



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA  
DEL ESTADO DE MÉXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

LA TEORÍA GENERALIZADA DE  
PERTURBACIÓN PARA SOLITONES EN  
POTENCIALES EXTERNOS

TESIS

para obtener el grado de:

**Doctor en Ciencias**  
**(Física)**

PRESENTA:

**Misael Erikson Maguiña Palma**

Directores:

Dr. Máximo Agüero Granados (UAEM)

Dra. Tatyana Belyaeva Leonidovna (UAEM)

Dr. Vladimir Serkin (BUAP)

# Dedicatoria

*Dedico esta tesis a mis padres quienes me dieron vida, educación, apoyo y consejos. A mis maestros quienes nunca desistieron al enseñarme, a ellos que continuaron depositando su confianza en mí. Para ellos es esta dedicatoria de tesis, pues es a ellos a quienes se las debo por su apoyo incondicional.*

# Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a las instituciones que han hecho posible realizar el trabajo de investigación doctoral, por la ayuda económica brindada, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologías (CONACYT); la Universidad Autónoma del Estado de México por la Ayuda y confianza en mi depositada. A mi comité de tutores: Dr. Máximo Agüero Granados (UAEM), Dra. Tatyana Belyaeva Leonidovna (UAEM) y Dr. Vladimir Serkin (BUAP); por su compañía y guía durante todo el camino de la investigación doctoral.

# Resumen

Se estudio la dinámica de interacción de solitones perturbados de la ecuación no lineal de Shrödinger (nonlinear Schrödinger equation-NLSE), basado en la aproximación adiabática de los parámetros de la solución perturbada. La dinámica de un solitón se estudia aplicado dos perturbaciones: la primera con tasa de crecimiento y decrecimiento, la segunda con el potencial de oscilador armónico. En el primer caso de perturbación la amplitud del solitón encontrada varia exponencialmente, en el segundo caso la solución muestra un comportamiento oscilatorio. También se estudia a la dinámica de interacción para dos solitones y las fuerzas entre ellos. Sin perturbación la interacción de dos solitones en fase es atractiva y puede resultarse en formación de un estado ligado, esta solución tiene comportamiento periódico con oscilaciones de la amplitud y velocidad de solitones. Fuera de fase la interacción de solitones es repulsiva, no formando un estado ligado. El potencial de oscilación armónica mantiene los solitones confinados dentro del potencial y evoca su interacción periódica.

En la investigación encontramos la solución analítica del problema de interacción de solitones de la NLSE en los sistemas con pérdidas o ganancias distribuidas. Los resultados analíticos proporcionan un excelente control cualitativo y cuantitativo de los resultados de las simulaciones numéricas conocidas hasta ahora. El resultado no trivial y inesperado consiste en el hecho de que la separación relativa de solitones dependen de las ganancias o

pérdidas de amplificación. Al utilizar la interacción complementaria entre los experimentos informáticos directos y la teoría generalizada de perturbación del solitón adiabático de Karpman-Solov'ev, encontramos fórmulas empíricas notables que describen completamente, cualitativamente y cuantitativamente, el impacto de las pérdidas distribuidas y la ganancia en los escenarios de interacción de los solitones del NLSE.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de Perturbación para Solitones . . . . .	3
1.2. Ecuación no lineal de Schrödinger . . . . .	3
1.2.1. Ecuación no lineal de Schrödinger perturbada . . . . .	4
1.3. La teoría de perturbación . . . . .	5
1.3.1. Introducción al método de dispersión inversa . . . . .	6
1.4. Aproximación adiabática . . . . .	10
<b>Antecedentes</b>	<b>13</b>
<b>Objetivos</b>	<b>14</b>
Objetivo general . . . . .	14
Objetivos específicos . . . . .	14
<b>Hipótesis</b>	<b>15</b>
<b>Métodos</b>	<b>16</b>

<b>Resultados</b>	<b>17</b>
2.1. Solitones en Potenciales Externos . . . . .	17
2.1.1. Dinámica con ganancia y perdida de amplificación . . . . .	17
2.1.2. Dinámica con potencial armónico . . . . .	19
2.1.3. Efecto Raman . . . . .	20
2.2. Dinámica de Interacción de dos Solitones . . . . .	23
2.2.1. Interacción de dos solitones . . . . .	23
2.2.2. La NLSE perturbado para dos solitones . . . . .	24
2.2.3. Condiciones iniciales para la interacción . . . . .	25
2.2.4. Fuerza de interacción sin potencial . . . . .	25
2.2.5. Interacción con ganancia y perdida de amplificación . . . . .	36
2.2.6. Simulación directa por computadora y cálculos analíticos . . . . .	45
2.3. Interacción de Solitones Perturbados . . . . .	61
2.3.1. Dinámica de Interacción de Dos Solitones con Potencial Armónico . . . . .	61
<b>Discusión</b>	<b>65</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>68</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

# Introducción

El solitón es una onda no lineal solitaria con las propiedades de movimiento como partícula elemental. Gracias a sus propiedades, el soliton es una entidad fundamental de la naturaleza. Zabusky y Kruskal introdujeron por primera vez el nombre de solitón para caracterizar las ondas solitarias sin dispersión y que preservan su identidad durante la propagación y después de una colisión [1]. Esta onda solitaria describe una perturbación de la densidad que se propaga con velocidad constante sin deformación, debido a la compensación entre el término no lineal y el término de la dispersión en una ecuación diferencial no lineal. A raíz de estas características definidas, el solitón clásico se consideró como un bit natural ideal de datos.

Los solitones ópticos en fibras presentan un ejemplo asombroso en el que un concepto matemático ha producido un gran impacto en el mundo real de tecnologías [2-6] El uso de solitones ópticos fue propuesto en 1973 por Akira Hasegawa y Fred Tappert, del Laboratorio Bell de la empresa AT&T, para mejorar el rendimiento de las transmisiones en las redes ópticas de telecomunicaciones [7,8]. En 1988 Linn Mollenauer y K. Smith del mismo Laboratorio transmitieron solitones a más de 4.000 km usando el efecto Raman (científico indio que describió una forma de amplificar las señales en una fibra óptica) [9]. En 2001 los solitones encontraron una aplicación práctica con el primer equipo de telecomunicaciones, que los utilizaba para transporte de tráfico real de señales sobre una red comercial [10,11].



Los solitones surgen en sistemas físicos que posean tanto la no linealidad, la dispersión y la difracción o difusión (en tiempo y/o espacio). Así, una variedad de fenómenos físicos está modelada por las ecuaciones diferenciales no lineales, cuyas soluciones se presentan por las ondas no lineales. Los solitones han sido considerados como las soluciones especiales que tienen mayor importancia en la física de fenómenos no lineales. Gracias a las analogías matemáticas, iguales modelos matemáticos se aplican para diferentes sistemas físicos a partir de la hidrodinámica, física de bio-moléculas, plasma hasta la óptica no lineal y las ondas de materia en condensados de Bose-Einstein (Bose-Einstein condensates-BEC).

La observación experimental de las ondas de materia tipo solitones en BEC [12, 13] han atraído una gran atención hacia la dinámica no lineal de las ondas de materia, incluyendo así aspectos como comportamiento de solitones en campos externos electromagnéticos, la influencia de no linealidades de altas ordenes y la inestabilidad por modulación de ondas no lineales.

## 1.1. Teoría de Perturbación para Solitones

En este capítulo se considera la NLSE no integrable exactamente, que se diferencia de la NLSE integrable por un término perturbativo que puede describir efectos de disipación de energética, de interacción con otras ondas no lineales y de la acción de potenciales externos. Si la naturaleza de estos efectos se limita a magnitudes pequeñas en comparación a la evolución ideal de la envolvente, existe una razón por la cual estos términos adicionales a la NLSE pueden ser agrupadas en un término general  $\varepsilon(u)$  que se asume de carácter perturbativo al caso ideal. Se supone que la acción de los términos perturbativos transforma la onda solitaria de tal manera que pueden adaptarse continuamente a los cambios de un medio. El formalismo matemático que se llama la aproximación adiabática para solitones fue desarrollada inicialmente en años 1970 en trabajos de Karpman y Maslov [14, 15].

## 1.2. Ecuación no lineal de Schrödinger

La NLSE es uno de los modelos importantes y “universales” en la ciencia moderna. Tiene su aplicación en muchas ramas de la física y las matemáticas, incluidas la teoría de campos cuánticos no lineales, materia condensada, física de plasma, óptica no lineal, electrónica cuántica, mecánica de fluidos, ondas de agua en el océano, teoría de turbulencia y fase de transmisiones, biofísica y formación de estrellas (ver, por ejemplo, [2–6, 16–20]). Debido a la similitud intrínseca entre la NLSE y la ecuación de (Gross Pitaevskii-GPE) para el campo medio en el modelo de BEC, se usa también en física atómica de temperaturas ultra bajas [21–28].

Las soluciones más conocidas de la NLSE son las ondas solitarias o solitones. Cuya carac-

terística principal como las ondas localizadas es interactuar con otros solitones de forma elástica, dándoles un comportamiento tipo partícula. En 1971 Zakharov y Shabat propusieron un método de la integración de la NLSE [29, 30] en el marco del IST [31–34].

### 1.2.1. Ecuación no lineal de Schrödinger perturbada

La NLSE es una ecuación diferencial parcial compleja muy utilizada en el moldeamiento de fenómenos físicos no lineales, al describir de forma genérica la evolución entre el tiempo y el espacio de un paquete de onda, lentamente modulado y que se propagan en un medio dispersivo, no disipativo (conservativo) y débilmente no lineal [35]. Por lo que se considera una ecuación universal, con áreas de aplicación muy variadas. Consideramos la NLSE perturbada como [14]:

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = i\varepsilon(u). \quad (1.1)$$

La Ec. (1.1) es la base en el presente trabajo: el primer termino de dicha ecuación es conocido como el termino de evolución o propagación, el segundo termino toma en cuenta el fenómeno de difracción, el tercer termino es el responsable de caracterizar la no linealidad, mientras que el ultimo termino  $i\varepsilon$  es un término pequeño considerada como la perturbación.

Buscamos la solución en forma [14]:

$$u(x, t) = \eta(t) \operatorname{sech} \{ \eta(t) [x - q(t)] \} \exp [i\varphi(t) - i\delta(t)x], \quad (1.2)$$

que tiene cuatro parámetros ajustables:  $\eta(t)$  la amplitud,  $q(t)$  la posición del centro de masa,  $\varphi(t)$  la fase y  $\delta(t)$  la velocidad del soliton. En presencia de perturbaciones los parámetros del solitón varían lentamente, con el tiempo causando modificaciones en la forma y velocidad [36]. Estos efectos son estudiados por la teoría de perturbación.

### 1.3. La teoría de perturbación

Históricamente, Kaup [37], Karpman and Maslov [14] crearon la teoría de perturbación para solitones basada directamente en la IST con un parámetro espectral variable. Karpman y Solov'ev aplicaron esta teoría al problema de interacción de solitones en su artículo pionero [15]. El método desarrollado por Kaup, Newell, Karpman, Maslov y Solov'ev [14, 15, 37–39] aborda la perturbación de los datos de dispersión en el problema IST de Zakharov-Shabat [29] para el modelo NLSE debido a la dependencia temporal del parámetro espectral. Los parámetros principales del solitón se vuelven variables en el tiempo o varían a lo largo de la distancia de propagación en las aplicaciones del solitón óptico temporal y espacial [33, 34, 40–43]. Karpman, Maslov y Solov'ev pudieron derivar el sistema de ecuaciones para todos los parámetros de solitones en la llamada aproximación adiabática [14, 15, 39]. En el mismo tiempo se desarrollaron otros métodos de la teoría de perturbación para solitones basados en el principio variacional y las leyes de conservación [4–6, 36, 43–57].

De importancia fundamental para los sistemas de comunicación de alta velocidad es el estudio de las interacciones de solitones en diferentes sistemas de fibra. Como lo demostraron Blow y Doran en su trabajo pionero [58], la absorción de ondas en la fibra conduce a un aumento de la interacción de solitones debido a la considerable superposición de solitones interactuantes. Las pérdidas destruyen la integrabilidad de la NLSE y la estabilidad estructural de los solitones y sus estados ligados [59, 60].

### 1.3.1. Introducción al método de dispersión inversa

Las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de ondas no lineales, tienen la forma:

$$u_t = S[u] + \epsilon R[u], \quad (1.3)$$

donde S y R son operadores no lineales que actúan sobre  $u(x, t)$  y  $\epsilon$  es un parámetro pequeño. La Ec.(1.3) en  $\epsilon = 0$  (ecuación no perturbada) puede resolverse mediante el método de dispersión inversa.

Del sistema de ecuaciones:

$$\hat{L}\psi = \lambda\psi, \quad (1.4)$$

$$\psi_t = \hat{A}\psi, \quad (1.5)$$

la ecuación no perturbada se puede representar en forma [14, 31, 32]

$$i\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0, \quad (1.6)$$

donde  $\hat{L}(u)$ ,  $\hat{A}(u)$  son operadores lineales que dependen de  $u(x, t)$  y actúan en el espacio funcional  $\psi$  (es la auto-función de  $\hat{L}$  correspondiente al valor propio  $\lambda$ ). Estos operadores son no hermiteanos y matriciales. Se pueden escribir de la forma [29, 61].

$$\hat{L} = iP\frac{\partial}{\partial x} + Q(u), \quad hg\hat{A} = M\hat{D} + \hat{C}(u), \quad (1.7)$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

en el caso de la Ec.(1.1) con  $i\varepsilon(u)=0$

$$m_1 = -m_2 = 1, \quad \hat{D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (1.9)$$

Si escribimos la Ec. (1.3) para  $\epsilon = 0$  en forma de la Ec. (1.6), podemos representar para  $\epsilon \neq 0$  en la forma

$$i \frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{A}] = i\epsilon \hat{R}, \quad (1.10)$$

donde  $\hat{R}$  es un operador que actúa en el espacio funcional  $\psi$ . Para la NLSE, tenemos, de acuerdo con las Ecs. (1.7) a (1.9)

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & R^*[u] \\ -R[u] & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

consideramos el problema de los valores propios del operador  $\hat{L}$  que satisface la Ec. (1.10):

$$\hat{L}\psi(x, t) = \lambda(t)\psi(x, t). \quad (1.12)$$

Suponemos que existe también una solución de la ecuación  $\hat{L}^*\tilde{\psi} = \lambda^*\tilde{\psi}$ , donde  $\hat{L}^*$  es el operador conjugado de Hermite con respecto al producto escalar  $\hat{L}^*(\psi, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \varphi dx$  (en los casos matriciales  $\psi\varphi = \sum_r \psi_r \varphi_r$ ). Ahora diferenciamos la Ec. (1.12) con respecto al tiempo. Usando la Ec. (1.10) obtenemos

$$(\hat{L} - \lambda)(\psi_t + i\hat{A}\psi) = -\epsilon\hat{R}\psi + \lambda_t\psi, \quad (1.13)$$

para el espectro continuo  $\lambda_t = 0$ . Y para el espectro discreto tomamos el producto escalar de la Ec. (1.13) con  $\tilde{\psi}$  (desde la izquierda). En ese caso

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\epsilon(\tilde{\psi}, \hat{R}[u]\psi)}{(\tilde{\psi}, \psi)}, \quad (1.14)$$

(asumimos que  $(\tilde{\psi}, \psi) \neq 0$ ). En particular, obtenemos  $\lambda_t = 0$  cuando  $\epsilon = 0$  es un resultado conocido que ocurre cuando la ecuación de evolución se puede escribir como en la Ec. (1.6). En este último caso, los valores propios del espectro discreto determinan las amplitudes de los solitones que son formados a partir del pulso de onda inicial. Un positivo  $\lambda = \delta^2$  corresponde al espectro continuo donde cada valor propio es degenerado dos veces. Las funciones de Jost se pueden definir de las funciones propias  $f$  y  $g$  del operador  $\hat{L}$  que tienen la forma asintótica.

$$f(x, \delta) \rightarrow \exp(i\delta x), \quad x \rightarrow \infty; \quad g(x, \delta) \rightarrow \exp(-i\delta x), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (1.15)$$

luego podemos escribir la función  $f$  de la forma

$$f(x, \delta) = \exp(i\delta x) + \int_x^\infty K(x, y) \exp(i\delta y) dy, \quad (1.16)$$

donde  $K$  es un núcleo real, mientras

$$-2 \frac{dK(x, x)}{dx} = u(x), \quad (1.17)$$

la Ec. (1.12) tiene, además de  $f$  y  $g$ , las funciones propias  $f^*(x, \delta) = f(x, -\delta)$  y  $g^*(x, \delta) = g(x, -\delta)$  (con  $\delta$  real) y si  $\delta \neq 0$  entonces  $f^*$  y  $g^*$  son linealmente independientes de  $f$  y  $g$ , respectivamente. En este caso

$$g(x, \delta) = a(\delta)f^*(x, \delta) + b(\delta)f(x, \delta), \quad (1.18)$$

$$f(x, \delta) = a(\delta)g^*(x, \delta) - b^*(\delta)g(x, \delta), \quad (1.19)$$

$$|a(\delta)|^2 = 1 + |b(\delta)|, \quad a^*(\delta) = a(-\delta), \quad b^*(\delta) = b(-\delta), \quad (1.20)$$

donde  $a(\delta)$  y  $b(\delta)$  son coeficientes que juegan un papel fundamental en lo que sigue.

Finalmente notamos que

$$a(\delta) = \frac{i}{2\delta} \left[ f(x, \delta) \frac{\partial g(x, \delta)}{\partial x} - g(x, \delta) \frac{\partial f(x, \delta)}{\partial x} \right]. \quad (1.21)$$

Hasta ahora hemos considerado las funciones  $f$  y  $g$  para  $\delta$  real. Podemos continuar analíticamente en el semiplano superior donde no tienen singularidades mientras que

$$f(x, \delta) \rightarrow \exp(i\delta x), \quad g(x, \delta) \rightarrow \exp(-i\delta x), \quad (|\delta| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \delta \geq 0), \quad (1.22)$$

en la teoría de dispersión se muestran los coeficientes de la matriz de dispersión  $a(\delta)$  y  $b(\delta)$  para  $\delta$  real, y las cantidades que caracterizan el espectro discreto,  $\lambda_t = -\eta_r^2$ ,  $a'_r$ ,  $\rho_r$ , determina de forma única el núcleo  $K(x, y)$  y, por lo tanto, el potencial  $u(x)$  de la Ec. (1.17). El núcleo  $K$  satisface la ecuación de Gel'fand-Levitan [14, 62, 63]:

$$K(x, y; t) + F(x + y; t) + \int_x^\infty K(x, y'; t)F(y + y'; t) dy' = 0, \quad (1.23)$$

donde  $y > x$ , y

$$F(x; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{b(\delta, t)}{a(\delta, t)} \exp(i\delta x) d\delta - i \sum_{r=1}^n \frac{\rho_r(t)}{a'_r(t)} \exp[-\eta_r(t)x], \quad (1.24)$$

también es importante que los  $\lambda$  reales pertenezcan al espectro continuo, los complejos al discreto. Las funciones de Jost para  $\lambda$  reales son definidas de la siguiente manera:

$$f(x, \lambda) = (f_1, f_2) \rightarrow (0, 1) \exp(i\lambda x), \quad x \rightarrow \infty, \quad (1.25)$$

$$g(x, \lambda) = (g_1, g_2) \rightarrow (0, 1) \exp(-i\lambda x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (1.26)$$

Mientras que  $\text{Im}(\lambda) = 0$ , tenemos

$$g(x, \lambda) = a(\lambda)\bar{f}(x, \lambda) + b(\lambda)f(x, \lambda), \quad (1.27)$$

$$f(x, \lambda) = -a(\lambda)\bar{g}(x, \lambda) + b^*(\lambda)g(x, \lambda), \quad (1.28)$$

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1, \quad (1.29)$$

$$a(\lambda) = g_1(x, \lambda)f_2(x, \lambda) - g_2(x, \lambda)f_1(x, \lambda). \quad (1.30)$$



El método de derivación es bastante general y puede aplicarse también a otras formas de la Ec. (1.3) que se puede resolver por el método de la dispersión inversa en ausencia de perturbaciones. Las siguientes ecuaciones son validas para la NLSE [14]:

$$\frac{\partial a(\lambda, t)}{\partial t} = i \epsilon [a(\lambda, t)\bar{\alpha}(\lambda, \lambda; t) + b(\lambda, t)\alpha(\lambda, \lambda; t)], \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial b(\lambda, t)}{\partial t} = i h(\lambda)b(\lambda, t) + i \epsilon [a(\lambda, t)\alpha^*(\lambda, \lambda; t) - b(\lambda, t)\bar{\alpha}(\lambda, \lambda; t)], \quad (1.32)$$

donde

$$\alpha(\lambda, \lambda'; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(x, \lambda; t) \hat{R}[u(x, t)] f(x, \lambda'; t) dx, \quad (1.33)$$

$$\bar{\alpha}(\lambda, \lambda'; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{f}}^*(x, \lambda; t) \hat{R}[u(x, t)] f(x, \lambda'; t) dx, \quad (1.34)$$

y

$$h(\lambda) = -2\lambda^2. \quad (1.35)$$

Luego podemos escribir el sistema de ecuaciones.

$$\frac{d\rho_r}{dt} = ih(\zeta_r)\rho_r + \frac{i\epsilon\rho_r}{a'_r} \frac{d}{d\lambda} [\rho_r\alpha(\lambda, \zeta_r) - \beta(\lambda, \zeta_r)]_{\lambda=\zeta_r}, \quad (1.36)$$

$$\beta(\lambda, \lambda'; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}^*(x, \lambda; t) \hat{R}[u(x, t)] f(x, \lambda'; t) dx, \quad (1.37)$$

donde  $\rho$  y  $\beta$  son coeficientes dependientes del tiempo de la función de Jost, las Ecs. (1.36) y (1.37) nos ayudaran a definir las ecuaciones diferenciales para la aproximación de parámetros del soliton.

## 1.4. Aproximación adiabática

En los trabajos de Karpman, Maslov y Solov'ev [14, 15] la teoria de perturbación se desarrolló en la aproximación adiabática, representado uno de los enfoques mas universales

para encontrar soluciones tipo solitones para los sistemas no lineales perturbados. La idea original de Karpman y Solov'ev consideraba la interacción entre solitones como una deformación lenta de los parámetros (amplitud, posición, fase y velocidad). Basado en la teoría de dispersión inversa ellos encontraron la dependencia temporal de los parámetros del anzats Ec.(1.2). Sustituyendo la Ec. (1.7) en Ec. (1.12) encontramos las funciones y coeficientes de Jost:

$$f(x, \lambda) = \frac{\exp(i\lambda z/2\nu + i\lambda t)}{\lambda - u + i\nu} \begin{pmatrix} \nu \operatorname{sech} z \exp(-iuz/\nu - i\delta) \\ \lambda - u + i\nu \tanh z \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

$$g(x, \lambda) = a(\lambda)\bar{f}(x, \lambda), \quad a(\lambda) = (\lambda - u - i\nu)/(\lambda - u + i\nu), \quad b(\lambda) = 0. \quad (1.39)$$

El espectro discreto consiste en un único valor propio:

$$\lambda = \xi \equiv u + i\nu, \quad (1.40)$$

se puede verificar que las funciones  $f(x, \lambda)$  y  $g(x, \lambda)$  para  $\lambda = \zeta$  son proporcionales entre sí:  $g(x, \zeta) = \rho f(x, \zeta)$ ,

$$\rho = i \exp(i\delta - 2i\zeta\xi), \quad (1.41)$$

para  $\zeta_t = \zeta$ ,  $\rho_t = \rho$  las Ecs. (1.14) y (1.36), considerando  $z = \eta(t)[x - q(t)]$  obtenemos:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) u^*(z) dz, \quad (1.42)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{\eta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \tanh z u^*(z) dz, \quad (1.43)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\delta + \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) z u^*(z) dz, \quad (1.44)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) [1 - z \tanh z] u^*(z) dz + \frac{1}{2} (\eta^2 - \delta^2) + q \frac{d\delta}{dt}, \quad (1.45)$$

las Ecs. (1.42) a (1.45) revelan que, dependiendo de la forma funcional de las perturbaciones, las características de las coordenadas colectivas del perfil del soliton no perturbado Ec. (1.2) se pueden perder, como por ejemplo la invariancia del corrimiento de frecuencia  $\delta$ , de la amplitud  $\eta$  y del ancho. Efectos adicionales también pueden emerger, tales como fluctuaciones en la posición del soliton debido a la dependencia en la evolución del centroide  $q$  sobre el  $\delta$  modificado.

En la aproximación adiabática considerada aquí, descuidamos el cambio en la forma del solitón y el crecimiento de la “cola” como resultado de la perturbación. Estos efectos están determinados por la desviación de los coeficientes  $a(\lambda, t)$ ,  $b(\lambda, t)$  de sus valores “no reflectantes” Ec. (1.39). A medida que estas desviaciones crecen, la onda difiere cada vez más de un solitón, de modo que la validez de la aproximación adiabática se viola cuando pasa el tiempo [14].

# Antecedentes

Uno de los problemas más significativos en la teoría de ondas no lineales es la búsqueda de las soluciones exactas de las ecuaciones no lineales. En este sentido el descubrimiento en 1967 del método exacto de integración de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) conocido como el Problema Inverso de Dispersión (inverse scattering transform - IST) por Gardner, Green, Kruskal y Miura [31] ha jugado un papel revolucionario en física y matemáticas. En 1973 Zakharov y Shabat [29] aplicando estas ideas, desarrollaron el IST para la ecuación no lineal de Schrödinger (nonlinear Schrödinger equation-NLSE)

$$iu_t(x, t) + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + R_2 |u|^2 \right] u(x, t) = 0 \quad (1.46)$$

Durante la primera mitad de los años setenta del siglo 20 fue encontrado un gran número de ecuaciones de evolución no lineales que son integrables exactamente y presentan soluciones solitónicas: la ecuación de KdV, la ecuación de Boussinesq, la NLSE, la ecuación sin-Gordon, etc. [33]. Así mismo fueron desarrollados diferentes métodos para encontrar soluciones exactas de estas ecuaciones: el IST, las transformaciones de Bäcklund, el método de Hirota, etc. [64, 65]. Sin embargo, la mayoría de ecuaciones no lineales que tienen aplicaciones físicas no son integrables. Para estos casos se desarrollaron métodos aproximados, en particular, los métodos de teoría de perturbación para solitones [14, 66, 67].

# Objetivos

## Objetivo general

Investigación teórica de la dinámica de solitones, fundamentado en la solución de la ecuación no lineal de Schrödinger con potenciales externos.

## Objetivos específicos

1. Estudiar los métodos de solución de la ecuación no lineal de Schrödinger en medios no lineales y dispersivos.
2. Aplicar la teoría de perturbación en las soluciones localizados tipo solitones para la ecuación no lineal de Schrödinger bajo influencia de potenciales externos.
3. Investigar la dinámica e interacción de solitones con ganancia y pérdida de amplificación.
4. Estudio y aplicación de los métodos gráficos para presentar los resultados obtenidos.

# Hipótesis

Las ecuaciones no lineales con no linealidades de las órdenes altas (mayores de tres) se estudian en los últimos años muy intensivamente para describir la propagación de pulsos ópticos de femtosegundos en fibras mono modas y mantenimiento de condensados de Bose-Einstein. El lugar especial entre ellas ocupa los modelos no autónomos que los que se toman en la cuenta potenciales externos y medios variables. Si se puede encontrar las condiciones que permitan la existencia de soluciones solitónicas, en este caso estos modelos pueden tener amplias aplicaciones en física y tecnología. El trabajo presente está enfocado al desarrollo y aplicación de los métodos matemáticos para estudiar la ecuación no lineal de Schrödinger generalizada en potenciales externos.

# Métodos

Uno de los logros más notables que se han conseguido en la segunda mitad del siglo XX y que además ilustra con claridad la unidad subyacente de las Matemáticas, es la Teoría de Solitones. El gran impacto para analizar dinámica de los sistemas físicos no lineales tiene los métodos aproximados, y en particular, la teoría de perturbación para solitones [14, 36, 66, 67] [15-17,25]. Este método permitió encontrar las soluciones de tipo solitón para las ecuaciones no lineales no integrables, para los cuales no se aplican métodos analíticos estandar.

Los estudios incluyen:

1. Aprendizaje de la física necesaria para el entendimiento del fenómeno solitón.
2. Selección del medio no lineal bajo influencias externas y tipos de estructuras solitónicas.
3. Desarrollo de un aparato matemático basando en la teoría de perturbación para solitones.
4. Desarrollo de un simulador con cálculos numéricos para visualizar los resultados.

# Resultados

## 2.1. Solitones en Potenciales Externos

Las estructuras no lineales como los solitones son ondas solitarias que no se dispersan, conservando su estructura y forma a medida que se propagan por un medio no lineal y dispersivo. Los solitones tienen aplicaciones fundamentales en la ciencia y tecnología, como en fibras ópticas, pulsos ópticos, materia condensada, física de plasma, etc. [3, 5, 27]. El modelo no lineal más aplicado sigue siendo la NLSE [27] y el estudio de las perturbaciones externas a la dinámica de solitones sigue siendo el problema de interés científico y tecnológico.

La NLSE bajo ciertas condiciones tiene soluciones solitónicas [3, 17]. Enfocados en la búsqueda de soluciones tipo solitónicas de la NLSE perturbada con potenciales externos, utilizaremos el método de aproximación adiabática.

### 2.1.1. Dinámica con ganancia y pérdida de amplificación

La perturbación  $i\varepsilon(u) = i\gamma(t)u$  en la Ec.(1.2), representa la ganancia y pérdida de amplificación de la solución  $u(x, t)$  [14]. Los parámetros son obtenidos de las Ecs.(1.42)-



(1.45)

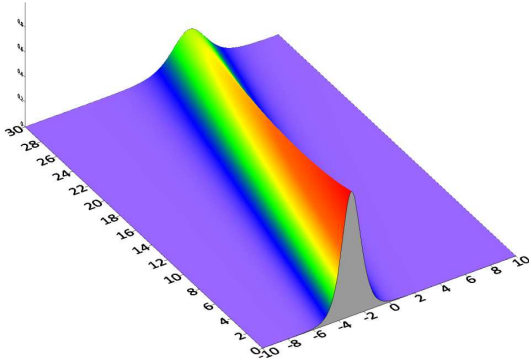
$$\eta(t) = \eta_0 \exp\left(\int_0^t 2\gamma(t') dt'\right), \quad \delta(t) = \nu_0, \quad q(t) = -\nu_0 t + x_0, \quad (2.47)$$

$$\varphi(t) = \frac{\eta_0^2}{2} \int_0^t \left[\exp\left(\int_0^{t'} 4\gamma(t'') dt''\right)\right] dt' - \frac{1}{2}\nu_0^2 t + \nu_0 x_0. \quad (2.48)$$

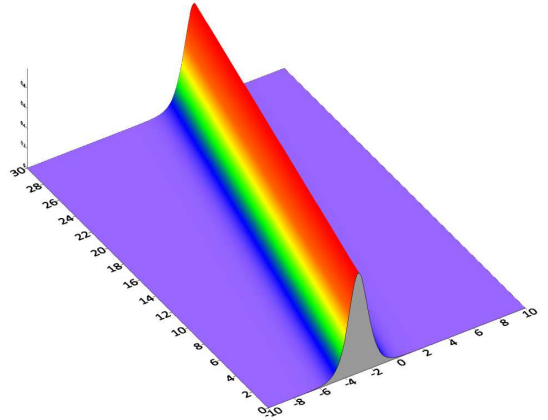
Considerando a  $\gamma(t) = \gamma_0$  una constante, los parámetros de la Ec.(1.2) son.

$$\eta(t) = \eta_0 \exp(2\gamma_0 t), \quad \delta(t) = \nu_0, \quad q(t) = -\nu_0 t + x_0, \quad (2.49)$$

$$\varphi(t) = \frac{\eta_0^2}{8\gamma_0} [\exp(4\gamma_0 t) - 1] - \frac{1}{2}\nu_0^2 t + \nu_0 x_0. \quad (2.50)$$



**Figura 2.1:** La intensidad de soliton, con los parámetros iniciales:  $\eta_0 = 1$ ,  $\gamma = -0.01$ ,  $q_0 = -3$  y  $\delta_0 = -0.2$



**Figura 2.2:** La intensidad de soliton, con los parámetros iniciales:  $\eta_0 = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $q_0 = -3$  y  $\delta_0 = -0.2$

La Figura 2.1 muestra que la amplitud de la solución varía de forma exponencial, se reduce (en caso de  $\gamma_0$  negativa), aumenta (en caso de  $\gamma_0$  positiva). La anchura del soliton tiene comportamiento inverso de la amplitud, la integral

$$\int |u|^2 dz = \eta_0 \exp(2t\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2 z dz = 2\eta_0 \exp(2t\gamma), \quad (2.51)$$

en el caso  $\gamma_0 = 0$  es invariante como se ve en Fig. 2.2 y de variación exponencial en el caso  $\gamma_0 \neq 0$  Fig. 2.1.

### 2.1.2. Dinámica con potencial armónico

Considerado en la Ec.(1.2), el potencial de oscilador armónico como la perturbación  $i\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 u$  [68], obtenemos las siguientes relaciones para los parámetros del soliton de las Ecs.(1.42) - (1.45).

$$\frac{d\eta}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = -\delta, \quad (2.52)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \Omega^2 q, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2). \quad (2.53)$$

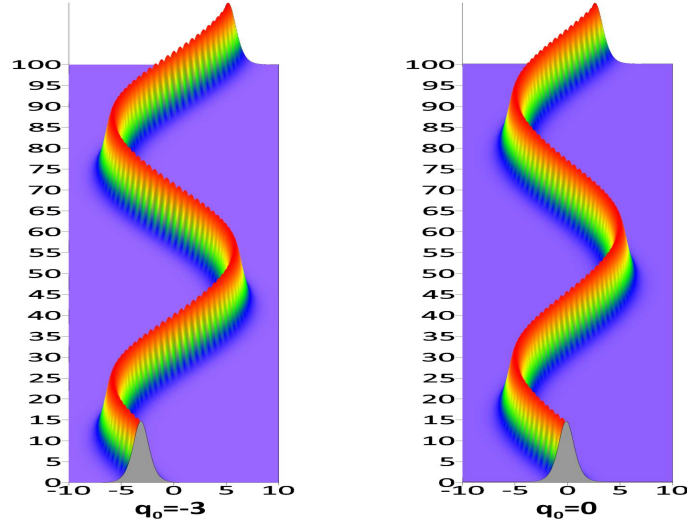
De estas relaciones obtenemos las ecuaciones para la posición de centro de masa y velocidad en forma de oscilador armónico

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\Omega^2 q, \quad \frac{d^2 \delta}{dt^2} = -\Omega^2 \delta, \quad (2.54)$$

que tiene las soluciones

$$q(t) = q_0 \text{Cos}(\Omega t) - \frac{\delta_0}{\Omega} \text{Sin}(\Omega t), \quad (2.55)$$

$$\delta(t) = q_0 \Omega \text{Sin}(\Omega t) - \delta_0 \text{Cos}(\Omega t), \quad (2.56)$$



**Figura 2.3:** Dinámica de la NLE en un potencial armónico con  $\Omega = 0.1$ , amplitud  $\eta = 1$ , velocidad  $\delta_0 = 0.5$  y  $0$ , posición inicial  $q_0 = -3$  y  $0$

La Figura 2.3 muestra la dinámica de un soliton en la trampa parabólica. oscilando de forma cíclica durante todo su desplazamiento y delimitado por el potencial armónico.

La integral

$$\int |u|^2 dz = \eta_0 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2 z dz = 2\eta_0, \quad (2.57)$$

es invariante en todo su desplazamiento.

### 2.1.3. Efecto Raman

Es el efecto dominante de orden superior en los solitones ópticos. Si la luz monocromática viaja en una fibra óptica, emite una luz con una frecuencia más baja debido a la dispersión inelástica de los átomos en la fibra. Este efecto descubierto por la C.V. Raman en (1928). Si un solitón es muy ajustado, su espectro es muy amplio, es decir, los componentes de la frecuencia más alta del solitón transfieren continuamente energía a sus componentes de frecuencia más baja a través del efecto Raman, y esto lleva a la

reducción de la frecuencia del solitón. Este fenómeno fue observado por primera vez por Mitschke y Mollenauer (1986), y explicado teóricamente por Gordon, Hasegawa y Kodama (1987) [36, 69, 70]. La ecuación modelo (2.58) que incluye solo el efecto Raman es:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = \varepsilon \kappa u \frac{\partial}{\partial x} |u|^2, \quad (2.58)$$

aquí  $\kappa$  es real y positivo. Representa el efecto de propagación de un solitón. Dado que un solitón se puede caracterizar por la amplitud  $\eta$  y la velocidad  $\delta$  en la Ec. (1.2), el efecto de los términos de orden superior en la propagación se pueden estudiar mediante la evaluación de la variación de la amplitud  $\eta$  y  $\delta$  debido a estos términos. La conservación de la energía y el momento (flujo de energía) son útiles para este propósito. Al escribir el término de orden superior como  $h$ , la conservación de energía es

$$\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (hu^* - h^*u) dx, \quad (2.59)$$

y la conservación del momento

$$\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial x} - u^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( h \frac{\partial u^*}{\partial x} + h^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx. \quad (2.60)$$

Sustituyendo el término de orden superior

$$h = \varepsilon \kappa u \frac{\partial}{\partial t} |u|^2, \quad (2.61)$$

en (2.59) y (2.60), obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial x} - u^* \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \varepsilon \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} |u|^2 \right)^2 dx, \quad (2.63)$$

a partir de las Ecs. (2.62) y (2.63), calculamos los parámetros para el soliton  $\eta$  y  $\delta$  mediante el uso de la perturbación basada en el supuesto cuasi-estacionario. Mediante el uso de (1.2),

llevan a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \text{sech}^2 [\eta(x - q)] dx = \frac{2\partial\eta}{\partial t} = 0, \quad (2.64)$$

obtenemos

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0, \quad (2.65)$$

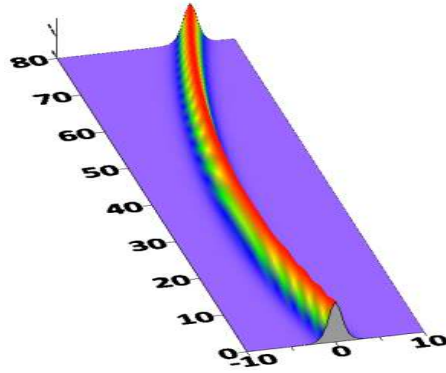
y

$$\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} (u \frac{\partial u^*}{\partial x} - u^* \frac{\partial u}{\partial x}) dx = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} 2i \delta \eta^2 \text{sech}^2 [\eta(x - q)] dx = -2\eta \frac{\partial\delta}{\partial t}, \quad (2.66)$$

$$\varepsilon \kappa \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial}{\partial x} |u|^2)^2 dx = \varepsilon \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -2\eta^3 \text{sech}^2 [\eta(x - q)] \tanh [\eta(x - q)] \right\}^2 dx = \frac{16}{15} \varepsilon \kappa \eta^5, \quad (2.67)$$

Tenemos que

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{-8}{15} \varepsilon \kappa \eta^4. \quad (2.68)$$



**Figura 2.4:** Efecto Raman, con los parámetros iniciales: amplitud  $\eta_0 = 1$ , velocidad  $\delta_0=0.15$  y  $\varepsilon \kappa = 0.01$ .

Las expresiones muestran que la amplitud no se modifica, pero se genera un cambio de velocidad. Causando que la dispersión de orden superior no modifique los parámetros del soliton Fig. 2.4.

## 2.2. Dinámica de Interacción de dos Solitones

Como ya se menciona en capítulos anteriores, la NLSE posee soluciones solitónicas que mantienen su velocidad y forma sin alteración [3, 17, 71, 72]. En un sistema perturbado los solitones no pueden propagarse de modo estacionario, y su forma puede distorsionarse durante el tiempo. La teoría de perturbación para solitones en la NLSE fue estudiada por Karpman y Maslov [14], basado en la IST de Zakharov y Shabat [29] con un parámetro espectral variable. También se aplicó al problema de interacción del solitón por Karpman y Solov'ev [15]. El método desarrollado trata la perturbación de los datos de dispersión en el problema IST para la NLSE. Debido a la dependencia temporal del parámetro espectral, los parámetros del solitón son dependientes del tiempo (en aplicaciones ópticas, variando a lo largo de su propagación), Karpman, Maslov y Solov'ev pudieron derivar el sistema de ecuaciones para los parámetros del solitón mediante la aproximación adiabática. El progreso de la teoría de perturbación para solitones ha sido proporcionado y estimulado por conceptos generales de control de la transmisión de solitón administradas por la dispersión [5, 6, 47, 54]. Es necesario resaltar que los modelos NLSE generalizados, en muchos casos, han estado ligados a conceptos de solitones no autónomos [73–76]. En el capítulo analizaremos analíticamente la interacción de dos solitones en los sistemas con ganancias y pérdidas, usando la teoría de perturbación del solitón de Karpman, Maslov y Solov'ev.

### 2.2.1. Interacción de dos solitones

La idea original de Karpman y Solov'ev era considerar la interacción entre solitones como una deformación lenta de los parámetros (adiabática) del solitón, en la que solo se debe tener en cuenta la interacción del vecino más cercano. En general, el método de

Karpman y Solov'ev es aplicable para analizar la dinámica de interacción de solitones en todos los modelos perturbados. La principal restricción es que las ecuaciones no perturbadas deben ser resueltas exactamente por el método IST. En realidad, este descubrimiento ha abierto una nueva era en la física y las matemáticas aplicadas a los solitones. Bastará con mencionar que varios métodos de perturbación en la teoría del solitón, a saber, el método variacional de Bonderson-Lisak-Anderson usa el formalismo de Lagrange [44, 48] y el método original de Gordon [47], nos llevan a los mismos resultados.

Para estudiar la interacción de solitones se busca la solución de la Ec. 1.1, como la superposición lineal de dos solitones individuales

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t). \quad (2.69)$$

Esta ecuación tiene la solución general d'Alembert, donde  $u_1$  y  $u_2$  son funciones de onda arbitrarias que representan la propagación de derecha e izquierda respectivamente.

$$u_{1,2}(x, t) = \eta_{1,2}(t) \operatorname{sech} [\eta_{1,2}(t)(x - q_{1,2}(t))] \exp [i\varphi_{1,2}(t) - i\delta_{1,2}(t)x]. \quad (2.70)$$

### 2.2.2. La NLSE perturbado para dos solitones

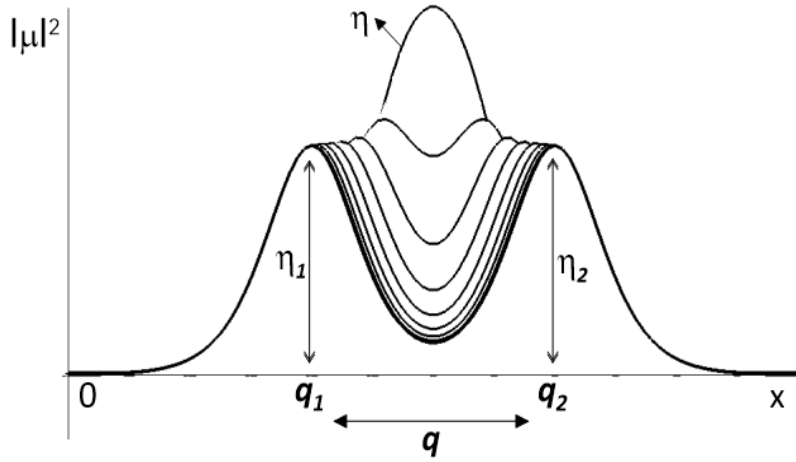
Al sustituir la Ec.(2.69) en la Ec.(1.1) obtenemos el sistema de dos NLSE perturbadas:

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + |u_1|^2 u_1 = i\xi(u_1) - 2|u_1|^2 u_2 - u_1^2 u_2^*, \quad (2.71)$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + |u_2|^2 u_2 = i\xi(u_2) - 2|u_2|^2 u_1 - u_2^2 u_1^*, \quad (2.72)$$

donde los términos en el lado derecho describen la interacción no lineal de dos solitones.

### 2.2.3. Condiciones iniciales para la interacción



**Figura 2.5:** Condiciones de Interacción de Solitones

Definimos el parámetro de separación de solitones como  $q = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)$ , la amplitud promedio  $\eta = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1)$ , las diferencias de amplitudes  $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$ , velocidades  $\delta = \delta_2 - \delta_1$  y fases  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Asumimos que los solitones tienen una separación bastante pequeña ( $q_2 > q_1$ ) y tienen aproximadamente las mismas velocidades y amplitudes (ver figura 2.5).

$$|\Delta\eta q| \ll 1 \ll \eta q, \quad |\varphi q| \ll 1. \quad (2.73)$$

### 2.2.4. Fuerza de interacción sin potencial

Considerando las Ecs.(2.71) y (2.72) en las condiciones (2.73), y la perturbación externa  $i\xi(u) = 0$ , escribimos los términos de la interacción como una perturbación:

$$\varepsilon(u_m) = i \left( 2 |u_m|^2 u_n + u_m^2 u_n^* \right), \text{ donde } m, n = 1, 2, m \neq n.$$

Calculamos  $\varepsilon(u_1)u_1^*$  asumiendo que los solitones se desplazan con una misma velocidad ( $\Delta\delta = 0$ ):

$$\varepsilon(u_1)u_1^* = \eta_1^3 \eta_2 \operatorname{sech}^3 [\eta_1(x - q_1)] \operatorname{sech} [\eta_2(x - q_2)] (2 \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \quad (2.74)$$



Teniendo en la cuenta las suposiciones establecidas en (2.73), escribimos

$$\eta_1(x - q_1) = \eta(x - q_1) - \frac{1}{2}\Delta\eta(x - q_1), \quad (2.75)$$

Entonces bajo nuestra suposición  $|\Delta\eta q| \ll 1$  en (2.73),  $\eta_1(x - q_1)$  y  $\eta_2(x - q_1)$  en (2.75) pueden ser aproximados por  $\eta(x - q_1)$ . La perturbación para el segundo soliton se puede obtener de similar manera.

Usando notación  $x = \frac{z}{\eta} + q_m$ , obtenemos las partes imaginarias y reales de las perturbaciones:

$$Im [\varepsilon(u_m)u_m^*] = (-1)^m 3\eta^4 \sec h^3(z) \sec h(z - 2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.76)$$

$$Re [\varepsilon(u_m)u_m^*] = (-1)^m \eta^4 \sec h^3(z) \sec h(z - 2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.77)$$

donde  $m = 1, 2$ .

Mediante las Ecs.(1.42)-(1.45), obtenemos el sistema de las ecuaciones para los parámetros de dos solitones Ec.(2.70):

$$\frac{d\eta_k}{dt} = (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.78)$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} = (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.79)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = -\delta_k - 2\eta \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.80)$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = 6\eta^2 \exp(-2\eta q) \cos \varphi + 2\eta \delta \exp(-2\eta q) \sin \varphi + \frac{1}{2}(\eta_k^2 + \delta_k^2), \quad (2.81)$$

donde  $k=1,2$ .

De esta sistema de ecuaciones, se puede derivar el sistema de ecuaciones para los paráme-

tros promedios y diferencias definidos anteriormente:

$$\frac{d\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.82)$$

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.83)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\Delta\delta, \quad (2.84)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta\Delta\eta. \quad (2.85)$$

Ahora vamos a definir una función  $Y = \Delta\delta + i\Delta\eta$ , para la cual, usando las Ecs.(2.82)-(2.85), obtenemos

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\Delta\delta}{dt} + i\frac{d\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi), \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dt^2} &= 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \frac{d(-2\eta q + i\varphi)}{dt}, \\ &= \frac{dY}{dt} (\eta Y), \end{aligned} \quad (2.87)$$

de donde

$$\frac{d^2Y}{dt^2} - \frac{\eta}{2} \frac{dY^2}{dt} = 0. \quad (2.88)$$

Desarrollando Ecs. (2.86)-(2.88) obtenemos la integral de movimiento

$$Y^2 - 16\eta^2 \exp(-2\eta q + i\varphi) = C^2, \quad (2.89)$$

donde  $C$  es una constante compleja.

Las Ecs. (2.82) y (2.83), se pueden reducir a una sola ecuación

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\eta}{2}(Y^2 - C^2), \quad (2.90)$$

la cual podemos integrar

$$\int \frac{dY}{Y^2 - C^2} = \frac{1}{2}\eta t, \quad (2.91)$$

$$\int \frac{dY}{Y^2 - C^2} = -\frac{1}{C} \operatorname{arctanh} \left( \frac{Y}{C} \right). \quad (2.92)$$

Finalmente obtenemos

$$Y = -C \tanh \left( \frac{1}{2} \eta C t + \alpha \right), \quad (2.93)$$

donde  $C = C_1 + iC_2$  y  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ , son constantes complejas.

Usando la definición de la función  $Y$  y la Ec. (2.93) escribimos

$$Y = \Delta\delta + i\Delta\eta = -(C_1 + iC_2) \tanh \left[ \left( \frac{1}{2} \eta t C_1 + \alpha_1 \right) + i \left( \frac{1}{2} \eta t C_2 + \alpha_2 \right) \right], \quad (2.94)$$

obtenemos las formulas para diferencias de velocidades y amplitudes de los solitones

$$\Delta\delta = \frac{-C_1 \sinh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + C_2 \sin(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}{\cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}, \quad (2.95)$$

$$\Delta\eta = \frac{-C_2 \sinh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) - C_1 \sin(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}{\cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}, \quad (2.96)$$

donde se usó la relación

$$\tanh \left[ \left( \frac{1}{2} \eta t C_1 + \alpha_1 \right) + i \left( \frac{1}{2} \eta t C_2 + \alpha_2 \right) \right] = \frac{\sinh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + i \sin(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}{\cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}. \quad (2.97)$$

Usando las Ecs. (2.84, 2.85), obtenemos las ecuaciones para la distancia y la diferencia de fases de dos solitones

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \Delta\delta = \frac{1}{2} \frac{C_1 \sinh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) - C_2 \sin(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}{\cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}, \quad (2.98)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta \Delta\eta = \eta \frac{-C_2 \sinh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) - C_1 \sin(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}{\cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}. \quad (2.99)$$

No es difícil ver que

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2\eta} \frac{dA}{dt} / A, \quad (2.100)$$

donde

$$A = \cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2). \quad (2.101)$$

La integración de la Ec. (2.98), usando las Ecs. (2.100, 2.101), resulta en

$$q(t) = q(t=0) + \frac{1}{2\eta} \ln \left( \frac{A}{A_0} \right), \quad (2.102)$$

$$= \frac{1}{2\eta} \ln \left[ \frac{\cosh(\eta t C_1 + 2\alpha_1) + \cos(\eta t C_2 + 2\alpha_2)}{\cosh(2\alpha_1) + \cos(2\alpha_2)} \right], \quad (2.103)$$

que presenta la dependencia exacta de la distancia en función del tiempo entre dos solitones. Se puede obtener la formula para la distancia entre dos solitones al unir las Ecs. (2.86, 2.90 y 2.93)

$$Y^2 = C^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q + i\varphi) = C^2 \tanh^2\left(\frac{1}{2}\eta C t + \alpha\right), \quad (2.104)$$

resultando

$$16\eta^2 \exp(-2\eta q + i\varphi) = -C^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\eta C t + \alpha\right), \quad (2.105)$$

o

$$4\eta \cosh\left(\frac{1}{2}\eta C t + \alpha\right) = iC \exp(\eta q - i\varphi/2), \quad (2.106)$$

de donde

$$\exp(-\eta q + i\varphi/2) = \frac{i(C_1 + iC_2)}{4\eta \cosh \left[ \left( \frac{1}{2}\eta t C_1 + \alpha_1 \right) + i \left( \frac{1}{2}\eta t C_2 + \alpha_2 \right) \right]}. \quad (2.107)$$

Teniendo en cuenta que

$$\cosh[\phi_1 + i\phi_2] = \cosh \phi_1 \cos \phi_2 + i \sinh \phi_1 \sin \phi_2, \quad (2.108)$$

donde

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\eta t C_1 + \alpha_1, \quad \phi_2 = \frac{1}{2}\eta t C_2 + \alpha_2, \quad (2.109)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\exp(-\eta q + i\varphi/2) &= \frac{(C_1 + iC_2) [-i \cosh \phi_1 \cos \phi_2 - \sinh \phi_1 \sin \phi_2]}{4\eta [\cosh^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 + \sinh^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2]}, & (2.110) \\ &= \frac{-C_1 \sinh \phi_1 \sin \phi_2 + C_2 \cosh \phi_1 \cos \phi_2 - i [C_1 \cosh \phi_1 \cos \phi_2 + C_2 \sinh \phi_1 \sin \phi_2]}{4\eta [\cosh^2 \phi_1 \cos^2 \phi_2 + \sinh^2 \phi_1 \sin^2 \phi_2]},\end{aligned}$$

$$\exp(-\eta q) = \frac{-C_1 \sinh \phi_1 \sin \phi_2 + C_2 \cosh \phi_1 \cos \phi_2}{4\eta [\cos^2 \phi_2 + \sinh^2 \phi_1] \cos \varphi/2}, \quad (2.111)$$

$$\exp(-\eta q) = \frac{-C_1 \cosh \phi_1 \cos \phi_2 - C_2 \sinh \phi_1 \sin \phi_2}{4\eta [\cos^2 \phi_2 + \sinh^2 \phi_1] \sin \varphi/2}. \quad (2.112)$$

1. Ahora definimos las constantes de integración. Los cuatro parámetros reales  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Se determinan a partir de los valores iniciales de  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\delta$ ,  $q$  y  $\varphi$  a través de las Ecs. (2.82 - 2.85, 2.106) en  $t = 0$ , es decir,

$$\Delta\delta_0 + i\Delta\eta_0 = -C \tanh \alpha, \quad (2.113)$$

$$-4i\eta \cosh \alpha = C \exp(\eta q_0 - i\varphi_0/2), \quad (2.114)$$

donde el subíndice cero indica el valor inicial, por ejemplo  $\Delta\eta_0 = \Delta\eta(t = 0)$ . En el caso particular de las condiciones iniciales:  $\eta_1 = \eta_2$ ,  $\Delta\delta_0 = 0$ ,  $\Delta\eta_0 = 0$  y  $\varphi = \varphi_0$ . Las Ecs. (2.86, 2.90 y 2.93) se hacen

$$0 = -C \tanh \alpha, \quad \alpha = 0, \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned}C &= C_1 + iC_2 = \pm 4i\eta \exp(-\eta q_0)(\cos \varphi_0/2 + i \sin \varphi_0/2), \\ &= \pm 4\eta \exp(-\eta q_0)(i \cos \varphi_0/2 - \sin \varphi_0/2),\end{aligned} \quad (2.116)$$

y permiten definir las constantes

$$C_1 = \mp 4\eta \exp(-\eta q_0) \sin \varphi_0/2, \quad (2.117)$$

$$C_2 = \pm 4\eta \exp(-\eta q_0) \cos \varphi_0/2. \quad (2.118)$$

Vamos a considerar la dependencia de la distancia entre dos solitones según su fase inicial.

Para la interacción de solitones que se encuentran inicialmente en fase ( $\varphi_0 = 0$ ),

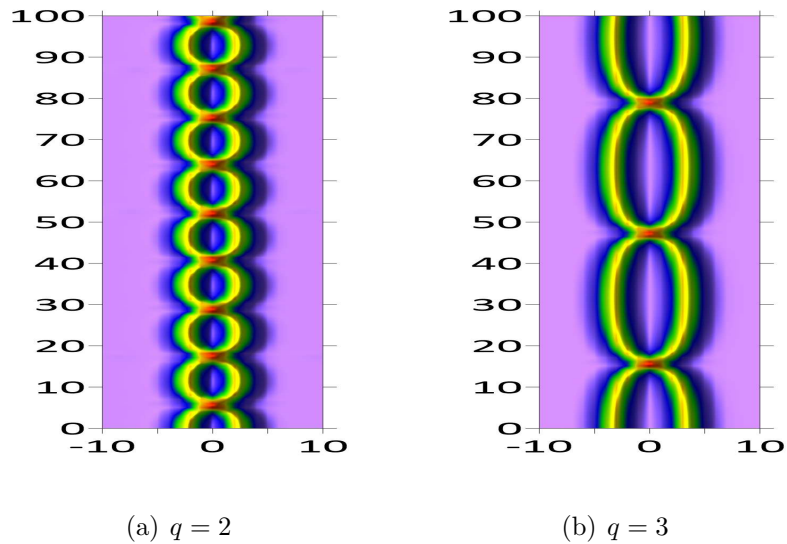
$$C_1 = 0, \quad (2.119)$$

$$C_2 = \pm 4\eta \exp(-\eta q_0), \quad (2.120)$$

y la distancia de separación, tiene el carácter de oscilaciones en el tiempo.

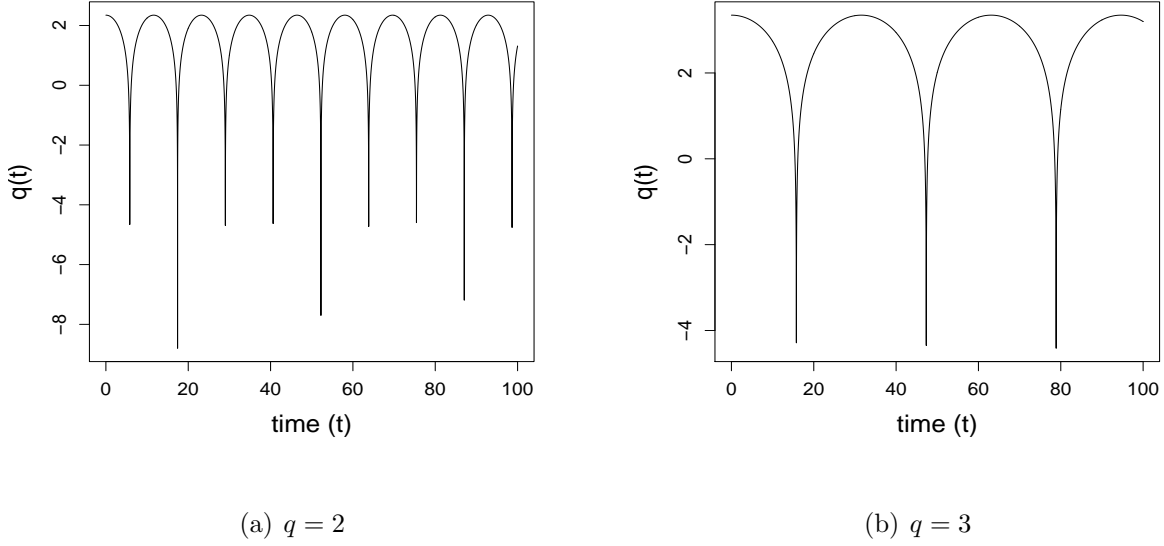
$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln \left[ \frac{1 + \cos(\eta t C_2)}{2} \right] = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln \left[ \cos^2(\eta t C_2/2) \right], \quad (2.121)$$

$$= q_0 + \frac{1}{\eta} \ln \left\{ \cos \left[ 2\eta^2 t \exp(-\eta q_0) \right] \right\}. \quad (2.122)$$



**Figura 2.6:** Dinámica de interacción de dos solitones en fase con los parámetros de la Fig.

2.7.



**Figura 2.7:** Separación relativa de solitones en fase  $q(t)$  dada por la Ec. (2.122) y representado con la dinámica espacio temporal del par de solitones NLSE, las amplitudes iguales  $\eta=1$  y las velocidades ceros. La separación inicial (a)  $q_0=2$  y (b)  $q_0=3$ .

Para la interacción de solitones que encuentran inicialmente fuera de fase ( $\varphi_0 = \pi$ )

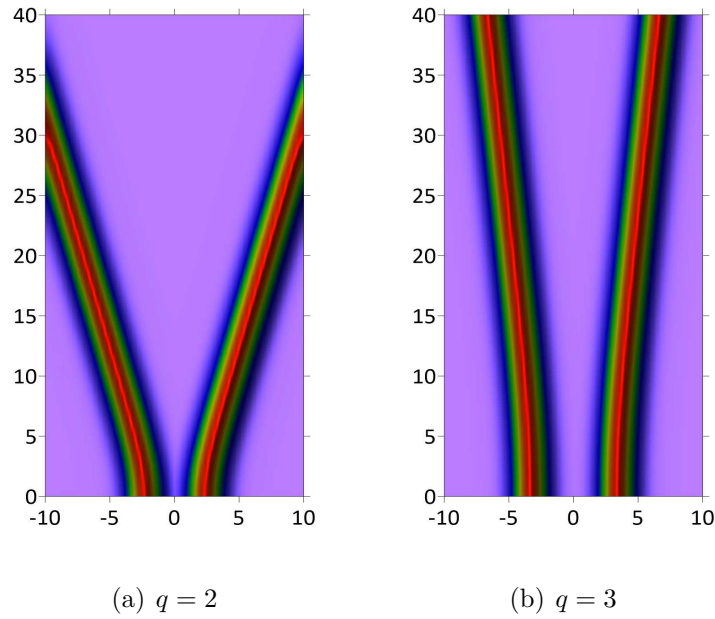
$$C_1 = 4\eta \exp(-\eta q_0), \quad (2.123)$$

$$C_2 = 0, \quad (2.124)$$

y la distancia de separación, se aumenta en el tiempo.

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln \left[ \frac{\cosh(\eta t C_1) + 1}{2} \right] = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln \left[ \cosh^2(\eta t C_1 / 2) \right], \quad (2.125)$$

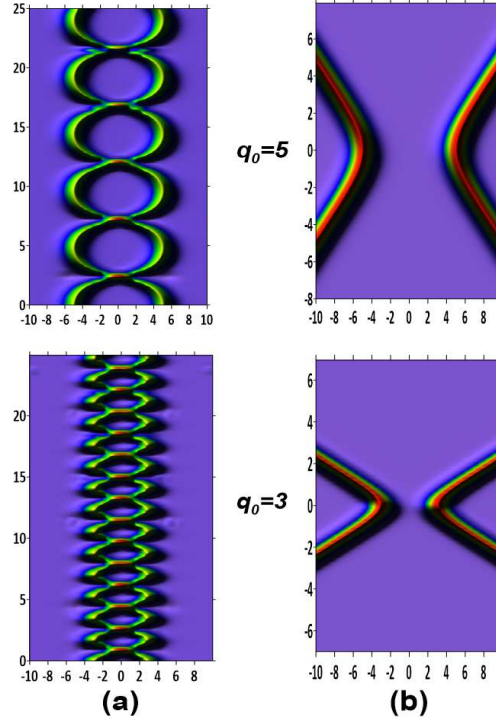
$$= q_0 + \frac{1}{\eta} \ln \left\{ \cosh \left[ 2\eta^2 t \exp(-\eta q_0) \right] \right\}. \quad (2.126)$$



**Figura 2.8:** Dinámica de interacción de dos solitones fuera de fase Ec. (2.126), con amplitudes iguales  $\eta=1$  y las velocidades ceros. La separación inicial (a)  $q_0=2$  y (b)  $q_0=3$ .

La separación relativa  $q(t)$  ( $q(t) \geq 0$  es positiva por definición). Se vuelve negativa en las zonas de unión como se muestra en las Figs. 2.7 (a) y (b) donde, obviamente, la relación  $q(t) \geq 0$  no funciona. Los solitones cuando están en fase forman un estado ligado periódico. Cuando la separación inicial es pequeña, los solitones colisionan en periodo muy corto ver Fig.2.6. Cuando los solitones están fuera de fase no se forma el estado ligado ver fig.2.8.





**Figura 2.9:** Dinámica de interacción de dos solitones con amplitudes iguales  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  y las velocidades ceros. La separación inicial es  $q_0=5$  (los gráficos de arriba) y  $q_0=3$  (los gráficos de abajo). (a) Los solitones están en fase,  $\varphi = 0$ , y (b) fuera de fase,  $\varphi = \pi$ .

2. En el casos que las amplitudes fueran diferentes  $\eta_1 \neq \eta_2$ , entonces  $\Delta\eta_0 = \Delta\eta$ , se desplazan a una misma velocidad  $\Delta\delta = 0$  y con fase  $\varphi_0 = 0$ . De la ecuación (2.113) se puede obtener la función de centro de masa

$$C = -i \frac{\Delta\eta_0}{\tanh\alpha}, \quad (2.127)$$

reemplazando en la Ec. (2.114), se tiene:

$$4i\eta \cosh \alpha = \left(-i \frac{\Delta\eta_0}{\tanh\alpha}\right) \exp(\eta q_0), \quad (2.128)$$

$$\sinh \alpha = \left(-\frac{\Delta\eta_0}{4\eta}\right) \exp(\eta q_0), \quad (2.129)$$

$$\cosh^2 \alpha = \frac{\Delta\eta_0^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q_0)}{2\Delta\eta_0^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q_0)}, \quad (2.130)$$

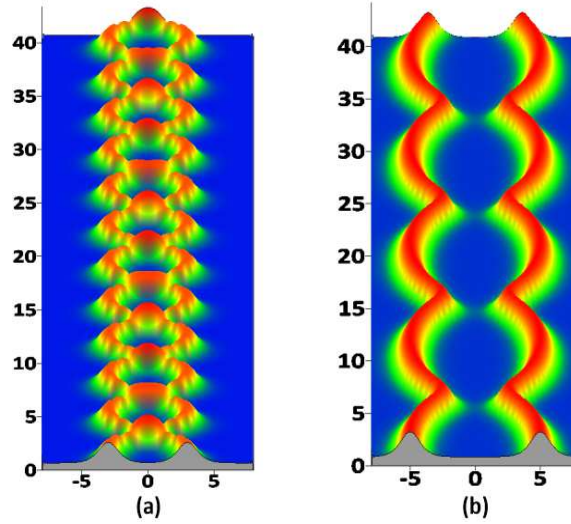
de la solución general Ec.(2.103), podemos escribir

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln\left(\frac{\cosh(2\eta Ct + \alpha)}{\cosh^2 \alpha}\right), \quad (2.131)$$

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln\left(\frac{2\Delta\eta_0^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q_0) \cosh(2\eta Ct + \alpha)}{\Delta\eta_0^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q_0)}\right), \quad (2.132)$$

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln\left(\frac{\Delta\eta_0^2 + 8\eta^2 \exp(-2\eta q_0)(1 + \cos^2(1 + \cos(2Mt)))}{\Delta\eta_0^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q_0)}\right), \quad (2.133)$$

de la Ec. (2.89) se tiene  $C = iM$ , donde  $M = \sqrt{\Delta\eta_0^2 + 16\eta^2 \exp(-2\eta q_0)}$ .



**Figura 2.10:** Dinámica de interacción de dos soliton, con amplitud diferentes  $\eta_1 = 0.95$ ,  $\eta_2 = 1.05$  y las velocidades cero, y la fase  $\varphi = 0$ . la separación inicial (a)  $q_0=3$  y (b)  $q_0=5$ .

En la Fig. 2.9, se muestra la interacción de dos solitones con velocidades iniciales nula. En la Fig. 2.9 (a) la interacción de los solitones en fase es atractiva, resultando en formación de un estado ligado que tiene una forma periódica con los puntos de colisión, en los cuales la interferencia constructiva de las amplitudes de solitones forma un pico alto. Después de la colisión los solitones se alejan. La frecuencia de oscilaciones depende de la separación inicial de los solitones (ver Ec. (2.122)) y es inversamente proporcional a la separación. No existe colisión cuando están fuera de fase como se muestra en Fig. 2.9 (b), ellos se repelen

causando que no se forme el estado ligado.

La dinámica de interacción de solitones en la Fig. 2.10 muestra que los solitones con amplitudes diferentes y velocidades iniciales nulas. Los solitones están en fase y la posición inicial es pequeña (o cercana a cero), la interacción es atractiva formando un estado ligado con los puntos de colisión 2.10 (a). Mientras que cuando la posición inicial se aleja de cero, no existe puntos de colisión durante todo su desplazamiento 2.10 (b).

### 2.2.5. Interacción con ganancia y pérdida de amplificación

#### El sistema de ecuaciones para los parámetros de interacción

Considerando en la Ec. (2.73)  $i\epsilon(u) = i\gamma u$  en la Ec.(1.1) obtenemos la perturbación completa en la NLSE para dos solitones

$$i\epsilon(u_m) = i\gamma u_m - 2|u_m|^2 u_n - u_m^2 u_n^*, \quad (2.134)$$

$$\epsilon(u_m) = \gamma u_m + i2|u_m|^2 u_n + iu_m^2 u_n^*, \quad (2.135)$$

donde  $m, n = 1, 2$  y  $m \neq n$ .

Para  $\epsilon(u_m)u_m^*$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon(u_m)u_m^* &= (\gamma u_m + i2|u_m|^2 u_n + iu_m^2 u_n^*) u_m^*, \\ &= (\gamma + i2u_m^* u_n + iu_m u_n^*) |u_m|^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Sustituyendo las Ecs. (2.69), (2.70) en (2.136), obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon(u_1)u_1^* &= \eta_1^2 \operatorname{sech}^2(z_1) \{ \gamma + i2\eta_1\eta_2 \sec h(z_1) \sec h(z_2) \exp [i(\varphi_2 - \varphi_1) - i(\delta_2 - \delta_1)x] \\ &\quad + i\eta_1\eta_2 \sec h(z_1) \sec h(z_2) \exp [-i(\varphi_2 - \varphi_1) + i(\delta_2 - \delta_1)x], \\ &\approx \gamma\eta_1^2 \operatorname{sech}^2(z_1) + i\eta_1^3\eta_2 \operatorname{sech}^3 z_1 \operatorname{sech} z_2 \{ 3 \cos \varphi + i \sin \varphi \}, \\ &\approx \gamma\eta^2 \operatorname{sech}^2(z_1) + i\eta^4 \operatorname{sech}^3 z_1 \operatorname{sech} z_2 (3 \cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$\operatorname{Re} [\varepsilon(u_1)u_1^*] = \eta^2 \operatorname{sech}^2(z_1) \left[ \gamma - \eta^2 \operatorname{sech} h(z_1) \operatorname{sech} h(z_1 - 2\eta q) \sin \varphi \right], \quad (2.138)$$

$$\operatorname{Im} [\varepsilon(u_1)u_1^*] = 3\eta^4 \operatorname{sech}^3(z_1) \operatorname{sech} h(z_1 - 2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_2)u_2^* &= \eta_2^2 \operatorname{sech}^2(z_2) \{ \gamma + i2\eta_1\eta_2 \operatorname{sech} h(z_1) \operatorname{sech} h(z_2) \exp[-i(\varphi_2 - \varphi_1) + i(\delta_2 - \delta_1)x] \\ &\quad + i\eta_1\eta_2 \operatorname{sech} h(z_1) \operatorname{sech} h(z_2) \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1) - i(\delta_2 - \delta_1)x] \}, \\ &\approx \gamma\eta_2^2 \operatorname{sech}^2(z_2) + i\eta_2^3\eta_1 \operatorname{sech}^3 z_2 \operatorname{sech} z_1 \{ 3 \cos \varphi - i \sin \varphi \}, \\ &\approx \gamma\eta^2 \operatorname{sech}^2(z_2) + i\eta^4 \operatorname{sech}^3 z_2 \operatorname{sech} z_1 \{ 3 \cos \varphi - i \sin \varphi \}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$\operatorname{Re} [\varepsilon(u_2)u_2^*] = \eta^2 \operatorname{sech}^2(z_2) \left[ \gamma + \eta^2 \operatorname{sech} h(z_2) \operatorname{sech} h(z_2 + 2\eta q) \sin \varphi \right], \quad (2.141)$$

$$\operatorname{Im} [\varepsilon(u_2)u_2^*] = 3\eta^4 \operatorname{sech}^3(z_2) \operatorname{sech} h(z_2 + 2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.142)$$

en primera aproximación:  $\eta_1 \approx \eta_2$ ,  $\operatorname{sech}(z_1 - 2\eta q) \approx 2 \exp(z_1 - 2\eta q)$ ,  $\operatorname{sech}(z_2 + 2\eta q) \approx 2 \exp(-z_2 - 2\eta q)$ , donde se usa la notación

$$z_1 = \eta(x - q_1), \quad z_2 = \eta(x - q_2) = \eta(x - q_1 - 2q) = z_1 - 2\eta q, \quad z_1 = z_2 + 2\eta q.$$

Al sustituir las Ecs. (2.138, 2.139) y la Ecs. (2.141, 2.142) en las ecuaciones (1.42 - 1.45), obtenemos el sistema de ecuaciones para cada soliton

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u_k)u_k^* dz = 2\gamma\eta + (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.143)$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} = -\frac{1}{\eta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u_k)u_k^* \tanh(z) dz = (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.144)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = -\delta_k + \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} z \varepsilon(u_k)u_k^* dz = -\delta_k - 2\eta \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.145)$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = 6\eta^2 \exp(-2\eta q) \cos \varphi + 2\eta\delta_k \exp(-2\eta q) \sin \varphi + \frac{1}{2}(\eta_k^2 + \delta_k^2), \quad (2.146)$$

donde  $k = 1, 2$ .

Usando las Ecs. (2.143) - (2.146), obtenemos el sistema de ecuaciones para la diferencia

de parámetros

$$\frac{d\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi + 2\gamma(t)\Delta\eta, \quad (2.147)$$

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.148)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}\Delta\delta, \quad (2.149)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta\Delta\eta. \quad (2.150)$$

De las Ecs. (2.147) - (2.150), obtenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Delta\delta = -4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.151)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \eta \frac{d}{dt} \Delta\eta = 8\eta^4 \exp(-2\eta q) \sin \varphi + 2\gamma(t)\Delta\eta. \quad (2.152)$$

Siguiendo la Ref. [15, 48], definimos una función compleja  $Y = \Delta\delta + i\Delta\eta$ , para obtener la

ecuación

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\Delta\delta}{dt} + i \frac{d\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) + i2\gamma\Delta\eta, \quad (2.153)$$

realizando la diferenciación de la Ec. (2.153) por el tiempo se tiene

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \frac{d(-2\eta q + i\varphi)}{dt} + 8 \exp(-2\eta q + i\varphi) \frac{d\eta^3}{dt} + i2\gamma \frac{d\Delta\eta}{dt}, \quad (2.154)$$

donde

$$\frac{d(-2\eta q + i\varphi)}{dt} = -2q \frac{d\eta}{dt} + \eta Y, \quad (2.155)$$

finalmente obtenemos

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \left( -2q \frac{d\eta}{dt} + \eta Y \right) + 8 \exp(-2\eta q + i\varphi) 3\eta^2 \frac{d\eta}{dt} + i2\gamma \frac{d\Delta\eta}{dt}. \quad (2.156)$$

Para resolver la Ec. (2.156), realizamos las siguientes aproximaciones:

(a) se dejan solo los términos lineales en  $\gamma$  (se quita el ultimo termino en la Ec. (2.156)),

(b) ponemos  $8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \approx dY/dt$ ,

(c)  $d\eta/dt \approx 2\gamma\eta$ .

Con estas aproximaciones la Ec. (2.156) simplificada tiene la forma

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta \frac{dY^2}{dt} + \gamma \frac{dY}{dt} (6 - 4\eta q). \quad (2.157)$$

Analizando el ultimo termino en la Ec. (2.157) notamos que se cancela en  $\eta q = 1.5$ , de acuerdo a las condiciones Ec. (2.73) ( $\eta q \gg 1$ ). Pero con un incremento de  $q$  la interacción de solitones disminuye exponencialmente. Tomando en consideración que  $\gamma \ll 1$ , en primera aproximación podemos no contar con este termino. Finalmente vamos a analizar la Ec. (2.157) en la forma

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{1}{2}\eta(t) \frac{dY^2}{dt}. \quad (2.158)$$

### Comportamiento sin ganancia y perdida de amplificación

Primero consideramos el caso  $\gamma = 0$  y  $\eta$  es una constante. Entonce la Ec. (2.158) se puede integrar [15]

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{2}\eta (Y^2 - C^2), \quad (2.159)$$

la solución fue discutida ampliamente en la Sec. 2.2.4 (ver Ecs.(2.90) a (2.126)).

### Comportamiento con ganancia y perdida de amplificación

Regresando a la Ec. (2.157), con ganancia de amplificación, ahora consideramos la dependencia de  $\eta$  en el tiempo como  $\eta = \eta_0 \exp(2\gamma t)$ .

Se puede ver que la integración de la Ec. (2.157) resulta en

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{2}\eta Y^2 - K^2 \approx \frac{1}{2}\eta \left[ Y^2 - \frac{2}{\eta_0} K^2 \right], \quad (2.160)$$

donde  $K$  es una constante compleja,  $K = K_1 + iK_2$ .

La Ec. (2.160), permite obtener la solución tomando la integral

$$\int \frac{dY}{Y^2 - 2K^2/\eta_0} = \frac{1}{2} \int_0^t \eta dt, \quad (2.161)$$

teniendo en cuenta que

$$\int \frac{dY}{Y^2 - 2K^2/\eta_0} = -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{2Y}{\sqrt{-\Delta}} \right), \quad (2.162)$$

donde

$$\Delta = -8K^2/\eta_0, \quad \sqrt{-\Delta} = 2K\sqrt{\frac{2}{\eta_0}}, \quad (2.163)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} Y &= -K\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \left[ \frac{K}{\sqrt{2\eta_0}} \int_0^t \eta dt + \alpha \right], \\ &= -K\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \left[ \frac{\eta_0 K}{2\gamma\sqrt{2\eta_0}} [\exp(2\gamma t) - 1] + \alpha \right], \\ &= -(K_1 + iK_2) \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \left\{ \frac{(K_1 + iK_2)}{2\gamma} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} [\exp(2\gamma t) - 1] + \alpha_1 + i\alpha_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.164)$$

donde  $\alpha$  es una constante de integración  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ .

Usando la definición de la función  $Y$  y la Ec.(2.164)

$$\begin{aligned} Y &= \Delta\delta + i\Delta\eta, \\ &= -(K_1 + iK_2) \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \left\{ \left[ \frac{K_1}{2\gamma} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} (e^{2\gamma t} - 1) + \alpha_1 \right] + i \left[ \frac{K_2}{2\gamma} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} (e^{2\gamma t} - 1) + \alpha_2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Podemos obtener las formulas para la diferencia de velocidades y amplitudes de los solitones

$$\Delta\delta = -\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \frac{K_1 \sinh 2\phi_1 - K_2 \sin 2\phi_2}{\cosh 2\phi_1 + \cos 2\phi_2}, \quad (2.166)$$

$$\Delta\eta = -\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \frac{K_1 \sin 2\phi_2 + K_2 \sinh 2\phi_1}{\cosh 2\phi_1 + \cos 2\phi_2}, \quad (2.167)$$

donde se uso la notación

$$\phi_i = \frac{K_i}{2\gamma} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} (e^{2\gamma t} - 1) + \alpha_i, \quad (2.168)$$

se puede generalizar para  $i = 1, 2$ .

$$\phi_i = \frac{K_i}{2\gamma\sqrt{2\eta_0}} [\eta(t) - \eta_0] + \alpha_i. \quad (2.169)$$

Usando la Ec. (2.149) escribimos la ecuación para la distancia entre solitones

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{2} \Delta\delta = \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}} \frac{K_1 \sinh 2\phi_1 - K_2 \sin 2\phi_2}{\cosh 2\phi_1 + \cos 2\phi_2}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}} \frac{dA/dt}{A} \frac{1}{\sqrt{2/\eta_0}\eta(t)} = \frac{1}{2\eta(t)} \frac{dA/dt}{A}, \end{aligned} \quad (2.170)$$

donde

$$A = \cosh 2\phi_1 + \cos 2\phi_2. \quad (2.171)$$

Realizamos su integración

$$\begin{aligned} q(t) &= q_0 + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left( \frac{A}{A_0} \right) = q_0 + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left[ \frac{\cosh 2\phi_1 + \cos 2\phi_2}{\cosh (2\alpha_1) + \cos (2\alpha_2)} \right], \\ &= q_0 + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left\{ \frac{\cosh 2 [K_1 (\eta(t) - \eta_0) / (2\gamma\sqrt{2\eta_0}) + \alpha_1] + \cos 2 [K_2 (\eta(t) - \eta_0) / (2\gamma\sqrt{2\eta_0}) + \alpha_2]}{\cosh (2\alpha_1) + \cos (2\alpha_2)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.172)$$

en el caso limite cuando  $\gamma \rightarrow 0$ , la Ec. (2.172) toma la forma

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left\{ \frac{\cosh 2 \left[ K_1 \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} t + \alpha_1 \right] + \cos 2 \left[ K_2 \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} t + \alpha_2 \right]}{\cosh (2\alpha_1) + \cos (2\alpha_2)} \right\}, \quad (2.173)$$

que coincide con la Ec. (2.103), teniendo en cuenta que  $K = C \sqrt{\frac{\eta_0}{2}}$ .

De las Ecs. (2.153, 2.160 y 2.164) obtenemos

$$8\eta^2\eta_0 \exp(-2\eta q + i\varphi) + i2\gamma\eta_0\Delta\eta = -K^2 \operatorname{sech}^2(\phi_1 + i\phi_2). \quad (2.174)$$



Los cuatro parámetros reales  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$ , se determinan a partir de los valores iniciales de  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\delta$ ,  $q$  y  $\varphi$  a través de las Ecs. (2.147-2.150) y (2.174) en  $t = 0$ , es decir,

$$\Delta\delta_0 + i\Delta\eta_0 = -(K_1 + iK_2) \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \{\alpha_1 + i\alpha_2\}, \quad (2.175)$$

$$-K^2 = \left[ 8\eta_0^2 \exp(-2\eta_0 q_0 + i\varphi_0) + i2\gamma\Delta\eta_0 \right] \eta_0 \cosh^2 \alpha, \quad (2.176)$$

$$K = \pm i \sqrt{8\eta_0^3 \exp(-2\eta_0 q_0 + i\varphi_0) + i2\gamma\eta_0\Delta\eta_0} \cosh \alpha. \quad (2.177)$$

Para el caso particular de solitones iguales:  $\eta_1 = \eta_2$ ,  $\Delta\delta_0 = 0$ ,  $\Delta\eta_0 = 0$  y  $\varphi = \varphi_0$ . De la Ec. (2.177) obtenemos que  $\alpha = 0$  y

$$K_1 + iK_2 = \pm 2\sqrt{2\eta_0}\eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) (i \cos \varphi_0/2 - \sin \varphi_0/2), \quad (2.178)$$

$$K_1 = \mp 2\sqrt{2\eta_0}\eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) \sin \varphi_0/2, \quad (2.179)$$

$$K_2 = \pm 2\sqrt{2\eta_0}\eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) \cos \varphi_0/2. \quad (2.180)$$

### Propiedades de las características de las soluciones

1. Para dos solitones que inicialmente está en fase ( $\varphi_0 = 0$ ) de las Ecs. (2.179) y (2.180)

obtenemos

$$K_1 = 0, \quad K_2 = \pm 2\sqrt{2\eta_0}\eta_0 \exp(-\eta_0 q_0), \quad (2.181)$$

y la distancia entre dos solitones

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left\{ \frac{1 + \cos 2 [K_2 (\eta(t) - \eta_0) / (2\gamma\sqrt{2\eta_0})]}{2} \right\}, \quad (2.182)$$

$$\begin{aligned} &= q_0 + \frac{1}{\eta(t)} \ln \left\{ \cos \left[ K_2 (\eta(t) - \eta_0) / (2\gamma\sqrt{2\eta_0}) \right] \right\}, \\ &= q_0 + \frac{1}{\eta} \ln \left\{ \cos \left[ \eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) (\eta - \eta_0) / \gamma \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.183)$$

cuyo periodo de oscilación es

$$T = 2\pi / (d\phi/dt) = \frac{\pi}{\eta_0^2} \exp(\eta_0 q_0 - 2\gamma t), \quad (2.184)$$

se puede ver que el periodo de oscilacion depende de la distancia inicial. Aumenta si  $\gamma < 0$  y disminuye si  $\gamma > 0$ , lo que significa que los dos solitones se repelen o atraen entre sí.

Así mismo la distancia entre solitones. Cuando  $\gamma \rightarrow 0$

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\eta_0} \ln \left\{ \cos \left[ 2\eta_0^2 t \exp(-\eta_0 q_0) \right] \right\}, \quad (2.185)$$

coincide con la Ec. (2.122).

2. Si los solitones están inicialmente fuera de fase ( $\varphi_0 = \pi$ ) y las Ecs. (2.179), (2.180) tenemos

$$K_1 = \mp 2\sqrt{2\eta_0\eta_0} \exp(-\eta_0 q_0), \quad K_2 = 0, \quad (2.186)$$

la distancia entre dos solitones

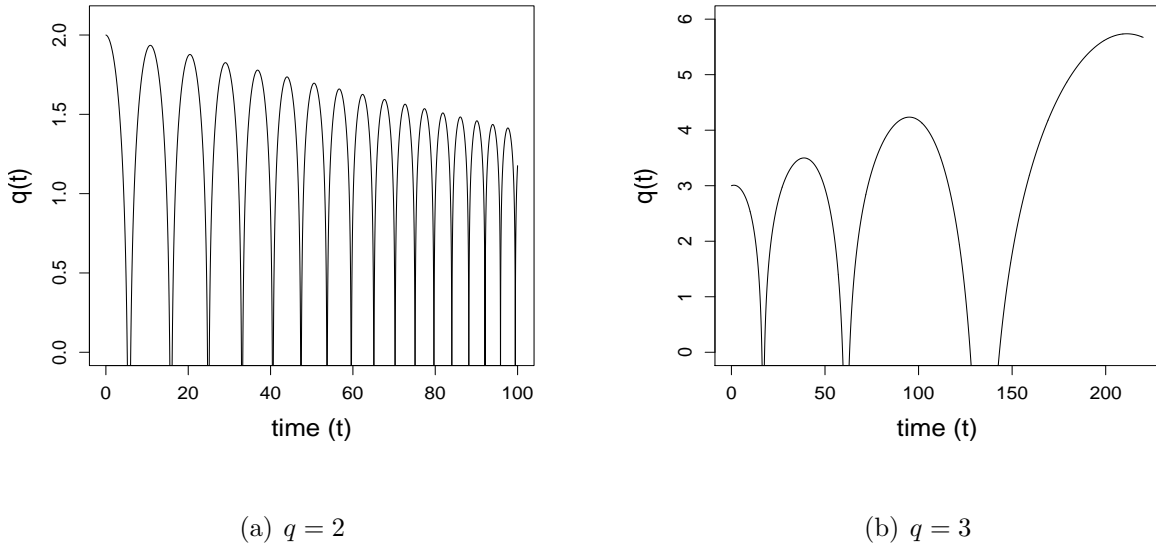
$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\eta} \ln \left\{ \cosh \left[ \eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) (\eta - \eta_0) / \gamma \right] \right\}, \quad (2.187)$$

se aumenta para todos valores de  $\gamma$  positivos o negativos.

Si  $\gamma \rightarrow 0$

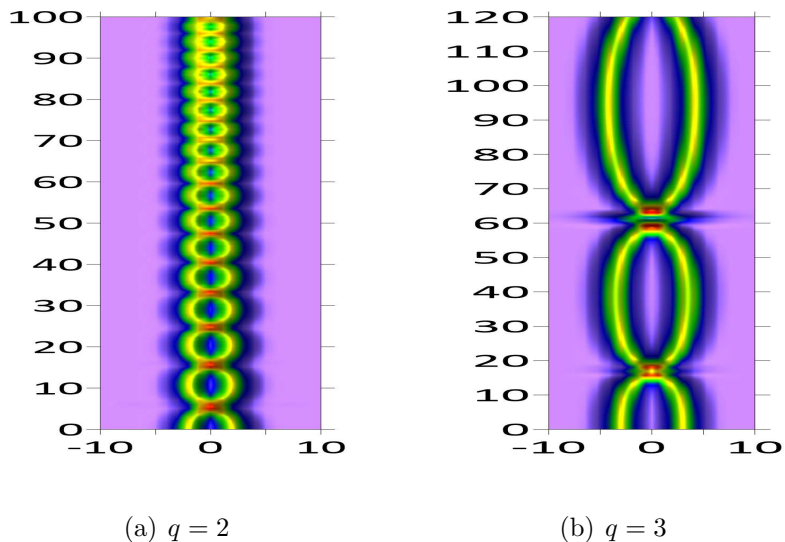
$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\eta_0} \ln \left\{ \cosh \left[ 2\eta_0^2 t \exp(-\eta_0 q_0) \right] \right\}, \quad (2.188)$$

coincide con la Ec. (2.126).



**Figura 2.11:** Impacto de las ganancias y pérdidas en las interacciones de los solitones de la NLSE en fase Ec. (2.183) con amplitudes iguales  $\eta=1$  y las velocidades ceros. Después de elegir la separación relativa de solitones (a)  $q_0 = 2$  y ganancia  $\gamma = 0.003$ , (b)  $q_0 = 3$  y perdida  $\gamma = 0.0022$ .

Los solitones en fase forman un estado ligado periódico, en el caso que la separación inicial es pequeña los solitones colisionan en periodo muy corto ver fig. 2.12. Las pérdidas ( $\gamma < 0$ ) o ganancias ( $\gamma > 0$ ), aumenta o disminuye el período de oscilación del par de solitones. Dos solitones se repelen o atraen entre sí y la separación relativa de solitones  $q(t)$ , aumenta en ( $\gamma < 0$ ) o disminuye en ( $\gamma > 0$ ), cómo se muestra en la Fig. 2.11.



**Figura 2.12:** Dinámica de interacción de solitones en fase con parámetros de la Fig. 2.11

### 2.2.6. Simulación directa por computadora y cálculos analíticos

El impresionante progreso en la teoría de perturbación ha sido proporcionado y estimulado por los conceptos generales de control de la transmisión del solitón y el manejo de la dispersión [3, 4, 6, 54]. Debe enfatizarse que los modelos NLSE generalizados, en muchos casos, han estado muy cerca del concepto de solitón no autónomo [73–85]. Antes de la consideración analítica, consideramos las características principales de la dinámica de solitones NLSE obtenidas en nuestros experimentos informáticos directos y precisos (utilizamos el método de pasos divididos de Tappert [86, 87] y los códigos de computadora descritos completamente (ver ref. [88])).

Nos centramos en los ejemplos físicamente más importantes considerados por Karpman y Solov'ev [15]. Se demostró que en la estructura del modelo canónico para la NLSE Ec. (1.1), con las condiciones iniciales Ec. (2.69) y representando dos solitones individuales bien separados Ec. (2.70).

Estos solitones interactúan débilmente debido a las colas que se superponen y se atraen o se repelen entre sí, según su diferencia de fase relativa  $\varphi_0 = \varphi_{20} - \varphi_{10}$ . De modo que la separación relativa  $q(t) = [q_2(t) - q_1(t)]/2$  de dos solitones inicialmente (con las mismas

amplitudes y velocidades esta determina por la siguiente relación [15, 89]:

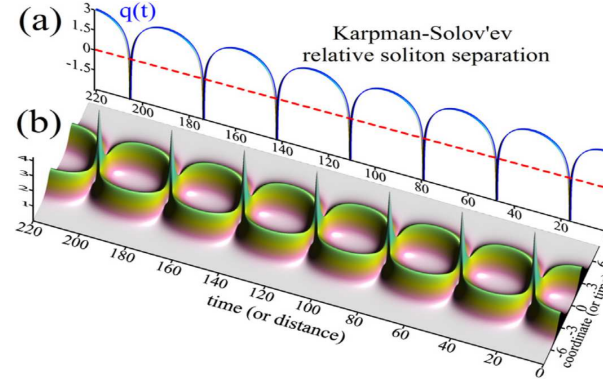
$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta_0} \ln \{ \cosh^2 [2t\eta_0^2 \exp(-\eta_0 q_0) \sin(\varphi_0/2)] + \cos^2 [2t\eta_0^2 \exp(-\eta_0 q_0) \cos(\varphi_0/2)] - 1 \}, \quad (2.189)$$

si  $\eta_0 q_0 \gg 1$ . Cabe destacar que especialmente en aplicaciones ópticas no lineales, en particular para solitones temporales, “ $x \rightarrow T$ ” denota el tiempo sin dimensiones en el sistema de coordenadas de desplazamiento y “ $t \rightarrow Z$ ” es la distancia de propagación normalizada en la longitud de dispersión.

La comparación de la ley de Karpman y Solov’ev Ec. (2.189) con experimentos directos de computadora se muestra en las Figs. 2.13 y 2.14. Las Figs. 2.13 y 2.14 indican claramente que el resultado analítico Ec. (2.189) está en buena concordancia cuantitativa y cualitativa con los resultados numéricos, aunque inicialmente se superponen dos solitones, como se ilustra en la Fig. 2.14 (a, b). Mientras estudiamos los efectos de interacción entre solitones, también debemos considerar la validez de la teoría de perturbación de Karpman y Solov’ev. Obviamente, el supuesto principal de interacción débil entre solitones,  $\eta_0 q_0 \gg 1$ , se analiza en la vecindad extrema de los puntos de “concentración” (unión) y la interferencia donde interactúan dos solitones. La separación relativa  $q(t)$  (que es positiva por definición  $q(t) \geq 0$ ) se vuelve negativa en estas pequeñas zonas de unión como se muestra en las Figs. 2.13 (a) y 2.14 (a) donde, obviamente, la relación  $q(t) \geq 0$  no funciona. Sin embargo, en comparación con la solución numérica, la ecuación analítica de Karpman y Solov’ev. Ec. (2.189) sigue siendo apropiado y brinda una descripción tan precisa de la dinámica de interacción periódica del solitón en todo momento, que muy a menudo, este hecho fue considerado como “incidental y sorprendente”. Para explicar esto, consideramos el problema de interacciones de solitones con más detalles, es decir, variemos la separación inicial de solitones  $q_0$  en nuestras simulaciones de computadora y representemos los

resultados utilizando la escala logarítmica. En particular, si  $q_0$  es relativamente pequeño,  $q_0 = 2.5$ , se deduce de experimentos informáticos precisos que los dos pares de solitones,

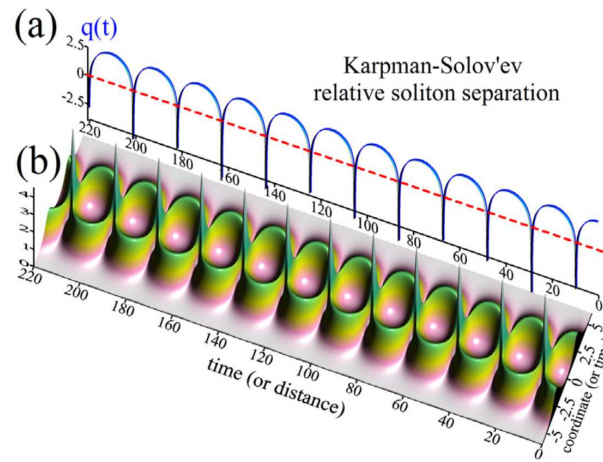
$$u(x, t) = \operatorname{sech}(x - q_0) + \operatorname{sech}(x + q_0), \quad (2.190)$$



**Figura 2.13:** Comparación del resultado de Karpman y Solov'ev para la separación relativa de solitones  $q(t)$  dada por la Ec. (2.189) y representado por la línea azul en (a) con la dinámica espacio-temporal del par de solitones NLSE (b) calculada en el marco de la ecuación del modelo NLSE. Ec. (1.1) con las condiciones iniciales dadas por las Ecs. (2.69) y (2.70) después de elegir los parámetros:  $\gamma_0 = 0$  y la separación inicial entre los solitones entrantes  $q_0 = 3.0$ . Las zonas de los valores positivos y negativos del parámetro  $q(t)$  están separadas por una línea discontinua roja.

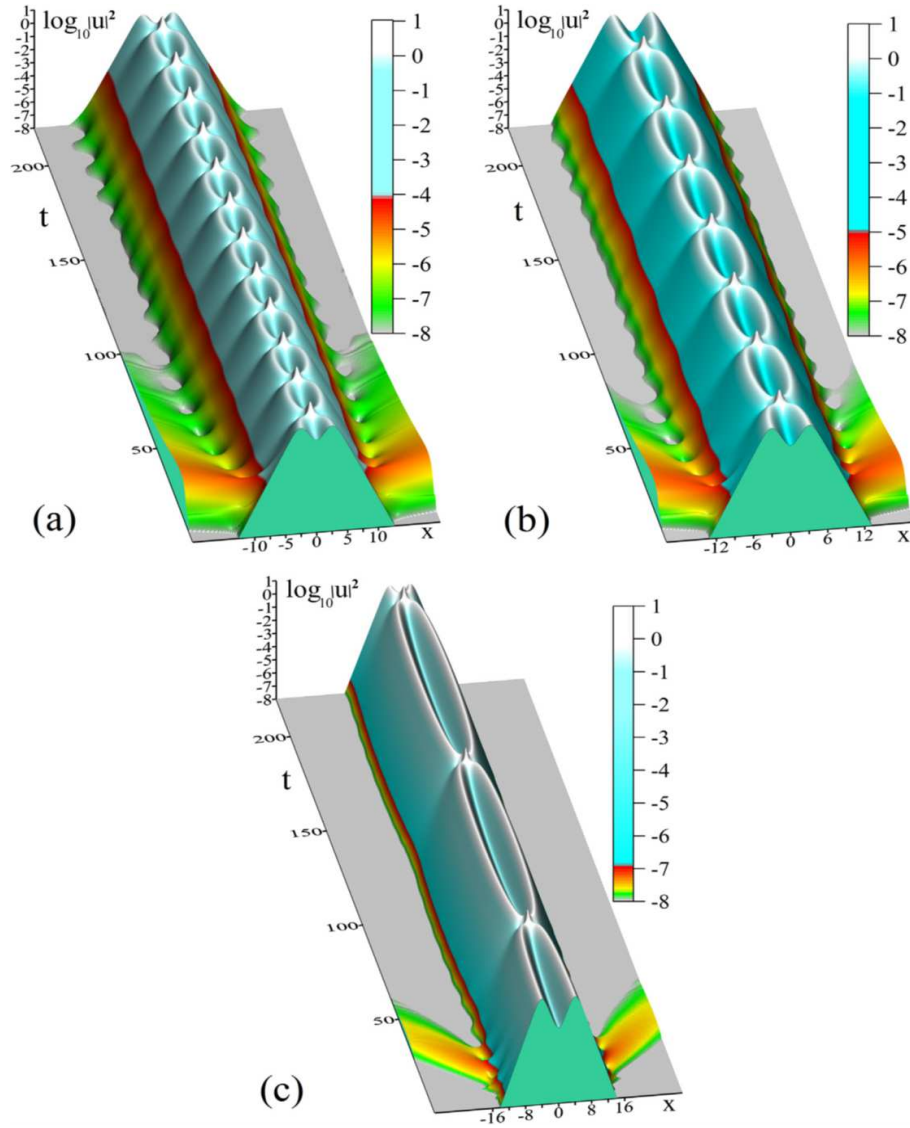
emiten una onda dispersiva no solitonica ya en el nivel  $10^{-4}$  de la intensidad máxima del solitón, como se muestra en la Fig. 2.15 (a) por la región de color rojo. Esta emisión no solitonica continúa durante las primeras cincuenta longitudes de dispersión y a continuación, la radiación disminuye de manera gradual en las cien longitudes de dispersión como se demuestra en la Fig. 2.15 (a) por la región de color verde correspondiente al nivel de radiación  $10^{-7}$  de la intensidad inicial del solitón. El nivel de emisión progresiva no solitonica depende en gran medida de los valores iniciales de separación de los solitones  $q_0$ .

Este efecto se demuestra por los escenarios de interacción de solitones representados en la Fig. 2.15 (a, b, c) y calculados después de elegir los parámetros  $q_0 = 2.5$  en la Fig. 2.15 (a),  $q_0 = 3.0$  en la Fig. 2.15 (b), y  $q_0 = 4.0$  en la Fig. 2.15 (c). Los niveles correspondientes de la emisión del componente que no pertenece a la solución varían de  $10^{-4}$  (Fig. 2.15 (a)), a  $10^{-5}$  (Fig. 2.15 (b)), de  $10^{-7}$  (Fig. 2.15 (c)) y Los tiempos de emisión (o zonas espaciales) que no son solitones disminuyen de 100 a 50 y 25 tiempos de dispersión (o distancias de dispersión). Como resultado, los estados ligados de dos solitones estables se forman como se muestra en las Figs. 2.15 (a-c).



**Figura 2.14:** considerando los mismos parámetros que la Fig. 2.13, pero para  $q_0 = 2.5$ .

Matemáticamente, el problema IST para el potencial de dispersión que representa dos solitones bien separados la Ec. (2.190) fue resuelto por primera vez por Satsuma y Yajima [90], Desem y Chu (consulte los detalles en [49] y las referencias en ellos). En la estructura canónica del modelo NLSE, la Ec.(1.1) y la condición inicial Ec. (2.190) evolucionará a un estado ligado de dos solitones, de modo que los factores de forma de sus solitones constituyentes serán dados por [49].



**Figura 2.15:** Dinámica detallada del par de solitones presentado en la escala logarítmica y computado en la estructura de la ecuación del modelo NLSE Ec. (1.1), con las condiciones iniciales dadas por las Ecs. (2.69) y (2.70) después de elegir los parámetros:  $\gamma_0 = 0$  y la separación inicial entre los solitones entrantes: (a)  $q_0 = 2.5$ , (b)  $q_0 = 3.0$  y (c)  $q_0 = 4.0$ . Las ondas dispersivas que no son de radiación emitidas se muestran en (a-c) por las zonas de color rojo, amarillo y verde.



$$\eta_{1,2} = 1 + \frac{2q}{\sinh(2q)} \pm \operatorname{sech}(q) \Rightarrow \eta_{1,2} \approx 2 \exp(-q), \quad (2.191)$$

para  $q$  suficientemente grande.

Por tanto, el período de oscilación  $T_{sol}$  del estado ligado de dos solitones coincide exactamente con el período del par de solitones obtenidos en la estructura del enfoque de Karpman y Solov'ev  $\eta_0 q_0 \gg 1$

$$T_{sol} = \frac{4\pi}{\eta_1^2 - \eta_2^2} = \frac{\pi}{2} \exp(q_0), \quad (2.192)$$

para  $q$  suficientemente grande.

Este resultado proporciona la explicación del éxito “incidental y sorprendente” de la teoría de la perturbación de Karpman y Solov'ev. Las características principales de la interacción solitón que surgen en la estructura del modelo canónico NLSE con ganancias o pérdidas distribuidas

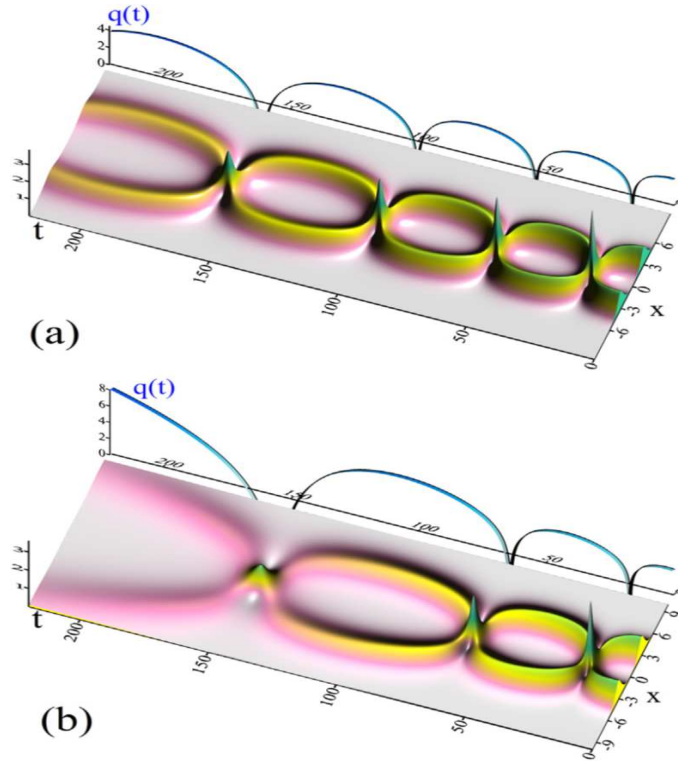
$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = i\gamma(t)u, \quad (2.193)$$

se resumen en las Figs. 2.16-2.18 para el caso particular  $\gamma(t) = \gamma_0 = \text{const.}$

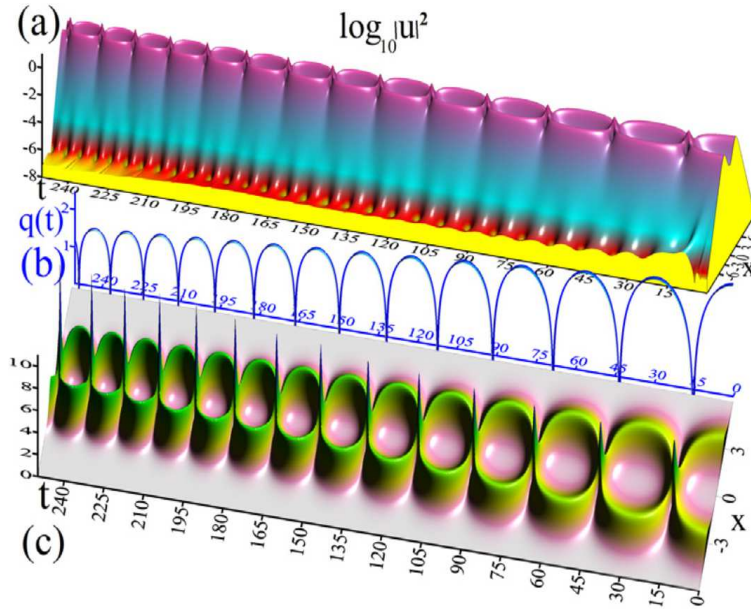
### **Análisis de computación de la interacción de solitones**

La experimentación directa por computadora nos permite obtener las siguientes conclusiones. Primero, debido a la deformación lenta (adiabática) de las formas y fases del solitón, el período de solitón  $T_{sol}$  se vuelve dependiente del tiempo (ver Figs. 2.16-2.18). Las pérdidas ( $\gamma_0 < 0$ ) o ganancias ( $\gamma_0 > 0$ ), aumentan o disminuyen el período de la oscilación del par de solitones  $T_{sol}$ . Dos solitones se revocan (atraen) entre sí y la separación relativa de solitones  $q(t)$  aumenta en ( $\gamma_0 < 0$ ) o disminuye en ( $\gamma_0 > 0$ ) como se ilustra

en las Figs. 2.16 y 2.17. Una aceleración de las oscilaciones periódicas de un par de dos solitones para el sistema NLSE con amplificación, así como la descomposición de un par de dos solitones debido a la absorción, se ven claramente en las Figs. 2.16 y 2.17.



**Figura 2.16:** Impacto de las pérdidas en las interacciones de los solitones de la NLSE en fase: los resultados del enfoque generalizado de perturbación de Karpman-Solov'ev Ec. (2.223) (líneas azules) se comparan con la experimentación directa por computadora realizada en el marco de la ecuación del modelo NLSE. Ec. (1.1), con las condiciones iniciales dadas por las Ecs. (2.69) y (2.70) después de elegir la separación relativa de solitones entrantes  $q_0 = 3.0$  y pérdidas: (a)  $\gamma_0 = -0.00125$  y (b)  $\gamma_0 = -0.0025$ .



**Figura 2.17:** Impacto de la ganancia en las interacciones de los solitones de la NLSE en fase: el resultado del enfoque generalizado de perturbación de Karpman-Solov'ev (se muestra en la línea azul (b)) se compara con los experimentos informáticos directos realizados en la estructura de la ecuación del modelo NLSE. Ec. (1.1) con las condiciones iniciales dadas por las Ecs. (2.69) y (2.70) después de elegir la separación relativa de solitones siguiente  $q_0 = 3.0$  y ganancia  $\gamma_0 = 0.001$ . (a) Dinámica espacio-temporal presentada en la escala logarítmica. (b) Los resultados del enfoque generalizado de perturbación de Karpman-Solov'ev Ec. (2.223). (c) Escenario detallado de la amplificación del par de solitón NLSE. La emisión de ondas dispersivas no solitones se muestra en (a) por la región de color rojo.

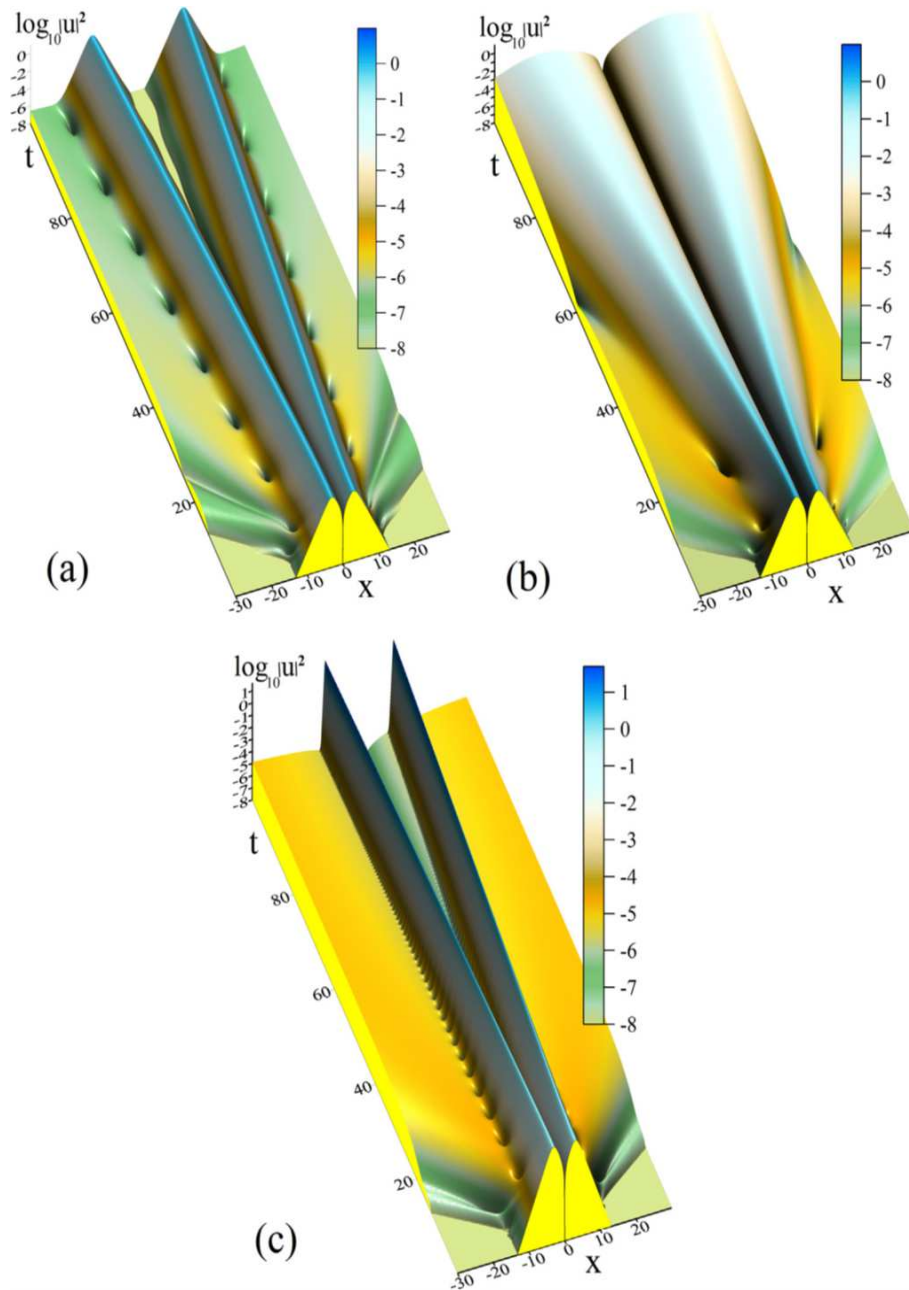
En segundo lugar, el hallazgo esencial en nuestras simulaciones es que la absorción ( $\gamma_0 < 0$ ) o amplificación ( $\gamma_0 > 0$ ), aumenta o disminuye considerablemente las zonas de interacción ("fricción entre sí") de los solitones como se muestra en las Figs. 2.16 y 2.17. En tercer lugar, una radiación dispersiva que no es de solitón continúa aumentando, es este efecto el que rompe la estructura solitónica de estado ligado y rompe el efecto de la

formación del par de solitones estable como se observó en el caso  $\gamma_0 = 0$  (compare las Figs. 2.16, 2.17 y Figs. 2.13, 2.14). En cuarto lugar, nuestros experimentos con computadora reconocen claramente el aumento lineal bien definido en el tiempo (monótono) de la separación relativa de solitones  $q(t)$  en el caso de la absorción,  $\gamma_0 < 0$ , y la correspondiente disminución lineal en el tiempo de  $q(t)$  en el caso de la amplificación,  $\gamma_0 > 0$ . Esta diferencia distintiva en los escenarios generales de la interacción solitón se demuestra claramente en las Figs. 2.16-2.18.

En contraste, dos solitones inicialmente bien separados con fases opuestas,

$$u(x, t) = \operatorname{sech}(x - q_0) - \operatorname{sech}(x + q_0), \quad (2.194)$$

No forman un estado ligado y emita periódicamente un componente dispersivo no solitónico a nivel que depende de la separación inicial del solitón  $q_0$ , aunque las pérdidas o ganancias estén ausentes (los detalles se muestran en la Fig. 2.18 (a)). Las ondas dispersivas que no son de solitón representan los paquetes de ondas de amplitud pequeña con longitudes de crecimiento, como se demuestra en la Fig. 2.18 (a). Debido a los fuertes efectos de la interferencia, la onda dispersiva que no es de un solitón se suprime completamente en el rango medio entre los solitones de fases opuestas, como se demuestra claramente en la Fig. 2.18 (a). Las pérdidas ( $\gamma_0 < 0$ ) o las ganancias ( $\gamma_0 > 0$ ), aumentan o disminuyen las fuerzas de rechazo entre dos solitones de fase opuesta y la separación relativa de solitones  $q(t)$  aumenta con el tiempo en la región del parámetro  $\gamma_0 < 0$  o disminuye con  $\gamma_0 > 0$ , como se ilustra en las Figs. 2.18 (b, c). En todos los casos considerados, la interacción del solitón está acompañada por una fuerte radiación no solitónica, como se demuestra en las Figs. 2.18 (a, b, c) en la escala logarítmica.



**Figura 2.18:** Impacto de las pérdidas y ganancias en las interacciones de los solitones NLSE fuera de fase: los escenarios detallados de la interacción solitones NLSE se representan en la escala logarítmica después de elegir la separación relativa de solitones siguiente  $q_0 = 3.0$  y los coeficientes (a)  $\gamma_0 = 0.0$ , (b)  $\gamma_0 = -0.01$  y (c)  $\gamma_0 = 0.01$ .

Se debe enfatizar especialmente que el desempeño del mecanismo de auto-interacción de la no linealidad depende de las pérdidas o ganancias integradas (acumuladas). Este

hecho se deriva directamente de la transformación del modelo NLSE dada por la Ec. (2.193) en el siguiente modelo NLSE no autónomo

$$u(x, t) = \mathbf{w}(x, t) \exp \left\{ \int \gamma(t') dt' \right\} \Rightarrow i\mathbf{w}_t + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{xx} + \exp \left\{ 2 \int \gamma(t') dt' \right\} |\mathbf{w}|^2 \mathbf{w} = 0. \quad (2.195)$$

## Estudio analítico de interacción de dos solitones

Los resultados de nuestros experimentos computacionales sugieren que la aproximación de la perturbación de Karpman y Solov'ev se puede modificar de la siguiente manera. Sustituyendo el campo total Ecs. (2.69) y (2.70) en la Ec. (2.193), obtenemos el sistema de dos NLSE acoplados.

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + |u_1|^2 u_1 = i\gamma(t)u_1 - 2|u_1|^2 u_2 - u_1^2 u_2^*, \quad (2.196)$$

es conveniente mencionar las notaciones estándar,

$$\eta = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1), \quad \Delta\eta = \eta_2 - \eta_1, \quad (2.197)$$

para lo cual consideramos las siguientes aproximaciones

$$|\Delta\eta q| \ll 1 \ll \eta q, \quad |\varphi q| \ll 1, \quad (2.198)$$

suponiendo una separación de solitones bastante grande ( $q_2 \gg q_1$ ) y aproximadamente las mismas velocidades y amplitudes. Hemos generalizado en [89,91] el sistema de ecuaciones de Karpman-Solov'ev para las diferencias de los parámetros de solitón definidos por Ec. (2.197):

$$\frac{d\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi + 2\gamma(t)\Delta\eta, \quad (2.199)$$

$$\frac{\Delta\delta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.200)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}\Delta\delta, \quad (2.201)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta\Delta\eta, \quad (2.202)$$

y obtenido

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\Delta\delta}{dt} + i\frac{\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) + 2i\gamma(t)\Delta\eta, \quad (2.203)$$

para una función compleja  $Y = \Delta\delta + i\Delta\eta$ .

La diferenciación de la Ec. (2.203) con respecto al tiempo resulta

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \left( -2q \frac{d\eta}{dt} + \eta Y \right) + 24\eta^2 \exp(-2\eta q + i\varphi) \frac{d\eta}{dt} + 2i\gamma \frac{\Delta\eta}{dt}, \quad (2.204)$$

la solución analítica aproximada de la Ec. (2.204) se puede deducir aplicando una serie de simplificaciones basadas en las aproximaciones Ec. (2.198) y dejando solo términos lineales en  $\gamma_0$  (suponemos que un parámetro  $\gamma$ , sin pérdida de la generalidad, es una constante,  $\gamma(t) = \gamma_0$ , con un pequeño valor  $\gamma_0 \ll 1$ ). Teniendo en cuenta los efectos de “fricción” entre solitones (“frotando unos contra otros”), reducimos la Ec. (2.204) a la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{dt^2} &= \frac{1}{2}\eta(t) \frac{d(Y)^2}{dt} - 2\gamma_0 \frac{dY}{dt} (2\eta q - 3), \\ &\approx \frac{1}{2} \frac{d(Y)^2}{dt} - 2\gamma_0 \frac{dY}{dt} (2\eta_0 q_0 - 3), \end{aligned} \quad (2.205)$$

donde  $\eta_0 = \eta(t=0)$  y  $q_0 = q(t=0)$ .

La ecuación (2.205) se puede integrar para dar la siguiente relación aproximada

$$\frac{dY}{dt} \approx \frac{1}{2} \left[ Y^2 - 4\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} Y - \frac{2}{\eta_0} K^2 \right], \quad (2.206)$$

donde  $K$  es una constante compleja,  $K = K_1 + iK_2$ .

La integración de la Ec. (2.206) obtenemos

$$Y \approx 2\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} - K \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \left[ \frac{k}{\sqrt{2\eta_0}} \int_0^t \eta(t') dt' - \alpha \right], \quad (2.207)$$

donde  $\alpha$  es una constante compleja,  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ .

Considerando  $\eta(t) = \eta_0 \exp(2\gamma_0 t)$ , obtenemos

$$\int_0^t \eta(t') dt' = \frac{\eta_0 [\exp(2\gamma_0 t) - 1]}{2\gamma_0} = \frac{[\eta(t) - \eta_0]}{2\gamma_0}. \quad (2.208)$$

Usando la definición de la función  $Y$  y la Ec. (2.207), obtenemos el siguiente resultado para las diferencias relativas de las velocidades y amplitudes del solitón

$$\Delta\delta = 2\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} - \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \frac{k_1 \sinh(2\phi_1) - k_2 \sin(2\phi_2)}{\cosh(2\phi_1) + \cos(2\phi_2)}, \quad (2.209)$$

$$\Delta\eta = -\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \frac{k_2 \sinh(2\phi_1) + k_1 \sin(2\phi_2)}{\cosh(2\phi_1) + \cos(2\phi_2)}, \quad (2.210)$$

donde la notación

$$\phi_i = \frac{k_i}{\sqrt{2\eta_0}} \int_0^t n(t') dt' - \alpha_i = \frac{k_i}{2\gamma_0 \sqrt{2\eta_0}} [\eta(t) - \eta_0] - \alpha_i, \quad (2.211)$$

se utiliza para  $i = 1, 2$ .

Finalmente, combinando las Ecs. (2.201) y (2.209), derivamos la ecuación para la distancia relativa entre solitones

$$\frac{dq}{dt} = -\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} + \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}} \frac{k_1 \sinh(2\phi_1) - k_2 \sin(2\phi_2)}{\cosh(2\phi_1) + \cos(2\phi_2)}, \quad (2.212)$$

y al realizar la integración

$$q(t) = q_0 - \gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} t + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left[ \frac{\cosh(2\phi_1) + \cos(2\phi_2)}{\cosh(2\alpha_1) + \cos(2\alpha_2)} \right], \quad (2.213)$$

en el caso límite de  $\gamma_0 \rightarrow 0$ , la Ec. (2.213) toma la forma

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta_0} \ln \left[ \frac{\cosh 2(k_1 \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} t - \alpha_1) + \cos 2(k_2 \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} t - \alpha_2)}{\cosh(2\alpha_1) + \cos(2\alpha_2)} \right], \quad (2.214)$$

que obviamente es coincidente con la Ec. (3.21) obtenido por Karpman y Solov'ev en la Ref. [15].

Se pueden determinar cuatro parámetros constantes,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  a partir de los valores iniciales de los parámetros del soliton  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\delta$ ,  $q$ , y  $\phi$  en las Ecs. (2.203) y (2.207):

$$\Delta\delta_0 + i\Delta\eta_0 = 2\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} + (k_1 + ik_2) \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh(\alpha_1 + i\alpha_2), \quad (2.215)$$

$$k^2 = - \left[ 8\eta_0^3 \exp(-2\eta_0 q_0 + i\varphi_0) + i2\gamma_0 \Delta\eta_0 + \gamma_0^2 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} \right], \quad (2.216)$$



consideremos un caso particular de dos solitones con amplitudes inicialmente iguales  $\Delta\eta_0 = 0$  y velocidades  $\Delta\delta_0 = 0$  y diferencia de fase  $\varphi = \varphi_0$ . Así, a partir de la Ec. (2.215) se deduce que  $\alpha \approx 0$  y la Ec. (2.216) da:

$$k_1 = \mp \sqrt{2\eta_0} \eta_0 \exp(\eta_0 q_0) \sin \frac{\varphi_0}{2}, \quad (2.217)$$

con un orden inferior en  $\gamma_0$ .

Analizando los siguientes casos tenemos:

1. dos solitones con fases inicialmente iguales ( $\varphi_0 = 0$ ), obtenemos:

$$k_1 = 0 \quad k_2 = \mp \sqrt{2\eta_0} \eta_0 \exp(-\eta_0 q_0), \quad (2.218)$$

y deriva en la siguiente fórmula para la separación relativa  $q(t)$  entre solitones

$$q(t) = q_0 - \gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} t + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left\{ \cos^2 \left[ \frac{k_2(\eta(t) - \eta_0)}{2\gamma_0 \sqrt{2\eta_0}} \right] \right\}, \quad (2.219)$$

donde el factor de forma del solitón que varía en el tiempo viene dado por  $\eta(t) = \eta_0 \exp(2\gamma_0 t)$ . Se puede ver que, en el caso límite de  $\gamma_0 \rightarrow 0$ , la separación de solitones  $q(t)$  es una función periódica del tiempo y el resultado canónico para el período de oscilación del par de solitones se deduce directamente de la Ec. (2.219).

$$T(\gamma_0 = 0) = \frac{\pi}{2\eta_0^2} \exp(\eta_0 q_0), \quad (2.220)$$

es esta distancia a la que la unión del solitón determina las limitaciones de ancho de banda para las líneas de comunicación del solitón [58].

Del Análisis cualitativo de la Ec. (2.219) muestra que la absorción en  $\gamma_0 < 0$  o la ganancia en  $\gamma_0 > 0$ , aumenta o disminuye el período de oscilación en el par de solitones en el tiempo. Este hecho significa que dos solitones se revocan o atraen

entre sí y la separación relativa de solitones  $q(t)$  aumenta o disminuye más allá de su distancia de separación inicial  $q_0$ .

2. Para dos solitones fuera de fase con amplitudes y velocidades inicialmente iguales y ( $\varphi_0 = \phi$ ), de acuerdo con la Ec. (2.220), obtenemos

$$k_1 = \mp \sqrt{2\eta_0} \eta_0 \exp(-\eta_0 q_0), \quad k_2 = 0, \quad (2.221)$$

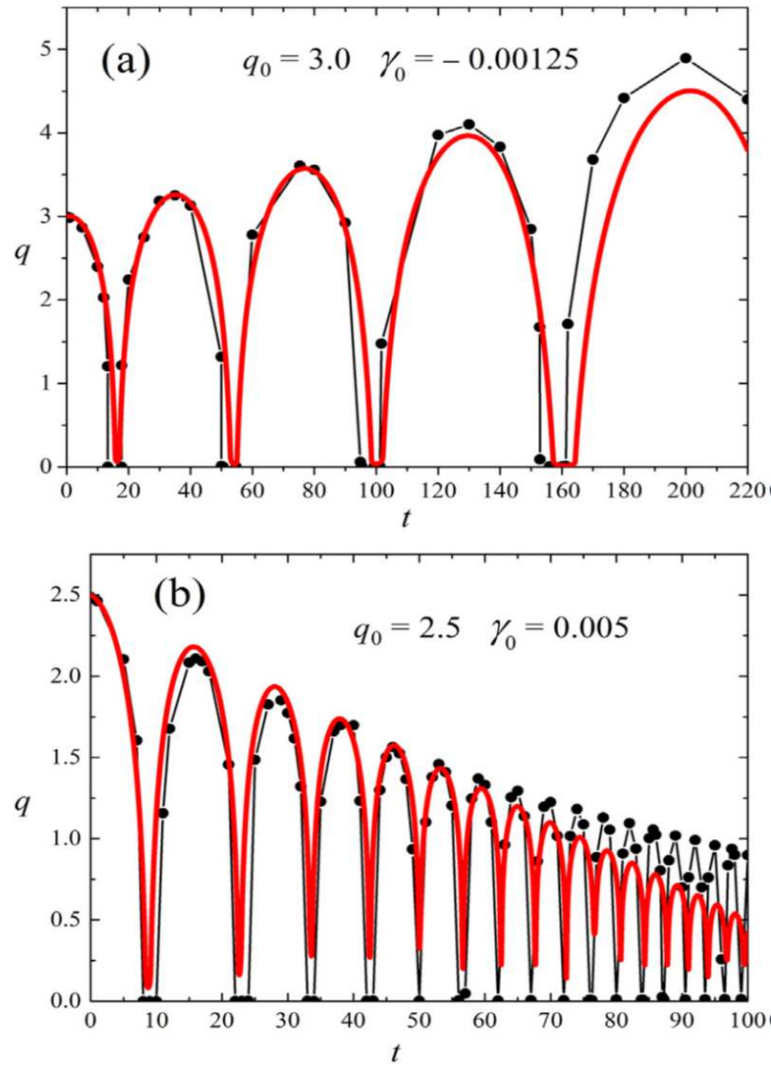
para que la separación relativa de solitones  $q(t)$  se convierta en

$$q(t) = q_0 - \gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} t + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left\{ \cosh^2 \left[ k_1 (\eta(t) - \eta_0) / (2\gamma_0 \sqrt{2\eta_0}) \right] \right\}, \quad (2.222)$$

la ecuación (2.222) demuestra el aumento monótono en el tiempo de separación del solitón, lo que significa que dos solitones se repelen entre sí. En el caso límite de  $\gamma_0 \rightarrow 0$ , la Ec. (2.222) para la separación del solitón  $q(t)$  concuerda completamente con los resultados canónicos. Sin embargo, en presencia de absorción en  $\gamma_0 < 0$  o ganancia en  $\gamma_0 > 0$ , la separación del solitón aumenta en el tiempo más rápidamente en la región de los parámetros  $\gamma_0 < 0$  o más lentamente en  $\gamma_0 > 0$ .

3. Corrección empírica de las fórmulas analíticas.

Debe enfatizarse especialmente que, sin embargo, hay algunas diferencias en que la teoría generalizada de Karpman-Solov'ev



**Figura 2.19:** Resultados de la interacción complementaria entre los experimentos informáticos directos y la teoría generalizada de perturbación del solitón adiabático de Karpman-Solov'ev: comparación cualitativa y cuantitativa de simulaciones computacionales (puntos negros y líneas) y ecuaciones de relaciones empíricas. (35,36) (curvas rojas) calculadas para el caso (a) de pérdidas distribuidas  $\gamma_0 = -0.00125$  y (b) ganancia distribuida  $\gamma_0 = 0.005$ .

predice y eso se ve directamente en los cálculos numéricos precisos. Nuestros resultados analíticos dan una muy buena y notable verificación cuantitativa y cualitativa de los resultados numéricos resumidos en las Figs. 2.16-2.19, solo después de la

sustitución  $\gamma_0 \rightarrow 2\gamma_0$  y esta característica explica todos los experimentos computacionales realizados en los amplios rangos de los parámetros clave del problema. Reemplazando el coeficiente de pérdida o ganancia  $\gamma_0$  en todas las fórmulas principales Ecs. (2.207)-(2.216), (2.219)-(2.222)  $\gamma_0 \rightarrow 2\gamma_0$ , podemos obtener la siguiente fórmula empírica para la separación relativa de solitones en fase

$$q(t) = q_0 - 2\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} t + \frac{\exp(-4\gamma_0 t)}{2\eta(t)} \ln \left( \cos^2 \left\{ \eta_0^2 \exp(-\eta_0 q_0) [\exp(4\gamma_0 t) - 1] / (2\gamma_0) \right\} \right), \quad (2.223)$$

y la fórmula empírica para la separación relativa de solitones fuera de fase.

$$q(t) = q_0 - 2\gamma_0 \frac{2\eta_0 q_0 - 3}{\eta_0} t + \frac{\exp(-4\gamma_0 t)}{2\eta(t)} \ln \left( \cosh^2 \left\{ \eta_0^2 \exp(-\eta_0 q_0) [\exp(4\gamma_0 t) - 1] / (2\gamma_0) \right\} \right). \quad (2.224)$$

Mediante la comparación de estas fórmulas empíricas con los resultados de experimentos computacionales directos demostrados en las Figs. 2.16-2.19, hemos obtenido una descripción cualitativa y cuantitativa muy precisa del impacto de las pérdidas y la ganancia en la dinámica de interacción del solitón. Cabe destacar que los resultados presentados en las Figs. 2.19 (a, b) se han confirmado para un rango mucho más amplio de los parámetros  $q_0$  y  $\gamma_0$  mediante experimentos informáticos directos.

## 2.3. Interacción de Solitones Perturbados

### 2.3.1. Dinámica de Interacción de Dos Solitones con Potencial Armónico

De las Ecs.(2.71) - (2.72) con  $i\xi(u) = \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 u$ , la perturbación total del sistema se define:

$$\varepsilon(u_m) = i \left( -\frac{1}{2}\Omega^2 x^2 u_m + 2|u_m|^2 u_n + u_m^2 u_n^* \right), \text{ donde } m, n = 1, 2, m \neq n,$$

para el termino  $\varepsilon(u_m)u_m^*$ , se obtiene:

$$Im [\varepsilon(u_m)u_m^*] = -\frac{1}{2}\Omega^2(z + \eta q)^2 \sec h^2(z) \quad (2.225)$$

$$+ 3\eta^4 \sec h^3(z) \sec h(z - 2\eta q) \cos \varphi,$$

$$Re [\varepsilon(u_m)u_m^*] = -\eta^4 \sec h^3(z) \sec h(z - 2\eta q) \sin \varphi. \quad (2.226)$$

Mediante las Ecs.(1.42) - (1.45) y (2.73), los parámetros de la Ec.(2.70) son:

$$\frac{d\eta_k}{dt} = (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.227)$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} = \Omega^2 q_k + (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.228)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = -\delta_k - (-1)^k 2\eta \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.229)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_k}{dt} &= 6\eta^2 \exp(-2\eta q) \cos \varphi + 2\eta \delta \exp(-2\eta q) \sin \varphi \\ &+ \frac{1}{2}(\eta_k^2 + \delta_k^2). \end{aligned} \quad (2.230)$$

Las ecuaciones para los parámetros definidos en la Ec. (2.73), para la NLSE con potencial armónico son:

$$\frac{d\Delta\eta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (2.231)$$

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = \Omega^2 q + 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.232)$$

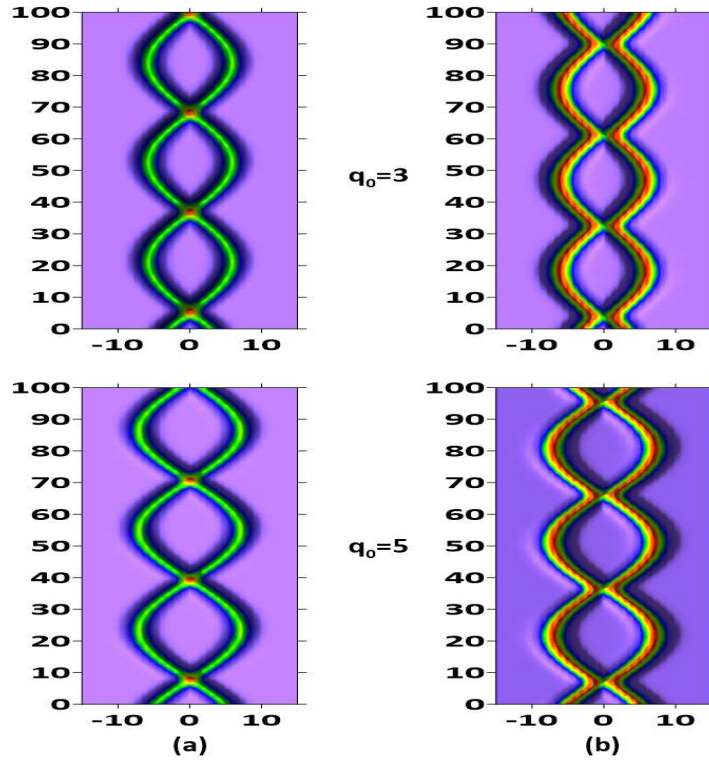
$$\frac{dq}{dt} = -\Delta\delta, \quad (2.233)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta\Delta\eta. \quad (2.234)$$

Obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\Omega^2 q - 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (2.235)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 8\eta^4 \exp(-2\eta q) \sin \varphi. \quad (2.236)$$



**Figura 2.20:** Dinámica de solitones, con parámetros iniciales:  $\eta_0 = 1$ ,  $\Omega = 0.1$ ,  $\delta_0 = 0.5$ ,  $q_0 = 3, 5$ . (a) los solitones están en fase (los gráficos de la izquierda),  $\varphi = 0$ , y (b) fuera de fase (los gráficos de la derecha),  $\varphi = \pi$ .

En las figura 2.20 se muestra la dinamica de interacción de dos solitones para NLSE. Cuando los solitones están en fase ( $\varphi = 0$ ), forman un estado ligado atractivo de forma cíclica. Si los solitones están fuera de fase ( $\varphi = \pi$ ) colisionado de forma cíclica y no formando un estado ligado.

Considerando  $\omega^2 = \frac{d^2U}{dq_0^2}$ , los periodos de oscilación del soliton ( $T_{sol} = \frac{2\pi}{\omega}$ ) y oscilador armónico ( $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega}$ ) y la dinámica de interacción de solitones en fase ( $\varphi = 0$ ) se obtiene:

$$\Omega^2 q_0 \leq 8\eta^3 \exp(-2\eta q), \quad (2.237)$$

el período de oscilación del par de solitones con  $\eta = 1$  y  $q = q_0$  es

$$U = 8 \exp(-2q_0), \quad (2.238)$$

$$T_{sol} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \exp(q_0), \quad (2.239)$$

la razón del Período de oscilación armónico es

$$\frac{T_{sol}}{T_0} = \frac{1}{2\sqrt{q_0}}, \quad (2.240)$$

y dependen de la distancia inicial. Las fuerzas de interacción entre dos solitones son compensado si

$$\Omega_0^2 = -\frac{8}{q} \eta^3 \exp(-2\eta q) \cos(\varphi) \quad (2.241)$$

# Discusión

La propagación de pulsos no lineales en fibras ópticas es un fenómeno con enormes posibilidades tecnológicas. Además es un fenómeno intrigante. En vista de ello, surge la pregunta como comprender su esencia y para su aplicación tecnológica ese fenómeno en base a modelos físico matemáticos, usando las técnicas de integración de métodos numéricos analíticos o computacionales.

Un haz de luz láser al propagarse en un medio no lineal, puede modificar el índice de refracción de tal manera que este aumente como resultado de una mayor intensidad del láser, produciendo un fenómeno de un auto-enfocamiento del haz óptico, y oponiéndose así a la tendencia natural del haz de experimentar una divergencia debido al fenómeno de difracción. Si el fenómeno de auto-enfocamiento por cuestiones no lineales y la difracción son balanceadas adecuadamente, el haz no sufrirá deformación, creándose así un soliton óptico espacial. Este fenómeno se describe por la NLSE. La NLSE tiene aplicación en diversas áreas de la física, como en fibras ópticas, termodinámica, física de plasmas, etc. [5]; sus soluciones tipo soliton tienen mucha importancia por sus aplicaciones en ser portadores de información a largas distancias sin deformación sustancial, principalmente en el área de las telecomunicaciones [3, 6].

En caso más real, en presencia de agentes perturbativos, la NLSE ya es un modelo que



necesita adecuarse a las nuevas circunstancias. Las teorías de perturbación se desarrollaron permitiendo describir la dinámica de solitones en la presencia de pequeñas perturbaciones, tanto en sistemas integrables como no integrables [36, 44, 48–57]. Una importancia fundamental para los sistemas de comunicación de bits a muy alta velocidad juega el estudio de las interacciones de solitones en diferentes sistemas. Como ya lo demostraron Blow y Doran en su trabajo pionero [5], la absorción de energía en fibras conduce al aumento del soliton, debido a la superposición considerable de solitones que interactúan. Las pérdidas destruyen la integrabilidad de la NLSE y la estabilidad estructural de los solitones y sus estados ligados. [20, 88].

La idea original de Karpman y Solov'ev era considerar la interacción entre solitones como una deformación lenta (adiabática) de los parámetros del sistema óptico. Aquí claro está que el concepto de vecinos cercanos se aplicaría para los ulteriores cálculos computacionales. Por otro lado la investigación de dos solitones interactuantes nos darán ciertas pautas para determinar como va evolucionando el par de solitones durante la interacción adiabática. En este caso podría ser de crucial interés como la separación inicial entre ellas mejor dicho entre los centros de masa de los solitones, dependen de las perturbaciones positivas o negativas, o de ganancia o pérdida. para nuestro asombro los cálculos analíticos y numéricos nos dan un resultado no trivial. Este resultado consiste en el hecho de que la separación relativa de solitones si depende de las pérdidas o ganancias acumuladas (integradas) pero coincidentes tanto analítica como numéricamente. Cuando los solitones están en fase, formaban un estado ligado. Cuando en caso contrario los solitones estaban desfase, nunca se ligaban, salían disparados cada quien por su lado. nosotros hemos encontrado las condiciones necesarias para que surjan estados ligados. Como se puede ob-

servar por ejemplo en la sección 2.2.4, Ecs. (2.117)-(2.124). Nuestros resultados analíticos dieron una muy buena verificaci3n cualitativa y cuantitativa de los resultados num3ricos conocidos hasta ahora.

Debe enfatizarse que en los experimentos reales con solitones 3pticos, la transmisi3n e interacci3n de solitones incorporar3n tanto p3rdidas como ganancias en el sistema de fibras. La compresi3n completa del impacto de esos dos factores, a saber, la absorci3n. y la amplificaci3n, en la din3mica de interacci3n soliton sigue siendo digna de investigaci3n. Nuestros resultados tambi3n pueden ser de inter3s para las investigaciones de l3seres de fibra de soliton cuando se desea la estabilidad a largo plazo. Adem3s, estos podr3an abrir la posibilidad para desarrollar investigaciones con experimentos reales y computacionales para poder realizar la comparaci3n cualitativa y cuantitativa de los resultados que podr3an inferir en el desarrollo de nueva tecnolog3a.

Los resultados obtenidos en la investigaci3n son de mucho inter3s f3sico. En nuestro trabajo, analizamos las ideas m3s importantes de la teor3a de la perturbaci3n de la soluci3n de Karpman-Maslov-Solov'ev, y bas3ndonos en ella, se resuelve anal3ticamente el problema de larga data de las interacciones solitonicas de tipo Schr3dinger. as3 mismo, nos da la posibilidad para ampliar la investigaci3n anal3tica y computacional para la Ecuaci3n no lineal de Schr3dinger con presencia de oscilaci3n arm3nica y ganancia o perdida de amplificaci3n. Muchos de los conceptos aqu3 expuestos pueden ser extrapolados a la teor3a de solitones en general.

# Conclusión

En la dinámica de un solitón se estudió aplicando dos perturbaciones: la primera con tasa de crecimiento y decrecimiento, y la segunda con el potencial de oscilador armónico. Para la primera perturbación, la amplitud del solitón varía exponencialmente. En el segundo caso la solución tiene un comportamiento periódico con oscilaciones de la amplitud y velocidad, formando un estado ligado cuando el solitón está en fase. En el caso que el solitón está fuera de fase la interacción es repulsiva. En el caso con potencial de oscilación armónica mantiene los solitones confinados dentro del potencial. En la interacción de dos solitones con potencial armónico, se demostró que el potencial parabólico sirve como una trampa para los dos pulsos no lineales, manteniéndolos estables durante tiempo ilimitado y conservando el carácter elástico de sus interacciones.

Hemos resuelto analíticamente el problema de las interacciones de solitón de la NLSE en los sistemas con ganancias y pérdidas aplicando las ideas más importantes de la teoría de perturbación de solitón de Karpman-Maslov-Solov. El resultado inesperado y no trivial consiste en el hecho de que la separación relativa de solitones depende de las ganancias o pérdidas acumuladas. Nuestros resultados analíticos proporcionaron un buen control cualitativo y cuantitativo de los resultados numéricos conocidos hasta ahora. Se debe enfatizar que en los experimentos reales con solitones ópticos, la transmisión y la interacción del

solitón incorporarán las pérdidas como ganancias en los sistemas de fibra. La comprensión completa del impacto de estos dos factores, a saber, la absorción y la amplificación, en la dinámica de interacción sigue siendo interés de investigación. Nuestros resultados también pueden ser de interés para las investigaciones de solitones en fibras ópticas cuando se desea la estabilidad a largo plazo. El impacto de la pérdida de energía en solitones de fibra óptica y compuestos de solitones ha recuperado interés recientemente en el trabajo de Alexander Hause, Christoph Mahnke y Fedor Mitschke [92]. Este interés fundamental está relacionado con los esquemas de codificación de solitones no lineales que emplean valores propios de IST. Son más robustos que los parámetros de forma de pulso bajo diversas perturbaciones, y como resultado, los valores propios de solitón se utilizan para codificar información. Debido a que las pérdidas destruyen la integrabilidad exacta del NLSE subyacente mediante el método IST. Los autores [92] han introducido un enfoque novedoso utilizando la pérdida localizada de fuerza arbitraria, e investigaron cómo las pérdidas modifican el espectro de valor propio de los compuestos de dos solitones. Estos estudios [92], [93] (ver también las listas de referencias exhaustivas en [92], [93]) demostraron que las investigaciones de varios impactos de pérdidas de fibra y ganancias en las interacciones con solitones siguen siendo muy interesantes y actuales.

A si mismo hemos continuado los estudios detallados del impacto de las ganancias o pérdidas en las interacciones de los solitones NLSE. analizado las características principales de las interacciones de solitones mediante experimentos informáticos directos y precisos realizados en el marco del modelo canónico NLSE con ganancias o pérdidas distribuidas. Hemos construido la solución analítica aproximada del problema generalizado de Karpman y Solov'ev teniendo en cuenta los efectos de fricción entre los solitones. Al utilizar

la interacción complementaria entre los experimentos informáticos directos y la teoría de la perturbación del solitón, hemos encontrado fórmulas empíricas notables que describen muy bien cualitativamente y cuantitativamente el impacto de las pérdidas y ganancias en los escenarios de interacción de las solitones NLSE.

# Bibliografía

- [1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15:240–243, 1965.
- [2] A. Hasegawa. *Optical solitons in fibers*. Springer-Verlag: Berlin, 1989.
- [3] A. Hasegawa and Y. Kodama. *Solitons in optical communications*. Oxford University Press: London, 1995.
- [4] L. F. Mollenauer and J. P. Gordon. *Solitons in optical fibers*. Academic Press: Boston, 2006.
- [5] J. R. Taylor. *Optical solitons - theory and experiment*. Cambridge University Press: Cambridge UK, 1992.
- [6] G. P. Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic Press: San Diego, 1989.
- [7] A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23:142, 1973.
- [8] A. Hasegawa and F. Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. normal dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23:171, 1973.

- [9] L. F. Molleauer and K. Smith. Demonstration of soliton transmission over more than 4000 km in fiber with periodically compensated by Raman gain. *Opt. Lett.*, 13:675–7, 1998.
- [10] A. Hasegawa. *Massive WDM and TDM soliton transmission systems*. Kluwer Academic Publishers: Boston, 2000.
- [11] A. Hasegawa and M. Matsumoto. *New trends in optical soliton transmission systems*. 3rd Edition, Springer-Verlag: Berlin, 2003.
- [12] E. A. Cornell and C. E. Wieman. Bose-Einstein condensation in a dilute gas; the first 70 years and some recent experiments. In *Nobel Price Lectures*. Aula Magna, Universidad de Estocolmo, 8 de Diciembre, 2001.
- [13] W. Ketterle. When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. In *Nobel Price Lectures*. Aula Magna, Universidad de Estocolmo, 8 de Diciembre, 2001.
- [14] V. I. Karpman and E. M. Mazlov. Perturbation theory for solitons. *Sov. Phys. JETP*, 46(2):291, 1977.
- [15] V. I. Karpman and V. V. Soloviev. A perturbation approach to the two soliton system. *Physica 3D*, 3:487–497, 1981.
- [16] J. A. Krumhansl. Unity in the science of physics. *Physics Today*, 44:33, 1991.
- [17] P. L. Christiansen, M. P. Sorensen, A. C. Scott, and J. B. Beitia. *Nonlinear science at the dawn of the 21st century*. Berlin: Springer, 2000.

- [18] T. L. Belyaeva and V. N. Serkin. *Nonautonomous solitons: applications from nonlinear optics to BEC and hydrodynamics*. Hydrodynamics Advanced Topics, 2011.
- [19] T. L. Belyaeva, V.N. Serkin, T. C. Hernandez, and L. Kovachev. Soliton dynamics in confining time-dependent potentials. *Proc. Spie.*, 7027:70271I(1–8), 2008.
- [20] E. M. Dianov, P. V. Mamyshev, A. M. Prokhorov, and V. N. Serkin. *Nonlinear Effects in Optical Fibers*. Harwood Academic Publishers, 1989.
- [21] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13:451–454, 1961.
- [22] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454–477, 1961.
- [23] M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A. D. Trubatch. *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*. Cambridge University Press: New York, USA, 2004.
- [24] M. J. Ablowitz, B. Prinari, and A. D. Trubatch. Integrable nonlinear Schrödinger systems and their soliton dynamics. *International Press Dynamics of PDE*, 1(3):239–299, 2004.
- [25] A. Biswas and K. Porsezian. Soliton perturbation theory for the modified nonlinear Schrödinger’s equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12 (6):886–903, 2007.
- [26] C. Sulem and P.L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation Self-focusing and Wave Collapse*. Springer: New York, USA, 1999.



- [27] N. N. Akhmediev and A. Ankiewicz. *Solitons nonlinear pulses and beams*. Charman and Hall: London, 1997.
- [28] F. Abdullaev. *Theory of solitons in inhomogeneous media*. Academic Press: USA, 1994.
- [29] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and onedimensional self-modulation of waves in nolinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34:118–134, 1972.
- [30] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. Interaction between solitons in a stable medium. *JETP*, 37:823, 1973.
- [31] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, , and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1095, 1967.
- [32] P. D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Pure Appl. Math.*, 21:467, 1968.
- [33] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, and H. Segur. Nonlinear evolution equations of physical significance. *Proc. Roy. Soc.*, 31:125–127, 1973.
- [34] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, and H. Segur. The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems. *Stud. Appl. Math.*, 53:249–315, 1974.
- [35] A. Scott. *Nonlinear science: emergence and dynamics of coherent structures*. Oxford University Press: Oxford, England, 1999.

- [36] J. Yang. *Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.
- [37] D. J. Kaup. A perturbation expansion for the Zakharov-Shabat inverse scattering transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 31(1):121–133, 1976.
- [38] D.J. Kaup and A.C. Newell. Soliton as particle, oscillator in slowly changing media: a singular perturbation theory. *Proc. Roy. Soc.*, 361:413–446, 1978.
- [39] V.I. Karpman. Soliton evolution in presence of perturbations. *Phys. Scr.*, 20:462–478, 1979.
- [40] A.G. Litvak and V.I. Talanov. A parabolic equation for calculating the fields in dispersive nonlinear medium. *Radiophys. Quant. Electron*, 10:296–302, 1967.
- [41] V. E. Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2:86–96, 1968.
- [42] H. Hasimoto and H. Ono. Nonlinear modulation of gravity waves. *Proc. Roy. Soc.*, 33:805–811, 1972.
- [43] K.A. Gorshkov, L.A. Ostrovsky, and V.V. Papko. Interactions and bound states of solitons as classical particles. *Sov. Phys. JETP*, 44:306–311, 1976.
- [44] A. Bondeson, M. Lisak, and D. Anderson. Soliton perturbations: a variational principle for the soliton parameters. *Physica Scripta*, 20:479–485, 1979.
- [45] Y. Kodama and M.J. Ablowitz. Perturbations of solitons and solitary waves. *Stud. Appl. Math.*, 64:225–245, 1981.

- [46] K.A. Gorshkov and L.A. Ostrovsky. Interaction of solitons in nonintegrable systems: direct perturbation method and applications. *Physica D*, 3:428–438, 1981.
- [47] J.P. Gordon. Interaction forces among solitons in optical fibers. *Opt. Lett.*, 8:596–598, 1983.
- [48] D. Anderson and M. Lisak. Bandwidth limits due to mutual pulse interaction in optical soliton communication systems. *Opt. Lett.*, 11:174–176, 1986.
- [49] C. Desem and P.L. Chu. Soliton-soliton interactions. In J.R. Taylor, editor, *Optical solitons-theory and experiment*, chapter 5, pages 108–151. Cambridge University Press, 1992.
- [50] A.I. Maimistov and A.M. Basharov. *Nonlinear optical waves*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [51] L.A. Ostrovsky and A.I. Potapov. *Modulated waves: theory and applications*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore-London, 1999.
- [52] L.A. Ostrovsky and K. Gorshkov. Perturbation theories for nonlinear waves. In P.L. Christiansen, M.P. Sorensen, and A.C. Scott, editors, *Nonlinear science at the dawn of the 21st century*. Springer, Berlin, 2000.
- [53] V.S. Gerdjikov. Basic aspects of soliton theory, sixth international conference on geometry. In I.M. Mladenov and A.C. Hirshfeld, editors, *Integrability and quantization*, pages 78–125. Sofia, Bulgaria, 2005.
- [54] A. Biswas, D. Milovic, and M. Edwards. *Mathematical theory of dispersion-managed optical solitons*. Springer Science Business Media, Berlin, 2010.

- [55] K. Gorshkov, L. Ostrovsky, and Yu. Stepanyants. *Perturbation theories, evolution equations, and solitons world*. Scientific Publishing Company, 2014.
- [56] L.A. Ostrovsky. *Asymptotic perturbation theory of waves*. World Scientific, 2014.
- [57] T.P. Horikis and D.J. Frantzeskakis. Perturbations of solitons in optical fibers. In G.D. Peng, editor, *Handbook of optical fibers*. Springer, Singapore, 2018.
- [58] K.J. Blow and N.J. Doran. Bandwidth limits of nonlinear (soliton) optical communication systems. *Electronics Letters*, 19:429–430, 1983.
- [59] E.M. Dianov, Z.S. Nikonova, and V.N. Serkin. Influence of optical losses on the dynamics of nonlinear propagation of pulses in single-mode fiber waveguides. *Quantum Electron*, 16:219–222, 1986.
- [60] E.M. Dianov, Z.S. Nikonova, and V.N. Serkin. Influence of frequency modulation on the interaction of pulses in fiber waveguides. *Quantum Electron*, 16:1148–1150, 1986.
- [61] M. Wadati. The modified Korteweg de Vries equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 34:1289–1296, 1973.
- [62] I. M. Gel’fand and B. M. Levitan. Perturbation theory for solitons. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 15:309–360, 1951.
- [63] V. A. Marchenko. Reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves. *kl. Akad. Nauk SSSR*, 104:695–698, 1955.
- [64] R. Hirota. Exact envelope-solutions of nonlinear wave equation. *J. Math. Phys.*, 14:805–809, 1973.

- [65] Nonlinear Evolution Equations Solitons and the Inverse Scattering. *M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson*. Cambridge University Press, 1991.
- [66] B.A. Malomed Y. Kivshar. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Rev. Modern Phys.*, 61(4):763–915, 1989.
- [67] V. I. Karpman. Stabilization of soliton instabilities by higher order dispersion: KdV type equations. *Phys. Lett. A*, 210(1-2):77–84, 1996.
- [68] T. C. Hernandez, E. V. Vargas, V.N. Serkin, M. A. Granados, T L Belyaeva, R. P. Moreno, and L. M. Lara. Dynamics of solitons in the model of nonlinear Schrödinger equation with an external harmonic potential: I. bright solitons. *Quantum Electronics*, 35(9):778, 2005.
- [69] F.M. Mitschke and L.F. Mollenauer. Discovery of the soliton self-frequency shift. *Opt. Lett.*, 11:659–661, 1986.
- [70] J.P. Gordon. Theory of the soliton self-frequency shift. *Opt. Lett.*, 11:662–664, 1986.
- [71] R. Bullough and P. J. Caudrey. *Solitons*. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [72] J. Fujioka. *NLS una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger*. Serie FENOMECC (Vol. 4): UNAM, México, 2003.
- [73] V. N. Serkin and A. Hasegawa. Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4502–4505, 2000.
- [74] V.N. Serkin and A. Hasegawa. Soliton management in the nonlinear Schrödinger equation model with varying dispersion, nonlinearity, and gain. *Jetp. Lett.*, 72:125–129, 2000.

- [75] V.N. Serkin and A. Hasegawa. Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain: application for soliton dispersion. *IEEE J. Select. Topics Quant. Electron*, 8:418–431, 2002.
- [76] V. N. Serkin, A. Hasegawa, and T. L. Belyaeva. Nonautonomous solitons in external potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 98:074102, 2007.
- [77] V.N. Serkin and T.L. Belyaeva. High-energy optical Schrödinger solitons. *JETP Letters*, 74:573–577, 2001.
- [78] G.M. Melchor, M.A. Granados, and G.H. Corro. On the problem of ideal amplification of optical solitons. *Quantum Electronics*, 32:1020–1028, 2002.
- [79] A.H. Arnous, M.Z. Ullah, M. Asma, S.P. Moshokoa, Q. Zhou, M. Mirzazadeh, A. Biswas, and M. Belic. Dark and singular dispersive optical solitons of Schrödinger-Hirota equation by modified simple equation method. *Optik*, 136:445–450, 2017.
- [80] C.K. Kuo. A novel method for finding new multi-soliton wave solutions of the completely integrable equations. *Optik*, 139:283–290, 2017.
- [81] H. Triki, F. Azzouzi, A. Biswas, S.P. Moshokoa, and M. Belic. Bright optical solitons with Kerr law nonlinearity and fifth order dispersion. *Optik*, 128:172–177, 2017.
- [82] H. Triki, M.M. Babatin, and A. Biswas. Chirped bright solitons for Chen-Lee-Liu equation in optical fibers and PCF. *Optik*, 149:300–303, 2017.
- [83] S. Vijayalekshmi, S. Mahalingam, and M.S. Mani Rajan. Symbolic computation on tunable nonautonomous solitons in inhomogeneous NLSE system with generalized external potential. *Optik*, 145:240–249, 2017.

- [84] S. Zhang and J. Li. Soliton solutions and dynamical evolutions of a generalized AKNS system in the framework of inverse scattering transform. *Optik*, 137:228–237, 2017.
- [85] X.H. Zhao, B. Tian, and Y.J. Guo. Solitons, Lax pair and infinitely-many conservation laws for a higher-order nonlinear Schrödinger equation in an optical fiber. *Optik*, 132:417–426, 2017.
- [86] F.D. Tappert. Applications of fast Fourier transforms in the numerical simulation of wave propagation. *Trans. Amer. Nucl. Soc.*, 15:277, 1972.
- [87] F.D. Tappert. Numerical solutions of the Korteweg de Vries equation and its generalizations by the split-step Fourier method lectures in applied mathematics. *American Mathematical Society, New York*, 15:215–216, 1974.
- [88] E.M. Dianov, A.B. Grudinin, A.M. Prokhorov, and V.N. Serkin. Non-linear transformation of laser radiation and generation of Raman solitons in optical fibers. In J.R. Taylor, editor, *Optical solitons-theory and experiment*, chapter 7, pages 197–265. Cambridge University Press, 1992.
- [89] M.E. Maguiña-Palma, T.L. Belyaeva, M.A. Agüero, F.G. Garcia-Santibañez, and V.N. Serkin. Application of Karpman-Maslov-Solov’ev soliton perturbation theory to systems with distributed gain or losses. *Optik*, 181:99–104, 2019.
- [90] J. Satsuma and N. Yajima. Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media. *Progr. Theoret. Phys. Suppl.*, 55:284–306, 1974.

- [91] V.N. Serkin, T.L. Belyaeva, M.A. Aguëro, and M.E. Maguiña-Palma. Impact of losses or gain on interaction of the NLSE solitons: the interplay between direct computer experimentation and the generalized Karpman-Solov'ev perturbation approach. *Optik*, 182:148–158, 2019.
- [92] A. Hause, C. Mahnke, and F. Mitschke. Impact of fiber loss on two-soliton states: substantial changes in eigenvalue spectrum. *Phys. Rev. A*, 98:033814, 2018.
- [93] F. Mitschke, A. Hause, and C. Mahnke. Solitons in fibers with loss beyond small perturbation. *Phys. Rev. A*, 96:013826, 2017.