



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Inestabilidad Modulacional inducida en las trampas de dispersión con inversión
de signo en óptica no lineal.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A:

Isaac Margarito Méndez Zúñiga



ASESORES DE TESIS:

Dra. Tatyana Belyaeva Leonidovna
Dr. Máximo Augusto Aguero Granados

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

Febrero 2022

Índice general

Resumen	X
Introducción	XIII
1. Inestabilidades modulacionales y su papel a través de la Historia	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Marco teórico	12
1.2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger y su importancia en el estudio de las inestabilidades modulacionales . . .	12
1.2.2. Estudio del fenómeno de inestabilidad modulacional para la ecuación no lineal de Schrödinger	16
1.2.3. Las inestabilidades modulacionales, la generación de Solitones y el problema de Fermi-Pasta-Ulam	23
1.3. Importancia del problema	26
2. Inestabilidad Modulacional inducida en las trampas de dispersión con inversión de signo en óptica no lineal	29

2.1. Planteamiento del problema o pregunta de investigación. . . .	29
2.2. Métodos	31
2.3. Presentación y discusión de resultados	43
3. Conclusiones	49
3.1. Conclusiones	49
3.2. Pensamientos finales y sugerencias	50
Bibliografía	52
Anexos	60
Guía de Definiciones	60

Índice de figuras

1.	Onda de Rouge	XI
2.	Representación de una onda propagándose	XIV
3.	Propagación de una onda no-lineal	XV
1.1.	El crecimiento de la amplitud de la banda lateral en función de la frecuencia	10
1.2.	Fotografía de un tren de ondas progresivo la cual ilustra el rompimiento de la onda debido a la inestabilidad. La fotografía superior es hecha cerca de la fuente de las ondas, mientras que la inferior es a 60 m de esta. La longitud de la onda es de aproximadamente 2.2 m. Tomada de [12]	12
1.3.	Evolución de un tren de ondas con una frecuencia principal de 0.85 Hz en un tanque de agua. La gráfica de arriba reporta una onda a 60 m de fuente de las ondas mientras que la de abajo reporta una a una distancia de 120 m, las marcas de tiempo son cada 0.1 s y la barra vertical esta en pulgadas. Tomada de [12].	13

1.4. Espectro de ganancia de la inestabilidad de modulación, con lo valores dados de $\beta_2 = -25,5ps^2/km$ y $\Omega_c = 1Hz$	19
1.5. Efecto inicial de la inestabilidad modulacional en un pulso Gaussiano de 100 ps. En (a) un pulso trasmitido a la salida de la fibra óptica (línea roja), en (b) acercamiento del pulso donde se observa una modulación debido a la amplificación de la frecuencia Ω_{max} , tomada de [22]	21
1.6. Evolución de un pulso gaussiano de 100 ps. En (a) se muestra la ampliación exponencial de las perturbaciones iniciales a la frecuencia Ω_{max} , mientras que en (b) se muestra el espectro de potencia, tomada de [22].	22
1.7. Representación de los efectos de la dispersión de la velocidad de grupo y el efecto no lineal Kerr en un paquete de ondas.	24
1.8. Simulación realizada mediante un programa de python en don- de se muestra la posición inicial de los osciladores en el pro- blema de Fermi-Pasta-Ulam	25
1.9. En (a,b,c) se muestran instantáneas de la dinámica de las os- cilaciones realizadas en una simulación de python para el pro- blema de Fermi-Pasta-Ulam. En (d) se muestra la distribución de los modos energía.	26

- 1.10. Ejemplo ilustrativo de la dinámica-espacio temporal de la inestabilidad modulacional inducida y el efecto de recurrencia calculado dentro del marco de la ecuación no lineal de Schrödinger canónica . En (a) se muestra la distribución de la intensidad, mientras que en (b) se muestra el mapa de contorno correspondiente. Tomada de [9] 27
- 2.1. Burda representación de la función de dispersión (2.28), para valores de dispersión variando linealmente de la forma $D_{2,4}(Z) = Z$ y la no-linealidad manteniéndose constante $R(Z) = 1$ 38
- 2.2. En (a) y (b) se muestra la dependencia de la función de $f(D_2, D_4, \Omega)$ con la frecuencia Ω (parábolas roja y azul respectivamente) manteniendo constantes los valores de D_2 y D_4 , en (a) $D_4 = 0,4$ mientras que en (b) toma el valor de $D_4 = 0,2$. La región de la Inestabilidad modulacional se encuentra debajo de la línea punteada. En los apartados (c), (d) y (e) se muestra la dependencia del coeficiente de amplificación $G(\Omega)$ de la inestabilidad modulacional del valor de la dispersión de orden cuatro D_4 , las curvas de color rojo, azul y negro corresponden a valores de $D_4 = 0,4$, $D_4 = 0,2$ y $D_4 = 0,0$ respectivamente. . 47

2.3. La dependencia del coeficiente de amplificación de la inestabilidad modulacional $G(\Omega)$ con los coeficientes de la dispersión $D_2 = D_{2,0} \exp(\beta Z)$ y $D_4 = D_{4,0} \exp(\beta Z)$. En (a) $\beta = -0,25$, En (b) $\beta = 0,25$, para ambos casos se considero los valores arbitrarios de $D_{2,0} = 1$, $D_{4,0} = 0,2$, $R(Z) = 1$ y $\rho_0 = 1$ 48

Resumen

En la presente tesis se estudia el fenómeno físico de inestabilidad modulacional, el cual es un tipo de inestabilidad que se desarrolla durante la propagación de ondas en medios no lineales y dispersivos. En particular, se estudia la inestabilidad modulacional que surge en un modelo de una ecuación no-lineal de Schrödinger, la cual tiene un cuarto orden de dispersión variando a lo largo de la distancia de propagación, al igual que no-linealidad. Convirtiendo al sistema en un sistema no autónomo, descrito por la siguiente ecuación

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + D_4(Z) \frac{\partial^4 q}{\partial T^4} + R(Z) |q|^2 q = 0 \quad (1)$$

Se desarrolla la metodología pertinente para el estudio de la inestabilidad modulacional en el sistema mencionado anteriormente lo cual conduce a la obtención de las características necesarias para que se desarrolle la inestabilidad modulacional. Con base a lo anterior, se modela la dinámica de las inestabilidades para el caso de funciones de dispersión crecientes o decrecientes de la forma $D_2 = D_{2,0} \exp(\beta Z)$ y $D_4 = D_{4,0} \exp(\beta Z)$ con la finalidad de poder estudiar las regiones mediante las cuales se desarrollan las inestabilidades.

Aunque dichas ecuaciones suelen aparecer en el modelado de diferentes fenómenos físicos tales como la propagación de ondas en aguas poco profundas, condensados de Bose-Einstein, plasmas entre muchos otros, nosotros nos enfocaremos en la propagación de ondas en sistemas ópticos y en la propagación de ondas de rouge las cuales pueden ser descritas mediante las funciones de dispersión propuestas.



Figura 1: Onda de Rouge

Introducción

La propagación de perturbaciones de algún tipo en el espacio y el tiempo han sido uno de los elementos más importantes para el estudio de diferentes fenómenos físicos, ejemplos claros de estos son la propagación de energía en un medio como una onda mecánica, perturbaciones del campo electromagnético como ondas de luz o hasta llegar a conceptos más abstractos como lo son las funciones de onda en mecánica cuántica. Tenemos que, para las ondas que se propagan en medios no dispersos y que cumplen con el principio de superposición, su evolución esta gobernada por la ecuación de onda lineal

$$\square U = 0 \tag{2}$$

en donde \square es el operador D'Alembertiano

$$\square = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

con V la velocidad a la que se propaga la perturbación y ∇^2 el operador laplaciano.

Rara vez esto se cumple por lo que a qué recurrir a diferentes tipos de ecuaciones de onda no lineales y dispersivas, estas ecuaciones aparecen ampliamente

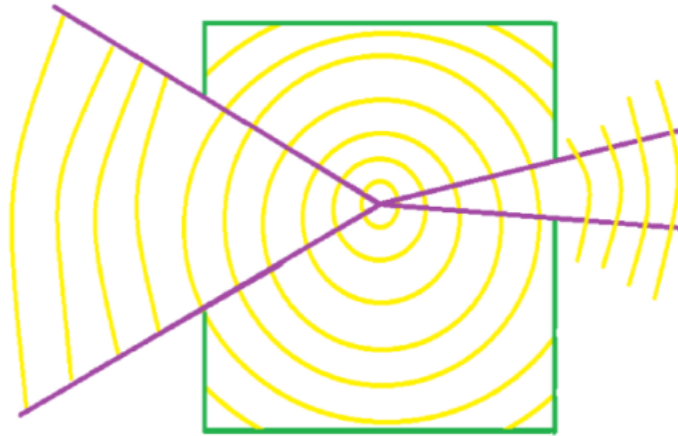


Figura 2: Representación de una onda propagándose

en la literatura para diferentes fenómenos físicos, por ejemplo la ecuación de Korteweg-de Vries aparece en el estudio de propagaciones de ondas en aguas poco profundas, la ecuación Klein-Gordon no lineal surge como un modelo clásico para un campo escalar libre o en la teoría de la elasticidad, la ecuación de Schrödinger no lineal interesa en la óptica de medios no-lineales y en el estudio de ondas de Langmuir en plasmas, la ecuación de sine-Gordon aparece en la propagación de dislocaciones en cristales y en el movimiento de paredes de Bloch en cristales magnéticos, así como muchas otras.

Ya que estas ondas se describen mediante ecuaciones de onda no lineales, y el principio de superposición generalmente no se aplica, esto conlleva a que las ecuaciones de onda no lineales sean más difíciles de analizar matemáticamente, ya que no existe un método analítico general para su solución. Aún así se pueden desarrollar diversas metodologías para la integración aproximada de

las ecuaciones o para el estudio de sus propiedades.

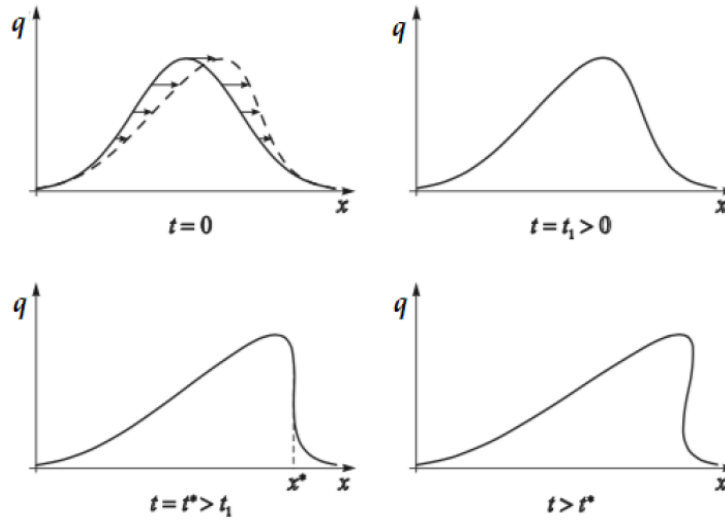


Figura 3: Propagación de una onda no-lineal

Una de estas metodologías es a partir del estudio de la estabilidad del sistema, la cual mediante una descripción precisa puede dar una idea de los estados de la solución. Muchas de estas ecuaciones dispersivas y no lineales suelen manifestar durante el estudio de sus estabilidades comportamientos inesperados como lo es en el caso cuando se dan inestabilidades del tipo modulacional.

Las inestabilidades modulacionales son un fenómeno que ocurre bajo ciertas condiciones durante la propagación de ondas en medios no lineales y dispersivos, mediante la cual perturbaciones en una onda periódica se refuerzan debido a la no linealidad, lo que conlleva a la generación de bandas laterales y eventualmente a la ruptura de la forma de onda en un tren de pulsos.

El fenómeno fue observado por primera vez en el estudio de láseres de alta potencia en solventes orgánicos por los rusos N. F. Pilipetskii y A. R. Rustomov en 1965 [1] y, poco mas tarde, en el estudio de ondas de gravedad en aguas profundas por los científicos T. Brooke Benjamin y Jim E. Feir [2]. Aunque estos las consideraron solo como curiosas inestabilidades que surgieron durante sus estudios y no pensaron en ellas como un fenómeno global y recurrente de diferentes sistemas físicos. A partir de ese momento se a observado el mismo tipo de inestabilidad en diferentes ramas de la fisica no lineal como en la propagación de ondas electromagnéticas [3], la física de plasmas [4] o en condensados de Bose-Einstein [5].

Dentro de los sistemas que describen ondas no lineales y que presentan el fenómeno de inestabilidad modulacional la ecuación no lineal de Schrödinger modela muchos de estos sistemas. En el presente trabajo estudiamos la inestabilidad modulacional que surge en una ecuación no lineal de Schrödinger, la cual tiene coeficientes variables lo que lo hace un sistema no autónomo.

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2}D_2(Z)\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + D_4(Z)\frac{\partial^4 q}{\partial T^4} + R(Z)|q|^2q = 0$$

Este modelo es una generalización de los casos más comunes que se encuentran en la literatura, lo cual nos permite encontrar congruencia con los resultados ya reportados mediante un limite a los caso autónomos y con menor grado de dispersión.

Para llevar acabo este estudio primero se desarrollo una investigación bibliográfica sobre los temas de inestabilidades modulacionales, sistemas no

autónomos y la ecuación no-lineal de Schrödinger, obteniendo así la relación que surge entre estos, y las metodologías desarrolladas para su estudio . Con base a esto, se generalizaron las ideas y técnicas utilizadas para los casos no autónomos y con bajo orden de dispersión, de manera similar a los utilizados por A. Hasegawa en [6] o los realizados por G.P. Agrawal en [7] en los cuales la idea principal es estudiar la dinámica de las inestabilidades modulacionales y las características que se necesitan para que se den estas a partir del estudio de la relación de dispersión del sistema.

Con la aplicación de la metodología desarrollada se encontraron las condiciones necesarias para que se den las inestabilidades modulacionales en este modelo.

Con todo el marco teórico desarrollado se estudió en particular el caso de la dinámica de las Inestabilidades modulacionales que se dan en la ecuación (1.1) cuando la dispersión crece o decrece lentamente debido a funciones exponenciales de la forma

$$D_{2,4}(Z) = \exp(-\beta Z)$$

donde β es una constante positiva o negativa y la no linealidad se mantiene prácticamente constante $R(Z) = 1$.

Finalmente, estudiamos la importancia de estas dinámicas en fenómenos reportados en óptica no lineal las cuales se conocen como una auto-compresión de solitones ópticos en las llamadas fibras de dispersión decreciente. Aquí se

demostró que bajo la condición de que cuando la dispersión varia a lo largo de la distancia de propagación de la forma $exp(-\beta Z)$ tanto en $D_2(Z)$ como en $D_4(Z)$, es posible observar efectos similares a los observados previamente en los trabajos [8,9]. Este escenario es llamado una inestabilidad modulacional de alto orden en [8] e independientemente un efecto de cuantización en [9] en donde hay una división de tres a mas ondas rebeldes, las cuales han sido observadas en experimentos computacionales [9].

Capítulo 1

Inestabilidades modulacionales y su papel a través de la Historia

1.1. Antecedentes

La primera observación reportada en la literatura de una inestabilidad modulacional se cree fue realizada por N. F. Piliptetskii y A. R. Rustamov en 1965 al estudiar láseres de alta potencia en solventes orgánicos, pero esta solo es reportada en su estudio como una inestabilidad, la cual aparece durante la propagación de una onda electromagnética en un fluido y no desarrollaron un estudio profundo sobre este tipo de inestabilidades en su investigación. Análogamente en el año de 1965 se estaba desarrollando las bases para la observación de inestabilidades modulacionales en otras áreas, Gerald Beresford Whitham planteó un formalismo de ondas cuasi-periódicas basado en un principio variacional promediado [10], asociando así un lagrangiano a la pro-

pagación de una onda y mediante la cual se podían obtener ecuaciones que describían las características de ondas que varían lentamente, esto mediante la aplicación de las leyes de conservación

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}_k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Sir Michael James Lighthill uso el formalismo de Whitham para estudiar ondas con pequeñas no linealidades, en particular, propuso un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}(\omega, k, a) = G(\omega, k)a^2 + B(\omega, k)a^4 \quad (1.2)$$

donde ω es la frecuencia, k el numero de onda y a la amplitud de la onda. Con base a este lagrangiano y a las leyes de conservación Lighthill obtuvo una ecuación para la dispersión

$$\omega = \omega_o(k) + \omega_1(k)a^2 \quad (1.3)$$

y un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial(v_{gr}a^2)}{\partial x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_1 a^2)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

aquí $v_{gr} = \frac{-G_k}{G_\omega} = \frac{d\omega_o}{dk}$ es la velocidad de grupo lineal. Mediante este conjunto de ecuaciones el obtuvo una formula para la velocidad característica

$$C_\pm = v_{gr}(k) \pm \sqrt{v'_{gr}\omega_1 a^2} + O(a^2) \quad (1.6)$$

la cual es considerada de tipo hiperbólico si C es real y por ende $\beta = v'_{gr}\omega_1 > 0$ o de tipo elíptico si C es compleja y $\beta < 0$. Estas desigualdades fueron consideradas como el primer criterio desarrollado para el estudio de las inestabilidades modulacionales, lo que se conoce como criterio de Benjamin-Feir-Lighthill. Ya que si se linealizan las ecuaciones (1.4) y (1.5) alrededor de la onda armónica de constantes a , ω y k , y se consideran perturbaciones de la forma $exp(ikx - \Omega t)$, las cuales interactúan con las ondas armónicas a partir de una modulación en la frecuencia de estas mediante bandas laterales $\omega + \Omega$, para una frecuencia Ω dada. Se obtiene que la frecuencia de la perturbación satisface la igualdad

$$\Omega = C_{\pm}k \quad (1.7)$$

Así, para el caso hiperbólico, la onda armónica es estable y, de acuerdo con (1.6), puede propagarse con dos velocidades de grupo ligeramente diferentes. En el caso elíptico por la parte imaginaria que surge en (1.6) al ser $\beta < 0$ y su influencia en (1.7) se considera a la onda armónica inestable con respecto a una pequeña modulación. Lighthill explico esta modulación de la siguiente manera, Supóngase que en algún momento durante la propagación de una onda armónica aparece una protuberancia en la intensidad, si por ejemplo $\omega_1 \succ 0$ en (1.3) entonces la derivada ω_x es positiva antes de la protuberancia y negativa después de esta. De acuerdo con la conservación de la fase expresada en la última ecuación de (1.1)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$$

$k_t < 0$ antes del máximo de la protuberancia y $k_t > 0$ después de este. Si la dispersión en la velocidad de grupo es $\omega_{kk} = \frac{\partial v_{gr}}{\partial k} < 0$, implica que la velocidad de grupo tiende a incrementarse detrás del máximo de la amplitud y decrecer enfrente de esta. Esto quiere decir, que los grupos de ondas vecinos, al máximo de amplitud tienden a comprimir la protuberancia, debido a la conservación de la energía, y la amplitud aumenta acumulativamente. El mismo razonamiento muestra que un valle inicial de una onda armónica se profundizaría. Este es el caso de inestabilidad modulacional. En el caso en que $\omega_{kk} > 0$, el efecto es lo contrario la protuberancia en la intensidad tiende a crecer, este es el caso de estabilidad neutral.

Desde el punto de vista espectral, una simple interpretación del criterio de Benjamin-Feir-Lighthill es que las pequeñas bandas laterales interactúan con las fuertes ondas portadoras, para su interacción efectiva, se necesita el cumplimiento simultáneo de la condición de resonancia (sincronismo) la cual esta descrita mediante la aplicación de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 &= 2\omega_c, & k_1 + k_2 &= 2k_c \\ \omega_{1,2} &= \omega_c \pm \Omega, & k_{1,2} &= k_c \pm k \end{aligned} \tag{1.8}$$

las últimas dos igualdades son para modulaciones consideradas lentas, es decir cuando los valores de ω y k son pequeños. Aquí los sub-índices c,1,2 corresponden a la onda portadora y a las ondas de las bandas laterales, respectivamente. En el caso lineal estas condiciones no se cumplen debido a la dispersión, pero en el caso no lineal sí y la velocidad de esas ondas de difieren debido a dos factores (debido a la dispersión y la no linealidad). Así en el caso cuando las desafinaciones son del mismo signo, no ocurre sincronismo

y las bandas laterales no aumentan (caso hiperbólico). Sin embargo, si estas desafinaciones difieren en un signo, pueden compensarse entre sí, y las ondas interactúan de manera resonante, lo que resulta en amplificaciones.

Las ecuaciones de Whitham (1.1) pueden ser consideradas como ecuaciones no dispersivas con respecto a la envolvente $a(x, t)$, por lo que el criterio de Benjamin-Feir-Lighthill no depende de la frecuencia de la modulación siempre que sea pequeña en comparación con la frecuencia de la portadora. Sin embargo, una descripción más detallada de los efectos de la dispersión impone una limitación adicional en la inestabilidad modulacional. Así, durante sus estudios de ondas en aguas poco profundas Benjamin y Feir, se encontraron con este problema de efectos visibles de dispersión al modelar ondas de Stokes (ondas superficiales periódicas no lineales sobre una capa de fluido invisible de profundidad media constante [2]). Estas ondas son modeladas en dinámica de fluidos mediante la ecuación.

$$y = \eta(x, t) \tag{1.9}$$

la cual denota la elevación de la superficie por encima de su nivel medio, y la ecuación de Laplace para el potencial de velocidad $q(x, y, t)$

$$\nabla^2 q = q_{xx} + q_{yy} = 0 \tag{1.10}$$

bajo la condición

$$\nabla q \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad y \rightarrow -\infty \tag{1.11}$$

que denota que no hay movimiento en profundidades infinitas, la condición

cinemática de frontera de la superficie libre

$$D(\eta - y)/Dt = \eta_t + \eta_x[q_x]_{y=\eta} - [q_y]_{y=\eta} = 0 \quad (1.12)$$

y la condición de la ausencia de tensión superficial junto con la condición de presión constante sobre la superficie libre

$$g\eta + [q_t]_{y=\eta} + \frac{1}{2}[q_x^2 + q_y^2]_{y=\eta} = 0 \quad (1.13)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $y = 0$ corresponde a una superficie no perturbada. Las soluciones para este sistema son conocidas como ondas de Stokes progresivas, en el que solo se conservan el armónico básico (primero) y el segundo

$$\eta = H \simeq a \left(\cos(\alpha) + \frac{1}{2}ka \cos(2\alpha) \right) \quad (1.14)$$

$$q = \phi \simeq \omega k^{-1} a e^{ky} \text{sen}(\alpha) \quad (1.15)$$

$$\omega^2 = gk(1 + k^2 a^2) \quad (1.16)$$

aquí $\alpha = kx - \omega t$ y a es la amplitud.

Para estudiar las inestabilidades en este sistema tenemos que recurrir a la teoría de perturbaciones, para ello se consideran pequeñas perturbaciones en las soluciones cada una representada como una suma de componentes espectrales a frecuencias $\omega \pm \Omega$ donde Ω es una frecuencia de modulación

y $\Omega \ll \omega$, en otras palabras el potencial y la elevación de la superficie son ahora representadas por

$$q = \phi + \epsilon \tilde{q}, \quad \eta = H + \epsilon \tilde{\eta} \quad (1.17)$$

con ϵ la amplitud de las bandas laterales. Esto conlleva a probar la existencia de las inestabilidades a partir del estudio del comportamiento asintótico de $\tilde{\eta}$. Ya que (1.10) es una ecuación lineal podemos fácilmente obtener una ecuación para la perturbación de q

$$\tilde{q}_{xx} + \tilde{q}_{yy} = 0. \quad (1.18)$$

Al considerar la interacción entre dos bandas laterales tenemos que

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2 \quad (1.19)$$

y

$$\tilde{q} = \tilde{q}_1 + \tilde{q}_2 \quad (1.20)$$

las cuales tienen por soluciones

$$\tilde{\eta}_i = \varepsilon_i \cos(\alpha_i) + ka \varepsilon_i [A_i \cos(\alpha + \alpha_i) + B_i \cos(\alpha - \alpha_i)] + O(k^2 a^2 \varepsilon_i) \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= k_i^{-1} e^{k_i y} (\varepsilon_i (\omega'_i L_i + \gamma_i M_i)) \text{sen}(\alpha_i) + \dot{\varepsilon}_i N_i \cos(\alpha_i) \\ &+ \omega a \varepsilon_i (C_i e^{|\kappa + \kappa_i y|} \text{sen}(\alpha + \alpha_i) + D_i e^{|\kappa - \kappa_i y|} \text{sen}(\alpha - \alpha_i)) \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde $k_i = k(1 \pm \kappa)$ y $\omega'_i = (\omega + (1 + \delta))$ con $\delta = \frac{1}{2}\kappa$, aquí k y δ son pequeñas fracciones que satisfacen la relación $\delta \omega = c_g \kappa k$ y $c_g = \frac{g}{2\omega}$ es la velocidad de

grupo lineal a la frecuencia principal.

Estas ultimas ecuaciones (1.21) y (1.22) bajo algunas consideraciones pueden ser aproximadas a

$$\tilde{\eta}_i = \varepsilon_i \cos(\alpha_i) \quad (1.23)$$

$$\tilde{\phi}_i = k_i^{-1} \omega_i \varepsilon_i e^{\kappa_i y} \text{sen}(\alpha_i) \quad (1.24)$$

Si se sustituyen estas perturbaciones de η y q con variaciones lentas de $\varepsilon_{1,2}$ en la ecuación (1.18) y se mantienen solo términos resonantes así, junto con la aplicación algunas transformaciones se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d(\varepsilon_{1,2})}{dt} = \left(\frac{1}{2} \omega \kappa^2 a^2 \text{sen}(\Theta) \varepsilon_{1,2} \right) \quad (1.25)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \omega \kappa^2 a^2 \left[1 + \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\Theta) \right] - \omega \delta^2 \quad (1.26)$$

en donde $\Theta = \gamma_1 + \gamma_2$, gracias a esta condición de Θ se genera un tipo de resonancia como la mencionada en la ecuación (1.8) cuando $2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + cte$. Como resultado, las perturbaciones incrementan, dando así origen a las inestabilidades.

Benjamin y Feir en su trabajo [2] consideraron la siguiente condición para ε_i la cual fue deducida a partir de las ecuaciones (1.25) y (1.26) y algunas consideraciones echas por ellos

$$\varepsilon_i^2 = -\frac{\Upsilon \nu \rho}{1 - \Upsilon^2} \pm \frac{\rho(1 - \Upsilon^2 + \Upsilon^2 \nu^2)^{1/2}}{|1 - \Upsilon^2|} \quad (1.27)$$

con

$$\Upsilon = \frac{k^2 a^2 - \delta^2}{k^2 a^2} \quad (1.28)$$

y mediante la cual se pueden obtener los siguientes casos para las posibles diferentes estabilidades

- $-1 < \Upsilon < 1$ El sistema es inestable
 - $\Upsilon = -1$ Hay inestabilidad marginal
 - $\Upsilon < -1$ El sistema es estable
- (1.29)

así ellos demostraron que para algún valor inicial $t = 0$ la propiedad $|\varepsilon_i| \rightarrow \infty$ sugiere que el sistema sera inestable.

En resumen, Benjamin y Feir estudiaron la estabilidad de trenes de ondas de stokes en aguas poco profundas para fluidos sin viscosidad mediante un análisis de perturbaciones lineales. La condición de estabilidad a la que llegaron, es decir, la condición bajo el cual la amplitud de los modos de onda de las bandas laterales que componen la perturbación parece sufrir un gran aumento indefinido fue $-1 \leq \Upsilon < 1$, la cual significa de acuerdo a la definición de Υ en (1.28) que

$$0 < \delta \preceq (\sqrt{2}ka) \tag{1.30}$$

por lo tanto, en principio, todos los trenes de ondas del tipo especificado son inestables, ya que, de acuerdo con la suposición del análisis, se puede hacer una elección de δ que satisfaga (1.30) o cada valor finito de ka , por pequeño que sea.

Otro resultado de especial interés al que ellos llegaron y que fue contrastado experimentalmente [11], es el crecimiento asintótico, de las amplitudes de las

bandas laterales en (1.27)

$$\varepsilon_i \sim \exp \left\{ \frac{1}{2} \delta (2k^2 a^2 - \delta^2)^{1/2} \omega t \right\} \quad (1.31)$$

si $0 < \delta \leq (\sqrt{2}ka)$. Para un valor dado de ka , el exponente en (1.31) es un máximo cuando $\delta = ka$, es decir, la desviación de frecuencia óptima $\omega' - \omega$ de las bandas laterales es una fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del valor de corte más allá de la cual no ocurre amplificación.

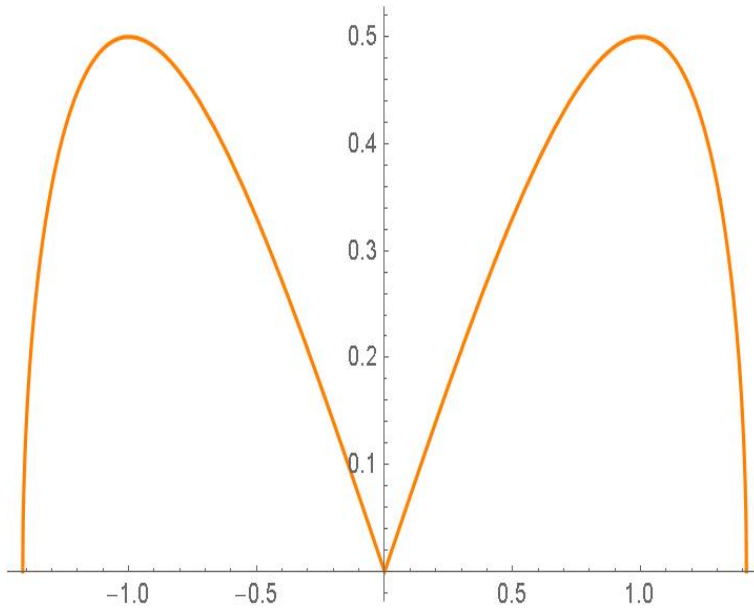


Figura 1.1: El crecimiento de la amplitud de la banda lateral en función de la frecuencia

Por lo tanto, ante una onda de Stokes específica hay una perturbación que es muy inestable, que comprende un par de modos de banda lateral con frecuencias $\omega'_i = \omega(1 \pm ka)$ y números de onda $k_i = k(1 \pm 2ka)$. Para enfatizar mas los hechos presentes, particularmente la existencia de frecuencias óptimas

y de corte de la tasa de crecimiento logarítmico

$$\gamma = \frac{1}{2}\delta(2k^2a^2 - \delta^2)^{1/2} \quad (1.32)$$

se puede ver que las inestabilidades existen en el límite de rangos

$$\Omega \prec \Omega_s = \omega ka\sqrt{2} \quad (1.33)$$

el máximo valor de la tasa de crecimiento se da cuando $\frac{\Omega_s}{\sqrt{2}} = \omega ka$. En la figura 1.1 se muestra la gráfica de γ . Cuando las amplitudes de las bandas laterales se vuelven aproximadamente iguales, como ocurre siempre después de amplificaciones suficientes, la forma supuesta de perturbación es equivalente a una modulación uniforme que viaja hacia adelante de un tren de ondas primarias. Todo lo anteriormente mencionado fue experimentalmente demostrado por el propio Feir [11], mediante experimentos realizados en canales de agua con longitud de 2.2 m, algunos de estos resultados experimentales pueden verse en las figuras 1.2 y 1.3 .

Como se puede notar, el estudio de las inestabilidades modulacionales bajo este criterio es muy laborioso y muy particular, por fortuna pocos años después V.E. Zakharov demostraría el hecho de que estas ecuaciones que modelan ondas en aguas poco profundas podían ser reducidas a otra ecuación, lo cual abriría camino al estudio de las inestabilidades modulacionales en diferentes sistemas.

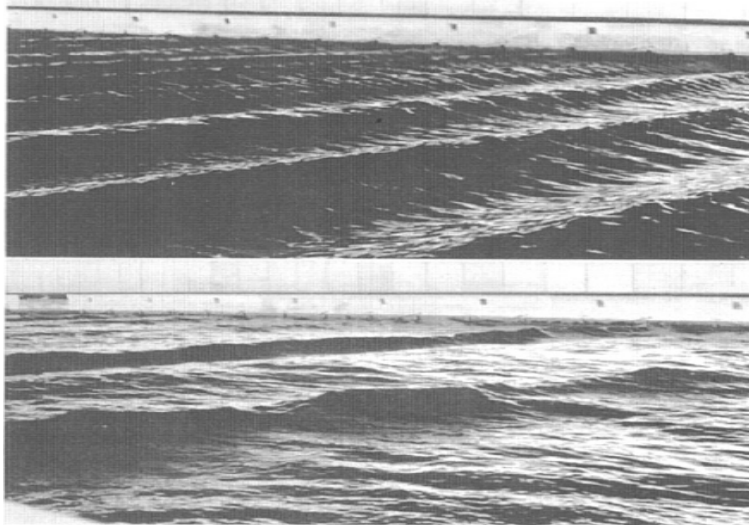


Figura 1.2: Fotografía de un tren de ondas progresivo la cual ilustra el rompimiento de la onda debido a la inestabilidad. La fotografía superior es hecha cerca de la fuente de las ondas, mientras que la inferior es a 60 m de esta. La longitud de la onda es de aproximadamente 2.2 m. Tomada de [12]

1.2. Marco teórico

1.2.1. La ecuación no lineal de Schrödinger y su importancia en el estudio de las inestabilidades modulacionales

Zakharov mostró que las ecuaciones del tipo (1.9 - 1.13) para ondas no lineales débiles pueden ser reducidas a una ecuación no lineal de Schrödinger para la onda envolvente [13], mediante la aplicación de un tratado Hamiltonico de

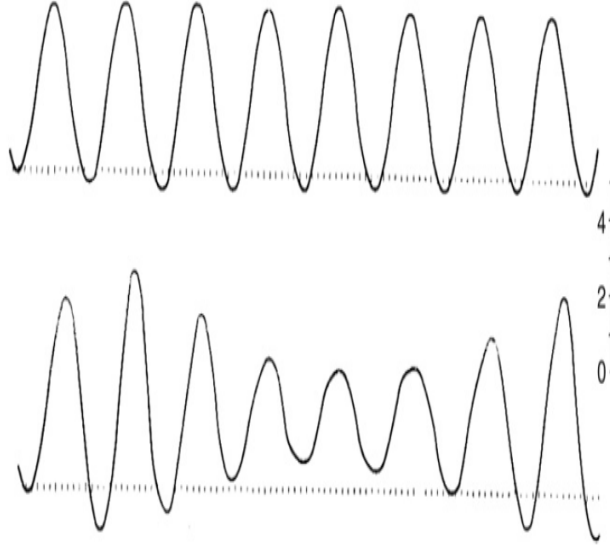


Figura 1.3: Evolución de un tren de ondas con una frecuencia principal de 0.85 Hz en un tanque de agua. La gráfica de arriba reporta una onda a 60 m de fuente de las ondas mientras que la de abajo reporta una a una distancia de 120 m, las marcas de tiempo son cada 0.1 s y la barra vertical esta en pulgadas. Tomada de [12].

las ecuaciones. Esto mediante su reducción a la forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial q_s}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial \eta} \quad (1.34)$$

en donde E es el Hamiltoniano y el cual es el mismo que la energía para este caso. Estas ecuaciones (1.34) conducen a ecuaciones dinámicas que son expresadas en términos de las componentes de Fourier $a(k)$ las cuales pueden

ser consideradas como variables canónicas complejas

$$\eta(k) = \sqrt{\frac{|k|}{2\omega(k)}} [a(k) + a^*(-k)] \quad (1.35)$$

$$q_s(k) = -i\sqrt{\frac{\omega(k)}{2|k|}} [a(k) - a^*(-k)] \quad (1.36)$$

La ecuación de Hamilton resultante es

$$\frac{\partial a(k)}{\partial t} = -i \frac{\delta E}{\delta a^*(k)} \quad (1.37)$$

la energía E es entonces representada en serie de potencias de $a(k)$ y $a^*(-k)$ hasta el termino cuadrado, y la cual es integrada sobre todo el rango de vectores de onda . Para ondas no-lineales débilmente, las amplitudes complejas pueden ser representadas en la forma de $a(k) = A(k, t) \exp(-i\omega(k)t)$, donde A es una función que varia lentamente. Para un paquete de ondas con un espectro estrecho se deduce de esto la ecuación no lineal de Schrödinger

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} - \frac{i\lambda}{2} \frac{\partial^2 q_s}{\partial \xi^2} = -w |q_s|^2 q_s \quad (1.38)$$

donde $\xi = x - v_{gr}t$, $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$ y $\lambda = \frac{d^2\omega}{dk^2}$. Esta ecuación tiene una solución en forma de onda armónica con amplitud constante y cuya velocidad de fase depende de esta amplitud.

Aunque históricamente la inestabilidad modulacional y su relación con la ecuación no lineal de Schrödinger fue dada de esta manera, esta ecuación también puede ser obtenida mediante el estudio de diferentes fenómenos físicos, por ejemplo en la propagación de luz en fibras ópticas no lineales y

guías de ondas planas [14], en los estudios de ondas de gravedad con pequeña amplitud en la superficie de aguas profundas no viscosas [15], para modelar ondas de Langmuir en plasmas calientes [16], en la propagación de haces de ondas difractadas en un plano en las regiones de enfoque de la ionosfera [17], en la propagación de los solitones de hélice alfa de Davydov los cuales son responsables del transporte de energía a lo largo de las cadenas moleculares [18], en condensados de Bose–Einstein confinados en trampas conocidas como "trampas en forma de cigarro" las cuales son altamente anisotrópicas en el régimen de campo medio [19], así entre muchos otros [20].

A que mencionar que aunque el espectro de ganancia (1.32) puede ser derivado mediante un modelo de inestabilidad modulacional en la ecuación no lineal de Schrödinger (1.38), este también puede aparecer para otros tipos de sistemas no lineales como lo es para el caso de ecuaciones de tipo Korteweg–De Vries [21], u otros. Lo que conlleva a considerara al fenómeno de inestabilidad como un fenómeno recurrente para sistemas no lineales.

Con el desarrollo de estas teorías también se desarrollaron diferentes metodologías para el estudio del fenómeno de la inestabilidad modulacional para la ecuación no lineal de Schrödinger.

1.2.2. Estudio del fenómeno de inestabilidad modulacional para la ecuación no lineal de Schrödinger

Para estudiar la inestabilidad modulacional en la ecuación no lineal de Schrödinger canónica análoga a la de (1.38)

$$i \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \gamma |q|^2 q \quad (1.39)$$

podemos recurrir a una metodología mas simplificada la cual esta descrito por ejemplo en [12] o en [13]. Para ello consideramos la evolución de una onda continua (CW), para este caso tenemos que la amplitud es independiente del tiempo, de manera que la ecuación (1.39) debe ser resuelta considerando una envolvente independiente del tiempo, de esta forma podemos proponer una solución con la siguiente forma

$$q = \sqrt{p_0} e^{i\phi_{NL}} \quad (1.40)$$

donde P_0 es la potencia incidente ϕ_{NL} es la fase no lineal inducida por el efecto de auto-modulación de fase y i es la cantidad imaginaria $\sqrt{-1}$. Esta solución nos dice que el haz incidente se propagara sin cambios en la amplitud a lo largo de la fibra, excepto si esta adquiere una fase no lineal que dependa de la potencia.

Para estudiar si este tipo de soluciones son estables o no, podemos recurrir a la teoría de perturbaciones, análoga en teoría a la desarrollada en la sección 1.1 para las ondas de Stokes con la diferencia de que solo trabajaremos con

una sola ecuación la cual contiene toda la información del sistema, para ello agregamos un pequeña perturbación (\mathbf{a}) mucho menor que $\sqrt{p_0}$ en (1.40), de tal manera que

$$\bar{q} = (\sqrt{p_0} + \mathbf{a})e^{i\phi_{NL}} \quad (1.41)$$

y estudiamos el desarrollo de esta nueva onda envolvente en (1.39). Así sustituyendo (1.41) en (1.39) y linealizando con respecto a \mathbf{a} y manteniendo únicamente los términos en primeras potencias de \mathbf{a} , obtenemos la ecuación para la evolución de la perturbación

$$i \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial Z} = \frac{D_2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial T^2} - \gamma P_0 (\mathbf{a} + \mathbf{a}^*) \quad (1.42)$$

Esta ecuación debería poder ser resulta en el dominio de Fourier, pero debido al termino \mathbf{a}^* las componentes de Fourier a las frecuencias Ω y $-\Omega$ están acopladas. Por lo tanto, para quitarnos este problema consideramos soluciones para a de la forma

$$\mathbf{a}(z, T) = \mathbf{a}_1 e^{i(kz - \Omega T)} - \mathbf{a}_2 e^{-i(kz - \Omega T)} \quad (1.43)$$

donde \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son amplitudes reales, k es el numero de onda y Ω es la frecuencia angular de la perturbación. Ahora, si sustituimos esta forma de a en la ecuación (1.42) obtenemos un sistema de dos ecuaciones homogéneas para \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 las cuales tienen solución solo cuando k y Ω satisfacen la siguiente relación

$$k = \pm \frac{1}{2} | D_2 \Omega | [\Omega^2 + \text{sgn}(D_2) \Omega_c^2]^{1/2} \quad (1.44)$$

donde $\text{sgn}(D_2) = \pm 1$ la cual depende del signo de D_2 , y Ω_c es la frecuencia

critica definida como

$$\Omega_c^2 = \frac{4\gamma P_0}{|D_2|} = \frac{4}{|D_2| L_{NL}} \quad (1.45)$$

Analizando estas últimas tres ecuaciones se puede ver que la estabilidad del haz incidente esta comprometida en relación a la frecuencia Ω_c y al régimen de dispersión que experimenta el haz. En el caso en que la dispersión en la velocidad de grupo sea normal ($D_2 \succ 0$), el vector de onda k es real para todo valor de Ω , y el estado del haz se mantiene estable, aún bajo la presencia de perturbaciones. Para la región de dispersión anómala ($D_2 \prec 0$), k toma un valor imaginario para valores de $|\Omega| \prec \Omega_c$, y la perturbación $a(z, T)$ tiende a crecer exponencialmente conforme z se incrementa como se puede ver en la ecuación (1.43). Como resultado el haz incidente es inestable durante su propagación. Esta inestabilidad es la inestabilidad de modulación debido a que se manifiesta como una modulación temporal en amplitud a la frecuencia Ω , la cual puede conllevar a la ruptura temporal del pulso y a la formación de un tren de pulsos ultra-cortos.

Analizando la ecuación (1.44), podemos notar que la amplificación no ocurre para cualquier frecuencia, si no que la amplificación espectral esta condicionada para frecuencias que cumplan la condición $|\Omega| \prec \Omega_c$. Para estas frecuencias podemos obtener la ganancia en potencia ajustando $g(\Omega) = 2Im(k)$, donde el factor 2 convierte a g en ganancia de potencia. Así, la ganancia espectral queda expresada mediante la ecuación

$$g(\Omega) = |D_2\Omega| (\Omega_c^2 - \Omega^2)^{1/2}. \quad (1.46)$$

Con el fin de analizar la ganancia espectral podemos graficar la ecuación

(1.46), esta se ve representada en la figura 1.4, mediante la cual se puede observar que es análoga a la gráfica de la figura 1.1 obtenida por Benjamin y Feir para el espectro de ganancias.

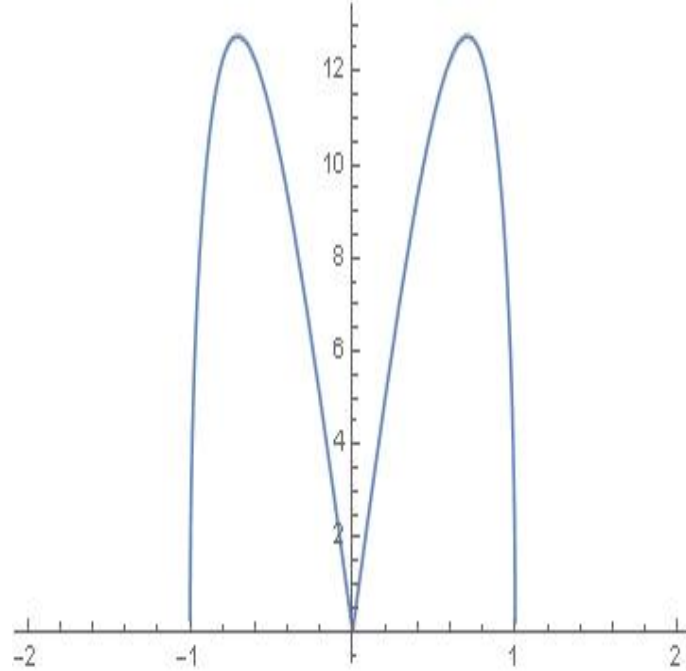


Figura 1.4: Espectro de ganancia de la inestabilidad de modulación, con los valores dados de $\beta_2 = -25,5ps^2/km$ y $\Omega_c = 1Hz$.

La ganancia esta representada en función de la longitud de onda, la cual corresponde al desplazamiento en frecuencia debido a la frecuencia $\pm\Omega$ y esta es simétrica con respecto a la frecuencia central $\Omega = 0$, y depende fuertemente de la potencia. Además para una potencia determinada existe una frecuencia dominante, la cual experimenta una ganancia máxima. La frecuencia a la cual la ganancia es máxima la podemos obtener a partir de

de la ecuación (1.46), así tenemos que

$$\Omega_{max} = \pm \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}} = \pm \left(\frac{2\gamma\rho_0}{|D_2|} \right)^{1/2} \quad (1.47)$$

con una ganancia máxima

$$G_{max} = G(\Omega_{max}) = \frac{1}{2} |D_2| \Omega_c^2 = 2\gamma\rho_0 \quad (1.48)$$

Por lo tanto, la inestabilidad modulacional fuerza a una modulación en la amplitud con una frecuencia máxima (Ω_{max}), la cual estará en función de la potencia y de los parámetros del medio como se puede ver en la expresión (1.47). Espectralmente, esta modulación se manifiesta como la aparición de dos jorobas laterales localizados simétricamente a la frecuencia $\pm\Omega_{max}$, una a cada lado de la frecuencia central ω_0 como se puede apreciar en la figura (1.4).

Para ejemplificar lo explicado anteriormente podemos recurrir a una simulación numérica realizada por [22] para un pulso gaussiano propagándose por una fibra óptica.

Las características del sistema para esta simulación son la propagación de un pulso gaussiano con potencia pico de 10 W y duración temporal de 100 ps en una fibra óptica SMF-28 (la cual es un tipo de fibra óptica de un sólo modo) en la región de 1550 nm (dispersión anómala). La longitud de dispersión L_D de la fibra para el pulso es estimada en 283 km, por lo que así ellos consideraron longitudes de fibra $L \ll L_D$ los cuales permitieron simular el caso donde el perfil de onda se mantiene constante, similar al caso de una onda continua. Así durante la propagación del como se puede apreciar en la

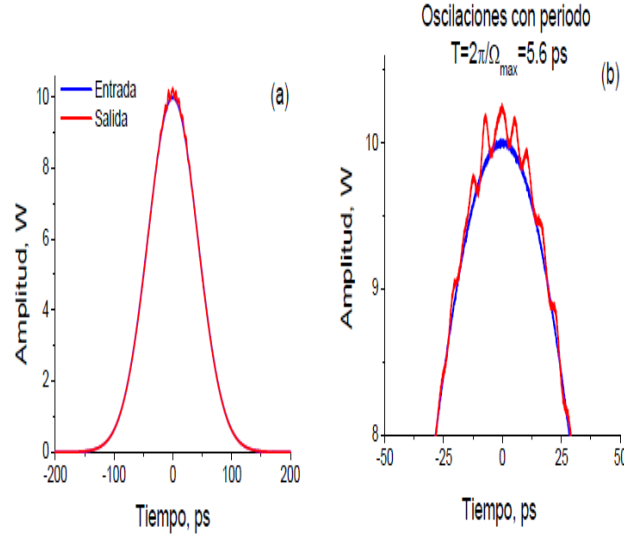


Figura 1.5: Efecto inicial de la inestabilidad modulacional en un pulso Gaussiano de 100 ps. En (a) un pulso transmitido a la salida de la fibra óptica (línea roja), en (b) acercamiento del pulso donde se observa una modulación debido a la amplificación de la frecuencia Ω_{max} , tomada de [22]

figura 1.5 en la sección (b) existe una modulación en amplitud bien definida, la cual corresponde a la frecuencia de la modulación Ω_{max} . Temporalmente este efecto se puede notar como la formación de un tren periódico de pulsos. Este proceso de amplificación es continuo para la perturbación, se puede esperar que para mayores longitudes de fibra la Ω_{max} defina el rompimiento temporal de pulsos y la formación de pulsos internos. En la figura (1.6) se muestra otras simulaciones realizada por [22] pero ahora con un pulso de 100 ps en una fibra óptica de 10 longitudes no lineal. Los resultados muestran

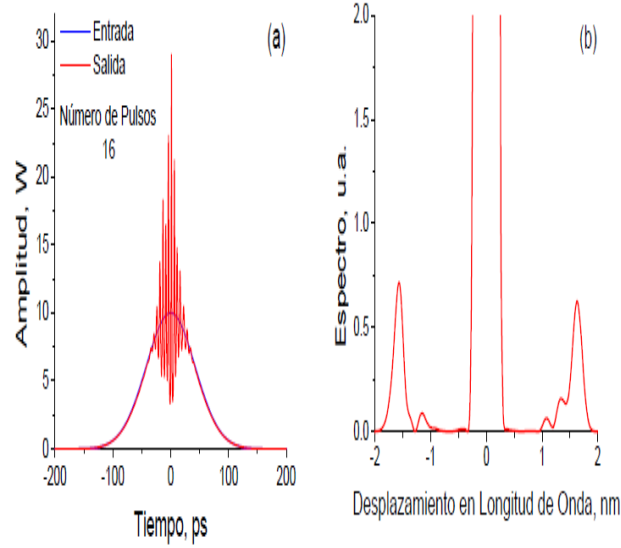


Figura 1.6: Evolución de un pulso gaussiano de 100 ps. En (a) se muestra la ampliación exponencial de las perturbaciones iniciales a la frecuencia Ω_{max} , mientras que en (b) se muestra el espectro de potencia, tomada de [22].

que debido al efecto de la inestabilidad modulacional, las perturbaciones a la frecuencia Ω_{max} experimentan una implicación mayor que conlleva la ruptura temporal del pulso formando un tren de pulsos intensos.

Entonces experimentalmente el efecto de las inestabilidades modulacionales se manifiesta mediante la aparición de dos jorobas laterales ubicados alrededor de la frecuencia Ω_{max} . Como se muestra en la Figura 1.6 en la sección (b), por otra parte el tren de pulsos se manifiesta como una frecuencia de modulación alrededor de $\pm 1,5 nm$, como se observa en la gráfica de la inestabilidad figura 1.6.

1.2.3. Las inestabilidades modulacionales, la generación de Solitones y el problema de Fermi-Pasta-Ulam

En 1984, Akira Hasegawa en su estancia de investigación en los laboratorios AT&T propuso un mecanismo de inestabilidades modulacionales inducidas en la ecuación no lineal de Schrödinger para generar solitones como trenes de pulsos en fibras ópticas y láseres de solitones [14]. El soliton óptico es resultado de la interacción entre dos efectos contrapuestos, la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) y el efecto no lineal de Kerr, la figura 1.7 muestra su efecto sobre un paquete de ondas, la dispersión reduce la frecuencia hacia adelante y la incrementa hacia atrás, mientras que el efecto Kerr realiza la acción contraria.

Los trenes de pulsos solitonicos producidos por las inestabilidades modulacionales inducidas fueron observadas experimentalmente dos años después [23]. Es interesante ver que en ausencia de de perdidas en la fibra, la solución a la ecuación no lineal de Schrödinger (1.39) la cual tiene la forma de

$$q = \operatorname{sech}(T)e^{(iZ)/2} \quad (1.49)$$

para un soliton óptico, es repetitiva y por lo tanto las modulaciones en sus trenes de pulsos retoman su forma original de onda continua a una distancia determinada dependiente de los parámetros del sistema. En este sentido se ah encontrado un relación profunda con las inestabilidades modulacionales y el famosos problema de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) [24-29]. En 1953, en los Alamos, Enrico Fermi junto con sus colaboradores y expertos en matemáticas

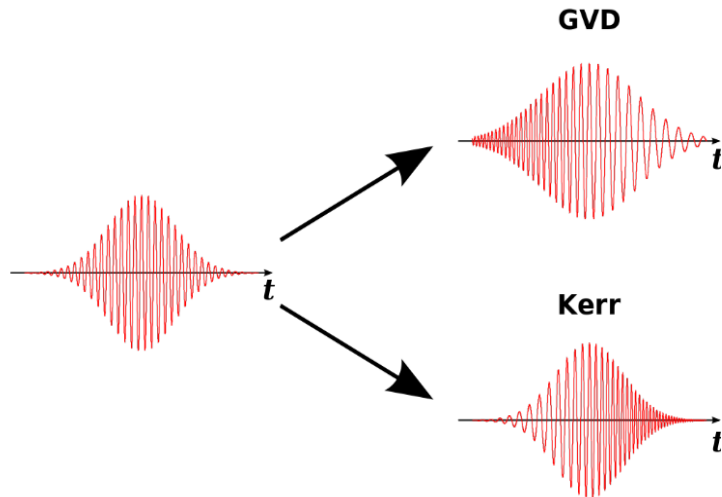


Figura 1.7: Representación de los efectos de la dispersión de la velocidad de grupo y el efecto no lineal Kerr en un paquete de ondas.

John Pasta and Stanislaw Ulam, realizaron una simulación computacional sobre el problema de un conjunto de 64 osciladores simultáneos unidos por una cuerda en los cuales interactuaban mediante fuerzas no lineales. Su intención era estudiar como se distribuía la energía sobre todas las posibles oscilaciones generadas por la cuerda y la Termalización del sistema. Los resultados del experimento fueron inesperados, para su sorpresa la energía total no se compartía entre todos los modos del sistema, pero después de tiempo relativamente corto la energía retornaba al mismo modo que en su estado inicial. Algunos años después, en sus esfuerzos por dar una explicación a este fenómeno recurrente Zabusky y Kruskal [34] usaron métodos computacionales más avanzados y modificaron la ecuación usada por Fermi-Pasta-Ulam. Ellos resolvieron la ecuación de Korteweg-de Vries numéricamente y descubrieron

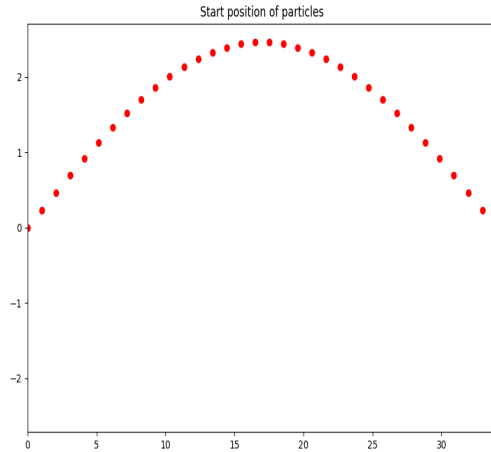


Figura 1.8: Simulación realizada mediante un programa de python en donde se muestra la posición inicial de los osciladores en el problema de Fermi-Pasta-Ulam

en el sistema una onda que viaja sin perder su forma, la cual llamaron soliton. Este fenómeno recurrente ha sido observado en experimentos en fibras ópticas y dentro del margen de la ecuación no lineal de Schrödinger en [30-32], lo cual aprovecho Hasegawa en su desarrollo de su mecanismo de inestabilidades modulacionales para la generación de pulsos solitonicos.

En la figura 1.10 se puede observar la relación entre el efecto de inestabilidad modulacional en el marco de la ecuacion no lineal de Schrödinger y la recurrencia de Fermi-Pasta-Ulam, en esta figura mediante un proceso de inestabilidad inducido se genera una restauración de la señal inicial de manera recurrente, lo cual se puede apreciar tanto en el inciso (a) como en el

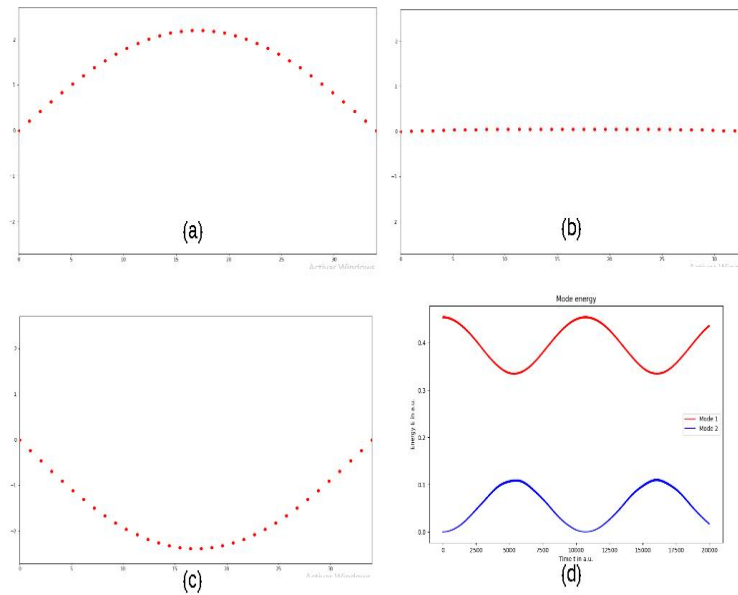


Figura 1.9: En (a,b,c) se muestran instantáneas de la dinámica de las oscilaciones realizadas en una simulación de python para el problema de Fermi-Pasta-Ulam. En (d) se muestra la distribución de los modos energía.

(b) de la figura 1.10.

1.3. Importancia del problema

Como ya se ha mencionado las inestabilidades modulacionales surgen en diferentes áreas de la física moderna y han sido de gran importancia para mejorar nuestro entendimiento de fenómenos tales como la propagación de ondas de Stokes, la creación de olas gigante en el mar, la dinámica de ondas en plasmas o en condensados de Bose-Einstein, así entre muchos otros. Por otra parte estas también han ayudado al desarrollo de nuevas tecnologías al

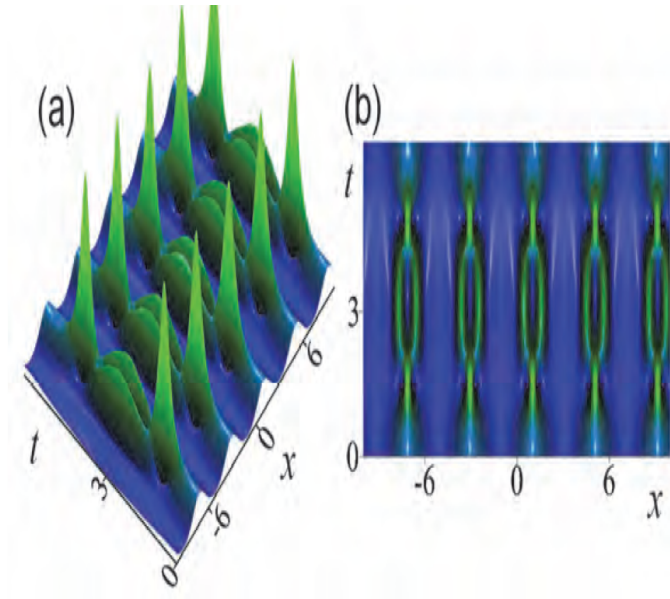


Figura 1.10: Ejemplo ilustrativo de la dinámica-espacio temporal de la inestabilidad modulacional inducida y el efecto de recurrencia calculado dentro del marco de la ecuación no lineal de Schrödinger canónica . En (a) se muestra la distribución de la intensidad, mientras que en (b) se muestra el mapa de contorno correspondiente. Tomada de [9]

ser aplicadas al mejoramiento de fibras ópticas en donde se han producido los llamados solitones ópticos, en guías de onda ópticas integradas en chips, así como otros dispositivos tecnológicos .

En el caso de las dispersiones variables estas pueden ser utilizadas por ejemplo en la elaboración de las llamadas fibras ópticas con dispersión variable, mediante las cuales a partir de un espesor variable generan un cambio en la temperatura para generar un proceso de enfriamiento en el vidrio de la fibra

óptica .

Para modulaciones de alto orden, las cuales se dan para ordenes mayores de dispersión y no linealidad, describen la propagación de pulsos extremadamente cortos (femto-segundos) en un medio .

Nosotros pretendemos mostrar el rol crucial que juega la dispersión de orden mayor, en particular la de orden cuatro , en la dinámica de las inestabilidades modulacionales en ecuaciones no lineales de Schrödinger no autónomas , así como las condiciones necesarias para el surgimiento de estas en los sistemas mencionados anteriormente, y así aportar al estudio de fenómenos en donde estas se utilicen, como por ejemplo la auto-compresión de solitones ópticos o el efecto de cuantización reportado en [8] y en [9].

Capítulo 2

Inestabilidad Modulacional inducida en las trampas de dispersión con inversión de signo en óptica no lineal

2.1. Planteamiento del problema o pregunta de investigación.

En los capítulos anteriores vimos que las inestabilidades modulacionales han sido ampliamente estudiadas dentro del marco de la ecuación no lineal de Schrödinger

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = 0. \quad (2.1)$$

Estudios de esta ecuación con mayores ordenes de dispersión también han sido realizados en [8-9] o en [35], los cuales describen la propagación de pulsos extremadamente cortos o inestabilidades modulacionales de mayor orden.

En particular, se a demostrado que para cuarto orden de dispersión, es decir para el modelo,

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + \frac{\partial^4 q}{\partial T^4} + |q|^2 q = 0 \quad (2.2)$$

se observa también el fenómeno de inestabilidad modulacional y de ganancia tanto para regímenes de dispersión anómalos como normales [36].

Estas ecuaciones tienen como un caso no autónomo a un sistema en donde tanto la dispersión como la no linealidad varían a lo largo de la distancia de propagación

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + D_4(Z) \frac{\partial^4 q}{\partial T^4} + R(Z) |q|^2 q = 0 \quad (2.3)$$

lo que conlleva a la posibilidad de nuevos efectos en la propagación de las ondas, tales como efectos de modulación de alto orden o efectos de división de ondas rebeldes. Nuestros objetivos, tanto generales como particulares, en el presente trabajo son los siguientes:

Objetivos Generales:

El objetivo principal del trabajo es analizar las condiciones necesarias para el surgimiento de la inestabilidad modulacional en sistemas descritos por la ecuación no lineal de Schrödinger no autónoma con dispersión de cuatro orden (2.3), en la cual varían los coeficientes de dispersión y no linealidad,

con una GDV (dispersión de la velocidad de grupo) de la forma.

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = k_2(\Omega, Z) = |k_{20}(z)| (-1 + k_{40}(z)\Omega^2) \quad (2.4)$$

Objetivos Particulares:

1. Obtener la relación de dispersión en función de la distancia z y del dominio espectral Ω .
2. Investigar la dispersión de la velocidad de grupo en el dominio espectral de frecuencias, la cual suele llamarse trampa parabólica, y en los intervalos de dispersión tanto negativos como positivos, los cuales son dependientes del valor de la dispersión de cuarto orden k_{40} .
3. Establecer los criterios correspondientes para que se presente el fenómeno de inestabilidad modulacional inducido en el modelo de la ecuación (2.3), de acuerdo a las propiedades de dispersión variable aplicadas en fibras ópticas.
4. Estudiar y demostrar usando un software gráfico las regiones de inestabilidad modulacional inducida, las cuales dependen de la dispersión variable a lo largo de la distancia Z .

2.2. Métodos

El modelo de la ecuación (2.3) surge en el modelado de intensos pulsos ópticos en femto-segundos [36] y puede ser obtenida mediante principios variacionales

[43], a partir de la densidad Lagrangiana .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i \left(q^* \frac{\partial q}{\partial Z} - q \frac{\partial q^*}{\partial Z} \right) - \frac{1}{2}D_2 \left| \frac{\partial q}{\partial T} \right|^2 + \frac{1}{2}D_4 \left| \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} \right|^2 + \frac{1}{2}R|q|^2. \quad (2.5)$$

En nuestro modelo estamos considerando un sistema en el cual la dispersión de la velocidad de grupo es

$$GVD = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = k_2(\Omega, Z) = |k_{20}(z)| (-1 + k_{40}(z)\Omega^2)$$

la cual tiene la particularidad de que, a diferencia de la ecuación no lineal de Schrödinger con grado de dispersión 2, para la cual se tenía que $D_2 = GVD$, aquí esta solo es una contribución mas a esta como se puede ver en la ecuación (2.4), en donde $k_{20}(Z) = D_2(Z)$.

Esta dispersión de la velocidad de grupo en el dominio espectral representa la nombrada trampa de dispersión parabólica de inversión de signo, y al igual que para el caso con grado de dispersión 2, en donde las inestabilidades modulacionales aparecían dentro de la condición $D_2 < 0$, nuestra hipótesis sugiere aquí, que las inestabilidades deberán aparecer solo adentro de la región de la trampa $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} < 0$, y se suprimen complemente en la región espectral prohibida, la cual es para valores positivos de la GDV $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} > 0$. Esta trampa de dispersión parabólica de inversión de signo se propuso previamente para suprimir la auto-dispersión de Raman para solitones de femto-segundos en fibras ópticas y láseres de solitones, mediante la cual se ha predicho el llamado efecto de tunelización espectral de solitones [37-42].

Podemos estudiar el fenómeno de inestabilidad modulacional en la ecuación (2.3) mediante una generalización de la metodología expuesta en la sección (1.2.2) para el caso canónico con grado de dispersión 2. Para ello consideremos una representación de q en la forma

$$q(z, T) = [\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1(z, T)] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \quad (2.6)$$

en donde $\rho_0 = cte$, $\varepsilon \ll 1$ y $q_1 \in \mathbb{C}$. Sustituyamos la representación (2.6) en la ecuación (2.3), termino a termino tenemos que

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial Z} &= i \frac{\partial}{\partial Z} \left([\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \\ &= \left(-\rho_0^{3/2} R(z) + i\varepsilon \frac{\partial q_1}{\partial Z} - \varepsilon q_1 \rho_0 R(z) \right) \left(e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} &= \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left([\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \\ &= \frac{1}{2} D_2(z) \varepsilon \frac{\partial^2 q_1}{\partial T^2} e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} D_4(Z) \frac{\partial^4 q}{\partial T^4} &= D_4(Z) \frac{\partial^4}{\partial T^4} \left([\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \\ &= D_4(z) \varepsilon \frac{\partial^4 q_1}{\partial T^4} e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} R(Z) |q|^2 q &= R(Z) |[\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz}|^2 \left([\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \\ &= R(Z) (\rho_0 + \sqrt{\rho_0} \varepsilon q_1^* + \sqrt{\rho_0} \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_1^*) \left([\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

en esta ultima expresión (2.10) ya que $\varepsilon \ll 1$ podemos despreciar los términos al cuadrado, por lo que

$$R(Z) |q|^2 q = R(z) [\rho_0 + \sqrt{\rho_0} \varepsilon (q_1 + q_1^*)] \left([\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \quad (2.11)$$

así tenemos entonces que la ecuación (2.3) bajo esta representación toma la forma de

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + D_4(Z) \frac{\partial^4 q}{\partial T^4} + R(Z) |q|^2 q \\
& = -\rho_0^{3/2} R(z) + i\varepsilon \frac{\partial q_1}{\partial Z} - \varepsilon q_1 \rho_0 R(z) \left(e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} D_2(z) \varepsilon \frac{\partial^2 q_1}{\partial T^2} \left(e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \quad (2.12) \\
& \quad + D_4(z) \varepsilon \frac{\partial^4 q_1}{\partial T^4} \left(e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right) \\
& + R(z) [\rho_0 + \sqrt{\rho_0} \varepsilon (q_1 + q_1^*)] [\sqrt{\rho_0} + \varepsilon q_1] \left(e^{i\rho_0 \int_0^z R(z) dz} \right)
\end{aligned}$$

de (2.12) podemos hacer un poco de álgebra con lo que resulta una nueva ecuación diferencial para q_1

$$i \frac{\partial q_1}{\partial Z} + \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q_1}{\partial T^2} + D_4(Z) \frac{\partial^4 q_1}{\partial T^4} + R(Z) \rho_0 (q_1 + q_1^*) = 0 \quad (2.13)$$

la condición de inestabilidad puede ser derivada buscando soluciones para la onda cuasi-estática (qcw) con las amplitudes de banda lateral constantes q_A y q_s

$$q_1(z, T) = q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \quad (2.14)$$

sustituyendo (2.14) en (2.13) obtendremos dos sistemas de ecuaciones para q_A y q_s , los cuales deben tener soluciones distintas a cero siempre y cuando el determinante de los coeficientes de la matriz sea igual a cero, esta condición ayudara para la obtención da la relación de dispersión para un número de onda k y una frecuencia Ω .

Con esto en mente y trabajando de igual forma término a término con la

ecuación (2.13)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial q_1}{\partial Z} &= i\frac{\partial}{\partial Z} \left(q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right) \\ &= \left(q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} - q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} \right) k \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q_1}{\partial T^2} &= \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right) \\ &= -\frac{1}{2} D_2(z) \Omega^2 \left[q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} D_4(Z) \frac{\partial^4 q_1}{\partial T^4} &= D_4(Z) \frac{\partial^4}{\partial T^4} \left(q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right) \\ &= D_4(Z) \Omega^4 \left(q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &R(Z) \rho_0 (q_1 + q_1^*) \\ &= R(Z) \rho_0 \left[(q_A + q_s) e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + (q_A + q_s) e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

entonces, tenemos que (2.13) toma la forma de

$$\begin{aligned} i\frac{\partial q_1}{\partial Z} &+ \frac{1}{2} D_2(Z) \frac{\partial^2 q_1}{\partial T^2} + D_4(Z) \frac{\partial^4 q_1}{\partial T^4} + R(Z) \rho_0 (q_1 + q_1^*) \\ &= \left(q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} - q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} \right) k \\ &\quad - \frac{1}{2} D_2(Z) \Omega^2 \left[q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right] \\ &\quad + D_4(Z) \Omega^4 \left(q_A e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + q_s e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right) \\ &\quad + R(Z) \rho_0 \left[(q_A + q_s) e^{i \int_0^z k(z) dz - i\Omega} + (q_A + q_s) e^{-i \int_0^z k(z) dz + i\Omega} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

de esta ultima relación podemos obtener el sistema de ecuaciones

$$-q_A k - \frac{1}{2} D_2(Z) \Omega^2 q_A + D_4(Z) \Omega^4 q_A + R(Z) \rho_0 q_A + R(Z) \rho_0 q_s = 0 \quad (2.20)$$

$$q_s k - \frac{1}{2} D_2(Z) \Omega^2(z) q_s + D_4(Z) \Omega^4 q_s + R(Z) \rho_0 q_s + R(Z) \rho_0 q_A = 0 \quad (2.21)$$

las cuales re-acomodando toman la forma de

$$\left(R(Z) \rho_0 + D_4(Z) \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2(Z) \Omega^2 - k \right) q_A + (R(Z) \rho_0) q_s = 0 \quad (2.22)$$

y

$$(R(Z) \rho_0) q_A + \left(R(Z) \rho_0 + D_4(Z) \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2(Z) \Omega^2 + k \right) q_s = 0 \quad (2.23)$$

de (2.22) podemos ver que

$$q_A = \frac{-R(Z) \rho_0 q_s}{R(Z) \rho_0 + D_4(Z) \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2(Z) \Omega^2 - k} \quad (2.24)$$

y poniendo todo en términos de q_s con ayuda de (2.23), tenemos

$$\frac{\left[\left(R \rho_0 + D_4 \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2 \Omega^2 + k \right) \left(R \rho_0 + D_4 \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2 \Omega^2 - k \right) - (R \rho_0)^2 \right] q_s}{R \rho_0 + D_4 \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2 \Omega^2 - k} = 0 \quad (2.25)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \left(R \rho_0 + D_4 \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2 \Omega^2 + k \right) \left(R \rho_0 + D_4 \Omega^4 - \frac{1}{2} D_2 \Omega^2 - k \right) \\ - (R \rho_0)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

De igual forma esta puede ser obtenida mediante la condición mencionada anteriormente del determinante igual a cero para la matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} \left(R(Z)\rho_0 + D_4(Z)\Omega^4 - \frac{1}{2}D_2(Z)\Omega^2 - k \right) & (R(Z)\rho_0) \\ (R(Z)\rho_0) & \left(R(Z)\rho_0 + D_4(Z)\Omega^4 - \frac{1}{2}D_2(Z)\Omega^2 + k \right) \end{array} \right| = \\
& = \left(R\rho_0 + D_4\Omega^4 - \frac{1}{2}D_2\Omega^2 + k \right) \left(R\rho_0 + D_4\Omega^4 - \frac{1}{2}D_2\Omega^2 - k \right) - (R\rho_0)^2 = 0
\end{aligned}$$

de estas ultimas expresiones podemos despejar k^2 para obtener la relación de dispersión

$$k^2 = 2D_4\Omega^4 R\rho_0 - D_2\Omega^2 R\rho_0 + D_4^2\Omega^8 - D_2D_4\Omega^6 + \frac{1}{4}D_2^2\Omega^4 \quad (2.27)$$

la cual podemos factorizar para que finalmente tome la forma de

$$k^2 = \Omega^2 \left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2 \right) \left[\Omega^2 \left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2 \right) + 2R\rho_0 \right] \quad (2.28)$$

En la sección (1.2.2) vimos que, cuando $D_2 < 0$, la relación de dispersión k tenia un valor imaginario para valores de $|\Omega| < \Omega_c$, o sea cuando, D_2 estaba dentro de la región de dispersión anómala la perturbación tendía a crecer y se generaba la inestabilidad modulacional. En nuestro modelo como ya mencionamos la dispersión en la velocidad de grupo es $k_2(\Omega, Z)$ y no el valor D_2 , por lo que ahora nuestra condición para que se desarrollen las inestabilidades modulacionales en (2.3) es mediante las regiones de $|\Omega|$ a las cuales se dan los valores imaginarios de k

$$k^2 < 0 \quad (2.29)$$

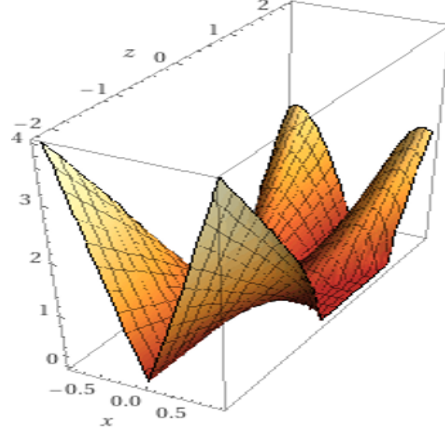


Figura 2.1: Burda representación de la función de dispersión (2.28), para valores de dispersión variando lineal-mente de la forma $D_{2,4}(Z) = Z$ y la no-linealidad manteniéndose constante $R(Z) = 1$

la cual corresponde al rango de frecuencias

$$|\Omega| \prec 2\sqrt{\frac{\rho_0 R(Z)}{D(Z)}}. \quad (2.30)$$

Así el rango de frecuencias varia proporcionalmente a la raíz de la no-linealidad ($\sim \sqrt{R(Z)}$) e inversamente proporcional a la raíz de la relación de dispersión $\left(\frac{1}{\sqrt{D(Z)}}\right)$.

Ahora, con base a estos resultados, nuestro objetivo es el estudiar que tan importante es la influencia de la dispersión de orden superior en el desarrollo de las inestabilidades modulacionales en particular la importancia de la dispersión de orden cuatro. Para el propósito de esto re-escribimos la ecuación

(2.28) en la forma de

$$k^2 = \Omega^2 f(D_2, D_4, \Omega) P(D_2, D_4, \Omega, R, \rho_0) \quad (2.31)$$

en donde

$$f(D_2, D_4, \Omega) = D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2 \quad (2.32)$$

y

$$P(D_2, D_4, \Omega, R, \rho_0) = \Omega^2 \left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2 \right) + 2R\rho_0 \quad (2.33)$$

Como ya dijimos la Inestabilidad Modulacional aparece para valores de $k^2 \prec 0$, o sea valores de k imaginarios, por ello en óptica no lineal se suele estudiar la dinámica a partir del coeficientes de amplificación $G(\Omega) = 2Im(k)$ como ya se menciona en la sección (1.2.2). Así nuestro valor para el coeficientes de amplificación o también nombrado coeficiente de ganancia espectral $G(\Omega) = 2Im(k)$ es

$$G(\Omega) = 2|\Omega| \left[\left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2 \right) \left(\Omega^2 \left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2 \right) + 2R\rho_0 \right) \right]^{1/2} \quad (2.34)$$

el cual tiene por limite cuando $D_4 = 0$ a la ecuación (1.46). Podemos calcular G_{max} mediante el uso básico de máximos y mínimos y el criterio $\frac{dG(\Omega)}{d\Omega} = 0$. Encontrando así que los valores para los cual Ω es un valor critico es en

$$\frac{dG(\Omega)}{d\Omega} = \frac{8\Omega^7 D_4^2 - 6\Omega^5 D_2 D_4 + 8\Omega^3 D_4 R\rho_0 + \Omega^3 D_2^2 - 2\Omega D_2 R\rho_0}{\sqrt{\Omega^8 D_4^2 - D_2 D_4 \Omega^6 + 2\Omega^4 D_4 R\rho_0 + \frac{1}{4}\Omega^4 D_2^2 - \Omega^2 D_2 R\rho_0}} = 0 \quad (2.35)$$

lo que implica que

$$8\Omega^6 D_4^2 - 6\Omega^4 D_2 D_4 + 8\Omega^2 D_4 R\rho_0 + \Omega^2 D_2^2 - 2D_2 R\rho_0 = 0 \quad (2.36)$$

de aquí podemos ver que en el limite cuando $D_4 = 0$

$$\Omega^2 D_2^2 - 2D_2 R \rho_0 = 0 \quad (2.37)$$

lo cual nos da el valor de $\Omega_{max} = \pm \left(\frac{2R\rho_0}{D_2} \right)^{1/2}$, el cual es el mismo valor para Ω_{max} que el de la expresión (1.47), para el caso con $D_4 \neq 0$, los puntos críticos de Ω_{max} los obtenemos resolviendo el polinomio de sexto grado (2.36), lo que nos da las posibilidades para $\Omega_{critico}$ de

$$\Omega_{critico} = \pm \frac{\sqrt{D_2}}{2\sqrt{D_4}} \quad (2.38)$$

$$\Omega_{critico} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_2 - \sqrt{D_2^2 - 16D_2 D_4}}{D_4}} \quad (2.39)$$

$$\Omega_{critico} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{D_2^2 - 16D_2 D_4} + D_2}{D_4}} \quad (2.40)$$

específicamente el valor mediante el cual se da el máximo de $G(\Omega)$ es $\left(\pm \frac{\sqrt{D_2}}{2\sqrt{D_4}} \right)$. Algo importante a notar es que, para todos los valores críticos de Ω al menos $\sqrt{D_4}$ aparece en todas, por lo que una condición que podemos inducir es que para que se desarrollen las inestabilidades es necesario que $D_4 \succ 0$.

Aunque estos resultados indican algunas condiciones necesarias para que se dé la inestabilidad estas aún no dicen nada acerca de las regiones de Ω para las cuales se desarrollan las inestabilidades, para ello podemos recurrir a un análisis gráfico de las funciones $f(D_2, D_4, \Omega)$ y $P(D_2, D_4, \Omega, R, \rho_0)$.

En el caso estándar, cuando $D_4 = 0$, la función $f(D_2, D_4, \Omega)$ en (2.31) es igual a $(-\frac{1}{2}D_2)$ la cual para valores positivos de D_2 es exactamente la región

de dispersión que mantiene la formación de solitones, ya que si recordamos, era la condición para la región de dispersión anómala que se pedía para la ecuación no lineal de Schrödinger (1.38), esto nos indica que, para estar dentro de la región de la inestabilidad modulacional en el modelo (2.3) la función $P(D_2, D_4, \Omega, R, \rho_0)$ debe tener valores positivos, para que se cumpla la condición propuesta para el desarrollo de las inestabilidades $k^2 \prec 0$.

En el caso estándar, para cuando $D_4 \neq 0$, aun tenemos que encontrar las regiones de Ω para las cuales se desarrollan las inestabilidades, si consideramos arbitrariamente funciones $f(D_2, D_4, \Omega) \prec 0$ y $P(D_2, D_4, \Omega, R, \rho_0) \succ 0$, podemos realizar un análisis por separado de las funciones con la intención de encontrar los criterios correspondientes para los cuales se den las inestabilidades.

La figura (2.2) muestra el comportamiento de la función $f(D_2, D_4, \Omega)$, la cual es una función de tipo parabólico $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si consideramos que esta sólo varia en función de la frecuencia Ω y se mantiene constante para $(D_2$ y $D_4)$. Se puede apreciar en las partes (a) y (b) de la figura (2.2) que la región de $f(D_2, D_4, \Omega) \prec 0$, por debajo de la línea punteada se disminuye con el aumento del valor de D_4 .

Las partes (c), (d) y (e) de la figura (2.2) muestran la dinámica del coeficiente de amplificación $G(\Omega)$ lo que denota la importancia del valor D_4 (a menor valor de D_4 mayor espectro de ganancia) en esta dinámica. También observemos el estrechamiento para la región de la inestabilidad modulacional en el proceso de aumento de D_4 . Finalmente, podemos observar que el máximo

del coeficiente de amplificación $G(\Omega)$ se desplaza hacia la frecuencia de la onda continua (cw) para valores menores de Ω .

Estos resultado son razonables ya que podemos ver que las dispersiones D_2 y D_4 , que están en la ecuación (2.28), son de signos diferentes y por ende el papel de la dispersión de orden 4 es el de disminuir la acción de la dispersión de orden 2, ahí el porqué de qué a menores valores para D_4 hay mayores valores de espectro de ganancia .

Otros resultados importantes se muestran en la figura (2.3), la cual representa la dinámica de los coeficientes de amplificación $G(\Omega)$ cuando se desarrolla la inestabilidad modulacional en el sistema, y la cual es dependiente de $G(\Omega)$, $R(Z)$ y de los coeficientes de dispersión $D_2(Z)$ y $D_4(Z)$, los cuales varían en función de la distancia de propagación Z .

En los incisos (a) y (b) de la figura (2.3) se muestra la gráfica de $G(\Omega)$ para el caso particular en cuando la dispersión D_2 y D_4 crece o decrece lentamente mediante funciones arbitrarias $D_2 = D_{2,0} \exp(\beta Z)$ y $D_4 = D_{4,0} \exp(\beta Z)$ con D_0 y β constante, y la no linealidad se mantiene a un valor constante $R(Z) = 1$, en particular se escogieron estos valores de D_2 y D_4 por su relación con fenómenos ya reportados en la literatura en donde se modelan inestabilidades modulaciones de alto orden en fibras ópticas [8], o un efecto de cuantización de ondas de Rogue, en donde se observa un efecto de (Cuantización) al dividirse una onda de rouge en dos o mas ondas en experimentos computacionales realizados [9].

En la parte (a) de la figura 2.3 se muestra la dinámica del coeficiente de

amplificación $G(\Omega)$ para el caso en que las dispersiones decrecen lentamente de la forma $D_0 \exp(\beta Z)$ para valores dados de $\beta = 0,25$, $R(Z) = 1$ y $\rho_0 = 1$. Se puede observar que para estos casos la región espectral de las inestabilidades modulacionales se aumenta (o se disminuye) lentamente y el máximo del $G(\Omega)$ decrece (o se aumenta) lentamente para este tipo de funciones de dispersión.

En la parte (b) de la figura, de igual forma se muestra la dinámica del coeficiente de amplificación $G(\Omega)$ para valores superiores de β que en el inciso (a). Ahora que los valores de D_2 y D_4 , varían ambos en la forma de $D_0 \exp(\beta Z)$ el peso de la ganancia espectral $G(\Omega)$, recae en el valor de β , y ya no en el valor de D_4 , como se puede apreciar en la figura 2.2.

2.3. Presentación y discusión de resultados

La relación de dispersión (2.28) cuando $D_4(Z) = 0$ y $R(Z) = \gamma$ tiene por límite a la ecuación

$$K = \pm \frac{1}{2} \Omega |D_2| \sqrt{\Omega^2 - \frac{4\gamma\rho_0}{D_2}} = \pm \frac{1}{2} \Omega |D_2| \sqrt{\Omega^2 + \text{sgn}(D_2)\Omega_c^2} \quad (2.41)$$

con $\frac{4\gamma\rho_0}{D_2} = \Omega_c^2$, que es la misma expresión para la relación de dispersión que la ecuación (1.44), lo cual nos es un buen indicador de que la relación de dispersión obtenida en el presente trabajo es correcta.

Así, el modelo para el espectro de ganancia $G(\Omega)$ tiene como límite el obtenido para la ecuación (1.39) como se vio en la sección 2.2, obteniendo así satisfactoriamente el primer objetivo particular propuesto en la tesis, de ob-

tener la relación de dispersión para la ecuación no lineal de Schrödinger no autónoma con dispersión de orden cuatro, en el marco de una dispersión de la velocidad de grupo de la forma $k_2(\Omega, Z) = |k_{20(z)}|(-1 + k_{40}(z)\Omega^2)$.

Se investigó la influencia de esta dispersión de la velocidad, la cual como vimos es conocida como trampa parabólica de dispersión

$$\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = k_2(\Omega, Z) = |k_{20(z)}|(-1 + k_{40}(z)\Omega^2)$$

en el espectro de frecuencias Ω , mediante la cual impusimos la condición de que las inestabilidades deberían de desarrollarse solo para valores $\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} < 0$ en analogía con la condición $D_2 < 0$ para el caso con grado de dispersión 2, lo que nos condujo a la condición $k^2 < 0$ para que sea posible el desarrollo de las inestabilidades, las cuales también solo se daban bajo el rango de frecuencias

$$|\Omega| < 2\sqrt{\frac{\rho_0 R(Z)}{D(Z)}}$$

Otra posible condición que se obtuvo, fue la de que las inestabilidades modulacionales deberá desarrollarse en el modelo solo si los valores de $D_4 > 0$.

Por otra parte mediante el estudio de la relación de dispersión (2.28), la condición para la región anómala $k^2 < 0$ y un análisis gráfico, encontramos que cuando $D_4 = 0$, la función $\left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2\right)$ es igual a $\left(\frac{1}{2}D_2\right)$, imponiéndonos así bajo valores arbitrario de D_2 positivos, la región $\left(\Omega^2 \left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2\right) + 2R\rho_0 > 0\right)$, en la que se desarrollan las inestabilidades.

Para el caso en que $D_4 \neq 0$, encontramos mediante el estudio gráfico de las

regiones $\left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2\right)$ y $\left(\Omega^2\left(D_4\Omega^2 - \frac{1}{2}D_2\right) + 2R\rho_0\right)$ el rol crucial que juega la dispersión de orden mayor D_4 en la dinámica de las inestabilidades, al ser esta la responsable del estrechamiento de la región de la inestabilidad modulacional, como observamos en la sección (1.2.2) la dispersión de orden 2 (D_2) anómala era la encargada de la generación de las inestabilidades modulacionales. Así llegamos a la conclusión de que la dispersión de orden 4 funge como reductor de la dispersión de orden 2 al ensanchar las regiones de las inestabilidades como se muestra en la figura (2.2).

Finalmente, cuando se consideraron en particular funciones de dispersión crecientes (o decrecientes) lentamente para D_2 y D_4 en la forma de $D_{2-4} = D_{2-4,0} \exp(\beta Z)$, encontramos que en la dinámica para el espectro de ganancia de la inestabilidad modulacional $G(\Omega)$ tiene una estrecha relación con la región espectral, el valor máximo del coeficiente de amplificación y el valor de β , aquí el valor encargado de la dinamica del espectro de ganancia pasa a ser β en comparación del valor de D_4 mencionado anteriormente, cumpliendo así nuestro segundo y tercer propósito particular en la tesis, el estudio de la dispersión de la velocidad de grupo para el modelo de la ecuación y la obtención de los criterios correspondientes para los cuales se presentan las inestabilidades modulacionales.

También cabe recalcar la importancia de estas dinámicas inducidas por las funciones de dispersión $D_{2-4} = D_{2-4,0} \exp(\beta Z)$ con los efectos reportados

en [8] para la compresión de solitones ópticos mediante una inestabilidad de orden mayor y en [9] con el posible efecto de (Cuantización) observadas en ondas de Rouge, mediante los cuales, estos resultado ayudan a dar una mejor explicación de los efectos reportados en estos trabajos.

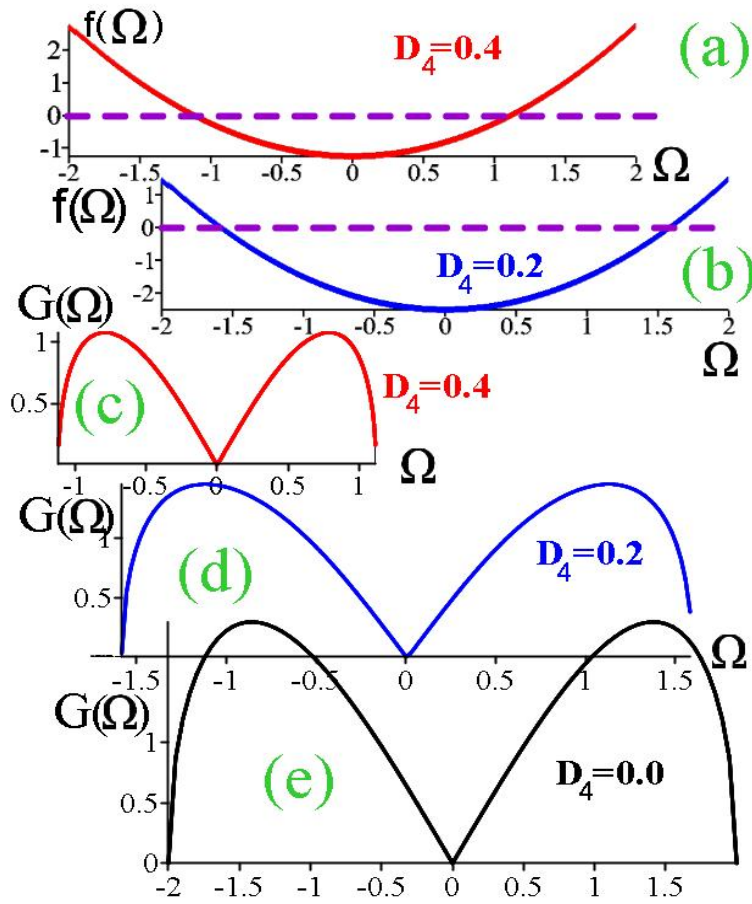


Figura 2.2: En (a) y (b) se muestra la dependencia de la función de $f(D_2, D_4, \Omega)$ con la frecuencia Ω (parábolas roja y azul respectivamente) manteniendo constantes los valores de D_2 y D_4 , en (a) $D_4 = 0,4$ mientras que en (b) toma el valor de $D_4 = 0,2$. La región de la Inestabilidad modulacional se encuentra debajo de la línea punteada. En los apartados (c), (d) y (e) se muestra la dependencia del coeficiente de amplificación $G(\Omega)$ de la inestabilidad modulacional del valor de la dispersión de orden cuatro D_4 , las curvas de color rojo, azul y negro corresponden a valores de $D_4 = 0,4$, $D_4 = 0,2$ y $D_4 = 0,0$ respectivamente.

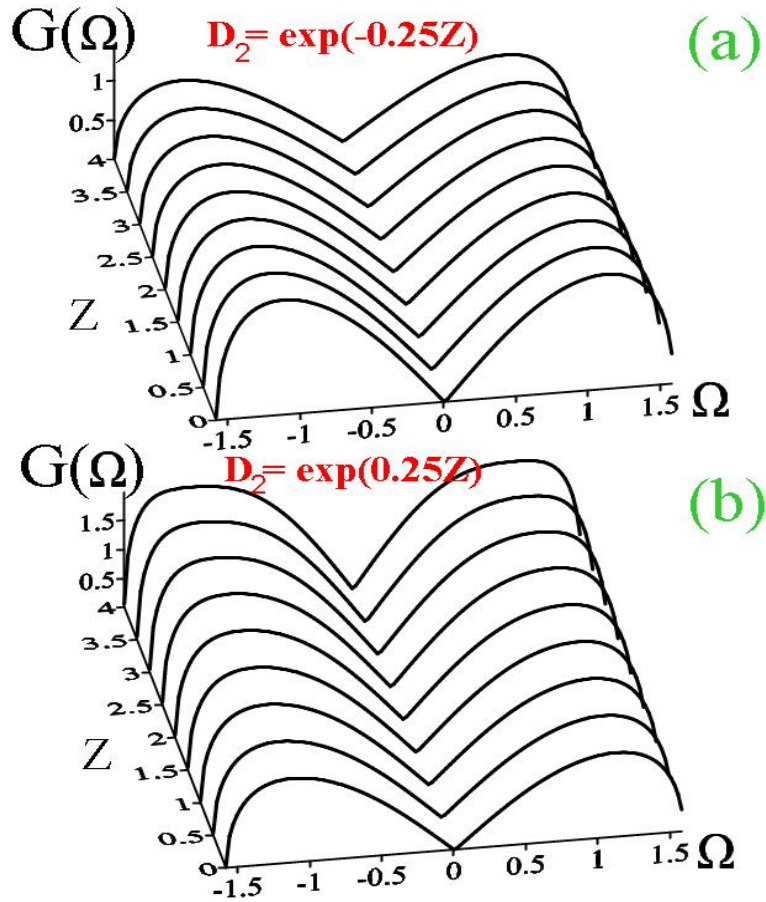


Figura 2.3: La dependencia del coeficiente de amplificación de la inestabilidad modulacional $G(\Omega)$ con los coeficientes de la dispersión $D_2 = D_{2,0} \exp(\beta Z)$ y $D_4 = D_{4,0} \exp(\beta Z)$. En (a) $\beta = -0,25$, En (b) $\beta = 0,25$, para ambos casos se considero los valores arbitrarios de $D_{2,0} = 1$, $D_{4,0} = 0,2$, $R(Z) = 1$ y $\rho_0 = 1$.

Capítulo 3

Conclusiones

3.1. Conclusiones

Estudiamos los antecedentes de las inestabilidades modulacionales, sus orígenes; como estas se desarrollan en algunos sistemas; su contribución a la generación de nuevos fenómenos físicos y algunas de sus aplicaciones .

Mediante este enfoque llegamos a la relación que se encuentra en el estudio de las inestabilidades modulacionales y la ecuación no lineal de Schrödinger, mediante la cual introducimos una metodología basada en el estudio de la relación de dispersión para encontrar las regiones donde se desarrollan las inestabilidades modulacionales.

También estudiamos las características esenciales del problema de Fermi, Pasta, Ulam y su relación con el fenómeno de inestabilidades modulacionales dentro del marco de la ecuación no-lineal de Schrödinger con dispersión de se-

gundo orden, y como mediante estas inestabilidades es posible la elaboración un modelo de generación de solitones.

A partir de todo esto, se desarrollo una teoría para el modelo de la ecuación de Schrödinger no autónoma con cuarto orden de dispersión, en la cual se encontró una buena generalización para el caso con grado de dispersión dos (1.38), ya que pudimos obtener los resultados reportados al aplicar los limites correspondientes para los valores de dispersión variables y no linealidad . Se estudio las regiones y características necesarias para que se desarrollen las inestabilidades modulacionales en este modelo mediante el uso de un análisis gráfico.

Con el fin de estudiar la dinámica de las inestabilidades modulacionales para valores de $D_4 \neq 0$ se utilizaron funciones de crecimiento o decrecimiento de la forma $D_2 = D_{2,0}exp(\beta Z)$ y $D_4 = D_{4,0}exp(\beta Z)$ y la no-linealidad $R(Z)$ manteniéndose prácticamente constante encontrando los resultados sobre la importancia de la dispersión D_4 en el desarrollo de las inestabilidades .

Así también esperamos que este trabajo sea de utilidad para jóvenes investigadores los cuales quieran usar el presente como una fuente de consulta para el fenómeno de inestabilidad modulacional en sistemas no autónomos.

3.2. Pensamientos finales y sugerencias

El tema de las inestabilidades modulacionales es una área en la que aun hay mucho que hacer, durante mi proceso en el desarrollo del trabajo encontré que la literatura carece de una formulación matemática rigurosa al tema, por

lo que pienso yo una formulación matemática rigurosa, mediante el desarrollo de definiciones y teoremas los cuales ayuden al estudio de las condiciones necesarias para modelos mas generales es necesaria y de gran interés para futuras investigaciones.

Por otra parte dentro del modelo trabajado para la ecuación no lineal de Schrödinger no autónoma con cuarto orden de dispersión D_4 y no linealidad. Y la relación que se conoce entre el problema de Fermi-Pasta-Ulam y la ecuación no lineal de Schrödinger no autónomas con segundo orden de dispersión., Lo siguiente seria trabajar en el estudio de las posibles analogías que se encuentran entre el problema de Fermi-Pasta-Ulam y el modelo con cuarto orden de dispersión y comprobar si hay una generación de recurrencia en el modelo.

Bibliografía

[1] N. F. Pilipetskii, A. R. Rustamov, Observation of Self-focusing of Light in Liquid, JETP Letters. 2 (2) (1965) 55.56.

[2] T.B. Benjamin, J.E. Feir, The disintegration of wavetrains on deep water. Part 1: theory, J. Fluid Mech. 27 (1967) 417.430.

[3] L.A. Ostrovskii, Propagation of wave packets and spacetime self-focusing in a nonlinear medium, ZHETF 51 (1966) 1189.1196. Transl. Sov. Phys. JETP, 24, (1967) 797.800.

[4] T. Taniuti, H. Washimi, Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, Phys. Rev. Lett. 21, 209.212 (1968).

[5] P. J. Everitt, M. A. Sooriyabandara, M. Guasoni, P. B. Wigley, C. H. Wei, G. D. McDonald, K. S. Hardman, P. Manju, J. D. Close, C. C. N. Kuhn, S. S. Szigeti, Y. S. Kivshar, N. P. Robins, Observation of a modulational insta-

bility in Bose-Einstein condensates, PHYSICAL REVIEW A 96, 041601(R) (2017) .

[6] A. Hasegawa, Optical Solitons in Fibers, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[7] G.P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, 3rd ed., Academic Press, San Diego, (2001).

[8] M. Erkintalo, K. Hammani, B. Kibler, C. Finot, N. Akhmediev, J.M. Dudley, G. Genty, Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics, Phys. Rev. Lett. 107 (2011) 253901.

[9] T.L. Belyaeva, V.N. Serkin, Nonautonomous Solitons: Applications from Nonlinear Optics to BEC and Hydrodynamics, in: H.E. Schulz (Ed.), Hydrodynamics - Advanced Topics, InTech, Rijeka, Croatia, 2011.

[10] G.B. Whitham, A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian, J. Fluid Mech. 22 (1965) 273-283.

[11] Benjamin, T. B., Feir, J. E. The disintegration of wave-trains on deep water. Part 2: Experiments. J. Fluid Mech, (1967).

[12] V.E. Zakharov, L.A. Ostrovsky. Modulation instability: The beginning. Physica D 238 (2008) 540548.

- [13] V.E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.* 9 (1968) 8694. Transl. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 9 (1968) 190-194.
- [14] A. Hasegawa, Generation of a train of soliton pulses by unduced modulational instability in optical fibers, *Opt. Lett.* 9 (1984) 288-290.
- [15] V.E. Zakharov, V.G. Kharitonov, Instability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.* 9 (1970) 45-49. Transl. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 11 (1970) 747-751.
- [16] J.F. Drake, P.K. Kaw, Y.C. Lee, G. Schmidt, C.S. Liu, M.N. Rosenbluth, Parametric instabilities of electromagnetic waves in plasma, *Phys. Fluids* 17 (1974) 778-785.
- [17] Gurevich, A. V., *Nonlinear Phenomena in the Ionosphere*, Berlin: Springer, (1978).
- [18] Balakrishnan, R. "Soliton propagation in nonuniform media". *Physical Review A.* 32 (2):, (1985), 1144–1149.
- [19] Pitaevskii, L.; Stringari, S, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford, U.K.: Clarendon, (2003).

- [20] Malomed, Boris, "Nonlinear Schrödinger Equations", in Scott, Alwyn (ed.), *Encyclopedia of Nonlinear Science*, New York: Routledge, pp. 639–643 (2005).
- [21] Jared C. Bronski, Vera Mikiyoung Hur, Mathew A. Johnson, Modulation instability in equations of KdV type, *Lecture Notes in Physics* 908:83-133 (2016).
- [22] Bello Jiménez Miguel Angel, Investigación de la extracción de solitones ópticos empleando un NOLM y su aplicación en el estudio del proceso de formación de solitones en fibras ópticas, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica , Tonantzintla, Pue. (2010).
- [23] K. Tai, A. Hasegawa, A. Tomita, Observation of modulational instability in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.* 56 1986 135.
- [24] E. Fermi, J.R. Pasta, and S. Ulam, in *Collected papers of Enrico Fermi*, E. Segre (ed.). University of Chicago Press, Chicago, 2 (1965) 978.
- [25] M.A. Porter, N.J. Zabusky, B. Hu and D.K. Campbell, Fermi, Pasta, Ulam and the Birth of Experimental Mathematics: A numerical experiment that Enrico Fermi, John Pasta, and Stanislaw Ulam reported 54 years ago continues to inspire discovery, *American Scientist*, 97 (2009) 214-221.

[25] N.J. Zabusky, Fermi-Pasta-Ulam, solitons and the fabric of nonlinear and computational science: History, synergetics, and visiometrics, *Chaos* 15 (2005) 015102.

[27] T. Dauxois, M. Peyrard and S. Ruffo, The Fermi Pasta Ulam numerical experiment: history and pedagogical perspectives, *Eur. J. Phys.* 26 (2005) 1-9.

[28] G.V. Simaey, P. Emplit, M. Haelerman, Experimental demonstration of the Fermi-Pasta-Ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave, *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 033902.

[29] D. Pierangeli, M. Flammini, L. Zhang, G. Marcucci, A.J. Agranat, P.G. Grinevich, P.M. Santini, C. Conti, and E. Del Re, Observation of Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou Recurrence and Its Exact Dynamics, *Phys. Rev. X* 8 (2018) 041017.

[30] E.J. Greer, D.M. Patrick, P.G.J. Wigley, J.R. Taylor, Generation of 2 Thz repetition rate pulse trains through induced modulational instability, *Electron. Lett.* 25 (1989) 1246-1248.

[31] S.B. Cavalcanti, J.C. Cressoni, H.R. da Cruz, A.S. Gouveia-Neto, Modulation instability in the region of minimum group-velocity dispersion of single-mode optical fiber via an extended nonlinear Schrödinger equation,

Phys. Rev. A 43 (1991) 6162-6165.

[32] M.K. Soljacic, M. Segev, E. Eugenieva, D.N. Christodoulides, Modulation instability and pattern formation in spatially incoherent light beams, *Science* 290 (2000) 495-498.

[33] M. Erkintalo, K. Hammani, B. Kibler, C. Finot, N. Akhmediev, J.M. Dudley, G. Genty, Higher-order modulation instability in nonlinear fiber optics, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 25390.

[34] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240.

[35] K. Tamilselvan, A. Govindarajan, T. Kanna, M. Lakshmanan, and P. Tchofo-Dinda, Reviving Modulational Instability with Third-Order Dispersion, *arXiv* (2020).

[36] Woo-Pyo Hong, Modulational Instability of the Higher-Order Nonlinear Schrödinger Equation with Fourth-Order Dispersion and Quintic Nonlinear Terms, Department of Electronics Engineering, Catholic University of Dae-gu, Hayang, Gyongsan, Gyungbuk 712-702, South Korea (2006).

[37] A. G. Bulushev, E. M. Dianov, O. G. Okhotnikov, V. N. Serkin, Raman self-frequency shift of the spectrum of femtosecond optical solitons and suppression of this effect in optical fibers and soliton lasers, *JETP Lett.* 54,

(1991) 619-622.

[38] V. N. Serkin, A. Hasegawa, Femtosecond soliton application in nonlinear dispersive traps and soliton dispersion management, proceedings of SPIE - the international Society for Optical Engineering 3927 (2000) 302-313.

[39] E. M. Dianov, A. Ya. Karasik, P. V. Mamyshev, A. M. Prokhorov, V. N. Serkin, M. R. Stelmakh, A. A. Formichev, Stimulated-Raman conversion of multi-soliton pulses in quartz optical fibers, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 41 (1985) 242-244 [JETP Lett. 41 (1985) 294-297].

[40] F. M. Mitschke and L. Mollenauer, Discovery of the soliton self-frequency shift, *Opt. Lett.* 11 (1986) 659-661.

[44] V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, G. H. Corro, M. Agüero Granados, Stimulated Raman self-scattering of femtosecond pulses. I. Solitons and non-soliton regimes of coherent self-scattering, *Quantum Electron.* 33 (4) (2003) 325-330.

[41] V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, G. H. Corro, M. Agüero Granados, Stimulated Raman self-scattering of femtosecond pulses. Part II. The self-compression of Schrodinger solitons in a spectrally inhomogeneous dispersion medium, *Quantum Electronics* 33(5) (2003) 456-459.

[42] F. Poletti, P. Horak, D.J. Richardson, Soliton Spectral Tunneling in Dis-

persion Controlled Holey Fibers, IEEE Photon.Tech. Lett. 20 (2008) 1414-1416.

[43] V.I. Karpman, Influence of high-order dispersion on self-focusing.I. Qualitative investigation, Physics LettersA 160(1991) 531-537.

[44] M. A. Agüero Granados, V. Serkin, Introducción a la Teoría de Solitones, Ediciones y Gráficos Eón, 2021.

[45] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, Phys. Rev. Lett. 31, 125-127 (1973).

Anexos

Guía de Definiciones

Efecto Kerr : Cambio del índice de refracción en un material en respuesta a un campo eléctrico aplicado.

Inestabilidad Modulacional: Fenómeno mediante el cual las desviaciones de una forma de onda periódica se ven reforzadas por la no-linealidad lo que conlleva la generación espectral de bandas laterales y la eventual ruptura de la forma de onda en un tren de pulsos.

Inestabilidad Modulacional de alto orden: La excitación simultánea de múltiples modos de inestabilidad, cada uno asociado a un breather no-lineal (una solución a un determinado sistema no lineal, consistente en una onda que concentra su energía de manera localizada y oscilatoria, en contraposición a la ergodicidad esperada).

Dispersión de la velocidad de grupo (GVD): Característica de un medio dis-

persivo, que se utiliza con frecuencia para determinar como un medio afectara la duraci3n de un pulso 3ptico que viaja a trav3s de el.

Soliton: Termino utilizado para referirse a un paquete de ondas que mantiene su forma mientras se propaga a una velocidad constante.

Soliton 3ptico: Termino utilizado para referirse a cualquier campo 3ptico que no cambia durante su propagaci3n debido a un equilibrio entre los efectos no lineales y lineales en el medio.

Recurrencia de Fermi-Pasta-Ulam: Fen3meno en donde un sistema exhibe un comportamiento casi peri3dico y en el cual despu3s de un tiempo relativamente corto la energ3a retorna al mismo modo que en su estado inicial.

Dispersi3n Raman : Dispersi3n de tipo inel3stico para un fot3n propag3ndose en un medio.

Onda de Stoke: Onda superficial no-lineal y peri3dica en una capa de fluido no viscoso de profundidad constante.

Onda de Rouge: Onda superficial, en la que los vientos, las corriente, los fen3menos no lineales y otras circunstancias hacen que se forme brevemente una ola mucho mas grande que la ola promedio.

Ecuación no-lineal de Schrödinger: Ecuación de campo clásica que surge en el modelado de la propagación de ondas no-lineales.