de X. Ver [13, Definición 25.1, pág. 185].

Teorema 2.38. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Baire, entonces X es un conjunto unipuntual.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{W}_n = Int(\mathcal{F}_n[X]) \cup (\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]).$$

Notemos que como consecuencia de Proposición (1.18.1) y Lema 2.17, cada $\mathcal{W}_n$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para probar que $\mathcal{W}_n$ es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$, sean $G \in \mathcal{F}[X]$ y $V \in \tau_X$.
Si $|V| \leq n$, entonces V consta de puntos aislados de X, de esto y por Lema 2.18 se cumple que $[G, V] \subseteq Int(\mathcal{F}_n[X])$.
Ahora supongamos que $|V| > n$. Elegimos un subconjunto finito R de V tal que $G \subseteq R$ y $|R| > n$. Con lo cual $R \in (\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]) \cap [G, V]$.

Concluimos que $\mathcal{W}_n$ es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Baire se sigue que

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n &= \bigcap\{Int(\mathcal{F}_n[X]) \cup (\mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{F}_n[X]) : n \in \mathbb{N}\} \\ &= Int(\mathcal{F}_1[X])\end{aligned}$$

es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$.
Sean $z, w \in X$. Como $Int(\mathcal{F}_1[X])$ es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$, $[\{z,w\}, X] \cap Int(\mathcal{F}_1[X]) \neq \emptyset$. Así existe $\{a\} \subseteq [\{z,w\}, X]$ de tal forma que $\{a\} \in Int(\mathcal{F}_1[X])$. Esto es cierto si y sólo si $\{a\} = \{z,w\}$, es decir $a = z = w$. De esto concluimos que X es unipuntual. □

Definición 2.39. Diremos que un espacio topológico X es **separable** si contiene un subconjunto denso numerable. Ver [2, Definición 3.21, pág. 102]

Corolario 2.40. *Si X es un conjunto numerable, entonces el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es separable.*

Demostración. Se sigue de Teorema 2.16. □

Corolario 2.41. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es Lindelöf, entonces el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es separable.*

Como consecuencia de Teorema 2.36 se tiene que X es numerable. Por Teorema 2.40 concluimos que $\mathcal{F}[X]$ es separable.

Teorema 2.42. *Si X es un conjunto no numerable, entonces el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ no es seprarable.*

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{F_1, F_2, \cdots\}$ un subconjunto numerable de $\mathcal{F}[X]$. Del hecho que X es no numerable, se sigue que $X \setminus \bigcup \mathcal{D} \neq \emptyset$. Sea $x \in X \setminus \bigcup \mathcal{D}$. Observemos que $[\{x\}, X] \in \tau_{PR}$ tal que $F_i \notin [\{x\}, X]$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Con lo cual $\mathcal{D} \cap [\{x\}, X] = \emptyset$. En consecuencia $\mathcal{D}$ no es un subconjunto denso de $\mathcal{F}[X]$.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ no es separable. □

Teorema 2.43. *Si X es un conjunto no numerable, entonces cada subespacio no numerable de $\mathcal{F}[X]$ no es separable.*

Demostración. Sean $\mathcal{Y}$ un subconjunto no numerable de $\mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{D}$ un subconjunto numerable de $\mathcal{Y}$. Definimos $W = \bigcup \mathcal{Y}$. Del hecho que $\mathcal{Y}$ es no numerable, existe $x \in W$ tal que $x \notin \bigcup \mathcal{D}$. Con lo cual existe $A \in \mathcal{Y}$ tal que $x \in A$. Observemos que $[A, X] \cap \mathcal{Y}$ es un subconjunto abierto no vacío de $\mathcal{Y}$ tal que $H \notin [A, X] \cap \mathcal{Y}$ para cada $H \in \mathcal{D}$. Así concluimos que $\mathcal{D}$ no es un subconjunto denso de $\mathcal{Y}$.

Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ no es separable. □

2.4. Condición de cadena numerable

Por último, exhibiremos algunas propiedades que surgen como consecuencia de dotar al hiperespacio con la propiedad de la cadena numerable.

Definición 2.44. Se dice que un espacio topológico X satisface la **condición de cadena numerable (ccn)** si toda familia de subconjuntos abiertos disjuntos a pares de X es numerable. Si un espacio topológico X satisface la condición de cadena numerable diremos que X tiene la propiedad ccn. Ver [13, 16C, pág. 113].

Teorema 2.45. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn, entonces el espacio X tiene la propiedad ccn.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia disjunta de subconjuntos abiertos de X. Por el axioma de elección, para cada $A \in \mathcal{U}$ elegimos $x_A \in X$ de tal forma que $x_A \in A$. Sea $\mathfrak{V} = \{[\{x_A\}, A] : A \in \mathcal{U}\}$ una familia subconjuntos de abiertos de $\mathcal{F}[X]$. Veamos que $\mathfrak{V}$ es disjunta a pares. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{V}$ distintos. Entonces existen $B, C \in \mathcal{U}$ y $x_B, x_C \in X$ tales que $\mathcal{B} = [\{x_B\}, B]$ y $\mathcal{C} = [\{x_C\}, C]$. Por (2.3.2) de Lema 2.3, $[\{x_B\}, B] \cap [\{x_C\}, C] = [\{x_B\} \cup \{x_C\}, B \cap C] = [\{x_B\} \cup \{x_C\}, \emptyset] = \emptyset$. Del hecho que el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn, existe una función sobreyectiva $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{V}$. Definamos $h : \mathfrak{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ como $h([\{x_A\}, A]) = A$. Notemos que h es sobreyectiva. Así, $h \circ g$ es una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{U}$, es decir, $\mathcal{U}$ es numerable.

Por lo tanto, X tiene la propiedad ccn. □

Teorema 2.46. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn, entonces todo subespacio discreto de X es numerable.*

Demostración. Sea Y un subespacio discreto de X. Con lo cual para cada $y \in Y$, existe $O_y \in \tau_X$ tal que $Y \cap O_y = \{y\}$. Sea $\mathfrak{V} = \{[\{y\}, O_y] : y \in Y\}$. Para probar que $\mathfrak{V}$ es ajeno a pares supongamos lo contrario. Sean $\mathcal{Z}, \mathcal{W} \in \mathfrak{V}$ distintos. Entonces existen $z, w \in Y$ distintos y $Z, W \in \tau_X$ tales que $\mathcal{Z} = [\{z\}, Z]$ y $\mathcal{W} = [\{w\}, W]$. Sea $T \in [\{z\}, Z] \cap [\{w\}, W]$. Del hecho que $\{z\} \subseteq T$ y $T \subseteq W$, se sigue que $z \in W$. Esto es una contradicción. Por ende, $\mathfrak{V}$ es ajena a pares. La condición de cadena numerable de $\mathcal{F}[X]$ implica que existe una función sobreyectica $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{V}$. Definamos $h : \mathfrak{V} \longrightarrow Y$ como $h([\{y\}, O_y]) = y$. Observemos que h es una función sobreyectiva. En consecuencia, $h \circ g$ es una función sobreyectiva de $\mathbb{N}$ en Y, lo cual implica que Y es numerable. $\square$

Teorema 2.47. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn, entonces X es hereditariamente Lindelöf*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que Y es un subespacio de X que no es Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta de Y formada por subconjuntos abiertos de X tal que no existe subcubierta numerable de $\mathcal{U}$ y además la cardinalidad de $\mathcal{U}$ sea mayor que ω_1. Veamos por inducción transfinita que para $\alpha < \omega_1$, existen $x_\alpha \in Y$ y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tales que $x_\alpha \in U_\alpha$ y $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.

Para $\alpha = 0$. Sea $x_0 \in Y$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta de Y, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in U_0$.

Supongamos que para $\alpha < \omega$, existen $x_\alpha \in Y$ y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tales que $x_\alpha \in U_\alpha$, $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.

Sea $q \in Y$ tal que $q \notin \bigcup_{\beta<\alpha+1} U_\beta$. Dado que Y no es Lindelöf, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $q \in W$. Renombramos a $q = x_{\alpha+1}$ y a $W = U_{\alpha+1}$.

Sea α un cardinal limite distinto de cero. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$ se cumple que existen $x_\beta \in Y$, $U_\beta \in \mathcal{U}$ tales que $x_\beta \in U_\beta$ y $x_\beta \notin \bigcup_{\lambda<\beta} U_\lambda$.

Observemos que $\{U_\beta : \beta < \alpha\}$ es un subconjunto numerable de $\mathcal{U}$. Por lo que existen $x_\alpha \in Y$ y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tales que $x_\alpha \in U_\alpha$ y $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.

Con esto queda concluida la inducción transfinita.

Definimos $\mathfrak{K} = \{[\{x_\alpha\}, U_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ un colección de abiertos de $\mathcal{F}[X]$.Sean γ, λ ordinales distintos. Observemos que $[\{x_\gamma\}, U_\gamma], [\{x_\lambda\}, U_\lambda] \in \mathfrak{K}$ y son disjuntos, de lo contrario, existiría $T \in [\{x_\gamma\}, U_\gamma] \cap [\{x_\lambda\}, U_\lambda]$. Es decir $\{x_\gamma\} \subseteq T \subseteq U_\gamma$ y $\{x_\lambda\} \subseteq T \subseteq U_\lambda$. Recordemos que ω_1 es un conjunto ordenado, por lo que $\gamma < \lambda$ ó $\lambda < \gamma$. Supongamos que $\gamma < \lambda$. De lo anterior, $x_\lambda \in T \subseteq U_\gamma$, con lo cual $x_\lambda \in \bigcup_{\delta<\gamma} U_\delta$. Esto último es una contradicción.

Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ tiene la condición de cadena numerable, $\mathcal{K}$ es numerable. Lo cual es una una contradicción pues $|\mathcal{K}| = \omega_1$ el primer ordinal no numerable.

Por lo tanto, no existe Y un subconjunto de X que no sea Lindelöf. Es decir, X es hereditariamente Lindelöf. □

Teorema 2.48. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn, entonces X es hereditariamente separable.*

Demostración. Sea Y un subconjunto de X y sea $\mathfrak{L} = \{[A, U] : A \in \mathcal{F}[Y], A \subseteq U \in \tau_X\}$. Por Lema 1.7, existe un subconjunto MAP $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{L}$. Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn, se sigue que $\mathfrak{G}$ es numerable. Sea $D = \bigcup\{A : [A, U] \in \mathfrak{G}\}$. Observemos que D es un subconjunto numerable de Y.

Por último veamos que D es un subconjunto denso de Y. Sea $W \in \tau_X$ tal que $W \cap Y \neq \emptyset$. Sea $y \in W \cap Y$. Entonces $[\{y\}, W] \in \mathfrak{L}$. Notemos que por ser $\mathfrak{G}$ subconjunto MAP de $\mathfrak{L}$, tenemos que $[\{y\}, W] \in \mathfrak{G}$ ó existen $P \in \mathcal{F}[Y]$ y $V \in \tau_X$ tales que $[\{y\}, W] \cap [P, V] \neq \emptyset$.

Si $[\{y\}, W] \in \mathfrak{G}$, en consecuencia, $y \in D \cap (W \cap Y)$. Ahora, supongamos existen $P \in \mathcal{F}[Y]$ y $V \in \tau_X$ tales que $[\{y\}, W] \cap [P, V] \neq \emptyset$. Por ende, existe $T \in \mathcal{F}[Y]$ tal que $P \subseteq T \subseteq V$ y $\{y\} \subseteq T \subseteq W$. Así, tenemos que $P \subseteq T \subseteq W$ y $P \subseteq D$. Con lo cual $D \cap (W \cap Y) \neq \emptyset$. Es decir, D es un subconjunto denso numerable de Y.

Por lo tanto, X es hereditariamente separable. □

Definición 2.49. Una colección $\mathcal{N}$ de subconjuntos de Y es llamada **network** para el espacio Y si para cualquier subconjunto abierto no vacío de Y es unión de elementos de $\mathcal{N}$. Equivalentemente, para todo $y \in Y$ y todo $U \in \tau_Y$ tal que $y \in U$, existe $A \in \mathcal{N}$ tal que $y \in A \subseteq U$.

Teorema 2.50. *Si X tiene una network numerable, entonces el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}$ una network numerable de X y $\mathfrak{A}$ una familia no numerable de abiertos de $\mathcal{F}[X]$. Observemos que para cada $\mathcal{V} \in \mathfrak{A}$, existen $G_\mathcal{V} \in \mathcal{F}[X]$ y $W_\mathcal{V} \in \tau_X$ tales que $[G_\mathcal{V}, W_\mathcal{V}] \subseteq \mathcal{V}$. Además del hecho que

$\mathcal{N}$ es una network, existe $N_{\mathcal{V}} \in \mathcal{N}$ tal que $G_{\mathcal{V}} \subseteq N_{\mathcal{V}} \subseteq W_{\mathcal{V}}$. Sea $\mathcal{D} = \{N_V : V \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{N}$. Definimos $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{D}$ con regla de correspondencia $f(\mathcal{V}) = N_{\mathcal{V}}$. Del hecho que f no es inyectiva, existen $\mathcal{Q}, \mathcal{R} \in \mathfrak{A}$ distintos tales que $f(\mathcal{Q}) = N_{\mathcal{Q}} = f(\mathcal{R}) = N_{\mathcal{R}} = N$. Sean $G_{\mathcal{Q}}, G_{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}[X]$ y $W_{\mathcal{Q}}, W_{\mathcal{R}} \in \tau_X$ tales que $[G_{\mathcal{Q}}, W_{\mathcal{Q}}] \subseteq \mathcal{Q}$ y $[G_{\mathcal{R}}, W_{\mathcal{R}}] \subseteq \mathcal{R}$. Del hecho que $G_{\mathcal{Q}} \subseteq N \subseteq W_{\mathcal{Q}}$ y $G_{\mathcal{R}} \subseteq N \subseteq W_{\mathcal{R}}$ se sigue que $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \subseteq N$. Por lo que $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \in [G_{\mathcal{Q}}, W_{\mathcal{Q}}]$ y $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \in [G_{\mathcal{R}}, W_{\mathcal{R}}]$, es decir, $G_{\mathcal{Q}} \cup G_{\mathcal{R}} \in ([G_{\mathcal{Q}}, W_{\mathcal{Q}}] \cap [G_{\mathcal{R}}, W_{\mathcal{R}}]) \subseteq \mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$. Con esto concluimos que toda familia de subconjuntos no numerable es no ajena a pares.

Por lo tanto, cada familia de subconjuntos abiertos de $\mathcal{F}[X]$ ajenos a pares debe ser numerable, en consecuencia $\mathcal{F}[X]$ tiene la propiedad ccn. $\square$

Capítulo 3

Fréchet-Urysohn y secuencial

En este capítulo, estudiaremos algunas de las consecuencias de dotar al hiperespacio Pixley-Roy con las propiedades Fréchet Urysohn y secuencial. Asi mismo, estudiaremos el comportamiento de dotar al hiperespacio con una propiedad menos conocida, ser Fréchet Urysohn para conjuntos finitos.

Teorema 3.1. *Sean $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{F}[X]$ y $F \in \mathcal{F}[X]$. Si el* $\lim F_n = F$*, entonces se cumple que:*

(3.1.1) *Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq \bigcap\{F_n : n \geq N\}$.*

(3.1.2) *Para cada $G \in \mathcal{F}[X]$ tal que $F \cap G = \emptyset$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $G \cap F_n = \emptyset$ para cada $n \geq M$.*

Demostración. Del hecho que $F \in [F, X]$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \in [F, X]$ para cada $n \geq N$. De esto, $F \subseteq F_n$ para cada $n \geq N$. En consecuencia $G \subseteq \bigcap\{F_n : n \geq N\}$. Esto prueba (3.1.1).

Ahora para probar (3.1.2), sea $G \in \mathcal{F}[X]$ tal que $G \cap F = \emptyset$. Notemos que $F \in [F, X \setminus G]$, con lo cual, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \in [F, X \setminus G]$ para cada $n \geq M$. La condición $F_n \subseteq X \setminus G$ implica que $F_n \cap G = \emptyset$ para cada $n \geq M$. $\square$

3.1. Fréchet-Urysohn y secuencial

Las definiciones esta sección que no cuenten con una mención especifica pueden ser consultadas en [3].

Definición 3.2. Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X.

1. Diremos que A es **secuencialmente abierto** si para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $w \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in A$ para cada $n \geq m$.

2. Diremos que A es **secuencialmente cerrado** si para toda sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a un punto $w \in X$, se cumple que $w \in A$.

Proposición 3.3. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces A es secuencialmente abierto si y sólo si $X \setminus A$ es secuencialmente cerrado.*

Demostración. Supongamos que A es secuencialmente abierto. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $X \setminus A$ que converge a $x \in X$. Si x no perteneciese a $X \setminus A$, entonces del hecho que A es secuencialmente abierto, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para cada $n \geq m$. Esto último sería una contradicción. Con lo cual $X \setminus A$ es secuencialmente cerrado.
Ahora supongamos que $X \setminus A$ es secuencialmente cerrado. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X que converge a $y \in A$. En el supuesto que A no es secuencialmente abierto, existiría una cantidad infinita de elementos de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no pertenecen a A. Con lo cual, $\{y_k : y_k \notin A\}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $X \setminus A$ que converge a y. En consecuencia, y pertenecería a $X \setminus A$ lo cual sería una contradicción. Así, A es secuencialmente abierto. □

Definición 3.4. Diremos que un espacio topológico X es **secuencial** si todo subconjunto de X secuencialmente cerrado es cerrado.

La prueba del siguiente resultado se sigue de la Proposición 3.3 y de la definicion de secuencial, sin embargo, si se desea consultar una prueba ver [3, Teorema 2.9, pág. 32].

Teorema 3.5. *Diremos que un espacio topológico X es **secuencial** si todo subconjunto de X secuencialmente abierto es abierto.*

Una demostración de la suficiencia de la siguiente proposición puede ser consultada en [3, Proposición 2.2, pág. 30], sin embargo ya que la necesidad no cuenta con una prueba, la presentamos a continuación.

Proposición 3.6. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es un espacio secuencial si y sólo si para cualquier subconjunto W de X que no sea cerrado, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de W que converge a $x \in X \setminus W$.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio secuencial. Sea W un subconjunto de X no cerrado. Observemos que si toda sucesión convergente de W convergiera a un punto $x \in W$, entonces W sería secuencialmente cerrado. Esto último sería una contradicción. Por lo tanto, existe una sucesión de W que converge a un punto $x \in X \setminus W$. $\square$

Definición 3.7. Diremos que X es un $K-$**espacio** si se cumple que F es un subconjunto cerrado de X si y sólo si $F \cap K$ es un subconjunto cerrado de X para todo compacto K de X. Ver [13, Definición 43.8, pág. 285].

Teorema 3.8. *Si X es un espacio de Hausdorff y secuencial, entonces X es un $K-$espacio.*

Definición 3.9. Diremos que X es un espacio **Fréchet-Urysohn** si para cada subconjunto A de X se satisface que $x \in Cl(A)$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x.

Teorema 3.10. *Sea Z un espacio de Hausdorff y un $K-$espacio. Si todo compacto de Z es Fréchet-Urysohn, entonces Z es secuencial.*

Demostración. Sea G un subconjunto de Z secuencialmente cerrado. Veamos que G es cerrado en Z, es decir, veamos que para todo subconjunto compacto K de X, $G \cap K$ es un subconjunto cerrado de X.
Sea Q un subconjunto compacto de Z de tal forma que $G \cap Q \neq \emptyset$. Por Corolario 1.38, Q es un cubconjunto cerrado de Z. Como consecuencia de Lema 1.25 se tiene que $Cl_Q(G \cap Q) = Cl_Z(G \cap Q)$. De esto, por un lado tenemos que $G \cap Q \subseteq Cl_Z(G \cap Q)$. Por otro lado, sea $x \in Cl_Q(G \cap Q)$. La condición Q es un espacio Fréchet-Urysohn implica que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $G \cap Q$ que converge a x. En consecuencia que G sea un conjunto secuencialmente cerrado se tiene que $x \in G$. Así, $x \in G \cap Q$, es decir, $Cl_Q(G \cap Q) \subseteq G \cap Q$. De esto concluimos que $Cl_Z(G \cap Q) = G \cap Q$. Por lo tanto, G es un subconjunto cerrado de Z, y así, Z es un espacio secuencial. $\square$

La siguiente definición se considera como en [13, 17J, pág. 126].

Definición 3.11. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **pseudocompacto** si y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada.

La prueba del siguiente teorema puede ser consultado en [12, Corolario 3, pág. 580].

Teorema 3.12. *Sea X es un espacio topológico Tychonoff pseudocompacto. Entonces X es metacompacto si y sólo si X es compacto.*

El siguiente teorema es consecuencia directa de [4, Teorema 1, pág. 326].

Teorema 3.13. *Si X es un espacio de Hausdorff que satisface que todo subconjunto pseudocompacto es cerrado, entonces X es Fréchet-Urysohn.*

Teorema 3.14. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un $K-$espacio, entonces $\mathcal{F}[X]$ es un espacio secuencial.*

Demostración. Usaremos el Teorema 3.10 para demostrar que $\mathcal{F}[X]$ es secuencial. Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto compacto de $\mathcal{F}[X]$ y sea $\mathcal{H}$ un subconjunto pseudocompacto de $\mathcal{K}$. Por Teorema 2.26, $\mathcal{H}$ es metacompacto. Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Tychonoff y en consecuencia del Teorema 3.12, se tiene que $\mathcal{H}$ es un subconjunto compacto cerrado de $\mathcal{K}$. Así, todo subconjunto pseudocompacto de $\mathcal{K}$ es cerrado. Por Teorema 3.13, $\mathcal{K}$ es Fréchet-Urysohn. Con esto, el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Hausdorff y un $K-$espacio que cumple que todo subconjunto compacto de $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysonh. Por Teorema 3.10, el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un espacio secuencial. $\square$

Notación 3.15. Dado un conjunto X, sea:

$$\mathcal{N}[X] = \{A \subseteq X : \ A \text{ es a lo más numerable}, \ A \neq \emptyset\}.$$

Definición 3.16. Sea X un espacio topológico. Diremos que X tiene **estrechez numerable** si para cada subconjunto A de X la condición $\bigcup\{Cl(K) : K \in \mathcal{N}(A)\} \subseteq A$ implica que A es un subconjunto cerrado en X.

Corolario 3.17. *Si X es un espacio secuencial, entonces X tiene estrechez numerable.*

Corolario 3.18. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es un $K-$espacio, entonces $\mathcal{F}[X]$ tiene estrechez numerable.*

3.2. Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos

Definición 3.19. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que una familia no vacía de subconjuntos de X $\mathcal{P}$, es una $\pi-$**red** en x si todo subconjunto abierto X que contiene a x contiene algún miembro de $\mathcal{P}$. Ver [11, 2, pág. 309].

Definición 3.20. Sea $\bar{x} \in X^k$. Definimos $\mathcal{N}_k(\bar{x})$ como la familia de los subconjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_k$ donde $U_i \in \tau_X$ para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$, $U_i = U_j$ cuando $x_i = x_j$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ cuando $x_i \neq x_j$.

Lema 3.21. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Si $\bar{x} \in X^k$, entonces para todo subconjunto abierto W de X^k tal que $\bar{x} \in W$, existe $U_1 \times \cdots \times U_k \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$ tal que $U_1 \times \cdots \times U_k \subseteq W$.*

Demostración. Sean $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ y W un subconjunto abierto de X^k tal que $\bar{x} \in W$. Definamos $A = \{x_i : i \in \{1, \cdots, k\}\}$. Por Lema 1.39, existen subconjuntos abiertos $V_1, \cdots, V_m$ de X tales que $x_s \in V_s$ y $V_s \cap V_r = \emptyset$ cuando $x_s \neq x_r$. Para $x_i = x_j$, consideremos $V_i = V_j$. Así, para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, definamos $U_i = V_i \cap \pi_i(W) \in \tau_X$. Notemos que $U_1 \times \cdots \times U_k \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$ y $U_1 \times \cdots \times U_k \subseteq W$. □

Lema 3.22. *Sean $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in X^k$, $U_1 \times \cdots \times U_k \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}[X]$. Si $\{x_1, \cdots, x_k\} \in Cl(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{P} = \{(U_1 \cap A) \times \cdots \times (U_k \cap A) : A \in \mathcal{A} \bigcap [\{x_1, \cdots, x_k\}, \bigcup U_i]\}$ es una $\pi-$red de conjuntos finitos en $\bar{x}$.*

Demostración. Observemos que para cada $(U_1 \cap A) \times \cdots \times (U_k \cap A) \in \mathcal{P}$, se cumple que $|(U_1 \cap A) \times \cdots \times (U_k \cap A)| \leq |A^k|$. De esto, $(U_1 \cap A) \times \cdots \times (U_k \cap A)$ es un subconjunto finito de X^k. Ahora veamos que $\mathcal{P}$ es una $\pi-$red en $\bar{x}$. Sea V un subconjunto abierto de X^k tal que $\bar{x} \in V$. Por Lema 3.21, existe $W_1 \times \cdots \times W_k \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$ tal que $W_1 \times \cdots \times W_k \subseteq V$ y $W_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$. Notemos que $[\{x_1, \cdots, x_k\}, \bigcup W_i]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}[X]$ tal que $[\{x_1, \cdots, x_k\}, \bigcup W_i] \subseteq [\{x_1, \cdots, x_k\}, \bigcup U_i]$. Del hecho que $\{x_1, \cdots, x_k\} \in Cl(\mathcal{A})$, existe $Q \in \mathcal{A}$ tal que $Q \in [\{x_1, \cdots, x_k\}, \bigcup W_i]$. Con esto, $(U_1 \cap Q) \times \cdots \times (U_k \cap Q) \in \mathcal{P}$. Para finalizar, veamos que para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, $U_i \cap Q \subseteq W_i$. Sea $y \in U_i \cap Q$. Las condiciones $Q \subseteq \bigcup W_i$, $W_i \subseteq U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $x_i \neq x_j$, implican que $y \in W_i$. Así, $U_i \cap Q \subseteq W_i$. En consecuencia, $(U_1 \cap Q) \times \cdots \times (U_k \cap Q) \subseteq W_1 \times \cdots \times W_k \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathcal{P}$ es una $\pi-$red de subconjuntos finitos en $\bar{x}$. □

Lema 3.23. *Si $\mathfrak{P}$ es una $\pi-$red de A en $\mathcal{F}[X]$, entonces $\{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} : A \subseteq G$ para todo $G \in \mathcal{P}\}$ es una $\pi-$red de A en $\mathcal{F}[X]$.*

Demostración. Sean $F \in \mathcal{F}[X]$ y $U \in \tau_X$ tales que $A \in [F, U]$. Observemos que $[A, U] \subseteq [F, U]$. Entonces del hecho que $\mathfrak{P}$ es $\pi-$red de A, existe $\mathcal{H} \in \mathfrak{P}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq [A, U]$. Así, $\mathcal{H} \subseteq [F, U]$. De esto, F está contenido en cada elemento de $\mathcal{H}$. Por lo tanto concluimos que, $\{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} : A \subseteq G$ para todo $G \in \mathcal{P}\}$ es una $\pi-$red de A en $\mathcal{F}[X]$. □

Definición 3.24. Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un espacio **Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos** si para todo punto $x \in X$ y una $\pi-$red $\mathcal{P}$ en x que consta de conjuntos finitos de X, hay una sucesión $\{P_n : n \in \omega\} \subseteq P$ que converge a x. Ver [11, 2, pág. 309].

Lema 3.25. *Si X es un espacio Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos y Y es subespacio de X, entonces Y es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.*

Demostración. Sean $a \in Y$ y $\mathcal{P}$ una $\pi-$red de subconjuntos finitos de a en Y. Veamos que $\mathcal{P}$ es $\pi-$red de a en X. Sea $U \in \tau_X$ tal que $a \in U$. Observemos que del hecho $U \cap Y \in \tau_Y$, existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \subseteq U \cap Y \subseteq U$. Con esto queda demostrado que $\mathcal{P}$ es una $\pi-$red de a en X. Como X es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos, existe una sucesión $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ que converge a a en X. Para finalizar, veamos que $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a en Y. Sea $W \in \tau_Y$ tal que $a \in W$. Entonces existe $V \in \tau_X$ tal que $W = V \cap Y$. En consecuencia, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \subseteq V$ para todo $n \geq k$. Sea $m \geq k$. Las condiciones $R_m \subseteq V$ y $R_m \subseteq Y$, implican que $R_m \subseteq V \cap Y = W$. De aquí se concluye que $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a en Y. Por lo tanto, Y es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. $\square$

Teorema 3.26. *Para un espacio X de Hausdorff las siguientes condiciones son equivalentes.*
(3.26.1) $\mathcal{F}[X]$ *es Fréchet-Urysohn.*
(3.26.2) *Toda potencia finita de X es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.*
(3.26.3) *Toda potencia finita de $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.*

Demostración. Veamos que (3.26.1) implica (3.26.2). Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn. Sean $k \in \mathbb{N}$, $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in X^k$ y $\mathcal{P}$ una $\pi-$red en $\bar{x}$ que consta de subconjuntos finitos de X^k. Por Lema 3.21, existe $U_1 \times \cdots \times U_k \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$. Sea $A = \{x_i : i \in \{1, \cdots, k\}\} \in \mathcal{F}[X]$. Definamos $\mathcal{D} = \{F \in [A, \bigcup U_i] :$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq (U_1 \times \cdots \times U_k) \cap F^k\}$.
Afirmación 1. $A \in Cl(\mathcal{D})$.
Sean $G \in \mathcal{F}[X]$ y $V \in \tau_X$ tales que $A \in [G, V]$. Notemos que $(U_1 \cap V) \times \cdots \times (U_k \cap V) \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$. Como $\mathcal{P}$ es $\pi-$red en $\bar{x}$, existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que $Q \subseteq (U_1 \cap V) \times \cdots \times (U_k \cap V)$. Definamos $F = A \cup \bigcup\{\pi_i(Q) : i \in \{1, \cdots, k\}\}$. Observemos que las condiciones Q subconjunto finito de X^k y $\pi_i(Q) \subseteq U_i \cap V \subseteq V$, implican que $F = A \cup \bigcup\{\pi_i(Q) : i \in \{1, \cdots, k\}\}$ es un subconjunto finito de X tal que $A \subseteq F \subseteq V$. De este modo, $F \in [A, V] \subseteq [G, V]$.

Ahora veamos que $F \in \mathcal{D}$. Del hecho que $\pi_i(Q) \subseteq U_i \cap V \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, se tiene que $A \subseteq F \subseteq \bigcup U_i$. De esto, $F^k \cap U_1 \times \cdots \times U_k \neq \emptyset$. Sea $\bar{h} = (h_1, \cdots, h_k) \in Q$. Notemos que $h_i = \pi_i(\bar{h}) \in \pi_i(Q) \subseteq F$. Con esto, $\bar{h} \in F^k$. Así, $Q \subseteq (U_1 \times \cdots \times U_k) \cap F^k$. De esto, $F \in \mathcal{D}$. Por tanto, $F \in [G, V] \cap \mathcal{D}$. Así, se concluye que $A \in Cl(\mathcal{D})$.

Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn, existe $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}$ que converge a A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\{P_n \in \mathcal{P} : P_n \subseteq (U_1 \times \cdots \times U_k) \cap F_n^k\}$. Veamos que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$. Sea W un subconjunto abierto de X^k tal que $\bar{x} \in W$. Por Lema 3.21, existe $W_1 \times \cdots \times W_k \in \mathcal{N}_k(\bar{x})$ tal que $W_1 \times \cdots \times W_k \subseteq W$ y $W_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$. Entonces $\bigcup W_i$ es un subconjunto abierto de X tal que $A \subseteq \bigcup W_i$. Del hecho que $A \in [A, \bigcup W_i] \in \tau_{PR}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \in [A, \bigcup W_i]$ para cada $n \geq m$.

Afirmación 2. $P_n \subseteq W$ para cada $n \geq m$.

Sean $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq m$ y $\bar{p} = (p_1, \cdots, p_k) \in P_q$. Notemos que la condición $P_q \subseteq (U_1 \times \cdots \times U_k) \cap F_q^k$ implica que para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, $p_i \in U_i \cap F_q$. De esto, y del hecho que $F_q \subseteq \bigcup W_i$, se sigue que $p_i \in W_i$. Así, $\bar{p} \in W_1 \times \cdots \times W_k$. Con esto, $P_q \subseteq W_1 \times \cdots \times W_k \subseteq W$.

Por lo tanto, toda potencia finita de X es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.

Ahora veamos que (3.26.2) implica (3.26.1). Supongamos que toda potencia finita de X es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. Sean $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}[X]$ y $G = \{g_1, \cdots, g_k\} \in \mathcal{F}[X]$ tal que $G \in Cl(\mathcal{A})$. Por Lema 1.39, para cada $g_i \in G$, existe $U_i \in \tau_X$ tal que $g_i \in U_i$ y $U_i \cap U_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Por Lema 3.22, $\mathcal{P} = \{(U_1 \cap A) \times \cdots \times (U_k \cap A) : A \in \mathcal{A} \bigcap [G, \bigcup U_i]\}$ es una $\pi-$red de subconjuntos finitos en $\bar{g} = (g_1, \cdots, g_k) \in X^k$. La condición X^k es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos implica que existe una sucesión $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ que converge a $\bar{g}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in \mathcal{A}$ tal que $G \subseteq B_n \subseteq \bigcup W_i$ y $P_n = (U_1 \cap B_n) \times \cdots \times (U_k \cap B_n)$. Veamos que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a G. Sean $E \in \mathcal{F}[X]$ y $Z \in \tau_X$ tales que $G \in [E, Z]$. Sea $[G, N] = [G, Z] \cap [G, \bigcup U_i]$. Observemos que $N \times \cdots \times N$ es un subconjunto abierto de X^k tal que $\bar{g} \in N \times \cdots \times N$. De esto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $P_n \subseteq N \times \cdots \times N$ para cada $n \geq m$. Por último, afirmamos que $B_n \in [G, N]$ para cada $n \geq m$. Sea $y \in B_n$. Del hecho que $B_n \subseteq \bigcup U_i$, existe $j \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $y \in U_j \cap B_n$. De esto y de la condición $P_n = (U_1 \cap B_n) \times \cdots \times (U_k \cap B_n) \subseteq N \times \cdots \times N$ se sigue que $y \in U_j \cap B_n \subseteq N$. Así, $B_n \subseteq N$. En consecuencia, $B_n \in [G, N] \subseteq [E, Z]$. Con esto concluimos que $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a G.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn.

Ahora veamos que (3.26.1) implica (3.26.3). Supongamos que $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn.

Afirmación 3. Si $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn, entonces $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.

Sea $A \in \mathcal{F}[X]$ y $\mathfrak{P}$ una $\pi-$red de subconjuntos finitos en A. Por Lema 3.23, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{o}} = \{\mathcal{P} \in \mathfrak{P} : A \subseteq G$ para todo $G \in \mathcal{P}\}$ es una $\pi-$red de subconjuntos finitos en A. Para cada $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}$, sea $A_{\mathcal{P}} = \bigcup \mathcal{P}$. Veamos que $A \in Cl(\{A_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}\})$. Sean $Q \in \mathcal{F}[X]$ y $W \in \tau_X$ tales que $A \in [Q, W]$. Del hecho que $[A, W] \subseteq [Q, W]$ y que $\mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}$ es $\pi-$red en A, existe $\mathcal{R} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}$ tal que $\mathcal{R} \subseteq [A, W]$. La condicion $\mathcal{R}$ subconjunto finito de $\mathcal{F}[X]$ implica que $A_{\mathcal{R}} \in [A, W]$. Con esto, $[Q, W] \cap \{A_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}\} \neq \emptyset$. En consecuencia, $A \in Cl(\{A_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}\})$. Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn, existe una sucesión $\{A_{\mathcal{P}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{A_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{o}}\}$ que converge a A. Veamos que $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A.

Sean $I \in \mathcal{F}[X]$ y $M \in \tau_x$ tales que $A \in [I, M]$. Entonces existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $A_{\mathcal{P}_n} \in [I, M]$ para todo $n \geq t$. Sean $w \geq t$ y $R \in \mathcal{P}_w$. Las condiciones $I \subseteq A \subseteq R$ y $R \subseteq \bigcup \mathcal{P}_w \subseteq M$ implican que $R \in [I, M]$. Con esto, $\mathcal{P}_w \subseteq [I, M]$ para $w \geq t$. En consecuencia, $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A. Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia de (3.26.2) si y solo si (3.26.1), se tiene que $\mathcal{F}[X^n]$ es Fréchet-Urysohn. Por Afirmación 3, $\mathcal{F}[X^n]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. Por Teorema 2.29, $\mathcal{F}[X]^n$ es subespacio de $\mathcal{F}[X^n]$. Por Lema 3.25, $\mathcal{F}[X]^n$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.

Por lo tanto, toda potencia finita de $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.

Por último, veamos que (3.26.3) implica (3.26.1). Supongamos que toda potencia finita de $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. Sean $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}[X]$ y $D \in \mathcal{F}[X]$ tales que $D \in Cl(\mathcal{B})$. Sea $\mathfrak{P} = \{\{G\} \subseteq \mathcal{B} : \{G\} \subseteq [D, W]$ para todo $W \in \tau_X\}$ una $\pi-$red de subconjuntos finitos en D. Del hecho que $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos, existe una sucesión $\{\{G_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{P}$ que convergente a D. Veamos que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a D. Sean $K \in \mathcal{F}[X]$ y $Z \in \tau_X$ tales que $D \in [K, Z]$. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\{G_n\} \subseteq [K, Z]$ para todo $n \geq r$. Con lo cual, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathcal{B}$ que converge a D. Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn. □

Definición 3.27. Para un espacio X, definimos recursivamente $\mathcal{F}^1[X] = \mathcal{F}[X]$ y $\mathcal{F}^{n-1}[X] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{n-1}[X]]$ para $n \geq 2$.

Corolario 3.28. *Si $\mathcal{F}[X]$ es Fréchet-Urysohn, entonces $\mathcal{F}^n[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos para todo $m, n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $m \in \mathbb{N}$ fijo. Veamos por inducción sobre n que $\mathcal{F}^n[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
Para $n = 1$. Como consecuencia de (3.26.1) implica (3.26.2), se tiene que toda potencia finita de X^m es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. Aplicando (3.26.2) implica (3.26.1) sobre X^m, tenemos que $\mathcal{F}[X^m]$ es Fréchet-Urysohn. Por último, de (3.26.1) implica (3.26.3) se sigue que toda potencia de $\mathcal{F}[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. En particular, $\mathcal{F}[X^m] = \mathcal{F}^1[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
Para $n = 2$. Del hecho que toda potencia de $\mathcal{F}[X^m]$ e Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos se sigue que $\mathcal{F}[\mathcal{F}[X^m]] = \mathcal{F}^2[X^m]$ es Fréchet-Urysohn. Aplicando (3.26.1) implica (3.26.3) sobre $\mathcal{F}^2[X^m]$, tenemos que toda potencia finita de $\mathcal{F}^2[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. En particular, $\mathcal{F}^2[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
Supongamos que para toda $n \geq 2$ se cumple que toda potencia finita de $\mathcal{F}^n[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. Como consecuencia, $\mathcal{F}^n[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
Veamos que para $n + 1$ se cumple que $\mathcal{F}^{n+1}[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
Del hecho que toda potencia de $\mathcal{F}^n[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos se sigue que $\mathcal{F}[\mathcal{F}^n[X^m]] = \mathcal{F}^{n+1}[X^m]$ es Fréchet-Urysohn. Aplicando (3.26.1) implica (3.26.3) sobre $\mathcal{F}^{n+1}[X^m]$, tenemos que toda potencia finita de $\mathcal{F}^{n+1}[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos. En particular, $\mathcal{F}^{n+1}[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos.
Por lo tanto, $\mathcal{F}^n[X^m]$ es Fréchet-Urysohn para conjuntos finitos para todo $m, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.29. *Si* $\mathcal{F}_2[X]$ *es secuencial, entonces* $\mathcal{F}_2[X]$ *es es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{F}_2[X]$ y sea $C \in Cl_{\mathcal{F}_2[X]}(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{B}$. Entonces C es un punto no aislado de $\mathcal{F}_2[X]$. Por Corolario 2.20, existe un punto no aislado z de X tal que $C = \{z\}$.
Afirmación. $Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C, X] \cap \mathcal{B}) \setminus ([C, X] \cap \mathcal{B}) = \{C\}$.
Primero veamos que $\{C\} \subseteq Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C, X] \cap \mathcal{B}) \setminus ([C, X] \cap \mathcal{B})$. Sea $W \in \tau_X$ tal que $C \subseteq W$. Las condiciones $[C, W] \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ y $[C, W] \subseteq [C, X]$ implican que $([C, W] \cap \mathcal{F}_2[X]) \cap ([C, X] \cap \mathcal{B}) = [C, W] \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Con lo cual, $C \in Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C, X] \cap \mathcal{B})$. Por tanto, $C \in Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C, X] \cap \mathcal{B}) \setminus ([C, X] \cap \mathcal{B})$. Esto prueba la primera parte.
Ahora veamos que $Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C, X] \cap \mathcal{B}) \setminus ([C, X] \cap \mathcal{B}) \subseteq \{C\}$. Sea $D \in Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C, X] \cap \mathcal{B}) \setminus ([C, X] \cap \mathcal{B})$. Notemos que $([D, X] \cap \mathcal{F}_2[X]) \cap ([C, X] \cap \mathcal{B}) \neq$

$\emptyset$. Por Lema (2.3.2), $([D,X]\cap\mathcal{F}_2[X])\cap([C,X]\cap\mathcal{B}) = [D\cup C,X]\cap\mathcal{B} \neq \emptyset$. Si D constará de dos elementos distintos de X, entonces $D\cup C$ tendría que ser igual a D. De lo cual, por un lado tendríamos que $C \subseteq D$, es decir, $D \in [C,X]$. Por otro lado, $[D \cup C, X] \cap \mathcal{B} = \{D\}$, es decir, $D \in \mathcal{B}$. Esto contradecería el hecho que $D \notin ([C,X] \cap \mathcal{B})$. Con lo cual, concluimos que D consta de un único elemento d de X. En caso que d fuera distinto de z, tendríamos que $D \in [D, X\setminus C]\cap\mathcal{F}_2[X]$. Con lo cual, $([D,X\setminus C]\cap\mathcal{F}_2[X])\cap([C,X]\cap\mathcal{B}) \neq \emptyset$. Por Lema (2.3.2), $([D,X\setminus C]\cap\mathcal{F}_2[X])\cap([C,X]\cap\mathcal{B}) = [D\cup C, X\setminus C]\cap\mathcal{B} \neq \emptyset$. Esto último sería una contradicción pues $[D \cup C, X \setminus C] = \emptyset$. Con esto concluimos que $d = z$ y en consecuencia $D = C$. Esto prueba la segunda parte.
Por lo tanto, $Cl_{\mathcal{F}_2[X]}([C,X] \cap \mathcal{B}) \setminus ([C,X] \cap \mathcal{B}) = \{C\}$.
Por Proposición 3.6, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $[C,X]\cap\mathcal{B}$ que converge a C. Con esto último concluimos que $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn. $\square$

Definición 3.30. Sea $S_\omega = \{\infty\} \cup \{(n,m) : n,m \in \omega\}$. Dotamos a S_ω con la topología de abanico secuencial donde cada (n,m) es un punto aislado en S_ω y un conjunto abierto básico que contiene a ∞ es de la forma $N(f) = \{\infty\} \cup \{(n,m) : n \in \omega \text{ y } m \geq f(n)\}$ para f una función de ω en ω.

Observación 3.31. Para cada $n \geq 2$, como consecuencia de Proposición 2.19, T es un punto no asilado de $\mathcal{F}_n[S_\omega]$ si y sólo si $\infty \in T$ y $|T| < n$.

Lema 3.32. *Sea T un punto no aislado de $\mathcal{F}[S_\omega]$. Si $k, r \in \omega$, entonces la sucesión $\{T\cup\{(k,m),(k,m+1),\cdots,(k,m+r)\}\}_{m\in\omega}$ converge a T en $\mathcal{F}[S_\omega]$.*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de S_ω de tal modo que $T \subseteq U$. Dado que $\infty \in U$, existe una función g de ω en ω la cual cumple que $\infty \in N(g) \subseteq U$. Notemos que $N(g) \cup T$ es un subconjunto abierto de S_ω tal que $T \subseteq N(g) \cup T \subseteq U$. En consecuencia $[T, N(g) \cup T] \subseteq [T,U]$. Por otro lado, observemos que para cada $p \geq g(k)$ se verifica que $T \cup \{(k,p),(k,p+1),\cdots,(k,p+r)\} \subseteq N(g) \cup T$. Así, $T \cup \{(k,p),(k,p+1),\cdots,(k,p+r)\} \in [T, N(g) \cup T]$ para todo $p \geq g(k)$. Con lo cual concluimos que $\{T \cup \{(k,m),(k,m+1),\cdots,(k,m+r)\}\}_{m\in\omega}$ converge a T en $\mathcal{F}[S_\omega]$. $\square$

Teorema 3.33. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n[S_\omega]$ es secuencial.*

Demostración. Para $n = 1$, se verifica que $\mathcal{F}_1[S_\omega]$ es un espacio discreto. En consecuencia, $\mathcal{F}_1[S_\omega]$ es secuencial.

Ahora para $n \geq 2$, empleando el Teorema 3.5, demostraremos que $\mathcal{F}_n[S_\omega]$ es secuencial y para eso exhibiremos que todo subconjunto secuencialmente abierto de $\mathcal{F}_n[S_\omega]$ es abierto. Sean $q \in \mathbb{N}$ de tal modo que $q \geq 2$ y $\mathcal{A}$ un subconjunto secuencialmente abierto de $\mathcal{F}_q[S_\omega]$. En caso que $\mathcal{A}$ constará solo de puntos aislados de $\mathcal{F}_q[S_\omega]$, se tendría que $\mathcal{A}$ es un subconjunto abierto. Con lo cual, supongamos que T es un punto no aislado de $\mathcal{F}_q[S_\omega]$ el cual pertenece a $\mathcal{A}$. De la Observación 3.31, se sigue que $q = |T| + r$ donde $r \geq 1$. Por Lema 3.32, para todo $k \in \omega$ las sucesiones $\{T \cup \{(k, m)\}\}_{m\in\omega}, \cdots, \{T \cup \{(k, m), (k, m + 1), \cdots, (k, m + (r - 1))\}\}_{m\in\omega}$ convergen a T en $\mathcal{F}_q[S_\omega]$. Del hecho que $\mathcal{A}$ es secuencialmente abierto, para cada sucesión existe $m_k^i \in \omega$ de tal modo que $T \cup \{(k, m), \cdots, (k, m + i)\} \in \mathcal{A}$ para cada $m \geq m_k^i$. Para todo $k \in \omega$, sea $m_k = \text{máx}\{m_k^i : 0 \leq i \leq r - 1\}$. Definimos h una función de ω en ω como $h(k) = m_k$. Observemos que $N(h) \cup T$ es un subconjunto abierto de S_ω. De lo anterior se sigue que $T \in [T, (N(h) \cup T)] \cap \mathcal{F}_q[S_\omega] \subseteq \mathcal{A}$. Dado que en ambos casos $\mathcal{A}$ resulta un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_q[S_\omega]$, se concluye que $\mathcal{F}_q[S_\omega]$ es secuencial. $\square$

Capítulo 4

Primer axioma de numerabilidad

En este último capítulo, presentaremos algunas condiciones necesarias y suficientes para que el hiperespacio satisfaga el primer axioma de numerabilidad así como la equivalencia que existe con la propiedad de Moore.

4.1. $\mathcal{F}[X]$ espacio de Moore

Teorema 4.1. *Si X es un espacio primero numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable.*

Demostración. Del hecho que X es un espacio primero numerable, para cada $x \in X$ existe $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ una base local tal que $B_{n+1}(x) \subseteq B_n(x)$. Para cada $F \in \mathcal{F}[X]$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos $B_n(F) = \bigcup\limits_{x \in F} B_n(x)$.

Veamos que $\{[F, B_n(F)] : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para τ_{PR} en F. Sea $\mathcal{U} \in \tau_{PR}$ de tal forma que $F \in \mathcal{U}$. Entonces existen $G \in \mathcal{F}[X]$ y $V \in \tau_X$ tales que $G \subseteq F \subseteq V$, es decir $F \in [G, V] \subseteq \mathcal{U}$. Notemos que para todo $x \in F$, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_x}(x) \subseteq V$. Sea $m = \max\{n_x \in \mathbb{N} : x \in F\}$. Así, para todo $x \in F$, $x \in B_m(x) \subseteq B_{n_x}(x) \subseteq V$. Por lo que $F \subseteq \bigcup\limits_{x \in F} B_m(x) = B_m(F) \subseteq V$.

En consecuencia, $[F, B_m(F)] \subseteq [G, V] \subseteq \mathcal{U}$. Con lo cual, $\{[F, B_n] : n \in \mathbb{N}\}$ es base local para τ_{PR} en F.

Por lo tanto, $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable. $\square$

Corolario 4.2. *Si X es un espacio topológico primero numerable, entonces el hiperespacio $\mathcal{F}_k[X]$ es primero numerable para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Definición 4.3. Sea X un espacio topológico. Un **desarrollo** para X, es una colección numerable de cubiertas abiertas de X, $\{\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N}\}$ de modo que para cualquier conjunto cerrado C de X y cualquier punto $p \notin C$, existe un $\mathcal{F}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que ningún elemento de $\mathcal{F}_j$ que contenga a p intersecta a C.

Definición 4.4. Un espacio topológico se denomina de **Moore** si es regular y tiene un desarrollo. Ver [13, Definición 2.6, pág. 169]

Teorema 4.5. *Si $\mathcal{F}[X]$ es primero numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore.*

Demostración. Dado que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio primero numerable, para cada $F \in \mathcal{F}[X]$ existe $\{[F, B_n(F)] : n \in \mathbb{N}\}$ una base local tal que $[F, B_{n+1}(F)] \subseteq [F, B_n(F)]$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\mathfrak{H}_n = \{[F, B_n(F)] : F \in \mathcal{F}[X]\}$. Afirmamos que $\mathcal{H} = \{\mathfrak{H}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un desarrollo para $\mathcal{F}[X]$.
Observemos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{H}_k$ es una cubierta abierta de $\mathcal{F}[X]$, pues para $Q \in \mathcal{F}[X]$, $Q \in [Q, B_k(Q)] \in \mathfrak{H}_k$.
Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$ y sea $P \in \mathcal{F}[X]$ tal que $P \notin \mathcal{C}$. Entonces $P \in \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{C} \in \tau_{PR}$. Por lo cual existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $P \in [P, B_q(P)] \subseteq \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{C}$. Del hecho que X es un espacio T_1, se sigue que $X \setminus (P \setminus S) \in \tau_X$ para todo $S \in \mathcal{F}[P] \setminus \{P\}$. Notemos que para cada $S \in \mathcal{F}[P] \setminus \{P\}$, existe $q_s \in \mathbb{N}$ tal que $[S, B_{q_s}(S)] \subseteq [S, X \setminus (P \setminus S)]$. Ademas $P \notin [S, B_{q_s}(S)]$ ya que $P \nsubseteq X \setminus (P \setminus S) = S \cup (X \setminus P)$. Sea $r = \text{máx}\{q_s \in \mathbb{N} : S \in \mathcal{F}[P] \setminus \{P\}\} \cup \{q\}$. Consideremos $\mathfrak{H}_r \in \mathcal{H}$. Sea $[F, B_r(F)] \in \mathfrak{H}_r$ tal que $P \in [F, \mathcal{B}_r(F)]$. De la condición que $P \notin [S, B_r(S)]$ para todo $S \in \mathcal{P}[X] \setminus \{P\}$, se sigue que $P = F$. Por lo que $B_r(F) = B_r(P)$, así P solo pertenece a $[P, B_r(P)] \subseteq [P, B_q(P)] \subseteq \mathcal{F}[X] \setminus \mathcal{C}$.
Con esto concluimos que $\mathcal{H}$ es un desarrollo para $\mathcal{F}[X]$. Por Teorema 2.31, concluimos que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore. $\square$

Teorema 4.6. *Si $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore, entonces X es primero numerable*

Demostración. Sean $\{\mathfrak{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ un desarrollo de $\mathcal{F}[X]$ y $x \in X$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_n$, existe $V_{\mathcal{K}} \in \tau_X$ tal que $\{x\} \in [\{x\}, V_{\mathcal{K}}] \subseteq \mathcal{K}$. Definimos $U_n = \bigcup\{V_{\mathcal{K}} : \{x\} \in \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_n\}$.

Afirmación. $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base local de x en X.
Sea $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$. Del hecho que $\mathcal{F}[X] \setminus [\{x\}, W]$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}[X]$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que todo $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}_m$ que cumpla que $\{x\} \in \mathcal{K}$, también cumple que $\mathcal{K} \cap (\mathcal{F}[X] \setminus [\{x\}, W]) = \emptyset$. Observemos que la condición $\mathcal{K} \cap (\mathcal{F}[X] \setminus [\{x\}, W]) = \emptyset$ implica que $\mathcal{K} \subseteq [\{x\}, W]$. Veamos que $U_m \subseteq W$. Sea $\mathcal{Q} \in \mathfrak{K}_m$ de tal forma que $\{x\} \in \mathcal{Q}$. De esto, $V_{\mathcal{Q}} \in \tau_X$ es tal que $\{x\} \in [\{x\}, V_{\mathcal{Q}}] \subseteq \mathcal{Q} \subseteq [\{x\}, W]$. Por Lema (2.3.3), $V_{\mathcal{Q}} \subseteq W$. En consecuencia, $U_m = \bigcup\{V_{\mathcal{K}} : \{x\} \in \mathcal{K} \in \mathfrak{K}_m\} \subseteq W$. Con esto, $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base local de x en X.
Por lo tanto, X es primero numerable. □

Corolario 4.7. *Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(4.7.1) *X es primero numerable.*
(4.7.2) *$\mathcal{F}[X]$ es un espacio primero numerable.*
(4.7.3) *$\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore.*

4.2. $\mathcal{F}[X]$ g-primero numerable

El resto de las definiciones de esta sección se consideran como en [6].

Definición 4.8. Sea X un espacio topológico. Diremos que $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es una **función de cobertura numerable débilmente abierta** (abreviado como **función de cobertura**) si g satisface:

1. $x \in g(n, x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

2. $g(n+1, x) \subseteq g(n, x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$,

3. U es subconjunto abierto de X si y sólo si para cada $x \in U$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m, x) \subseteq U$.

Definición 4.9. Diremos que un espacio topológico X es $g-$**primero numerable** si existe una función de cobertura g de X.

Proposición 4.10. *Si X es un espacio $g-$primero numerable, entonces cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple que $x_n \in g(n, x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ converge a x.*

Demostración. Sea W un subconjunto abierto de X tal que $x \in W$. Dado que X es $g-$primero numerable, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k,x) \subseteq W$. Sea $l \geq k$. Del hecho que $x_l \in g(l,x) \subseteq g(k,x)$ se sigue que $x_l \in W$. Con esto concluimos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. $\square$

Proposición 4.11. *Sea X un espacio topológico. Si X es primero numerable, entonces X es $g-$primero numerable.*

Demostración. Supongamos que X es primero numerable. Del hecho que X es un espacio primero numerable, para cada $x \in X$ existe $\{B_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ una base local tal que $B_{n+1}(x) \subseteq B_n(x)$. Definamos $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ como $g(n,x) = B_n(x)$. Veamos que g es una función de cobertura.
Sea $n \in \mathbb{N}$. Observemos que del hecho que $x \in B_n(x)$, se sigue que $x \in g(n,x)$. De forma similar, la condición $B_{n+1}(x) \subseteq B_n(x)$ implica que $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$.
Por último, sea U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ que cumple que $B_m(x) \subseteq U$, es decir, $g(m,x) \subseteq U$. Con esto queda demostrado que g es una función de cobertura.

Por lo tanto, X es $g-$primero numerable. $\square$

Teorema 4.12. *Sea X un espacio topológico. Si X es un $g-$primero numerable, entonces X es secuencial.*

Demostración. Sean $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una función de cobertura y A un subconjunto secuencialmente abierto de X. Veamos que A es abierto. Sean $x \in A$. Supongamos que no existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g(r,x) \subseteq A$. De esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in g(n,x) \setminus A$. De Proposición 4.10, se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. La condición A secuencialmente abierto, implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq m$. Esto es contradeciría el hecho que $x_n \notin A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Con lo cual concluimos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $g(r,x) \subseteq A$. Así, A es un subconjunto abierto de X. Por lo tanto, X es secuencial. $\square$

Corolario 4.13. *Sea X un espacio topológico. Si X es un primero numerable, entonces X es secuencial.*

Teorema 4.14. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es $g-$primero numerable, entonces se cumple lo siguiente:*
(4.14.1) *$\mathcal{F}_n[X]$ es $g-$primero numerable.*

(4.14.2) *Para cada* $Q \in \mathcal{F}_2[X]$*, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $g(n, Q) \cap \mathcal{F}_2[X]$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathcal{F}_2[X]$ *para todo* $n \geq k$*.*
(4.14.3) *Para cada* $Q \in \mathcal{F}_2[X]$*, existe* $s \in \mathbb{N}$ *tal que* $g(n, Q) \cap \mathcal{F}_2[X]$ *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{F}_2[X]$ *para todo* $n \geq k$*.*
(4.14.4) $\mathcal{F}_2[X]$ *es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sean $g : \mathbb{N} \times \mathcal{F}[X] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}[X])$ una función de cobertura y $m \in \mathbb{N}$ fijo. Definamos $g_m : \mathbb{N} \times \mathcal{F}_m[X] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_m[X])$ dada por $g_m(n, H) = g(n, H) \cap \mathcal{F}_m[X]$. Sea $F \in \mathcal{F}_m[X]$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $F \in g_m(n, F)$ y $g_m(n+1, F) \subseteq g_m(n, F)$. Por otro lado, sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_m[X]$ tal que $F \subseteq \mathcal{U}$. Entonces existe $W \in \tau_X$ de tal forma que $[F, W] \cap \mathcal{F}_m[X] \subseteq \mathcal{U}$. Dado que $\mathcal{F}[X]$ es $g-$primero numerable, existe $s \in \mathbb{N}$ el cual cumple que $g(s, F) \subseteq [F, W]$. De esto, $(g(s, F) \cap \mathcal{F}_m[X]) = g_m(s, F) \subseteq ([F, W] \cap \mathcal{F}_m[X]) \subseteq \mathcal{U}$. Así, g_m es una función de cobertura y en consecuencia, $\mathcal{F}_m[X]$ es $g-$primero numerable. Con esto queda demostrado (4.14.1).

Para demostrar (4.14.2), sean $g_2 : \mathbb{N} \times \mathcal{F}_2[X] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_2[X])$ una función de cobertura como en (4.14.1) y Q un punto no aislado de $\mathcal{F}_2[X]$. Del hecho que $[Q, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_2(k, Q) \subseteq ([Q, X] \cap \mathcal{F}_2[X])$. Afirmamos que para cada $n \geq k$ se cumple que $g_2(n, Q)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}_2[X]$. De Teorema 4.12, se sigue que $\mathcal{F}_2[X]$ es secuencial. Con lo cual para cada $n \geq k$ es suficiente demostrar que $g_2(n, Q)$ es secuencialmente cerrado. Sean $r \geq k$ y $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $g_2(r, Q)$ que converge a H. De la condición $[H, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$ se verifica que existe $t \in \mathbb{N}$ el cual cumple que $H_m \in [H, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ para cada $m \geq t$. Si $|H| = 2$, entonces para toda $m \geq t$, $H = H_m \in g_2(r, Q)$. Si $|H| = 1$, por Teorema (2.3.2), se tiene que $H_m \in ([H, X] \cap [Q, X]) \cap \mathcal{F}_2[X] = [H \cup Q, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ para toda $m \geq t$. Dado que Q es un punto no aislado de $\mathcal{F}_2[X]$ concluimos que $H \cup Q = Q$, en caso contrario, para toda $m \in \mathbb{N}$, $H_m = H \cup Q$ lo cual contradeciría el hecho que $\{H_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a H. Por lo anterior se concluye que $g_2(r, Q)$ es un subconjunto secuencialmente cerrado de $\mathcal{F}_2[X]$. Por lo tanto, para todo $n \geq k$, $g_2(n, Q)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}_2[X]$.

Ahora, para demostrar (4.14.3) sean $g_2 : \mathbb{N} \times \mathcal{F}_2[X] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}_2[X])$ una función de cobertura como en (4.14.1) y R un punto no aislado de $\mathcal{F}_2[X]$. Del hecho que $[R, X] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g_2(k, R) \subseteq ([R, X] \cap \mathcal{F}_2[X])$. Afirmamos que para cada $n \geq k$ se cumple que

$g_2(n,R)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$. Sean $r \geq k$ y $H \in g_2(r,R)$. Si H fuera igual con R, se verifica que $g_2(r,H) = g_2(r,R)$. En el caso que H fuera distinto de R, dado que $g_2(r,R) \subseteq ([R,X] \cap \mathcal{F}_2[X])$, se tiene que $H \in ([R,X] \cap \mathcal{F}_2[X]) \setminus \{R\}$. Con lo cual H es un subconjunto asilado de $\mathcal{F}_2[X]$. En consecuencia, existe $p \in \mathbb{N}$ el cual cumple que $g_2(p,H) = \{H\}$. Así, $g_2(p,H) \subseteq g_2(r,R)$. Por lo tanto, $g_2(r,R)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$. Con esto concluimos que para cada $n \geq k$, $g_2(n,R)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$.

Por último, como consecuencia de Teorema 4.12, se sigue que $\mathcal{F}_2[X]$ es secuencial. Por lo tanto, por Teorema 3.29, se concluye que $\mathcal{F}_2[X]$ es Fréchet-Urysohn. Con esto queda demostrado (4.14.4). $\square$

Teorema 4.15. *Si el hiperespacio $\mathcal{F}[X]$ es $g-$primero numerable, entonces $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore.*

Demostración. Usaremos el Corolario 4.7 para demostrar que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore. Con lo cual es suficiente demostrar que X es primero numerable. Sean $g : \mathbb{N} \times \mathcal{F}[X] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}[X])$ una función de cobertura y $x \in X$. Observemos que como consecuencia de Teorema (4.14.3), para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\{x\} \in Int(g_2(n,\{x\}))$. De esto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U_n \in \tau_X$ de tal forma que $\{x\} \in ([\{x\},U_n] \cap \mathcal{F}_2[X]) \subseteq Int(g_2(n,\{x\}))$.
Demostraremos que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base local de x en X. Sea $W \in \tau_X$ tal que $x \in W$. Del hecho que $[\{x\},W] \cap \mathcal{F}_2[X]$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{F}_2[X]$, existe $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $g_2(k,\{x\}) \subseteq [\{x\},W] \cap \mathcal{F}_2[X]$. Veamos que $U_k \subseteq W$. Sea $y \in U_k$. De las condiciones $\{x,y\} \in ([\{x\},U_k] \cap \mathcal{F}_2[X])$ y $g_2(k,\{x\}) \subseteq [\{x\},W] \cap \mathcal{F}_2[X]$ se sigue que $y \in W$. Así, $U_k \subseteq W$. Con esto queda demostrado que $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base local de x en X. Por lo tanto, X es primero numerable. Aplicando Corolario 4.7 se concluye que $\mathcal{F}[X]$ es un espacio de Moore. $\square$

Definición 4.16. Sea X un espacio topológico y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de valor real no negativa definida tal forma que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Diremos que d es una o-metríca para X siempre que un subconjunto U de X es abierto si y sólo si $d(x, X \setminus U) > 0$ para cada $x \in U$.

Observación 4.17. Sean $x \in X$ y $A \subseteq X$. Entiéndase $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$.

Proposición 4.18. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces X es o-metrizable si y sólo si es un espacio $g-$primero numerable.*

Demostración. Sea $g : \mathbb{N}\times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una función de cobertura. Definamos $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $d(x,y) = \dfrac{1}{k}$ donde $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : y \notin g(n,x)\}$. Del hecho que X es un espacio T_1, se tiene que para cuales quiera $x, y \in X$ distintos, $x \notin X \setminus \{y\} \in \tau_X$. En consecuencia existe $n_x \in \mathbb{N}$ de tal forma que $g(n_x, x) \subseteq X \setminus \{y\}$. Con lo cual se verifica el hecho que d esta bien definida. Sea U un subconjunto abierto de X y $a \in U$. Entonces existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que $g(n_a, a) \subseteq U$. De esto, para cada $h \in X \setminus U$, $n_a \geq k_h$ donde $k_h = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : h \notin g(n,a)\}$. En consecuencia, para todo $h \in X \setminus U$ se tiene que $\dfrac{1}{n_a} \leq \dfrac{1}{k_h}$. Así, $d(a, X \setminus U) \geq \dfrac{1}{n_a} > 0$. Por lo tanto, X es o-metrizable.

Ahora, para demostrar la segunda parte supongamos que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una o-métrica para X. Definamos $g : \mathbb{N} \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ como $g(n,x) = \{y \in X : d(x,y) \leq \dfrac{1}{n}\}$. Sea $x \in X$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $x \in g(n,x)$ y $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$. Por otro lado, sea W un subconjunto abierto de X del forma que $x \in U$. Del hecho que $r = d(x, X \setminus W) > 0$, existe $s \in \mathbb{N}$ de tal forma que $r > \dfrac{1}{s}$. De esto, para todo $y \in X$ tal que $d(x,y) \leq \dfrac{1}{s}$ cumple que $y \notin X \setminus W$. Con lo cual, $g(s,x) \subseteq W$. Así, g es una función de cobertura, es decir, X es $g-$primero numerable. □

Corolario 4.19. *Sea X un espacio topológico T_1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(4.19.1) $\mathcal{F}[X]$ *es $g-$primero numerable.*
(4.19.2) X *es primero numerable.*
(4.19.3) $\mathcal{F}[X]$ *es un espacio primero numerable.*
(4.19.4) $\mathcal{F}[X]$ *es un espacio de Moore.*
(4.19.5) $\mathcal{F}[X]$ *es o-metrizable.*

Bibliografía

[1] A. Bella and M. Sakai, *Tight points of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **160** (2013), no. 16, 2061–2068 (English).

[2] Angel Tamariz Mascarúa Fidel Casarrubias Segura, *Elementos de topología de conjuntos*, 1 ed., Instituto de Matemáticas, 2019.

[3] Miguel López De Luna Gerardo Delgadillo Pi~ñón, *Espacios de fréchet urysohn*, Revista de Ciencias Basicas UJAT **8** (2009), no. 1, 29–56 (Spanish).

[4] Zhuu Hao-Xuan, *A conjeture on compact fréchet spaces*, Proceedings American Mathematical Society **89** (1983), no. 2, 326–328 (English).

[5] Fernando Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos*, 2 ed., Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[6] Kyung Bai Lee, *On certain g-first countable spaces*, Pacific Journal of Mathematics **65** (1976), no. 1, 113–118 (English).

[7] J. R. Munkres, *Topología*, 2 ed., Prentice-Hall Inc., 2002.

[8] M. Sakai, *Cardinal functions of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **159** (2012), no. 13, 3080–3088 (English).

[9] ______, *Selective separability of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **159** (2012), no. 6, 1591–1598 (English).

[10] ______, *The weak Hurewicz property of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **160** (2013), no. 18, 2531–2537 (English).

[11] Masami Sakai, *The Fréchet-Urysohn property of Pixley-Roy hyperspaces*, Topology Appl. **159** (2012), no. 1, 308–314 (English).

[12] Brian M. Scott, *Pseudocompact, metacompact spaces are compact*, Topology Proceedings **4** (1979), no. 1, 577–587 (English).

[13] Stephen Willard, *General topology*, 2 ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1970.