

El uso de la volatilidad implícita en el modelado de la varianza condicional puede mejorar la predicción de la volatilidad y la estimación del var y cvar*

The Use of Implied Volatility in Conditional Variance Modeling Can Improve Volatility Forecasting and var and cvar Estimation

*Raúl de Jesús-Gutiérrez**

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo incorporar el índice S&P/BMV IPC VIX en la ecuación de la varianza de los modelos GARCH, EGARCH, FIGARCH y FIEGARCH, con el fin de mejorar la predicción de la volatilidad condicional y estimación del var y cvar para las posiciones corta y larga en el mercado accionario de la Bolsa Mexicana de Valores. Los resultados de la prueba estadística PPS muestran que el índice S&P/BMV IPC VIX proporciona información adicional para mejorar la predicción de la volatilidad condicional, pero su valor económico es mínimo. Los resultados del *backtesting* revelan que las medidas VAR-FIEGARCHVIX, VAR-EGARCHVIX, CVAR-FIEGARCHVIX y CVAR-GARCHVIX presentan el mejor desempeño para la estimación correcta del riesgo en los niveles de confianza convencionales para ambas posiciones. Aunque la superioridad del modelo FIGARCH es evidente para estimar el cvar de la posición corta. Los hallazgos tienen importantes implicaciones para la administración de riesgos y regulación financiera.

Palabras clave: Volatilidad implícita, Predicción de la volatilidad, Valor en riesgo.

Clasificación JEL: C22, G1 y G15.

ABSTRACT

This paper aims to incorporate the S&P/BMV IPC VIX index into the variance equation of the GARCH, EGARCH, FIGARCH and FIEGARCH models to improve conditional volatility forecasts and var and cvar estimates for the short and long positions on the Mexican Stock Exchange index. The results of the statistical test for SPA show that the S&P/BMV IPC VIX index provides additional information for improving the accuracy of conditional volatility forecasting, but its value is economically small. Backtesting results reveal that the VAR-FIEGARCHVIX, VAR-EGARCHVIX, CVAR-FIEGARCHVIX and CVAR-GARCHVIX measures are optimal for correctly estimating risk at conventional confidence levels for both financial positions, although the FIGARCH model is clearly superior for short position cvar forecasts. Findings have important implications for risk management and financial regulation.

Keywords: Implied volatility, volatility forecasting, value at risk

JEL classification: C22, G1 and G15

* Fecha de recepción: 04/05/2021. Fecha de aceptación: 21/06/2022. **Fecha de publicación:**

** Universidad Autónoma del Estado de México, México. E-mail: rjg2005mx@yahoo.com.mx. ORCID: 0000-0001-6878-3038.

INTRODUCCIÓN

En las últimas dos décadas, los mercados financieros internacionales han experimentado niveles de volatilidad extremadamente alta como consecuencia de choques exógenos en las variables financieras y macroeconómicas, generados principalmente por crisis financieras, particularmente en las economías emergentes. En este contexto, la crisis financiera global en 2008 y la reciente crisis de la pandemia de la Covid-19 son dos claros ejemplos de incertidumbre e inestabilidad financiera que afectan el desempeño financiero de los inversionistas institucionales, quienes buscan continuamente alcanzar el equilibrio entre riesgo y rendimiento a través del diseño de portafolios diversificados. En consecuencia, las condiciones de volatilidad creciente crean serios problemas en las decisiones de inversión, asignación de capital, valuación de productos derivados y administración del riesgo en mercados financieros con estructuras financieras frágiles y vulnerables a choques externos. De hecho, la presencia de incertidumbre y alto grado de volatilidad reducen los beneficios de la diversificación internacional de portafolio, la efectividad de las estrategias de cobertura con contratos de futuros e incrementan la exposición al riesgo de los inversionistas institucionales con aversión al riesgo.

Por ello, el modelado y predicción exacta de la volatilidad en el corto y largo plazos se han convertido en un desafío y prioridad de interés para los inversionistas institucionales, reguladores, administradores de riesgos y académicos debido a que el fenómeno de la volatilidad se manifiesta de diferentes formas y niveles en los mercados financieros. Desde entonces una amplia gama de modelos de volatilidad han sido propuestos en la literatura para describir el proceso dinámico de la volatilidad en periodos de relativa calma e inestabilidad financiera. En un contexto global, los modelos de la familia ARCH propuestos por Engle (1982) y generalizados por Bollerslev (1986), han alcanzado un gran éxito como herramienta para el modelado y pronóstico de la volatilidad condicional en los mercados accionarios desarrollados y emergentes. Asimismo, diversos estudios resaltan la capacidad de estas aproximaciones para recoger las características típicas de heterocedasticidad condicional, asimetría y persistencia en la volatilidad de los rendimientos accionarios (Gong *et al.*, 2014; Celik y Ergin, 2014; Fiszeder y Perczak, 2016; Kambouroudis *et al.*, 2016; de Jesús *et al.*, 2017).

Sin embargo, el uso de datos históricos diarios para la predicción de la volatilidad con aproximaciones econométricas puede proporcionar información incompleta de la volatilidad futura a los participantes de los mercados accionarios. Debido a lo anterior, las expectativas de los inversionistas y/o sentimientos de mercado actuales no son considerados en la estimación. En este sentido, la Bolsa de Opciones de la Junta de Chicago (CBOE) introduce el indicador VIX o volatilidad implícita de 30 días en 1993, con el fin de medir las percepciones y expectativas de los inversionistas bajo una medida neutral al riesgo. El índice VIX se calcula a través

de los promedios de los precios ponderados de una amplia gama de opciones de compra y venta sobre el índice accionario s&p 500 (Whaley, 1993).

De acuerdo con Simons (2003) y Engle (2004), el índice *vix* del s&p 500 se puede definir como una medida del sentimiento del mercado, también conocido en el argot financiero como el indicador de temor de los inversionistas de Wall Street,¹ puesto que su nivel determina el costo de protección requerido para portafolios de inversión en periodos de calma y turbulencia financiera. Por su parte, Fernandes *et al.* (2014) sustentan que el índice de riesgo de la volatilidad implícita ha sido utilizado para la medición de las expectativas del mercado de la volatilidad de corto plazo, usando como referencia una canasta de precios de opciones sobre el índice accionario s&p 500 con vencimiento en el siguiente mes.

Asimismo, Corrado y Miller (2005) y Carr y Wu (2006) confirman que los índices de volatilidad implícita proporcionan información relevante para la predicción de la volatilidad futura. Su contenido informativo es superior al de las volatilidades condicional, histórica y realizada estimadas con datos históricos de los índices accionarios Nasdaq 100 y s&p 500. Dennis *et al.* (2006) presentan evidencia de que las innovaciones en la volatilidad implícita suelen ser buenas proxies para las innovaciones en la volatilidad esperada de las acciones. Mientras que Banerjee *et al.* (2007) y Giot y Lauren (2007) confirman que el índice *vix* del s&p 500 juega un papel importante en la predicción de los rendimientos de las acciones y la volatilidad histórica. En contraste, Becker *et al.* (2007) confirman que la información generada por el índice *vix* del s&p 500 es insuficiente para la predicción de la volatilidad condicional en comparación con la familia de modelos GARCH. Frijns *et al.* (2010) desarrollan el índice de volatilidad implícita (*avx*) para el mercado accionario de Australia y encuentran que existe una relación negativa y asimétrica con el índice accionario *asx* 200. Además, el poder predictivo del índice *avx* es superior al desempeño de los modelos *RiskMetrics* y GJR-GARCH en la estimación de la volatilidad condicional del mercado accionario.

Asimismo, Shaikh y Padhi (2014) estudian el contenido de la información del índice de riesgo de volatilidad de la India (*ivix*) y los modelos *RiskMetrics* y GJR-GARCH para la predicción de la volatilidad futura de los rendimientos históricos del índice accionario *nifty50*. Los hallazgos sustentan que la información capturada en el índice de riesgo de volatilidad de las opciones es superior para la predicción de la volatilidad realizada futura. Seo y Kim (2015) analizan el efecto del sentimiento de los inversionistas sobre el poder predictivo de la volatilidad basado en información implícita de las opciones. Los hallazgos demuestran que el desempeño de los modelos de volatilidad mejora notablemente cuando el sentimiento de los

¹ En general, los inversionistas compran opciones de venta del índice accionario S&P 500 como estrategia de cobertura de los portafolios de inversión cuando sus expectativas de mercado son a la baja. Esta estrategia conlleva a elevar los precios de las opciones y, en última instancia, el nivel del *vix* cuando los precios de las acciones tienden a bajar (Whaley, 2009).

inversionistas es incorporado para la predicción de la volatilidad futura. De la misma manera, Lorenzo-Valdés (2020) demuestra que la inclusión del índice VIMEX en la ecuación de la media condicional afecta la volatilidad, la cual está determinada por el estado de confianza que muestran los inversionistas no informados hacia la economía. Kim y Ryu (2015) estudian el contenido de la información de la volatilidad implícita del índice accionario KOSPI 200 en la administración del riesgo. Los resultados demuestran que el modelo de volatilidad implícita presenta el peor desempeño para estimar el VAR a diferencia de los modelos GJR-GARCHVIX.

Kourtis *et al.* (2016) evalúan el desempeño predictivo de los modelos de volatilidad implícita, realizada y GARCH en 13 índices accionarios de 10 países. La evidencia revela inferior desempeño de los modelos durante la crisis financiera global, pero la volatilidad implícita proporciona mejores predicciones que los modelos de volatilidad histórica para la diversificación del portafolio internacional. Kambouroudis *et al.* (2016) estudian si la volatilidad implícita proporciona información de utilidad para la volatilidad futura en comparación con los modelos de volatilidad realizada y GARCH. La evidencia confirma que el modelo de volatilidad implícita presenta el peor desempeño. Sin embargo, la combinación de modelos GARCH con la volatilidad implícita o realizada mejora la predicción de la volatilidad y estimación del VAR. En contraste, Kambouroudis y McMillan (2016) consideran la incorporación de la volatilidad implícita y volumen de los índices accionarios S&P 500, CAC 40 y FTSE 100 como variables exógenas en la ecuación de la varianza condicional. Los hallazgos demuestran que las dos variables proporcionan aun poder predictivo adicional para el pronóstico de la volatilidad y estimación del VAR para los tres índices accionarios, particularmente el modelo EGARCH.

Recientemente, estudios han evaluado el contenido informacional y la precisión de la predicción de los índices de volatilidad implícita en diferentes mercados accionarios. La evidencia confirma que el índice de temor proporciona información crucial a los inversionistas y reguladores de la situación actual del mercado y el comportamiento de la volatilidad, lo que puede ser un factor determinante en la asignación eficiente de capital, el diseño óptimo de coberturas con futuros financieros y la diversificación de portafolio (Rouetbi y Chaabani, 2017; Bu *et al.*, 2017; Degiannakis *et al.*, 2018,² Tissaoui, 2019). Por lo que la literatura ha sugerido el uso del contenido de la información de la volatilidad implícita para mejorar la predicción de la volatilidad futura. Sin embargo, el grueso de la literatura se centra en los mercados accionarios desarrollados (Estados Unidos, Alemania, Francia, Reino Unido, Japón). Por lo que la evidencia para los mercados accionarios emergentes es muy escasa, particularmente en América Latina.

² Además, la predicción exacta de la volatilidad adoptada como medida de las expectativas de los mercados financieros, es una alternativa viable que refleja la eficiencia de las decisiones de la política fiscal y monetaria.

El objetivo de la presente investigación es analizar el efecto de la volatilidad implícita del índice accionario IPC de la Bolsa Mexicana de Valores (S&P/BMV IPC VIX) en la predicción de la volatilidad y estimación del riesgo de mercado durante el periodo del 26 de marzo de 2004 al 31 de diciembre de 2020. La pregunta que se pretende contestar es si los modelos de volatilidad, medidas VAR y CVAR mejoran su desempeño cuando el índice S&P/BMV IPC VIX es incorporado como una variable exógena en la varianza condicional.

Las contribuciones a la literatura son las siguientes. Debido a la inexistente literatura sobre la aplicación del índice de volatilidad implícita del índice accionario IPC, este estudio puede proporcionar información clave de la situación del mercado para la toma de decisiones de los inversionistas institucionales y autoridades reguladoras. Dado que la tendencia del índice S&P/BMV IPC VIX puede cambiar más bruscamente ante cambios pequeños en los índices de volatilidad implícita de los mercados accionarios desarrollados. En segundo lugar, la presente investigación extiende la literatura previa al capturar los efectos asimétricos y la memoria larga en la predicción de la volatilidad utilizando los modelos GARCH y EGARCH fraccionalmente integrados (FIGARCH y FIEGARCH), sugeridos por Baillie *et al.* (1996) y Bollerslev y Mikkelsen (1996), respectivamente. Esta aportación relaja el problema de convergencia de los modelos de volatilidad de memoria larga cuando la volatilidad implícita es incorporada en el proceso de la predicción de la volatilidad condicional. Otra contribución se refiere a la evaluación del desempeño predictivo de los modelos de volatilidad fuera de la muestra basada en la prueba de poder predictivo superior de Hansen (2005). Esta prueba estadística es más robusta que la regresión de Mincer-Zarnowitz utilizada en la literatura previa, puesto que permite evaluar el desempeño de dos o más modelos estimados a través de un análisis *bootstrap* estacionario. Finalmente, el estudio también calcula el VAR y CVAR para las posiciones cortas y largas, con el fin de considerar la significancia económica de la información adicional capturada en el índice S&P/BMV IPC VIX y la validación de la naturaleza de los resultados con las pruebas de Kupiec (1995) y Christoffersen (1998).

I. ÍNDICES DE VOLATILIDAD IMPLÍCITA

I.1. *Antecedentes*

En 1993, el primer índice de volatilidad implícita (VIX) fue construido por la CBOE, con el fin de proporcionar información de la percepción del riesgo del mercado accionario de Estados Unidos. En un principio, el índice VIX se calculaba en tiempo real y su procedimiento se basaba en el promedio de las volatilidades implícitas de

las opciones de compra y venta con precios de ejercicio muy cercanos al nivel del índice accionario s&p 100 y vencimientos interpolados de aproximadamente un mes. Sin embargo, estudios sustentan que la estimación de la volatilidad implícita está sesgada debido a los precios subvaluados y sobrevaluados de las opciones por el uso de modelos de valuación convencionales y la ineficiencia de los mercados de opciones (Canina y Figlewski, 1993; Frennberg y Hansson, 1995; Jiang y Tian, 2005, Pati *et al.*, 2018).

Ante estas inconsistencias teóricas y prácticas, el CBOE decidió cambiar la forma de cálculo del índice VIX. En 2003, la volatilidad implícita es calculada con la raíz cuadrada de la expectativa neutral al riesgo de la varianza promedio esperada del s&p 500 para los siguientes 30 días. Esta nueva medida de percepción del riesgo de mercado utiliza el promedio de los precios ponderados de un panel de opciones de compra y venta (dentro y fuera del dinero) con vencimientos entre 23 y 37 días. De acuerdo con Whaley (2009), este índice proporciona mejor información de la volatilidad futura del mercado, porque los contratos de futuros sobre el índice accionario s&p 500 tienen mayor liquidez y sus operaciones son más transparentes. Asimismo, los contratos de opciones del s&p 500 son de tipo europeo, lo que implica un método de valuación más sencillo.

La implementación de la nueva metodología ha tenido gran éxito en la práctica financiera a tal grado que su procedimiento se ha utilizado para la construcción de una familia de índices de volatilidad implícita no sólo para los principales índices accionarios de Estados Unidos, sino también para otras bolsas de valores del mundo. En este tenor, los índices de volatilidad implícita desarrollados tienen como activos subyacentes a los índices accionarios DJI 100 (VXD), NASDAQ 100 (VXN), Russell 2000 (RVX) y, más recientemente, DAX 30 (VDAX), CAC 40 (VXI) y FTSE 100 (VFTSE). En 1997, el índice VKOSPI es introducido en Corea con las operaciones de opciones sobre el índice accionario KOSPI 200.

I.2. *Índice s&p/BMV IPC VIX*

En México, el mercado de opciones inició sus operaciones en 2004 y con ello la construcción del índice de volatilidad VIMEX, que tiene como referencia los contratos de opciones sobre futuros del IPC de la BMV listados en el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). El mercado de opciones es regulado por autoridades gubernamentales y organismos de autorregulación como Asigna y la misma bolsa de futuros y opciones bajo un marco regulatorio eficiente que proporciona confianza y protección a los participantes que realizan operaciones con productos derivados.³

³ En términos generales, Asigna es la Cámara de Compensación. Su función consiste en determinar diariamente el saldo de las operaciones realizadas por cada socio liquidador y calcular las aportaciones correspondientes de las posiciones de los operadores.

Por otra parte, los participantes pueden operar libremente contratos de opciones *call* y *put* que se encuentren dentro y fuera del dinero para una amplia gama de precios de ejercicio, lo que les permite diseñar mejores estrategias de cobertura y brindar amplia liquidez a los contratos listados en el MexDer. De esta manera, la liquidez sólida del mercado puede contribuir a que los precios de las opciones sean una fuente de información más oportuna y reveladora para la construcción del índice de volatilidad implícita en México. Este índice de riesgo de volatilidad mide las expectativas de volatilidad que los inversionistas tienen del IPC de la BMV y su relación es inversa con respecto a los rendimientos de las acciones que conforman al IPC. La correlación negativa indica que el mercado accionario mexicano ha experimentado una tendencia a la baja importante debido a que el índice VIMEX ha alcanzado un valor alto y viceversa.

En un principio, el diseño y construcción del índice VIMEX estaba a cargo por el MexDer con base en la metodología publicada en el trabajo seminal de Fleming *et al.* (1995). Este indicador mide la volatilidad esperada del mercado accionario mexicano en el corto plazo para los próximos 90 días naturales. El procedimiento consiste en interpolar los promedios aritméticos de las volatilidades implícitas (4 subíndices en la primera fase) obtenidos de cada par de opciones *call* y *put*, que se encuentran por arriba y por abajo del precio de ejercicio ATM para el vencimiento trimestral más cercano y vencimiento trimestral siguiente al más cercano, respectivamente. Finalmente, el índice VIMEX se obtiene extrapolando las volatilidades de los respectivos vencimientos trimestrales utilizados en la primera fase. Durante el procedimiento es importante mencionar que las volatilidades implícitas empleadas son determinadas al invertir los precios de las opciones *call* y *put* calculadas a través del modelo de valuación de Black76, utilizando el método iterativo de búsqueda de Newton-Raphson.⁴

Sin embargo, este método de aproximación numérica puede proporcionar resultados indeterminados en la volatilidad implícita debido a la falta de convergencia a cero que existe entre la volatilidad implícita y la volatilidad semilla (propuesta arbitrariamente). Asimismo, otra forma de indeterminación se presenta cuando la diferencia entre ambas volatilidades fluctúa de tamaño o simplemente es grande o chica. Este problema generalmente se deriva de la desproporción en las posturas de los precios de negociación. En consecuencia, la BMV y los S&P Dow Jones Índices (S&P DJI) acordaron, en mayo de 2015, la participación conjunta para proponer una nueva metodología que sirva como barómetro del miedo. Los S&P DJI asumen las responsabilidades del cálculo y mantenimiento del índice S&P/BMV IPC VIX, con el fin de proporcionar a los participantes en el mercado una nueva herramienta transparente para comparar la volatilidad en México con relación al desempeño de otros índices de miedo del mundo.

⁴ Para una explicación más profunda de los detalles técnicos de la metodología, véase VIMEX (2014).

En la construcción del índice S&P/BMV IPC VIX se utilizan los precios de liquidación de las opciones de compra y venta sobre futuros del S&P/BMV IPC con dos fechas de expiración más próximas. El índice es determinado con el promedio ponderado de las volatilidades implícitas de las opciones, esto es, las volatilidades de corto plazo σ_1 y σ_2 del siguiente plazo son interpoladas linealmente para obtener un valor único de σ con un plazo al vencimiento de 90 días. La expresión matemática para obtener la volatilidad implícita para ambos plazos es la siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i, T) - \frac{1}{T} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (1)$$

Donde T indica el plazo al vencimiento para cada una de las opciones utilizadas en el procedimiento. R es la tasa de interés libre de riesgo, la cual se deriva de las tasas de interés interpoladas R_1 y R_2 , utilizando las tasas de interés interbancarias de equilibrio (TIE) con plazos a 1, 28, 91 y 182 días, respectivamente. K_0 es el precio de ejercicio que se encuentra por debajo del nivel del índice forward. $Q(K_i, T)$ es el precio de liquidación para cada opción fuera del dinero con precio de ejercicio K_i . ΔK se refiere al intervalo entre los precios de ejercicio en cada extremo, el cual generalmente se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta K = \frac{K_{i+1} - K_i}{2} \quad (2)$$

F es el nivel del índice forward. Este índice selecciona las opciones de compra con precios de ejercicio mayores a K_0 y precios de liquidación diferentes de cero, así como las opciones de venta con precios de ejercicio menores a K_0 , es decir, el promedio de liquidación $Q(K_i, T)$ es aplicado en el cálculo. Para los vencimientos de corto y largo plazos, el nivel del índice forward se puede expresar de la siguiente manera:

$$F = K + e^{RT} (C_K - P_K) \quad (3)$$

Donde K es el precio de ejercicio, el cual es obtenido de la diferencia absoluta más baja entre los precios promedio de las opciones de compra y venta. C_K y P_K son los precios promedio de las opciones de compra y venta con precio de ejercicio K .

Una vez definido y calculado todos los insumos, el índice S&P/BMV IPC VIX representa el porcentaje anualizado para los próximos 90 días, es decir,

$$VIX = 100 \sqrt{\frac{N_y}{N_m} \left[T_1 \sigma_1^2 \left(\frac{N_{T_2} - N_m}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left(\frac{N_m - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right]} \quad (4)$$

Donde N_y y N_m indican el número de días en un año y tres meses (90), respectivamente. T_1 y T_2 son los plazos al vencimiento (en años) de las opciones de corto plazo y del siguiente plazo. Finalmente, N_{T_1} y N_{T_2} denotan el número de días reales para el vencimiento de las opciones de corto plazo y del siguiente plazo.⁵

II. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS Y METODOLOGÍA

II.1. Datos

Este trabajo estudia el efecto del índice S&P/BMV IPC VIX en la predicción de la volatilidad y estimación del VAR y CVAR. En el estudio se utilizan los precios diarios del IPC de la BMV y el índice de volatilidad implícita de las opciones sobre los futuros del S&P/BMV IPC. Las series financieras cubren el periodo del 26 de marzo de 2004 al 31 de diciembre de 2020, lo que representa una muestra de aproximadamente 4,224 observaciones diarias. La selección del periodo de análisis depende de la disponibilidad de los datos. El mercado de opciones comenzó sus operaciones el 26 de marzo de 2004 en México, por lo que el índice VIMEX contiene información hasta el 31 de diciembre de 2014, mientras que el índice S&P/BMV IPC VIX inicia su cálculo con la nueva metodología el 2 de enero de 2015 y hasta la fecha. A pesar de su corta trayectoria como mecanismo de cobertura, su volumen de operación ha alcanzado un concentrado de mercado acumulado de 20,526,442, con un importe notional de aproximadamente \$2,809,251.5 millones de pesos en 2005-2020. Este hecho refleja claramente que el desarrollo del mercado de opciones aún no ha sido consolidado a nivel global como el mercado de futuros, que tan sólo en 2020 registró un volumen de operación de 6,610,987 con un valor negociado de \$1,497,684.9 millones de pesos.⁶

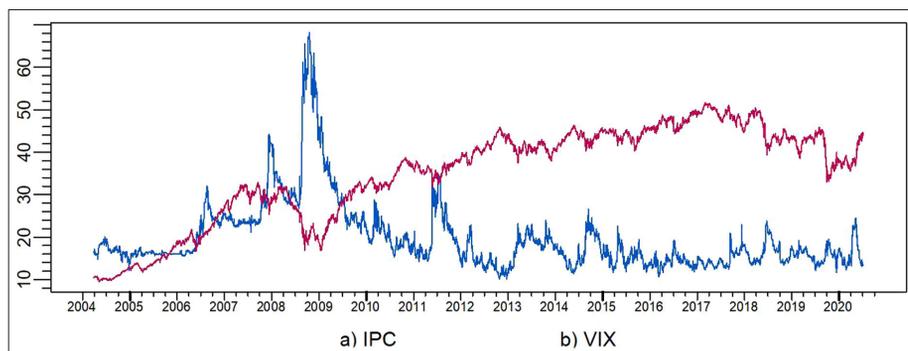
Para evaluar el desempeño de los modelos de volatilidad y las medidas VAR y CVAR, la muestra total se divide en dos submuestras. El análisis dentro de la muestra comprende del 26 de marzo de 2004 al 30 de diciembre de 2016, mientras que el análisis fuera de la muestra está determinado por el periodo del 2 de enero de 2017 al 31 de diciembre de 2020. Este último periodo es muy importante para el análisis porque representa el periodo en donde se desarrolló la crisis sanitaria, económica y social generada por la Covid-19. Las series de los índices accionarios y volatilidad implícita se obtuvieron de la base de datos de Bloomberg. La figura 1 muestra la tendencia dinámica de los niveles del IPC (línea roja —en versión impresa aparece con la línea gris más clara que la línea azul—) y la volatilidad implícita de

⁵ Para una explicación más técnica de la metodología VIX, véase S&P Dow Jones Índices (2017).

⁶ Estas cifras se elaboraron con varios años de las estadísticas del MexDer.

México (línea azul). Un hecho importante a subrayar es que el comportamiento del IPC presenta una relación inversa con respecto al índice VIX. Esta relación se observa más notablemente durante la crisis financiera global en 2008-2009 y la crisis sanitaria de la Covid-19 en 2020.

Figura 1. *Comportamiento dinámico de IPC y VIX para el periodo 2004-2020.*



II.2. Modelos de volatilidad

Desde que Engle (1982) sugirió que la varianza condicional en el periodo t , es derivada de los errores al cuadrado de periodos pasados, en la literatura econométrica, una familia de modelos univariados ha sido propuesta para la predicción de la volatilidad condicional de los rendimientos financieros. Por consiguiente, este trabajo estima ocho modelos de volatilidad que tienen la capacidad para capturar las diferentes características comunes de las series financieras, tales como volatilidad en aglomeraciones, efectos asimétricos y la memoria larga. Entre los modelos se incluyen el modelo autorregresivo con heterocedasticidad condicional generalizada (GARCH) de Bollerslev (1986) y el modelo EGARCH propuesto por Nelson (1991) para capturar el efecto de signo o choques negativos en la volatilidad. Finalmente, las alternativas de memoria larga incluyen a los modelos GARCH y EGARCH fraccionalmente integrados (FIGARCH y FIEGARCH), sugeridos por Baillie *et al.* (1996) y Bollerslev y Mikkelsen (1996).

En el modelado de la volatilidad condicional con modelos GARCH, la especificación apropiada de la ecuación de la media es de vital importancia para una buena estimación. Una especificación incorrecta de la media condicional puede proporcionar predicciones sesgadas de la volatilidad condicional debido a la presencia de autocorrelación en las series financieras. Para corregir el problema de autocorrelación en los residuales, todos los modelos de volatilidad se estiman con un término

autorregresivo de orden 1 para la ecuación de la media, es decir, AR(1). El número de rezagos óptimos en el proceso autorregresivo es determinado con el criterio de Hanna-Quinn (HQC). Aunque existen otras alternativas tradicionales como los criterios de información de Akaike (AIC) y Schwarz (BIC). Sin embargo, estudios de simulación han demostrado la superioridad del HQC en muestras grandes (Liew, 2004).

Por lo que la ecuación de la media condicional de los rendimientos es definida por

$$r_t = \mu + \phi r_{t-1} + \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \quad (5)$$

La ecuación de la varianza para la familia de modelos GARCH (1,1) y EGARCH (1,1) adoptan las siguientes formas:

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \theta \Delta \text{VIX}_{t-1} \quad (6)$$

$$\ln h_t = \omega + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right| + \gamma \left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}}} \right) + \beta \ln h_{t-1} + \theta \Delta \text{VIX}_{t-1} \quad (7)$$

Donde $\omega \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y $\alpha + \beta < 1$, con el fin de alcanzar varianzas positivas y la existencia del proceso GARCH. En el caso del modelo EGARCH no hay necesidad de restringir los parámetros estimados para asegurar que $h_t > 0$. El parámetro γ captura el comportamiento asimétrico de los choques negativos y positivos en la volatilidad condicional. Para $\gamma < 0$, una de las implicaciones económicas es que las innovaciones negativas (noticias malas) tendrán mayor impacto sobre la volatilidad condicional que las innovaciones positivas (noticias buenas) de la misma magnitud. El término ΔVIX_{t-1} denota los cambios logarítmicos en la volatilidad implícita del S&P/BMV IPC desfasados un periodo.⁷

Sin embargo, la presencia de las características de persistencia y memoria de largo plazo en la volatilidad, no pueden ser explicadas pertinentemente por los modelos GARCH, ni aun con los modelos EGARCH. Debido a que el principal indicador del IPC de la BMV presenta vestigios de persistencia y memoria larga en la volatilidad (López *et al.* 2009).

La especificación de la varianza condicional del modelo FIGARCH está definido por

$$h_t = \omega + \beta h_{t-1} + [1 - (1 - \beta L)^{-1} (1 - \phi L) (1 - L)^d] \varepsilon_t^2 + \theta \Delta \text{VIX}_{t-1} \quad (8)$$

⁷ Para ahorrar espacio debido a los lineamientos editoriales, en el documento sólo se describen los modelos de volatilidad que incorporan la volatilidad implícita como variable exógena.

donde (L) es el operador de retraso con $0 \leq d \leq 1$, $\omega > 0$, $\varphi, \beta > 1$. El parámetro d mide el grado de memoria larga en la varianza condicional. $\varphi(L)$ y $\beta(L)$ son polinomios de los operadores de rezagos de orden p y q , respectivamente. Las raíces de los polinomios están fuera del círculo unitario.

El modelo FIGARCH revela que en la medida que aumenta el tiempo entre las observaciones, las autocorrelaciones en la varianza condicional decrecen a un ritmo hiperbólico lento después de un choque de volatilidad a diferencia de la autocorrelación ARMA, la cual decae en forma exponencial. El modelo FIGARCH asume que la volatilidad condicional responde de manera simétrica a la magnitud de choques positivos y negativos, lo cual no es una característica deseable en la realidad. Para tomar en cuenta la asimetría y la memoria larga en el comportamiento de la varianza condicional Bollerslev y Mikkelsen (1996) extendieron el modelo EGARCH a una estructura GARCH exponencial fraccionalmente integrada.

En consecuencia, el modelo FIGARCH puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\ln(h_t) = \omega + \varphi(L)^{-1}(1 - L)^d [1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}) + \theta \Delta \text{VIX}_{t-1} \quad (9)$$

Donde $g(z_t) = \theta z_t + \gamma[|z_t| - E(|z_t|)]$, el primer término (θz_t) captura el efecto de signo y la segunda expresión $\gamma[|z_t| - E(|z_t|)]$ representa el efecto de magnitud. Al igual que el modelo EGARCH, no existen restricciones para los parámetros estimados.

II.3. Prueba de poder predictivo superior

En esta sección se describe la técnica para la evaluación del desempeño predictivo de los modelos de volatilidad fuera de la muestra. La prueba de poder predictivo superior (PPS) de Hansen (2005) es calculada bajo dos medidas asimétricas, esto es, el error predictivo subestimado $\text{MME}(u)$ y el error predictivo sobrestimado $\text{MME}(o)$. Aunque en la literatura existen otras medidas tradicionales como el error cuadrado medio y el error absoluto medio. Sin embargo, las medidas de error predictivo asimétricas asignan diferente peso a las predicciones subestimadas y sobrestimadas de la volatilidad de magnitud similar (Brailsford y Faff, 1996).⁸

La prueba estadística PPS consiste en evaluar el desempeño predictivo superior del modelo alternativo k con relación al modelo base definido como

$$d_{k,t} = L_{0,t} - L_{k,t} \quad k = 1, \dots, m; t = 1, \dots, n \quad (10)$$

Donde $L_{0,t}$ y $L_{k,t}$ son errores de predicción asociados a los modelos base M_0 y alternativos M_k .

⁸ Por falta de espacio, la teoría de las medidas de pérdidas asimétricas no es reportada en el documento. Para una comprensión técnica más profunda, véase De Jesús *et al.* (2017).

Bajo el supuesto de que el vector $d_{k,t}$ es estrictamente estacionario, la hipótesis nula de interés, que ninguno de los modelos alternativos tiene superior desempeño predictivo en relación al modelo base, puede plantearse como

$$H_0: \mu_{\max} \equiv \max_{k=1, \dots, m} \mu_k \leq 0 \quad (11)$$

El estimador $\mu_k \equiv E[d_{k,t}]$ reduce el impacto de los modelos alternativos con débil desempeño predictivo y controla el impacto de los modelos con $\mu_k = 0$.

$$\mu_k^c = \bar{d}_k 1_{\{\sqrt{n}\bar{d}_k/\hat{\omega}_k \geq \sqrt{2\log\log n}\}}, \quad k = 1, \dots, m \quad (12)$$

Donde $1_{\{\cdot\}}$ es una función indicadora. El umbral $\sqrt{2\log\log n}$ garantiza la consistencia del estimador μ_k^c para un valor n suficientemente grande, incluso para los modelos alternativos con $\mu_k = 0$.

El estadístico de la prueba de poder predictivo superior está definido por

$$T_n^{PPS} = \max \left\{ \left(\max_{k=1, \dots, m} \frac{\sqrt{n}\bar{d}_k}{\hat{\omega}_k} \right), 0 \right\} \quad (13)$$

Donde $\hat{\omega}_k^2$ es el estimador consistente de $\omega_k^2 \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\sqrt{n}\bar{d}_k)$ y $\bar{d}_k = n^{-1} \sum_{t=1}^n d_{k,t}$

Para la estimación de la probabilidad del estadístico T_n^{PPS} , Hansen (2005) sugiere el uso del procedimiento *bootstrap* estacionario de Politis y Romano (1994). La hipótesis nula es rechazada cuando la probabilidad del estadístico es menor al 5 por ciento.

II.4. Medidas var y cvar

La medida var resume la exposición al riesgo de una posición de mercado o portafolio, como la máxima pérdida potencial durante un horizonte de tiempo dado un nivel de confianza.

Para una probabilidad p , el var se define como

$$\text{var}(p)_{t+1} = \hat{\mu}_{t+1} \mp \sqrt{h_{t+1}} F^{-1}(p) \quad (14)$$

Donde $\hat{\mu}_{t+1}$ y h_{t+1} son la media y la varianza condicional estimadas con el conjunto de información en el tiempo t y $F^{-1}(p)$ es la inversa de la distribución de pérdidas F , es decir, el p -ésimo percentil de la distribución normal estándar. A pesar de

que la metodología var ha sido considerada una alternativa estándar para la regulación en la industria financiera. Sin embargo, la figura var no es considerada una medida de riesgo coherente, puesto que no satisface la propiedad de subaditividad. Además, la medida puede omitir las propiedades estadísticas de las pérdidas que exceden al var.

En consecuencia, Artzner *et al.* (1999) propusieron la medida de riesgo *expected shortfall* (ES), también conocida como CVAR definida por Acerbi y Tasche (2002). Estas medidas son definidas como el valor esperado condicional de las pérdidas que han excedido al var, es decir,

$$ES(p)_{t+1} = E[R_{t+1} \mid R_{t+1} < \text{var}] \quad (15)$$

Donde R_{t+1} representan las pérdidas y ganancias de un portafolio de inversión.

II.5. Validación de las medidas var

La calidad y exactitud de los modelos de riesgo requieren de un proceso de validación estadístico, también conocido como *backtesting*,⁹ con el fin de demostrar si las medidas de riesgos satisfacen ciertas propiedades teóricas requeridas por las autoridades reguladoras para estimar suficientes requerimientos de capital (Basel, 2016).

Este proceso consiste en comparar el var con respecto a los rendimientos actuales del siguiente periodo. Para el *backtesting* se utiliza la prueba de razón de verosimilitudes de Kupiec (1995), la cual consiste en analizar cuando la tasa de fallo $\alpha = 1 - p$ es igual a la tasa esperada para el nivel de confianza p utilizado en la estimación del var. Si T representa el número total de ensayos, entonces el número de fallos n sigue una distribución binomial con probabilidad α .

El estadístico de la prueba de la razón de verosimilitudes está definido por

$$LR_{uc} = 2 \ln \left[\left(\frac{n}{T} \right)^n \left(1 - \frac{n}{T} \right)^{T-n} \right] - 2 \ln [(\alpha)^n (1 - \alpha)^{T-n}] \quad (16)$$

Donde $LR_{uc} \sim \chi^2$ con un grado de libertad bajo la hipótesis nula $H_0 = \frac{n}{T} = \alpha$, la cual implica que las medidas var son confiables para estimar el riesgo, mientras que la hipótesis alternativa rechaza el modelo cuando genera un número de fallos suficientemente grande o pequeño.

⁹ El *backtesting* es el análisis retrospectivo que se encarga de la verificación y efectividad del desempeño predictivo de un modelo particular utilizando datos históricos. Basel (2016) crea el *backtesting* como una prueba semáforo, esto es, no hay problemas con la calidad de predicción cuando el modelo se encuentra en la zona verde, el modelo debe ser supervisado en la zona amarilla, mientras que el modelo proporciona predicciones del riesgo de mala calidad en la zona roja.

Sin embargo, la prueba de cobertura incondicional no es suficiente para probar que la secuencia de los fallos del VAR es independiente a través de tiempo, lo que podría ser una falsa afirmación en algunos casos. Para relajar este problema, Christoffersen (1998) propone la prueba de cobertura condicional, en donde la hipótesis nula está definida conjuntamente por la prueba de cobertura incondicional y la independencia de la secuencia de los fallos del VAR, es decir,

$$LR_{cc} = 2\ln \left[\left(\frac{1 - \hat{\pi}_{01}}{1 - p} \right)^{n_{00}} \left(\frac{\hat{\pi}_{01}}{p} \right)^{n_{01}} \right] + 2\ln \left[\left(\frac{1 - \hat{\pi}_{11}}{1 - p} \right)^{n_{10} + n_{11}} \right] \quad (17)$$

Donde n_{ij} indica el número de observaciones en el estado i que cambia al estado j con $i, j \in \{0, 1\}$. $i, j = 0$ indica que no hay fallos y 1 significa que si existen fallos. $\hat{\pi}_{01}$ y $\hat{\pi}_{11}$ son probabilidades de cambio, las cuales son obtenidas como estimadores de máxima verosimilitud. El estadístico LR_{cc} se distribuye asintóticamente como una χ^2 con dos grados de libertad.

III. EVIDENCIA EMPÍRICA

III.1. Estadísticas básicas

Para propósitos del análisis, los niveles del IPC y la volatilidad implícita fueron transformados a rendimientos continuos utilizando los logaritmos naturales de los precios. La tabla 1 reporta las estadísticas básicas de los rendimientos del IPC y volatilidad implícita. Los valores de los rendimientos promedio son pequeños y mixtos, negativo para el VIX y positivo para el IPC. Aunque la desviación estándar es relativamente alta, particularmente para el VIX. Este hecho se atribuye a que los rendimientos oscilan en un rango mínimo de -24.73 por ciento y máximo de 31.17 por ciento, lo que significa que el S&P/BMV IPC VIX puede fluctuar ampliamente a través del tiempo.

Tabla 1. Resultados de las estadísticas básicas.

	Media	DE	Máximo	Mínimo	Sesgo	Curtosis	JB	Q(12)	ARCH(12)
IPC	0.0341	1.2065	10.4407	-7.2661	-0.0344	6.3672	7114(0)	55.9723(0)	856(0)
VIX	-0.0050	3.9029	31.1705	-24.7354	0.9182	7.5322	10548(0)	48.8497(0)	183(0)

Nota: Las estadísticas básicas de los rendimientos son expresadas en porcentajes. Los valores entre paréntesis indican las probabilidades de las pruebas estadísticas Jarque-Bera, efectos ARCH y Ljung-Box Q(12), respectivamente.

Fuente: Elaboración propia con información de la base de datos de Bloomberg.

Ambas series de rendimientos presentan diferentes niveles de asimetría, esto es, negativo para el índice accionario y positivo para el índice de riesgo de volatilidad, así como exceso de curtosis. Los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis confirman que las series de los rendimientos no siguen una distribución normal. Este hallazgo es reafirmado también por el valor del estadístico Jarque-Bera, el cual rechaza la hipótesis nula de normalidad para las series de los rendimientos a un nivel de significancia de 1 por ciento. Además, el análisis explora la presencia de autocorrelación y heterocedasticidad en los rendimientos con la ayuda de la prueba de Ljung-Box Q(12) y la prueba del multiplicador de Lagrange. Los resultados muestran que la hipótesis nula de que no existe autocorrelación de orden 12 es rechazada. Asimismo, los resultados de la prueba ARCH (12) indican la fuerte presencia de efectos ARCH en ambas series a un nivel de significancia de 5 por ciento. El análisis preliminar de los datos sugiere el uso de procesos GARCH y FIGARCH para capturar las características comunes observadas en los rendimientos del IPC.

III.2. Estimaciones de los modelos de volatilidad

En esta sección se lleva a cabo el análisis dentro de la muestra para los ocho modelos GARCH, EGARCH, FIGARCH y FIEGARCH con y sin la incorporación del VIX. Los resultados de los parámetros estimados de los modelos de volatilidad son reportados en la tabla 2. Los coeficientes μ de la especificación de la media condicional carecen de significancia estadística, excepto para el modelo FIGARCH sin volatilidad implícita. Todos los coeficientes del término AR(1) son positivos y significativos a un nivel de 1 por ciento. El número de rezagos óptimo en la ecuación de la media condicional fue determinado con el criterio Hanna-Quinn. Los parámetros de los efectos ARCH y GARCH son positivos y estadísticamente significativos a un nivel de 1 por ciento. Además, la suma de α y β es menor a 1, lo que implica la presencia de alta persistencia en la volatilidad de corto y largo plazos, lo mismo ocurre en las estructuras EGARCH y FIEGARCH debido a que $\beta < 1$.

Los resultados empíricos muestran fuerte evidencia de efectos de apalancamiento para la serie de los rendimientos de los precios del IPC de la BMV en la especificación de la varianza condicional, debido al hecho que el coeficiente de respuesta

asimétrica de la volatilidad a las noticias (γ) es negativo y significativo a un nivel de 1 por ciento. Por su parte, los valores positivos y significativos del parámetro de memoria larga (d) rechazan fuertemente la hipótesis nula GARCH (d) = 0 al nivel de significancia de 1 por ciento, lo que demuestra el poder predictivo de los modelos FIGARCH y FIEGARCH con y sin la inclusión de los cambios en la volatilidad implícita para capturar el fenómeno de la memoria larga en los rendimientos del IPC. Además, este hecho garantiza que la autocorrelación en la varianza condicional es positiva y converge hacia cero en forma hiperbólica conforme el distanciamiento entre las observaciones aumenta. Estos hallazgos se encuentran en línea con los resultados empíricos reportados en el trabajo de López *et al.* (2009).

Tabla 2. Estimaciones y pruebas de diagnósticos de los modelos de volatilidad.

	μ	ϕ	ω	α	β	γ	d	θ	Q(16)	Q ² (16)
GARCH	0.0248 (0.0151)	0.0738* (0.0186)	0.0194* (0.0032)	0.0973* (0.0072)	0.8873* (0.0081)				9.7891 [0.8774]	3.9055 [0.6895]
EGARCH	-0.0003 (0.0148)	0.0691* (0.0173)	-0.1053* (0.0087)	0.1358* (0.0111)	0.9861* (0.0019)	-0.6838* (0.0949)			10.1880 [0.8566]	4.9155 [0.5547]
FIGARCH	0.0236*** (0.0150)	0.0739* (0.0193)	0.0265* (0.0055)	0.1875* (0.0356)	0.6467* (0.0480)		0.5717* (0.0564)		10.6135 [0.8327]	5.5507 [0.4754]
FIEGARCH	-0.0051 (0.0144)	0.0708* (0.0169)	-0.0732* (0.0088)	0.0956* (0.0114)	0.7292* (0.0543)	-0.0817* (0.0093)	0.5912* (0.0453)		10.9748 [0.8110]	7.7290 [0.2586]
GARCH-VIX	0.0135 (0.0152)	0.0721* (0.0184)	0.0215* (0.0031)	0.0893* (0.0076)	0.8923* (0.0081)			0.0095* (0.0018)	10.2084 [0.8555]	2.9246 [0.8183]
EGARCH-VIX	-0.0010 (0.0148)	0.0684* (0.0173)	-0.0993* (0.0093)	0.1279* (0.0118)	0.9867* (0.0019)	-0.6525* (0.0997)		0.0038 (0.0025)	10.7362 [0.8255]	5.2042 [0.5179]
FIGARCH-VIX	0.0183 (0.0151)	0.0748* (0.0195)	0.0246* (0.0049)	0.2114* (0.0376)	0.6974* (0.0370)		0.5963* (0.0511)	0.0155* (0.0028)	10.9167 [0.8146]	7.0047 [0.3204]
FIEGARCH-VIX	-0.0045 (0.0144)	0.0707* (0.0171)	-0.0751* (0.0103)	0.0981* (0.0134)	0.6493* (0.0678)	-0.0792* (0.0193)	0.6350* (0.0413)	0.0050** (0.0023)	11.7129 [0.7635]	6.5261 [0.3669]

Nota: Los valores en paréntesis denotan los errores estándar de los parámetros estimados. Q(16) y Q²(16) indican los estadísticos de la prueba de Ljung-Box para los residuales estandarizados simples y cuadrados con sus valores-p entre corchetes cuadrados.

Los términos *, ** y *** indican significancia en los niveles del 1, 5 y 10 por ciento, respectivamente.

Fuente: Elaboración propia con información de la base de datos de Bloomberg.

El parámetro estimado θ tiene un valor positivo y significativo a un nivel de 1 por ciento, excepto para el modelo EGARCH. Este hallazgo revela la existencia de una relación positiva entre la volatilidad condicional y los cambios en el índice S&P/BMV IPC VIX. Aunque es importante hacer énfasis que la incorporación de esta variable endógena proporciona información mínima para la predicción de la volatilidad, excepto para la aproximación FIGARCH que reporta un valor de 0.0155. Finalmente, los resultados de la prueba de Ljung-Box Q(16) señalan que la hipótesis nula de especificación correcta del modelo es imposible rechazarla a un nivel de 5 por ciento para los residuales estandarizados, lo que implica innovaciones independientes e idénticamente distribuidas. Para los residuales estandarizados cuadrados, los valores del Q²(16) indican que la especificación de los modelos es suficiente para corregir la dependencia no-lineal de orden 16 en la ecuación de la varianza condicional. Estos

hallazgos muestran el poder predictivo de los modelos de volatilidad con y sin la incorporación de la volatilidad implícita para recoger las características comunes del comportamiento de las series financieras.

III.3. *Evaluación del desempeño predictivo fuera de la muestra*

En esta sección se lleva a cabo la evaluación del poder predictivo de los modelos GARCH, EGARCH, FIGARCH y FIEGARCH, utilizando el periodo del 2 de enero de 2017 al 31 de diciembre de 2020 (1005 observaciones). El análisis fuera de la muestra consiste en reestimar los parámetros de los ocho modelos de volatilidad y obtener la varianza estimada a través de una ventana móvil de tamaño fijo de 3,218 observaciones, esto es, removiendo la observación del 26 de marzo de 2004 y agregando la observación del 2 de enero de 2017, así sucesivamente hasta obtener la varianza del día 31 de diciembre de 2020 para los horizontes de 1, 5 y 20 días. De esta manera, el tamaño de la muestra se mantiene fijo y las predicciones fuera de la muestra no se traslapan. Finalmente, cada una de las varianzas estimadas se compara con la varianza no observable. Esta variable proxy está representada por los rendimientos al cuadrado de los precios del IPC.

La tabla 3 reporta las probabilidades *bootstrap* de la prueba PPS para los horizontes de 1, 5 y 20 días. Las probabilidades se obtuvieron sobre una base de 10,000 submuestras *bootstrap* estacionarias de la prueba empírica bajo dos medidas asimétricas de error predictivo $MME(U)$ y $MME(O)$. Para el horizonte de 1 día, los valores- p indican que el modelo FIGARCH, que no considera la volatilidad implícita, presenta el mejor desempeño para estimar la volatilidad condicional bajo ambas medidas, seguido por los modelos FIEGARCH bajo el $MME(U)$ y FIEGARCHVIX bajo el $MME(O)$. En el último caso, la incorporación del índice S&P/BMV IPC VIX en la varianza condicional puede proporcionar información adicional para mejorar la predicción de la volatilidad condicional. Sin embargo, los hallazgos contradicen los resultados obtenidos por Kambouroudis *et al.* (2016), quienes demostraron que el desempeño predictivo fuera de la muestra del modelo EGARCH mejora notablemente cuando la volatilidad implícita se incorpora en la especificación de la varianza condicional.

Para el horizonte de cinco días, los resultados son más mixtos, particularmente bajo la medida $MME(U)$. En términos de los valores- p , el desempeño predictivo de los modelos FIEGARCH y EGARCHVIX es notablemente superior al de los modelos alternativos FIGARCH y FIGARCHVIX. Mientras que bajo la medida $MME(U)$ se puede observar que los modelos FIGARCH con y sin la incorporación del índice S&P/BMV IPC VIX en la varianza condicional, continúan proporcionando el mejor desempeño predictivo que la mayoría de los modelos alternativos. Los resultados para el horizonte de 20 días son muy similares. Aunque los modelos GARCH y GARCHVIX son las

aproximaciones con mejor desempeño predictivo bajo la medida $MME(u)$. Mientras que cualquier modelo que agrega la volatilidad implícita en la varianza condicional, mejora notablemente la predicción de la volatilidad bajo la medida $MME(o)$, particularmente los modelos FIGARCHVIX y FIEGARCHVIX.

Tabla 3. Resultados de la prueba de poder predictivo superior.

	GARCH	EGARCH	FIGARCH	FIEGARCH	GARCHVIX	EGARCHVIX	FIGARCHVIX	FIEGARCHVIX
Panel A: Resultados de la prueba de poder predictivo superior para el periodo de 1 día.								
MMU	0.0000	0.0000	0.7627	0.2891	0.0000	0.0001	0.0000	0.2052
MMO	0.0000	0.0003	0.9415	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005
Panel B: Resultados de la prueba de poder predictivo superior para el periodo de 5 días.								
MMU	0.3368	0.3258	0.0046	0.6541	0.1490	0.4231	0.0280	0.1691
MMO	0.0000	0.0000	0.8975	0.0000	0.0005	0.0075	0.9790	0.0139
Panel C: Resultados de la prueba de poder predictivo superior para el periodo de 20 días.								
MMU	0.8654	0.2263	0.0922	0.0498	0.3324	0.1309	0.0055	0.1386
MMO	0.0509	0.0520	0.0012	0.1609	0.1163	0.1462	0.6215	0.4628

Nota: Los valores en negritas indican la aceptación de la hipótesis nula de que ninguno de los modelos alternativos presenta el mejor desempeño predictivo que el modelo base.

Fuente: Elaboración propia con información de la base de datos de Bloomberg.

En conclusión, los hallazgos sugieren que cualquier contribución informacional adicional generada por la volatilidad implícita desfasada un periodo y la característica de memoria larga, contienen un valor económico muy pequeño para mejorar la predicción de la volatilidad condicional fuera de la muestra en los horizontes de cinco y 20 días, particularmente bajo la medida $MME(u)$. Mientras que el contenido de la información del índice S&P/BMV IPC VIX es irrelevante para el horizonte de 1 día, aunque la propiedad de la memoria larga juega un papel importante para mejorar el desempeño predictivo de los modelos de volatilidad de los rendimientos del IPC de la BMV. Por lo que los hallazgos proporcionan información importante a los inversionistas para los propósitos de la eficiente asignación de capital en mercados altamente volátiles, diversificación del portafolio y valuación de productos derivados.

III.4. Evaluación de las medidas var y $cvar$

En esta sección se analiza el desempeño de los métodos *backtesting* sobre las medidas var y $cvar$ para las posiciones corta y larga basadas en las predicciones diarias de la volatilidad condicional de los modelos GARCH, EGARCH, FIGARCH y FIEGARCH con y sin la inclusión de la volatilidad implícita. Los inversionistas con posiciones cortas presentan una exposición al riesgo de precios en ascenso. Por ello, sus pérdidas esperadas se encuentran en el percentil superior de la distribución de rendimientos del IPC. La posición larga está relacionada con las pérdidas localizadas en el percentil inferior de la distribución de rendimientos del IPC. Asimismo, el

backtesting de las medidas var y cvar está basado en el análisis fuera de la muestra utilizando las pruebas estadísticas de Kupiec y Christoffersen. Este análisis retrospectivo consiste en comparar cada una de las estimaciones del var contra los rendimientos actuales del IPC para el periodo del 2 de enero de 2017 al 31 de diciembre de 2020, con el fin de determinar el número de fallos o pérdidas actuales que exceden al var y cvar y los valores- p de las pruebas de cobertura incondicional y condicional.

En la tabla 4 se reportan los valores- p de las pruebas de Kupiec y Christoffersen y el número de fallos reales, los cuales son comparados con el número de fallos esperados, esto es, 50, 25, 10, y 1 que corresponden al 5, 2.5, 1, y 0.5 por ciento, respectivamente. Estas probabilidades permiten identificar las medidas var y cvar con mejor desempeño para la estimación del riesgo de mercado fuera de la muestra. Las medidas var y cvar presentan el mejor desempeño con respecto a las medidas alternativas cuando el valor- p es mayor al nivel de significancia de 5 por ciento, mientras que las medidas var y cvar subestiman o sobreestiman el riesgo cuando el número de fallos reales se encuentran por arriba o debajo del número de fallos esperados.

Para la posición corta, los valores- p indican que la medida var-FIEGARCHVIX muestra mejor desempeño predictivo que las medidas alternativas para estimar correctamente el riesgo de los rendimientos del IPC en los niveles de confianza del 95 y 97.5 por ciento. Por su parte, las medidas var-EGARCH y var-EGARCHVIX comparten el mismo poder predictivo para la estimación del riesgo, al reportar 11 fallos reales contra 10 fallos esperados en el nivel de confianza del 99 por ciento. Aunque es importante resaltar que la medida var-FIEGARCHVIX continúa mostrando un excelente desempeño fuera de la muestra, puesto que su valor- p es mayor al nivel de 5 por ciento. Para el 99.5 por ciento, la medida var-EGARCH alcanza el mejor desempeño en términos del valor- p , pero los resultados de las pruebas de Kupiec y Christoffersen revelan que cualquier medida var puede proporcionar estimaciones correctas del riesgo de mercado, excepto la medida var-FIEGARCH que presenta el peor desempeño para estimar las pérdidas en el mercado accionario de la BMV en ambas posiciones financieras y la mayoría de los niveles de confianza.

En el caso de la posición larga, la eficiencia de las medidas var-FIEGARCHVIX y var-EGARCHVIX continúa siendo superior al desempeño de las medidas var comparadas en el 95 por ciento y 97.5 por ciento bajo ambas pruebas de Kupiec y Christoffersen, lo que significa que la inclusión de la volatilidad implícita contiene información relevante para mejorar la estimación del riesgo de mercado. Estos hallazgos están en línea con los resultados reportados en el trabajo de Kim y Ryu (2015). En contraste, la evidencia empírica confirma que el contenido de la información no es relevante para obtener estimaciones más exactas del riesgo de mercado en el nivel de confianza del 99 por ciento, en donde el desempeño predictivo de

la medida var-EGARCH es superior notablemente a las demás medidas var alternativas. En general, los hallazgos empíricos son robustos y satisfactorios a pesar de que tres de 13 fallos reales ocurrieron en el periodo enero-marzo de 2020, en donde la volatilidad tuvo importantes cambios estructurales debido a la exacerbación de la crisis sanitaria de la Covid-19 e incremento de la volatilidad implícita.

Tabla 4. Resultados del backtesting de las medidas var y cvar.

	VaR0.95		VaR0.975		VaR0.99		VaR0.995		CVaR0.95		CVaR0.975		CVaR0.99		CVaR0.995	
	corta	Larga	corta	Larga	corta	Larga	corta	Larga	corta	Larga	corta	Larga	corta	Larga	corta	Larga
Panel A: Resultados del backtesting de la prueba de Kupiec																
GARCH	0.2824(43)	0.6931(53)	0.8604(26)	0.0594(35)	0.7347(9)	0.0233(18)	0.3274(3)	0.0029(13)	0.0000(23)	0.0004(28)	0.0013(11)	0.0815(17)	0.0018(2)	0.9873(10)	0.0278(1)	0.1098(9)
EGARCH	0.2197(42)	0.6346(47)	0.8189(24)	0.1287(33)	0.7667(11)	0.1436(15)	0.9911(5)	0.0029(13)	0.0000(21)	0.0004(28)	0.0013(11)	0.0485(16)	0.0291(4)	0.5485(12)	0.0278(1)	0.1098(9)
FIGARCH	0.0046(71)	0.0046(71)	0.0155(38)	0.0000(50)	0.0054(20)	0.0000(30)	0.0211(11)	0.0000(24)	0.0198(35)	0.1245(40)	0.5190(22)	0.4445(29)	0.7347(9)	0.0449(17)	0.9911(5)	0.0082(12)
FIGARCH	0.4395(45)	0.8559(49)	0.8604(26)	0.0155(38)	0.1436(15)	0.0115(38)	0.2208(8)	0.0029(19)	0.0000(24)	0.0016(30)	0.0143(14)	0.1297(18)	0.1651(6)	0.3709(13)	0.3274(3)	0.1098(9)
GARCHVIX	0.2825(43)	0.8559(49)	0.7081(27)	0.0886(34)	0.1651(6)	0.0449(17)	0.6345(4)	0.0082(12)	0.0000(28)	0.0001(29)	0.0000(8)	0.0815(17)	0.0291(4)	0.7667(11)	0.1234(2)	0.2208(8)
EGARCHVIX	0.2197(42)	0.7429(48)	0.8189(24)	0.1287(33)	0.7667(11)	0.0449(17)	0.6345(4)	0.0029(13)	0.0000(20)	0.0001(28)	0.0000(9)	0.0815(17)	0.0291(4)	0.5485(12)	0.1234(2)	0.1098(9)
FIGARCHVIX	0.0753(63)	0.0558(64)	0.1824(32)	0.0018(42)	0.0824(16)	0.0000(29)	0.2208(8)	0.0000(19)	0.0016(30)	0.0446(37)	0.0815(17)	0.7081(27)	0.3064(7)	0.2372(14)	0.9911(5)	0.0211(11)
FIGARCHVIX	0.5329(46)	0.9711(50)	0.9798(25)	0.0248(37)	0.1436(15)	0.0233(18)	0.2208(8)	0.0029(13)	0.0000(22)	0.0016(30)	0.0143(14)	0.1297(18)	0.0762(5)	0.3709(13)	0.1234(2)	0.0501(10)
Panel B: Resultados del backtesting de la prueba de Christoffersen																
GARCH	0.0042	0.7151	0.9152	0.1654	0.8703	0.0549	0.6135	0.0031	0.0001	0.0021	0.0052	0.1635	0.0077	0.9042	0.0889	0.2568
EGARCH	0.2961	0.2017	0.8461	0.2255	0.8471	0.2733	0.9752	0.0102	0.0000	0.0021	0.0052	0.1101	0.0908	0.7224	0.0889	0.2568
FIGARCH	0.0001	0.0161	0.0001	0.0000	0.0149	0.0000	0.0618	0.0000	0.0016	0.2681	0.1927	0.7349	0.8704	0.0762	0.9752	0.0262
FIGARCH	0.1259	0.9082	0.3914	0.0479	0.2733	0.0274	0.4431	0.0102	0.0000	0.0039	0.0408	0.1962	0.3681	0.5651	0.6135	0.2568
GARCHVIX	0.1681	0.5926	0.8876	0.2319	0.3681	0.0999	0.8789	0.0262	0.0000	0.0038	0.0000	0.1636	0.0908	0.8472	0.3039	0.4432
EGARCHVIX	0.1181	0.7838	0.8491	0.2251	0.8472	0.0999	0.8789	0.0102	0.0000	0.0021	0.0001	0.1636	0.0908	0.7224	0.3039	0.2568
FIGARCHVIX	0.0042	0.1436	0.0045	0.0076	0.1146	0.0000	0.4431	0.0000	0.0000	0.1258	0.1247	0.8877	0.5643	0.4079	0.9752	0.0619
FIGARCHVIX	0.2341	0.3347	0.3543	0.0699	0.2733	0.0472	0.4431	0.0102	0.0000	0.0039	0.0408	0.1963	0.2065	0.5651	0.3039	0.1310

Fuente: Elaboración propia con información de la base de datos de Bloomberg.

Sin embargo, los valores- p de la prueba de Kupiec y Christoffersen revelan que todas las medidas var subestiman el riesgo de mercado en el nivel de confianza del 99.5 por ciento debido al excesivo incremento del número de fallos, lo que implica que la incorporación de la volatilidad implícita en la ecuación de la varianza no tiene valor económico adicional para mejorar las estimaciones del var en las posiciones largas de los inversionistas. Este hecho refleja claramente la reacción de pánico de algunos inversionistas que no cuentan con la suficiente información para llevar a cabo el rebalanceo de sus posiciones de mercado bajo condiciones de extrema volatilidad, lo que induce a tomar posiciones cortas en el mercado de opciones con precios de ejercicio que se encuentran profundamente fuera del mercado. Con respecto al *backtesting* del cvar, la aproximación FIGARCH presenta el mejor desempeño para administrar el riesgo de los inversionistas con posiciones cortas en cualquier nivel de confianza bajo las pruebas de Kupiec y Christoffersen, excepto al 95 por ciento.

Sin embargo, la evidencia empírica es bastante mixta para la posición larga. Los valores- p revelan que los modelos cvar-FIGARCH y cvar-FIGARCHVIX presentan el mejor desempeño predictivo para estimar el riesgo en los niveles de confianza del 95 y 97.5 por ciento, respectivamente. Mientras que los modelos GARCH sin y con

la agregación de la volatilidad implícita proporcionan estimaciones más exactas del riesgo en el mercado accionario de México. En consecuencia, los hallazgos empíricos tienen importantes implicaciones económicas-financieras para los inversionistas y reguladores. En el marco de la administración de riesgos, los inversionistas podrán reducir su exposición al riesgo a través del diseño de estrategias de cobertura óptima. Por su parte, las entidades reguladoras contarán con mejores medidas de riesgo para la determinación de suficientes requerimientos de capital que evitarán crisis financieras. Mientras que la Cámara de Compensación Asigna tendrá mejores herramientas para la determinación óptima de las aportaciones iniciales en el mercado Mexicano de Derivados.

CONCLUSIONES

Este trabajo analiza el contenido informacional de la volatilidad implícita contenida en los precios de las opciones de compra y venta para mejorar la predicción de la volatilidad condicional y estimación del var y cvar de las posiciones corta y larga de los rendimientos accionarios de la BMV en el periodo del 26 de marzo de 2004 al 31 de diciembre de 2020. Los resultados de la prueba estadística PPS revelan que el poder explicativo del índice S&P/BMV IPC VIX es positivo y estadísticamente significativo, lo que contribuye al mejoramiento de la predicción de la volatilidad en los horizontes de tiempo de cinco y 20 días. Aunque es importante hacer énfasis que el contenido informacional del índice S&P/BMV IPC VIX es mínimo porque los modelos de volatilidad tradicionales y de memoria larga que no incluyen la volatilidad implícita, también proporcionan excelentes predicciones de la volatilidad condicional fuera de la muestra. La información generada puede ser de gran utilidad para la toma de decisiones de los inversionistas que buscan diversificar sus portafolios de inversión en periodos de extrema volatilidad. En el contexto de la administración del riesgo, la incorporación del índice S&P/BMV IPC VIX en la varianza condicional contiene información económica importante para la estimación correcta del riesgo de mercado de la posición corta bajo las aproximaciones var-FIGARCHVIX , var-EGARCHVIX . Asimismo, la medida cvar con innovaciones FIGARCH presenta el mejor desempeño predictivo para los niveles de confianza mayores al 95 por ciento. Sin embargo, la evidencia empírica para la posición larga es mixta de acuerdo con el número de fallos y valores- p de las pruebas de Kupiec y Christoffersen en ambas medidas var y cvar . Aunque el desempeño de las medidas var-FIEGARCHVIX , var-EGARCHVIX , cvar-FIGARCHVIX y cvar-GARCHVIX continúa siendo superior en los niveles de confianza del 95, 97.5 y 99.5 por ciento, respectivamente. La significancia económica de los hallazgos tiene importantes implicaciones para la regulación financiera y el diseño de estrategias de cobertura

óptima. Por otra parte, las pérdidas actuales excedieron al número de fallos reales de la posición larga en el nivel de confianza del 99.5 por ciento bajo cualquier medida VAR como consecuencia de la presencia de cambios estructurales en las series financieras. Este hecho abre la posibilidad de un trabajo a futuro para incorporar los cambios estructurales en el modelado de la volatilidad y estimación del VAR a fin de mejorar la administración del riesgo en periodos de turbulencia financiera.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acerbi, Carlo y Tasche, Dirk (2002), "Expected shortfall: A natural coherent alternative to Value at Risk", *Economic Notes*, 31 (2), pp. 379-388.
- Artzner, Philippe; Delbaen, Freddy; Eber, Jean-Marc y Heath, David (1999), "Coherent Measures of Risk", *Mathematical Finance*, 9 (3), pp. 203-228.
- Baillie, Richard; Bollerslev, Tim y Mikkelsen, Hans (1996), "Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 74 (1), pp. 3-30.
- Banerjee, Prithviraj; Doran, James y Peterson, David (2007), "Implied volatility and future portfolio returns", *Journal of Banking & Finance*, 31 (10), pp. 3183-3199.
- Basel Committee on Banking Supervision (2016), "Minimum Capital Requirements for Market Risk", January, <https://www.bis.org/bcbs/publ/d352.htm>.
- Becker, Ralf; Clements, Adam y White, Scott (2007), "Does implied volatility provide any information beyond that captured in model-based volatility forecasts?", *Journal of Banking and Finance*, 31 (8), pp. 2535-2549.
- Bollerslev, Tim (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31 (3), pp. 307-327.
- Bollerslev, Tim y Mikkelsen, Hans (1996), "Modeling and pricing long-memory in stock market volatility", *Journal of Econometrics*, 73 (1), pp. 151-184.
- Brailsford, Timothy y Faff, Robert (1996), "An evaluation of volatility forecasting techniques", *Journal of Banking and Finance*, 20 (3), pp. 419-438.
- Bu, Ruijun; Jawadi, Fredj y Li, Yuyi (2017), "An empirical comparison of transformed diffusion models for VIX and VIX futures", *Journal of International Financial Markets, Institutions Money*, 46, January, pp. 116-127.
- Canina, Linda y Figlewski, Stephen (1993), "The informational content of implied volatility", *Review of Financial Studies*, 6 (3), pp. 659-681.
- Carr, Peter y Wu, Liuren (2006), "A tale of two indices", *Journal of Derivatives*, 13 (3), pp. 13-29.
- Celik, Sibel y Ergin, Hüseyin (2014), "Volatility forecasting using high frequency data: Evidence from stock markets", *Economic Modelling*, 36, pp. 176-190.

- Corrado, Charles y Miller, Thomas (2005), "The forecast quality of CBOE implied volatility indexes", *Journal of Futures Markets*, 25 (4), pp. 339-373.
- Christoffersen, Peter (1998). "Evaluating Interval Forecasts", *International Economic Review*, 39 (4), pp. 841-862.
- De Jesús, Raúl; Ortiz, Edgar y Salgado, Oswaldo (2017), "Long-term effects of the asymmetry and persistence of the prediction of volatility: Evidence for the equity markets of Latin America", *Revista de Contaduría y Administración*, 62 (4), pp. 1081-1099.
- Degiannakis, Stavros; Filis, George y Hassani, Hossein (2018), "Forecasting global stock market implied volatility indices", *Journal of Empirical Finance*, 46 (March), pp. 111-129.
- Dennis, Patrick; Mayhew, Stewart y Stivers, Chris (2006), "Stock returns, implied volatility innovations, and the asymmetric volatility phenomenon", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 41 (2), pp. 381-406.
- Engle, Robert (1982), "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation", *Econometrica*, 50 (4), pp.987-1007.
- (2004), "Risk and volatility: Econometric models and financial practice", *The American Economic Review*, 94 (3), pp. 405-420.
- Fernandes, Marcelo; Medeiros, Marcelo y Scharth, Marcel (2014), "Modeling and predicting the CBOE market volatility index", *Journal of Banking and Finance*, 40, pp. 1-10.
- Fiszeder, Piotr y Perczak, Grzegorz (2016), "Low and high prices can improve volatility forecasts during periods of turmoil", *International Journal of Forecasting*, 32 (2), pp. 398-410.
- Fleming, Jeff; Ostdiek, Barbara y Whaley, Robert (1995), "Predicting stock market volatility: a new measure", *Journal of Futures Markets*, 15 (3), pp. 265-302.
- Frennberg, Per y Hansson, Bjön (1995), "An evaluation of alternative models for predicting stock volatility: evidence from a small stock markets", *Journal of International Financial Markets, Institutions Money*, 5 (2/3), pp. 117-134.
- Frijns, Bart; Tallau; Christian y Tourani, Alireza (2010), "The information content of implied volatility: Evidence from Australia", *Journal of Futures Markets*, 30 (2), pp. 134-155.
- Giot, Pierre y Laurent, Sébastien (2007), "The information content of implied volatility in light of the jump/continuous decomposition of realized volatility", *Journal of Futures Markets*, 27 (4), pp. 337-359.
- Gong, Xu; He, Zhifang; Li, Pu y Zhu, Ning (2014), "Forecasting return volatility of the CSI 300 index using the stochastic volatility model with continuous volatility and jumps", *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 964654, 10 pages.
- Hansen, Peter (2005), "A Test for superior predictive ability", *Journal of Business & Economic Statistics*, 23 (4), pp. 365-380.

- Jiang, George y Tian, Yisong (2005), "The model-free implied volatility and its information content", *Review of Financial Studies*, 18 (4), pp. 1305-1342.
- Kambouroudis, Dimos; Mcmillan, David y Tsakou, Katerina (2016), "Forecasting stock return volatility: A comparison of GARCH, implied volatility, and realized volatility models", *Journal of Futures Markets*, 36 (12), pp. 1127-1163.
- Kambouroudis, Dimos y Mcmillan, David (2016), "Does VIX or volume improve GARCH volatility forecasts?", *Applied Economics*, 48 (13), pp. 1210-1228.
- Kim, Jun y Ryu, Doojin (2015), "Are the KOSPI 200 implied volatilities useful in value-at-risk models?", *Emerging Markets Review*, 22 (March), pp. 43-64.
- Kourtis, Apostolos; Markellos, Raphael y Symeonidis, Lazaros (2016), "An international comparison of implied, realized, and GARCH volatility forecasts", *Journal of Futures Markets*, 36 (12), pp. 1164-1193.
- Kupiec, Paul (1995), "Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models", *Journal of Derivatives*, 3 (2), pp. 73-84.
- Liew, Venus (2004), "Which lag length selection criteria should we employ?", *Economics Bulletin*, 3 (33), pp. 1-9.
- López, Francisco; Venegas, Francisco y Sánchez, Alfredo (2009), "Memoria larga de la volatilidad de los rendimientos del mercado mexicano de capitales", *Análisis Económico*, 56 (24), pp.129-146.
- Lorenzo-Valdes, Arturo (2020), "Confianza de los inversionistas como determinante en el mercado accionario mexicano mediante un modelo TAR-EGARCH", *Análisis Económico*, 35 (88), pp. 147-165.
- Nelson, Daniel (1991), "Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach", *Econometrica*, 59 (2), pp. 347-370.
- Pati, Patrap; Barai, Parama y Rajib, Prabima (2018), "Forecasting stock market volatility and information content of implied volatility index", *Applied Economics*, 50 (23), pp. 2552-2568.
- Politis, Dimitris y Romano, Joseph (1994), "The stationary bootstrap", *Journal of the American Statistical Association*, 89 (428), pp. 1303-1313.
- Rouetbi, Emna y Chaabani, Myriam (2017), "Dynamics of the relationship between implied volatility indices and stock prices indices: The case of European stock markets", *Asian Economic and Financial Review*, 7 (1), pp. 52-62.
- Seo, Sung y Kim, Jun (2015), "The information content of option-implied information for volatility forecasting with investor sentiment", *Journal of Banking and Finance*, 50 (1), pp. 106-120.
- Shaikh, Imlak y Padhi, Puja (2014), "Inter-temporal relationship between India VIX and nifty equity index", *Decision*, 41 (4), pp. 439-448.
- Simons, David (2003), "The NASDAQ volatility index during and after the bubble", *The Journal of Derivatives*, 11 (2), pp. 9-24.

- s&P Dow Jones Indices (2017), s&P/BMV IPC VIX Index Methodology, Document, pp.1-14.
- Tissaoui, Kais (2019), “Forecasting implied volatility risk indexes: International evidence using Hammerstein-ARX approach”, *International Review of Financial Analysis*, 64, pp. 232-249.
- VIMEX (2014), Índice de volatilidad México, 1 (1), pp. 1-10.
- Whaley, Robert (1993), “Derivatives on market volatility: Hedging tools long overdue”, *Journal of Derivatives*, 1 (1), pp. 71-84.
- (2009), “Understanding the vix”, *Journal of Portfolio Management*, 35 (3), pp. 98-105.