UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

ESPACIOS FUERTEMENTE CONEXOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ELIZABETH CASTRO ROCENDO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

CODIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

JULIO 2019

Índice general

Introducción

Cuando se habla sobre el concepto de conexidad, a menudo nos encontramos con el criterio de que un espacio es conexo si y sólo si cualquier función continua de él al espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante. Sería interesante ver que pasa cuando remplazamos el espacio discreto de dos puntos por algún otro espacio. En este sentido, definimos un espacio X es Z**-conexo** si cualquier función continua de X a Z es constante, donde Z es un espacio T_1 y no degenerado, este concepto fue definido en [1], en el cual se da un estudio detallado de la Z-conexidad y la conexidad fuerte.

En este proyecto de tesis estudiamos las propiedades que se derivan de este nuevo concepto, las cuales tienen mucha similitud con las correspondientes para el concepto habitual de conexidad.

Este trabajo está constituido por tres capítulos; en el primer capítulo se presentan algunos conceptos, resultados y simbología que se utilizarán a lo largo del trabajo. También se ofrece un breve repaso de conexidad.

En el segundo capítulo se introduce el concepto de Z-conexo, también se muestran dos equivalencias entre la Z-conexidad y la conexidad. Se presenta un estudio de las diferentes propiedades de la Z-conexidad, por ejemplo, la imagen continua de un Z-conexo es Z-conexo, el producto topológico de Z-conexos es Z-conexo, entre otras. Finalmente se presentan propiedades sobre Z-conexidad local, como por ejemplo, en la familia de los espacios localmente Z-conexos, se tiene que la Z-conexidad y la conexidad son equivalentes.

En la primer parte del Capítulo 3, se presenta el concepto de espacio fuertemente conexo. Aquí, la definición de espacios fuertemente conexos se compara con la conexidad. Además se prueban propiedades importantes de los espacios fuertemente conexos. Probaremos que en la familia de los espacios compactos y de Hausdorff la conexidad fuerte y la conexidad son equivalentes. También mostraremos que si un espacio es localmente compacto, localmente conexo, conexo y de Hausdorff, entonces éste es fuertemente conexo. Por último probaremos que un espacio métrico completo, conexo y localmente conexo es fuertemente conexo.

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto, decimos que X es* ***no degenerado*** *si contiene más de un punto.*

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, introducimos la siguiente notación:

1) El **interior** de A lo denotaremos por $\mathrm{Int}_X(A)$. En caso de que no haya confusión con el espacio, usaremos sólo el símbolo $\mathrm{Int}(A)$.

2) La **cerradura** de A la denotaremos por $\mathrm{Cl}_X(A)$. En caso de que no haya confusión con el espacio, usaremos sólo el símbolo $\mathrm{Cl}(A)$.

Definición 1.1.2. *Sean A un conjunto y $B \subset A$. Definimos la función $i_B : B \longrightarrow A$ como $i_B(x) = x$. A la función i_B se le llama la* ***función inclusión****. En caso de que no haya confusión con el espacio B, usaremos el símbolo i para denotar a la función inclusión.*

Lema 1.1.3. *Sean A, B conjuntos y $C \subset B$. Si $f : A \longrightarrow C$ es una función tal que $i_C \circ f : A \longrightarrow B$ es constante, entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos que f no es constante. Entonces existen $a, b \in A$ tales que $f(a) = x$ y $f(b) = y$ donde $x, y \in C$, entonces $i_C \circ f(a) = x$ y $i_C \circ f(b) = y$, esto contradice que $i_C \circ f$ es constante. Por lo que f es constante. $\square$

Definición 1.1.4. *Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la* ***propiedad de la intersección finita*** *si cada subcolección finita*

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir, $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ es no vacía.

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [5, Teorema 26.9, p. 193].

Proposición 1.1.5. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, se cumple que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía.*

1.1.1. Producto de espacios

Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Definimos la topología producto de estos espacios de la siguiente manera. Primero, consideremos la siguiente familia de funciones:
$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{x : \Lambda \to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha : x$ es una función y $x(\alpha) \in X_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda\}$.

Ahora, sea $X = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Para cada $\alpha \in \Lambda$, definamos $\pi_\alpha^X : X \to X_\alpha$ como $\pi_\alpha^X(x) = x(\alpha)$. La función π_α^X es conocida con el nombre de α-ésima proyección. En caso de que no haya confusión con el espacio X, usaremos sólo el símbolo π_α.

Para definir la topología de X, sea

$$\mathcal{S} = \{(\pi_\alpha^X)^{-1}(U) : \alpha \in \Lambda \text{ y } U \text{ es abierto en } X_\alpha\}.$$

Entonces consideremos la mínima topología para $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ que tiene como subbase a $\mathcal{S}$, a esta topología se le conoce como la topología producto.

Cuando Λ sea igual a un conjunto finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, usaremos que $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$, sin hacer ninguna distinción.

Para la prueba del siguiente resultado ver [3, Proposición. 2.3.2, p. 78].

Proposición 1.1.1.1. *Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. Sea $A = \prod_{s\in S} A_s$, donde A_s es un subespacio de X_s para cada $s \in S$. Entonces la topología producto para el espacio A y la topología relativa para A coinciden.*

La prueba del siguiente resultado se encuentra en [3, Proposición. 2.3.8, p. 79].

Proposición 1.1.1.2. *Sea* $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *una familia de espacios topológicos. Si* $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *es una biyección, entonces* $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ *y* $\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} X_{\phi(\alpha)}$ *son homeomorfos.*

Para probar el siguiente resultado necesitamos la siguiente notación. Considremos la siguiente familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con Λ un conjunto infinito de índices. Sean $x \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y $\Omega \subset \Lambda$ finito no vacío. Por cada $\alpha \in \Lambda$, sea

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \in \Omega \\ \{x(\alpha)\} & \text{si } \alpha \in \Lambda \setminus \Omega. \end{cases}$$

Denotemos $X(\Omega, x) = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$.

Lema 1.1.1.3. *Sean* $x \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *y* $\Omega \subset \Lambda$ *finito no vacío. Entonces el espacio* $X(\Omega, x)$ *es homeomorfo al producto finito* $\prod\limits_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$.

Demostración. Sean $x \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $Y = X(\Omega, x)$ y
$X = X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$. Definamos $f : Y \to X$ como $f(y) = (y(\alpha_1), \ldots, y(\alpha_n))$. Probaremos que f es un homemorfismo. Para probar la inyectividad, sean $y, w \in Y$ tales que $f(y) = f(w)$. Sabemos que $y(\alpha) = w(\alpha)$ para toda $\alpha \in \Lambda \setminus \Omega$. Dado que $f(y) = f(w)$, $(y(\alpha_1), \ldots, y(\alpha_n)) = (w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n))$, de donde $y(\alpha_i) = w(\alpha_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo que $y = w$. Esto prueba la inyectividad de f.
Veamos la suprayectividad de f. Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$, por el Axioma de Elección, $Y \neq \emptyset$. Sea $y \in \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Entonces $y(\alpha_i) = a_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, $f(y) = (a_1, \ldots, a_n)$. Por lo que f es suprayectiva.

Para la continuidad de f, probaremos que la composición de las correspondientes proyecciones con f son continuas. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $\pi^Y_{\alpha_i}$ es continua, es suficiente probar que $\pi^X_{\alpha_i} \circ f = \pi^Y_{\alpha_i}$. Notemos que ambas funciones $\pi^X_{\alpha_i} \circ f$ y $\pi^Y_{\alpha_i}$ están definidas sobre el espacio Y. Ahora, sea $y \in Y$. Entonces

$$(\pi^X_{\alpha_i} \circ f)(y) = \pi^X_{\alpha_i}(y(\alpha_1), \ldots, y(\alpha_n)) = y(\alpha_i) = \pi^Y_{\alpha_i}(y).$$

Esto prueba la igualdad de las funciones. Por lo que f es continua.

Para la continuidad de f^{-1}, probaremos que la composición de las correspondientes proyecciones con f^{-1} son continuas. Sea $\alpha \in \Lambda$. Consideremos los siguientes casos.

Caso I. Supongamos que $\alpha = \alpha_i$ para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$.
Dado que $\pi^X_{\alpha_i}$ es continua, es suficiente probar que $\pi^Y_{\alpha_i} \circ f^{-1} = \pi^X_{\alpha_i}$. Notemos que ambas funciones $\pi^Y_{\alpha_i} \circ f^{-1}$ y $\pi^X_{\alpha_i}$ están definidas sobre el espacio X. Ahora, sean $(a_1, \dots, a_n) \in X$ y $y \in \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ tales que $y(\alpha_j) = a_j$ para $j \in \{1, \dots, n\}$ y $f^{-1}((a_1, \dots, a_n)) = y$. De donde

$$\begin{aligned}(\pi^Y_{\alpha_i} \circ f^{-1})((a_1, \dots, a_n)) &= \pi^Y_{\alpha_i}(f^{-1}((a_1, \dots, a_n))) \\ &= \pi^Y_{\alpha_i}(y) \\ &= y(\alpha_i) \\ &= a_i \\ &= \pi^X_{\alpha_i}((a_1, \dots, a_n)).\end{aligned}$$

Esto prueba la igualdad de estas funciones.

Caso II. Supongamos que $\alpha \neq \alpha_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.
En este caso probaremos que $\pi^Y_\alpha \circ f^{-1}$ es una función constante. Para ver esto, sean $(a_1, \dots, a_n) \in X$ y $y \in \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ tales que $f^{-1}((a_1, \dots, a_n)) = y$. Así, dado que $y(\alpha) = x(\alpha)$, se sigue que:

$$(\pi^Y_\alpha \circ f^{-1})((a_1, \dots, a_n)) = \pi^Y_\alpha(f^{-1}((a_1, \dots, a_n))) = \pi^Y_\alpha(y) = y(\alpha) = x(\alpha).$$

Por lo que $\pi^Y_\alpha \circ f^{-1}$ es igual a la constante $\{x(\alpha)\}$. Así, $\pi^Y_\alpha \circ f^{-1}$ es continua.

De lo anterior, f es un homemorfismo. Finalmente, por la Proposición 1.1.1.2, Y es homeomorfo a $\prod\limits_{\alpha \in \Omega} X_\alpha$. □

1.2. Espacios conexos

A continuación recordamos algunas definiciones y resultados básicos sobre conexidad.

Definición 1.2.1. *Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es **conexo** si cualquier función continua del espacio $(A, \tau|_A)$ al espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante.*

En la literatura aparece el concepto de conexidad definido en términos de una separación, el cual es equivalente al mencionado arriba, como se probará en la Proposición 1.2.3. A continuación introducimos el concepto de separación.

Definición 1.2.2. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $U, V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. *Decimos que la pareja* U *y* V *de subconjuntos de* X *es una* ***separación*** *de* X *si* $U \cup V = X$ *y* $U \cap V = \emptyset$. *A ésta pareja con estas propiedades la denotaremos por* $U|V$.

Proposición 1.2.3. *Sea* X *un espacio topológico. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

a) X *es conexo.*

b) X *no admite separaciones.*

Demostración. Para probar que a) implica b), vamos a suponer que existe una separación $U|V$ de X. Definimos $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$, como $f(x) = 0$ si $x \in U$ y $f(x) = 1$ si $x \in V$. Notemos que f no es constante. La continuidad de f se sigue de que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = U$, $f^{-1}(\{1\}) = V$ y $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$, por lo que X no es conexo, esto es una contradicción. Por lo tanto, no existe una separación de X.
Para probar que b) implica a). Supongamos que X no es conexo, es decir, existe una función continua $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que f no es constante. Así $f^{-1}(\{0\}) = U$ y $f^{-1}(\{1\}) = V$ son no vacíos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$. Por lo que $U|V$ es una separación de X, esto es una contradicción. Por lo tanto X es conexo. $\square$

A continuación recordamos algunos resultados conocidos de topología básica, por lo que no ponemos la referencia de algunos de éstos.

Proposición 1.2.4. *La imagen continua de un espacio conexo es un conjunto conexo.*

Proposición 1.2.5. *La unión de cualquier familia de conjuntos conexos con un punto en común es conexa.*

Proposición 1.2.6. *Sean* A *y* B *subconjuntos de* X *tales que* $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}(A)$. *Si* A *es conexo, entonces* B *es conexo.*

Proposición 1.2.7. *El producto topológico de una familia arbitraria de espacios conexos es conexo.*

Definición 1.2.8. *Sean X un espacio tolológico y $p \in X$. Definimos la* ***componente conexa*** *C de p, como la unión de todos los conexos en X que contienen a p. La denotaremos por $C(p)$.*

Proposición 1.2.9. *Sea X un espacio topológico. Para cada punto $p \in X$, la componente $C(p)$ es cerrada en X.*

Definición 1.2.10. *Sea X un espacio topológico. Definimos una relación R en X de la siguiente manera: dados $x, y \in X$, entonces $(x, y) \in R$ si y sólo si todo abierto-cerrado en X que contiene a x también contiene a y. Es fácil probar que R es una relación de equivalencia en X. Las clases de equivalencia reciben el nombre de* ***cuasi-componentes*** *de X.*

Proposición 1.2.11. *Sea X un espacio topológico. Entonces se cumplen cada una de las siguientes condiciones:*

1. *Cada componente de X es un subconjunto de una cuasi-componente.*

2. *La cuasi-componente de x en X es la intersección de todos los abiertos y cerrados que contienen a x.*

3. *Si X es compacto y de Hausdorff, entonces cuasi-componentes y componentes coinciden.*

Demostración. Para probar 1., sean C una componente de X y $x, y \in C$. Supongamos que x y y están en distintas cuasi-componentes de X, entonces existe un abierto-cerrado A en X tal que $x \in A$ pero $y \notin A$. Notemos, $x \in C \cap A$, $y \in C \setminus A$, $C = (C \cap A) \cup (C \setminus A)$, $C \cap A$ y $C \setminus A$ son cerrados pues A es abierto-cerrado. Así, $C \cap A)|(C \setminus A)$ es una separación de C, esto es una contradicción. De donde x y y están en una cuasi-componente de X. Por lo tanto C está contenida en una cuasi-componente.

Para demostrar 2., sean Q una cuasi-componente de X, $x \in Q$ y

$$\mathcal{Q} = \{F \subset X : F \text{ es abierto y cerrado y } x \in F\}.$$

Probaremos que $Q = \bigcap \mathcal{Q}$. Sea $y \in Q$. Entonces $(x, y) \in R$. Así, dado que $x \in \bigcap \mathcal{Q}$, $y \in \bigcap \mathcal{Q}$.
Ahora, sea $z \in \bigcap \mathcal{Q}$. Veamos que $(x, z) \in R$. Sea F un abierto y cerrado tal que $x \in F$. De donde $F \in \mathcal{Q}$. Así, como $z \in \bigcap \mathcal{Q}$, $x, z \in F$. Por lo que $z \in Q$. Esto prueba que $Q = \bigcap \mathcal{Q}$.

Para probar 3., sean C una componente de X, $x \in C$ y Q la cuasi-componente de X la cual contiene a x. Probaremos que $C = Q$. Por 1.,

$C \subset Q$.
Para probar la otra contención, es suficiente mostrar que Q es conexa. Supongamos que existen dos conjuntos cerrados y ajenos A y B distintos del vacío tales que $Q = A \cup B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \in A$. Por la normalidad del espacio X, existen conjuntos abiertos $V, W \subset X$ tales que $A \subset V$, $B \subset W$ y $V \cap W = \emptyset$. Denotamos por $\mathcal{U}$ a la familia de todos los abiertos y cerrados tal que $\bigcap \mathcal{U} = Q$ y sea $\mathcal{F} = \{U \setminus (V \cup W) : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que los elementos de $\mathcal{F}$ son subconjuntos cerrados de X. Veamos que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Tomemos $y \in \bigcap \mathcal{F}$. En particular $y \notin V \cup W$. Por otra parte, $y \in \bigcap \mathcal{U}$. Así, dado que $\bigcap \mathcal{U} \subset V \cup W$, entonces $y \in V \cup W$, lo cual es una contradicción. Por lo que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
Ahora, como $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
X &= X \setminus \bigcap \mathcal{F} \\
&= X \setminus (\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \setminus (V \cup W)) \\
&= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X \setminus (U \setminus (V \cup W)) \\
&= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X \setminus (U \cap (X \setminus (V \cup W))) \\
&= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} ((X \setminus U) \cup (V \cup W)).
\end{aligned}
$$

Como cada $(X \setminus U) \cup (V \cup W)$ es abierto, por la compacidad de X, existen $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ tales que:

$$
X = \bigcup_{i=1}^{k} ((X \setminus U_i) \cup (V \cup W)).
$$

De donde:

$$\begin{aligned}
\emptyset &= X \setminus \bigcup_{i=1}^{k}((X \setminus U_i) \cup (V \cup W)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{k} X \setminus ((X \setminus U_i) \cup (V \cup W)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{k}(U_i \cap (X \setminus (V \cup W))) \\
&= (\bigcap_{i=1}^{k} U_i) \cap (X \setminus (V \cup W)).
\end{aligned}$$

Por lo que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \subset V \cup W$. Notemos que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ es un abierto y cerrado en X y $x \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Así, $Q \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$.
Como $\mathrm{Cl}(V) \cap (V \cup W) = (\mathrm{Cl}(V) \cap V) \cup (\mathrm{Cl}(V) \cap W) = V$,

$$\mathrm{Cl}(V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i) \subset \mathrm{Cl}(V) \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i = \mathrm{Cl}(V) \cap (V \cup W) \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i = V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i.$$

De donde, $V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ es un abierto y cerrado. Así, dado que $x \in A \subset V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, se tiene que $Q \subset V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Por lo que $B \subset Q \cap W \subset V \cap (\bigcap_{i=1}^{k} U_i) \cap W = \emptyset$, esto es una contradicción.
Lo cual prueba que la cuasi-componente Q es conexa. Por lo tanto $Q = C$. $\square$

1.2.1. Conexidad local

Definición 1.2.1.1. *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo en un punto*** $p \in X$ *si para cada abierto U que contiene a p, existe un abierto W conexo que contiene a p y se queda contenido en U. Se dice que X es* ***localmente conexo*** *si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.2.1.2. *Un espacio topológico X es* ***conexo en pequeño en un punto*** $p \in X$ *si para cada abierto U que contiene a p, existe una* *vecindad V de p conexa tal que $V \subset U$. Se dice que X es* ***conexo en pequeño*** *si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Proposición 1.2.1.3. *Sea X un espacio topológico. Si X es conexo en pequeño, entonces para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es un abierto conexo en X.*

Demostración. Sean U un abierto no vacío en X y C una componente de U. Consideremos $x \in C$. Por hipótesis, existe una vecindad V_x de x conexa tal que $V_x \subset U$. Como V_x es conexa, debe estar enteramente contenida en la componente C de U. Así, dado que lo anterior se realizó para todos los puntos de C, $\bigcup\limits_{x \in C} \mathrm{Int}(V_x) = \bigcup\limits_{x \in C} V_x = C$. Por lo que C es un abierto en X y por la Proposición 1.2.5, C es conexa. Por lo tanto C es un abierto conexo en X. □

Proposición 1.2.1.4. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es localmente conexo.*

b) *X es conexo en pequeño.*

Demostración. a) implica b), se sigue de que los abiertos de X son vecindades de cada uno de sus puntos.

Para probar b) implica a), por la Proposición 1.2.1.3, la familia de las componentes de cada abierto de X es una base de conjuntos abiertos conexos para la topología de X. Por lo que X es localmente conexo. □

1.3. Teorema de los golpes en la frontera

Para la prueba del siguiente resultado ver [4, Teorema. 2.41, p. 104].

Proposición 1.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de compactos cerrados en un espacio topológico X. Si $U \subset X$ es un abierto y $\bigcap \mathcal{A} \subset U$, entonces existe una subfamilia finita $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcap \mathcal{T} \subset U$.*

Proposición 1.3.2. *Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si A y B son dos cerrados no vacíos en X y ninguna componente de X intersecta a A y a B, entonces existe una separación $X_A|X_B$ de X tal que $A \subset X_A$ y $B \subset X_B$.*

Demostración. Fijemos $a \in A$. Probaremos que existe un abierto y cerrado V_a en X tal que $a \in V_a \subset X \setminus B$. Sea $\mathcal{H}_a$ la familia de los conjuntos abiertos y cerrados en X que contienen al punto a. Notemos que $X \in \mathcal{H}_a$. Por la Proposición 1.2.11 2. y 3., $\bigcap H_a$ es una componente de X. Así, por hipótesis, $\bigcap H_a \cap B = \emptyset$. De donde $\bigcap H_a \subset X \setminus B$. Según la Proposición 1.3.1, existen $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{H}_a$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i \subset X \setminus B$. Hagamos $V_a = \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i$. Claramente $V_a \in \mathcal{H}_a$.
Por otra parte, tenemos que la familia $\{V_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A. Dado que A es compacto, existen $V_{a_1}, \ldots, V_{a_k} \in \{V_a : a \in A\}$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{a_i}$. Ahora, hagamos:

$$X_A = \bigcup_{i=1}^{k} V_{a_i} \text{ y } X_B = X \setminus X_A.$$

Notemos que los conjuntos X_A y X_B cumplen con las condiciones requeridas.

□

Proposición 1.3.3. *Sea X un espacio de Hausdorff. Si N es un subespacio compacto y conexo de X y G es un conjunto abierto en X tal que $N \cap G \neq \emptyset$ y $N \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$, entonces cada componente de $N \cap \mathrm{Cl}(G)$ intersecta a $\mathrm{Fr}(G)$.*

Demostración. Supongamos que alguna componente A de $N \cap \mathrm{Cl}(G)$ no intersecta a $\mathrm{Fr}(G)$. Sea $B = \mathrm{Fr}(G) \cap N$. Probaremos que $B \neq \emptyset$. Supongamos que $\mathrm{Fr}(G) \cap N = \emptyset$. Necesitamos probar que $(N \cap G)|(N \cap (X \setminus G))$ es una separación de N. Por hipótesis, $N \cap G \neq \emptyset$ y $N \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$. Primero probaremos que $(N \cap G) \cap \mathrm{Cl}_N(N \cap (X \setminus G)) = \emptyset$. Tomemos $x \in (N \cap G) \cap \mathrm{Cl}_N(N \cap (X \setminus G))$. Así, dado que $N \cap G$ es abierto en N, se tiene $(N \cap G) \cap (N \cap (X \setminus G)) \neq \emptyset$, esto es una contradicción. Esto prueba que $(N \cap G) \cap \mathrm{Cl}_N(N \cap (X \setminus G)) = \emptyset$.
Ahora, probaremos que $\mathrm{Cl}_N(N \cap G) \cap (N \cap (X \setminus G)) = \emptyset$.
Dado que

$$\begin{aligned}
\emptyset &= \mathrm{Fr}(G) \cap N \\
&= (\mathrm{Cl}(G) \cap (X \setminus G)) \cap N \\
&= (\mathrm{Cl}(G) \cap N) \cap (N \cap (X \setminus G)).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cl}_N(N \cap G) \cap (N \cap (X \setminus G)) &\subset (\mathrm{Cl}(N \cap G) \cap N) \cap (N \cap (X \setminus G)) \\
&\subset (\mathrm{Cl}(G) \cap N) \cap (N \cap (X \setminus G)).
\end{aligned}$$

se sigue que $\mathrm{Cl}_N(N \cap G) \cap (N \cap (X \setminus G)) = \emptyset$. Con lo anterior, se tiene que $(N \cap G)|(N \cap (X \setminus G))$ es una separación de N, lo cual es una contradicción. Esto probaría que $B \neq \emptyset$.

Dado que $B \subset N \cap \mathrm{Cl}(G)$, tenemos que $A \cap B = \emptyset$. Claramente A y B son subconjuntos cerrados no vacíos de $N \cap \mathrm{Cl}(G)$. Dado que $N \cap \mathrm{Cl}(G)$ es compacto y cada componente de $N \cap \mathrm{Cl}(G)$ no intersecta tanto a A como a B, por la Proposición 1.3.2, existe una separación $K_A|K_B$ de $N \cap \mathrm{Cl}(G)$ tal que $A \subset K_A$ y $B \subset K_B$.

Ahora probaremos que $((N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cup K_B)|K_A$ es una separación de N. Claramente $N = ((N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cup K_B) \cup K_A$, $(N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cup K_B$ y K_A son no vacíos. Finalmente probaremos que $\mathrm{Cl}(N \setminus \mathrm{Cl}(G) \cup K_B) \cap K_A = \emptyset$ y $((N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cup K_B) \cap \mathrm{Cl}(K_A) = \emptyset$. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. Supongamos que existe $p \in \mathrm{Cl}(N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cap K_A$.
Para probar la primera parte, supongamos que existe $p \in \mathrm{Cl}(N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cap K_A$. Entonces $p \in \mathrm{Cl}(X \setminus \mathrm{Cl}(G))$. Además, dado que $p \in K_A \subset N \cap \mathrm{Cl}(G)$, $p \in \mathrm{Cl}(G)$ y $p \in \mathrm{Fr}(G) \cap N = B$. Así, $p \in K_B$, esto es una contradicción. Esto prueba que $\mathrm{Cl}(N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cap K_A = \emptyset$.

Caso II. Supongamos que existe $p \in (N \setminus \mathrm{Cl}(G)) \cap \mathrm{Cl}(K_A)$.
Entonces $p \in N \setminus \mathrm{Cl}(G)$. Ahora, dado que $\mathrm{Cl}(K_A) \subset \mathrm{Cl}(N \cap \mathrm{Cl}(G)) \subset \mathrm{Cl}(G)$, $p \in \mathrm{Cl}(G)$, esto es una contradicción.

Caso III. Supongamos que existe $p \in \mathrm{Cl}(K_B) \cap K_A$.

Dado que $K_A \subset N \cap \mathrm{Cl}(G)$, se tiene que $p \in \mathrm{Cl}(K_B) \cap N \cap \mathrm{Cl}(G) = \mathrm{Cl}_{N \cap \mathrm{Cl}(G)}(K_B) = K_B$, esto es una contradicción.

Caso IV. Supongamos que existe $p \in \mathrm{Cl}(K_A) \cap K_B$.
La prueba de este caso es similar al caso III.

Usando lo anterior, se tiene que N no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, cada componente de $N \cap \mathrm{Cl}(G)$ intersecta a $\mathrm{Fr}(G)$. $\square$

Espacios Z-conexos

2.1. Z-conexidad

Recordemos que un espacio X es conexo si y sólo si cualquier función continua de X al espacio de dos puntos con la topología discreta es constante. El concepto de Z-conexo se obtiene remplazando el espacio discreto $\{0, 1\}$ por algún otro espacio.

Definición 2.1.1. *Sean X y Z espacios topológicos. Decimos que X es Z-**conexo** si cualquier función continua de X a Z es constante.*

En la definición anterior es necesario que Z sea no degenerado, de lo contrario todos los espacios serían Z-conexos ya que la imagen de X es un singular. Además, a lo largo del trabajo usaremos la letra Z para el concepto de Z-conexidad, en el caso de que pueda haber alguna confusión usaremos los siguientes símbolos Z', Z'', ..., para denotar Z'-conexidad, etc.

Introducimos la siguiente notación: denotamos por 2_{Dis} al espacio $\{0, 1\}$ con la topología discreta.

Observemos que todo conexo es 2_{Dis}-conexo. De igual manera para un espacio Z con la topología discreta, todo conexo es Z-conexo.

Ejemplo 2.1.2. *Sea Z un espacio topológico no degenerado T_1. Los siguientes espacios son Z-conexos.*

1. *Todo espacio no vacío indiscreto.*

2. *El espacio de Sierpinski, es decir el conjunto de dos puntos distintos $\{a, b\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.*

3. *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{(-\infty, c) : c \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.*

4. *Sean X un conjunto no degenerado y $p \in X$. Consideremos a X con la topología $\tau = \{U \subset X : p \in U\} \cup \{\emptyset\}$.*

5. *Sean X un conjunto no degenerado y $p \in X$. Consideremos a X con la siguiente topología $\tau = \{U \subset X : p \notin U\} \cup \{X\}$.*

Demostración. Para ver 1., sean X un conjunto no vacío y $\tau = \{\emptyset, X\}$. En el caso de que X sea degenerado, se tiene lo deseado. Ahora, consideremos X con más de un punto. Sea $f : X \longrightarrow Z$ una función continua. Supongamos que f no es constante. Entonces existen $x \neq y \in X$ tales que $f(x) \neq f(y)$. Como Z es T_1, existe un abierto U tal que $f(x) \in U$ y $f(y) \notin U$. De donde $y \notin f^{-1}(U)$. Ahora, dado que f es continua y X es indiscreto, $x, y \in f^{-1}(U) = X$, esto es una contradicción. Por lo que f es constante. Esto prueba la Z-conexidad de X.

Para probar 2. sea $f : X \longrightarrow Z$ una función continua. Supongamos que f no es constante. Entonces existen $a, b \in X$ tales que $f(a) \neq f(b)$. Como Z es T_1, existe un abierto U tal que $f(b) \in U$ y $f(a) \notin U$. De donde $a \notin f^{-1}(U)$. Ahora, dado que f es continua y $b \in f^{-1}(U)$ tenemos que $f^{-1}(U) = X$, esto es una contradicción. Por lo que f es constante. Esto prueba la Z-conexidad de X.

Vamos a demostrar 3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow Z$ una función continua. Supongamos que f no es constante. Entonces existen $x \neq y \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) \neq f(y)$. Podemos suponer sin pérdidad de generalidad que $x < y$. Como Z es T_1, existe un abierto U tal que $f(y) \in U$ y $f(x) \notin U$. De donde $x \notin f^{-1}(U)$. Ahora, dado que f es continua y por la forma en que se define la topología, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(U) = (-\infty, z)$ o $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$. En cualquiera de los casos, $x, y \in f^{-1}(U)$, lo cual es una contradicción. Por lo que f es constante. Con esto probamos que $\mathbb{R}$ es Z-conexo.

Con el fin de demostrar 4., sea $f : X \longrightarrow Z$ una función continua. Supongamos que f no es constante. Entonces existe $x \in X \setminus \{p\}$ tal que $f(p) \neq f(x)$. Como Z es T_1, existe un abierto U tal que $f(x) \in U$ y $f(p) \notin U$. De donde $p \notin f^{-1}(U)$. Ahora dado que f es continua y por como se define la topología, $p \in f^{-1}(U)$, lo cual no puede ser. Por lo tanto f es constante. Con esto queda probado que X es Z-conexo.

Para ver 5., sea $f : X \longrightarrow Z$ una función continua. Supongamos que f no es constante. Entonces existe $x \in X \setminus \{p\}$ tal que $f(p) \neq f(x)$. Como Z es T_1, existe un abierto U tal que $f(p) \in U$ y $f(x) \notin U$. De donde

$p \in f^{-1}(U)$ y $x \notin f^{-1}(U)$. Ahora dado que f es continua y por como se define la topología, $x \in f^{-1}(U) = X$, lo cual no puede ser. Por lo tanto f es constante. Con esto, X es Z-conexo. □

Observemos que en los ejemplos anteriores siempre se considera que el espacio Z es T_1 y no degenerado, estas condiciones son esenciales como se puede ver en en Teorema 2.1.8.

Hay algunos casos donde la conexidad de X se puede determinar fácilmente. Los siguientes resultados muestran estos casos y también muestran la dependencia entre los espacios X y Z.

Teorema 2.1.3. *Un espacio Z-conexo es conexo.*

Demostración. Sean X y Z espacios topológicos tales que X es Z-conexo. Para probar la conexidad de X, sea $f : X \longrightarrow 2_{Dis}$ una función continua. Probaremos que f es constante. Como Z es no degenerado, elegimos $x \neq y \in Z$. Definamos la función $g : 2_{Dis} \longrightarrow Z$ como $g(0) = x$ y $g(1) = y$. Claramente g es continua e inyectiva. Así, dado que $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es continua, por la Z-conexidad de X, $g \circ f$ es constante. Ahora, si existen $a, b \in X$ tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$, entonces $g \circ f(a) = x$ y $g \circ f(b) = y$, esto contradice que $g \circ f$ es constante. Por lo que f es constante. Por lo tanto X es conexo. □

Definición 2.1.4. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **totalmente disconexo**, si para todo $p \in X$ se tiene que $C(p) = \{p\}$.*

Teorema 2.1.5. *Sea X un espacio topológico. Si Z es un espacio topológico totalmente disconexo, entonces la siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es Z-conexo.*

b) *X es conexo.*

Demostración. La prueba a) implica b), se sigue de el Teorema 2.1.3.
Para probar b) implica a), supongamos que X es conexo y que Z es totalmente disconexo. Sea $f : X \longrightarrow Z$, una función continua. Así, dado que X es conexo, $f(X)$ es conexo en Z. Por la disconexidad total de Z, $f(X)$ es un conjunto de un punto. Por lo que f es constante. Por lo tanto X es Z-conexo. □

Teorema 2.1.6. *Sea X un espacio topológico. Si Z es un espacio topológico que no es totalmente disconexo, entonces la siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es Z-conexo.*

b) *Para cada componente no degenerada Z' de Z, se tiene que X es Z'-conexo.*

Demostración. Para probar que a) implica b), supongamos que X es Z-conexo. Sean Z' una componente no generada de Z y $f : X \longrightarrow Z'$ cualquier función continua. Consideremos la función $i_{Z'} \circ f : X \longrightarrow Z$ la cual es continua. Dado que X es Z-conexo, $i_{Z'} \circ f$ es constante. Usando el Lema 1.1.3, f es constante. Por lo que X es Z'-conexo.
Para probar b) implica a), sea $g : X \longrightarrow Z$ una función continua. Probaremos que g es constante. Primero necesitamos probar que X es conexo. Como Z no es totalmente disconexo, existe una componente no degenerada Z' de Z. Por hipótesis X es Z'-conexo. Así, por el Teorema 2.1.3, X es conexo.
Ahora, por la continuidad de g, $g(X)$ es conexo en Z. Si $g(X)$ es un singular, g es constante. En el caso de que $g(X)$ no es un singular, existe una componente no degenerada Z'' de Z tal que $g(X) \subset Z''$. Así, como X es Z''-conexo y g es en realidad una función continua de X a Z'', g es constante. Por lo que X es Z-conexo. □

Si un espacio X es Z-conexo, la propiedad de X depende en gran medida del espacio Z. Para ver algunos ejemplos de espacios Z-conexos, tomemos a Z como un espacio de dos puntos. Solo hay tres topologías diferentes que pueden definirse en el conjunto $Z = \{0, 1\}$. Sean estos espacios 2_{Dis}, 2_i y 2_{Sier}, donde 2_{Dis} es el espacio con la topología discreta, 2_i es el espacio con la topología indiscreta y 2_{Sier} el espacio con la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Entonces el concepto de conexidad respectivo se describe a continuación.

Teorema 2.1.7. *Sea X un espacio topológico. Entonces*

I) *X es 2_i-conexo si y sólo si X es un espacio de un punto.*

II) *X es 2_{Sier}-conexo si y sólo si X es indiscreto.*

Demostración. I) Supongamos que X es 2_i-conexo y que X es no degenerado. Por ser X no degenerado, existen U y V conjuntos no vacíos y disjuntos en X tales que $X = U \cup V$. Definimos $f : X \longrightarrow 2_i$ por $f(U) = \{0\}$ y $f(V) = \{1\}$. Como 2_i es un espacio indiscreto, f es una función continua pero no constante. Por lo que X no es 2_i-conexo, esto es una contradicción. De donde, X es degenerado.

El caso en que X es un singular, se tiene que todas las funciones $f : X \longrightarrow 2_i$ son continuas y constantes. Por lo que X es 2_i-conexo.

II) Supongamos que X es 2_{Sier}-conexo y que X no es indiscreto. Como X no es indiscreto, existe $S \in P(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Definamos $f : X \longrightarrow 2_{Sier}$ por $f(S) = \{0\}$ y $f(X \setminus S) = \{1\}$. Notemos que f no es constante. La continuidad de f se sigue de que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = S$ y $f^{-1}(\{0,1\}) = X$, por lo que X no es 2_{Sier}-conexo, esto es una contradicción. De donde, X es indiscreto.

Sean X un espacio indiscreto y $f : X \longrightarrow 2_{Sier}$ una función continua. Si $f(X) = 1$ o X es un singular, entonces f es constante. Ahora, supongamos que $f(X) = \{0,1\}$. Como $\{0\}$ es abierto en 2_{Sier}, $f^{-1}(\{0\})$ es abierto no vacío en X, así dado que X es indiscreto, $f^{-1}(\{0\}) = X$. Así, f es constante.

□

Teorema 2.1.8. *Sean X y Z espacios topológicos tales que X es Z-conexo. Si Z no es T_1, entonces X es degenerado o es indiscreto.*

Demostración. Supongamos que X no es ni un punto ni indiscreto. Como Z no es T_1, existe $x \in Z$ tal que $\mathrm{Cl}_Z(\{x\}) \neq \{x\}$. Sea $y \in \mathrm{Cl}_Z(\{x\}) \setminus \{x\}$. Por otra parte como X no es ni un punto ni indiscreto, existe un abierto U no vacío y diferente de X. Ahora, definamos la siguiente función $f : X \longrightarrow Z$ como $f(U) = \{x\}$ y $f(X \setminus U) = \{y\}$. Para probar la continuidad de f, sea W un abierto en Z. Consideremos los siguientes casos:

Caso I. $x, y \in W$.
En este caso $f^{-1}(W) = X$, el cual es abierto.

Caso II. $W \cap \{x, y\} = \emptyset$.
En este caso, $f^{-1}(W) = \emptyset$, el cual es abierto.

Caso III. $x \in W$ y $y \notin W$.
Veamos que $f^{-1}(W) = U$. Claramente $U \subset f^{-1}(W)$. Sea $l \in f^{-1}(W)$. Supongamos que $l \notin U$. Entonces $l \in X \setminus U$ y $f(l) = y$. Así, $y \in W$, esto es una contradicción. De donde $l \in U$. Por lo que $f^{-1}(W) = U$ y $f^{-1}(W)$ es abierto en X.

Caso IV. $y \in W$.
Como $y \in \mathrm{Cl}_Z(\{x\})$, $x \in W$. Por el Caso I, $f^{-1}(W)$ es abierto.

Por lo que f es continua y no es constante, esto contradice que X es Z-conexo.
Por lo tanto X es degenerado o es indiscreto. □

2.2. Propiedades de los espacios Z-conexos

El concepto de Z-conexo es muy similar al de conexo. Por lo tanto, la mayoría de los resultados para los espacios conexos aún se mantienen para los espacios Z-conexos. Para hacer que Z-conexo no sea trivial, a partir de ahora suponemos que Z es un espacio T_1.

Teorema 2.2.1. *La imagen continua de un espacio Z-conexo es Z-conexo.*

Demostración. Sean X y Z espacios topológicos tales que X es Z-conexo. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Para probar que $f(X)$ es Z-conexo, tomemos $g : f(X) \longrightarrow Z$ una función continua. Veamos que g es constante. Como $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es continua y X es Z-conexo, $g \circ f$ es constante. Por lo que $g(f(X))$ es un conjunto de un sólo punto. Así, $g : f(X) \longrightarrow Z$ una función constante.
Por lo tanto $f(X)$ es Z-conexo. □

Teorema 2.2.2. *Sean X, Z espacios topológicos y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que cada X_α es un subespacio Z-conexo de X. Si $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es Z-conexo.*

Demostración. Sean $p \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, $i_{X_\alpha} : X_\alpha \longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ la función inclusión y $f : \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow Z$ una función continua. Veamos que f es constante. Como X_α es Z-conexo y $f \circ i_{X_\alpha} : X_\alpha \longrightarrow Z$ es continua, $f \circ i_{X_\alpha}$ es constante. Entonces $f \circ i_{X_\alpha}(X_\alpha) = \{f(p)\}$.
Ahora sean $x, y \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Probaremos que $f(x) = f(y)$. Sean $\alpha_x, \alpha_y \in \Lambda$ tales que $x \in X_{\alpha_x}$ y $y \in X_{\alpha_y}$. Así, $f \circ i_{X_{\alpha_x}}(x) = f(p) = f \circ i_{X_{\alpha_y}}(y)$. De donde, $f(x) = f(y)$. Por lo que f es constante.
Por lo tanto $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es Z-conexo. □

Teorema 2.2.3. *Sean X, Z espacios topológicos y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que cada Y_α es un subespacio de X el cual es Z-conexo. Si Y es un subespacio de X el cual es Z-conexo y Y intersecta a cada Y_α, entonces $Y \cup \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ es Z-conexo.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $X_\alpha = Y_\alpha \bigcup Y$. Como $Y \cap Y_\alpha \neq \emptyset$, por el Teorema 2.2.2, X_α es Z-conexo. Así, como $Y \subset \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$, por el Teorema 2.2.2, $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es Z-conexo. □

Teorema 2.2.4. *Sean A y B subconjuntos de un espacio X tales que $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}_X(A)$.*
Si A es Z-conexo, entonces B es Z-conexo.

Demostración. Sea $f : B \longrightarrow Z$ una función continua. Como A es Z-conexo y $f|_A$ es continua, $f|_A(A) = f(A)$ es un singular. Así, dado que Z es un espacio T_1, $f(A)$ es cerrado. Notemos que como $\mathrm{Cl}_B(A) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap B = B$ y $f(\mathrm{Cl}_B(A)) \subseteq \mathrm{Cl}_X(f(A))$ (por la continuidad de f). Se tiene que:

$$f(B) = f(\mathrm{Cl}_B(A)) \subseteq \mathrm{Cl}_X(f(A)) = f(A)$$

Por lo tanto $f(B)$ es un singular y B es Z-conexo. □

Definición 2.2.5. *Sean X y Z espacios topológicos. Sea $p \in X$, definimos la **componente Z-conexa**, C_p^Z, como la unión de todos los Z-conexos en X que contienen a p.*

Claramente, dado que Z-conexo es conexo, C_p^Z está contenida en la componente que contiene a p.

Teorema 2.2.6. *Sean X y Z espacios topológicos. Entonces por cada $p \in X$, C_p^Z es Z-conexo y cerrado.*

Demostración. Sea $p \in X$. Por el Teorema 2.2.2, C_p^Z es Z-conexo. Así, usando el Teorema 2.2.4, $\mathrm{Cl}(C_p^Z)$ es Z-conexo. De esto y de que $p \in \mathrm{Cl}(C_p^Z)$ y de la definición de C_p^Z, $C_p^Z = \mathrm{Cl}(C_p^Z)$. Por lo que C_p^Z es cerrado. □

Teorema 2.2.7. *Sean X y Z espacios topológicos. Si X es una unión de abiertos Z-conexos, entonces C_p^Z es abierto por cada $p \in X$.*

Demostración. Sean β una familia de conjuntos abiertos Z-conexos tal que $X = \bigcup \beta$. Sean $p \in X$ y $q \in C_p^Z$. Tomemos un $B \in \beta$ tal que $q \in B$. Por el Teorema 2.2.2, $B \cup C_p^Z$ es un Z conexo que contiene a p. Así, $B \cup C_p^Z = C_p^Z$. De donde $B \subset C_p^Z$. Por lo que C_p^Z es un abierto. □

Teorema 2.2.8. *Sean Z un espacio topológico, Λ un conjunto finito con más de un punto y $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Si X_α es Z-conexo para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es Z-conexo.*

Demostración. Primero probaremos el caso en que Λ tiene dos elementos. Podemos suponer que $\Lambda = \{1, 2\}$. Sean X_1 y X_2 espacios Z-conexos. Para probar que $X_1 \times X_2$ es Z-conexo, sea $b \in X_2$. Por cada $c \in X_1$, sea $T_c = (X_1 \times \{b\}) \cup (\{c\} \times X_2)$. Veamos que T_c es Z-conexo para cada $c \in X_1$.

Dado que X_1 y X_2 son Z-conexos, $X_1 \times \{b\}$ y $\{c\} \times X_2$ son Z-conexos. Como $(c,b) \in X_1 \times \{b\} \cap \{c\} \times X_2$, por el Teorema 2.2.2, T_c es Z-conexo. Ahora, dado que cada $(x,y) \in X_1 \times X_2$, cumple que $(x,y) \in T_x$, se tiene que $\bigcup\limits_{c\in X_1} T_c = X_1 \times X_2$. De lo anterior y de que $X_1 \times \{b\} \subset \bigcap\limits_{c \in X_1} T_c$, por el Teorema 2.2.2, $X_1 \times X_2$ es Z-conexo.
Finalmente, supongamos que $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$ con $n \geq 3$ y que el resultado es cierto para $n-1$. Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios Z-conexos. Dado que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$, por hipótesis de Inducción y por el caso $n = 2$, $X_1 \times \cdots \times X_n$ es Z-conexo. □

Teorema 2.2.9. *Sean Z un espacio topológico, Λ un conjunto infinito y $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *es Z-conexo.*

b) X_α *es Z-conexo para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. Para probar a) implica b), supongamos que $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es Z-conexo. Como cada proyección $\pi_\alpha : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha$ es continua y suprayectiva, entonces por el Teorema 2.2.1 cada X_α es Z-conexo.
Ahora, para probar b) implica a), supongamos que cada X_α es Z-conexo. Sean $X = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ y $x \in X$. Por el Lema 1.1.1.3, por cada $\Omega \subset \Lambda$ finito no vacío, $X(\Omega, x)$ es homeomorfo al producto finito $\prod\limits_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$. Así, por el Teorema 2.2.8, por cada $\Omega \subset \Lambda$ finito no vacío, $X(\Omega, x)$ es Z-conexo. Ahora, sea $Y = \bigcup\{X(\Omega, x) : \Omega \subset \Lambda \text{ finito no vacío}\}$. Por la Proposición 1.1.1.1, $X(\Omega, x)$ es un subespacio de X para cada $\Omega \subset \Lambda$ finito no vacío. Dado que todos los $X(\Omega, x)$ tienen a x como punto en común, por el Teorema 2.2.2, Y es Z-conexo en X.
Por último probaremos que $\mathrm{Cl}(Y) = X$. Sean $z \in X$ y $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Tomemos, por cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, un abierto U_{α_i} en X_{α_i} tal que $z(\alpha_i) \in U_{\alpha_i}$. Hagamos $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. Notemos que $z \in U$. Probaremos que $U \cap Y \neq \emptyset$. Necesitamos definir los siguientes conjuntos, por cada $\alpha \in \Lambda$, sea

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \in \Omega \\ \{x(\alpha)\} & \text{si } \alpha \in \Lambda \setminus \Omega. \end{cases}$$

Ahora, definimos la función $y : \Lambda \longrightarrow \bigcup Y_\alpha$, de la siguiente manera

$$y(\alpha) = \begin{cases} \{z(\alpha)\} & \text{si } \alpha \in \Omega \\ \{x(\alpha)\} & \text{si } \alpha \in \Lambda \setminus \Omega. \end{cases}$$

Así, $y \in X(\Omega, x) \subset Y$. Además, dado que $y(\alpha) = z(\alpha) \in U_\alpha$ para $\alpha \in \Omega$, $y \in U$. De donde, $y \in U \cap Y \neq \emptyset$. Por lo que, $\text{Cl}(Y) = X$.
Así, dado que Y es Z-conexo, por el Teorema 2.2.4, X es Z-conexo. □

2.2.1. Z-conexidad local

Definición 2.2.1.1. *Sean X y Z espacios topológicos. Se dice que X es **localmente Z-conexo** si tiene una base que consiste de conjuntos abiertos Z-conexos.*

Teorema 2.2.1.2. *Sean X y Z espacios topológicos. Si X es localmente Z-conexo, entonces C_p^Z es abierto, por cada $p \in X$.*

Demostración. Sea β una base de abiertos Z-conexos para X. Dado que $X = \bigcup \beta$, por el Teorema 2.2.7, C_p^Z es abierto, por cada $p \in X$. □

Teorema 2.2.1.3. *Todos los subespacios abiertos de un espacio localmente Z-conexo son localmente Z-conexos.*

Demostración. Sean X y Z espacios topológicos. Supongamos que X es localmente Z-conexo con una base β tal que cada $B_i \in \beta$ es Z-conexo. Sea Y un abierto en X. Probaremos que Y como subespacio de X es localmente Z-conexo. Hagamos $\beta' = \{B \in \beta : B \subset Y\}$. Notemos que cada elemento de β' es Z-conexo. Ahora, necesitamos probar que β' es una base para la topología de Y. Sean $a \in Y$ y U un abierto en X tal que $a \in U \cap Y$. Dado que $U \cap Y$ es un abierto en X, existe $B \in \beta$ tal que $a \in B \subset U \cap Y$. Esto prueba que β' es base para la topología de Y.
Por lo tanto Y es localmente Z-conexo. □

Teorema 2.2.1.4. *Sean X y Z espacios topológicos. Si X es localmente Z-conexo, entonces son equivalentes las siguientes condiciones:*

a) *X es conexo.*

b) *X es Z-conexo.*

Demostración. Para probar a) implica b), supongamos que X es conexo y localmente Z-conexo. Sea C_p^Z una componente Z-conexa de X. Por el Teorema 2.2.1.2, C_p^Z es un abierto en X y por el Teorema 2.2.6, C_p^Z es un cerrado en X. Pero X es conexo entonces $C_p^Z = X$. Por lo tanto X es Z-conexo.
La prueba b) implica a), se sigue del Teorema 2.1.3. $\square$

Espacios fuertemente conexos

En este capítulo, se introducirá el concepto de espacio fuertemente conexo y se darán resultados en relación a este concepto.

3.1. Conexidad fuerte

Definición 3.1.1. *Sean X un espacio topológico y J un conjunto de índices a lo más numerable tal que $|J| \geq 2$. Decimos que X es **fuertemente conexo** si para cada familia $\{E_i : i \in J\}$ de conjuntos cerrados no vacíos y ajenos 2 a 2, se tiene que*

$$X \neq \bigcup_{i \in J} E_i.$$

Definición 3.1.2. *Sea X un conjunto. Definimos $\tau_{cof}^X = \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. A la topología τ_{cof} se le conoce como la **topología cofinita** o la **topología de los complementos finitos**.*

La letra $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros. Consideremos $(\mathbb{Z}, \tau_{cof}^{\mathbb{Z}})$. Probaremos que en $\mathbb{Z}$ los únicos conjuntos fuertemente conexos son los singulares. Por la definición de la topología cofinita, los cerrados de $\mathbb{Z}$ son los conjuntos finitos. Sea $A \subset \mathbb{Z}$ a lo más numerable y $|A| \geq 2$. Dado que $A = \bigcup_{n \in A} \{n\}$, A no es fuertemente conexo.

Teorema 3.1.3. *Un espacio T_1 fuertemente conexo y no degenerado es no numerable.*

Demostración. Sea X un espacio T_1 fuertemente conexo y no degenerado. Supongamos que X es a lo más numerable con más de un punto. Dado que X es T_1 los singulares son cerrados. Por lo que X es una unión de cerrados no vacíos y ajenos entre ellos, esto es una contradicción. □

Más adelante, probaremos que un espacio fuertemente conexo tiene que ser conexo. Por otra parte también probaremos que el espacio $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita no es fuertemente conexo. Es conocido por [2], que Bing da un ejemplo de un espacio de Hausdorff numerable el cual no es fuertemente conexo. En [6], se da un ejemplo de un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual, el cual no es fuertemente conexo.
Además presentaremos un par de resultados que nos permitirán probar que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es fuertemente conexo.

Teorema 3.1.4. *La imagen continua de un espacio fuertemente conexo es fuertemente conexa.*

Demostración. Sean X un espacio fuertemente conexo y f una función continua de X a un espacio topológico. Supongamos que $f(X)$ no es fuertemente conexo. Entonces existe una familia $\{E_i : i \in J\}$ de conjuntos cerrados no vacíos y ajenos 2 a 2, tales que $f(X) = \bigcup\limits_{i \in J} E_i$. Claramente $\{f^{-1}(E_i) : i \in J\}$ es una familia de conjuntos cerrados no vacíos y ajenos entre ellos tal que $X = \bigcup\limits_{i \in J} f^{-1}(E_i)$. Por lo que X no es fuertemente conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f(X)$ es fuertemente conexo. □

Es natural buscar una definición similar a la de conexidad para espacios fuertemente conexos. Consideremos Z como el espacio de los enteros con la topología cofinita. A continuación probaremos que ser un espacio fuertemente conexo es equivalente a ser $\mathbb{Z}$-conexo.

Teorema 3.1.5. *Sean X un espacio topológico y $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *X es fuertemente conexo.*

b) *X es $\mathbb{Z}$-conexo.*

Demostración. Para probar que a) implica b), sea $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ una función continua. Por el Teorema 3.1.4, $f(X)$ es fuertemente conexo. Ahora, dado que los únicos subconjuntos fuertemente conexos de $\mathbb{Z}$ son los espacios de un punto, f es constante.

Para probar b) implica a).
Supongamos que X no es fuertemente conexo, es decir, existe una familia $\{E_i\}_{i\in J}$ de conjuntos cerrados disjuntos no vacíos tales que $X = \bigcup\limits_{i\in J} E_i$. Dado que J es a lo más numerable, existe una función inyectiva $\phi : J \longrightarrow \mathbb{N}$. Ahora, definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ como $f(x) = \phi(i)$ si $x \in E_i$. Dado que $|J| \geq 2$, f no es constante. Probaremos la continuidad de f. Sea U un abierto en $\mathbb{Z}$. Notemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $f^{-1}(\mathbb{Z}) = X$. En el caso de que $U \cap \phi(J) = \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(U) = \emptyset$. Ahora, consideremos los siguientes casos.

Caso I. $U = \mathbb{Z} \setminus \{n_1, \ldots, n_k\}$ para algún $\{n_1, \ldots, n_k\} \subset \phi(J)$.

Sea $J' = \phi^{-1}(\{n_1, \ldots, n_k\})$. Notemos que

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i\notin J'} E_i = X \setminus \bigcup_{i\in J'} E_i.$$

Así, dado que $\bigcup\limits_{i\in J'} E_i$ es cerrado en X, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.

Caso II. $\phi(J) \subset U$.

Entonces $f^{-1}(U) = X$. Por lo que, $f^{-1}(U)$ es abierto.

Esto prueba la continuidad de f.
Por lo tanto, X no es $\mathbb{Z}$-conexo. Con esto queda probado que b) implica a). □

Corolario 3.1.6. *Si X es fuertemente conexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Por el Teorema 3.1.5, X es $\mathbb{Z}$-conexo. Así, por el Teorema 2.1.3, X es conexo. □

Observemos que del Teorema 3.1.5 y dado que la función identidad de $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita en si misma no es constante, $\mathbb{Z}$ con la topología cofinita no es fuertemente conexo. A partir del Teorema 3.1.5, un espacio fuertemente conexo no es más que un caso especial de Z-conexidad. Por lo tanto todas las propiedades probadas para espacios Z-conexos, se aplican a espacios fuertemente conexos.

Teorema 3.1.7. *Sea X un espacio topológico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

I) *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que cada X_α es un subespacio fuertemente conexo de X. Si $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es fuertemente conexo.*

II) *Sean A y B subconjuntos de X tales que $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}(A)$. Si A es fuertemente conexo, entonces B es fuertemente conexo.*

III) *El producto topológico de una familia de espacios fuertemente conexos es fuertemente conexo.*

Demostración. I) Como X_α es un subespacio fuertemente conexo, cada X_α es $\mathbb{Z}$-conexo y $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$. Así, por los Teoremas 2.2.2 y 3.1.5, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es fuertemente conexo.

II) Sean A y B subconjuntos de X tales que A es fuertemente conexo y $A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}(A)$. Por el Teorema 3.1.5, A es $\mathbb{Z}$-conexo. Por el Teorema 2.2.4, B es $\mathbb{Z}$-conexo. Nuevamente por el Teorema 3.1.5, B es fuertemente conexo.

III) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios fuertemente conexos. Dado que cada X_α es $\mathbb{Z}$-conexo (ver Teorema 3.1.5), por el Teorema 2.2.9, $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es $\mathbb{Z}$-conexo. Así, por el Teorema 3.1.5, $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es fuertemente conexo. □

3.1.1. Espacios localmente fuertemente conexos

Definición 3.1.1.1. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es* ***localmente fuertemente conexo*** *si tiene una base que consiste de conjuntos abiertos fuertemente conexos.*

Teorema 3.1.1.2. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es localmente fuertemente conexo.*

b) *X es localmente $\mathbb{Z}$-conexo.*

Demostración. La prueba se sigue del Teorema 3.1.5. □

Definición 3.1.1.3. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Definimos la* **componente fuertemente conexa** *como la unión de todos los fuertemente conexos que contienen a p, la cual denotaremos por $K(p)$.*

Teorema 3.1.1.4. *Sea X un espacio topológico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

I) *Por cada $p \in X$, $K(p) = C_p^{\mathbb{Z}}$. En particular $K(p)$ es fuertemente conexo y cerrado en X.*

II) *Si X es un espacio localmente fuertemente conexo, entonces $K(p)$ es abierto para cada $p \in X$.*

III) *Cada subespacio abierto de un espacio localmente fuertemente conexo es localmente fuertemente conexo.*

Demostración. I). Sea $p \in X$. Por la definición de componente fuertemente conexa y por el Teorema 3.1.7 I), $K(p)$ es fuertemente conexo. Por el Teorema 3.1.5, $K(p)$ es $\mathbb{Z}$-conexo. Por la definición de componente $\mathbb{Z}$-conexa, $K(p) \subset C_p^{\mathbb{Z}}$. De manera similar se prueba que $C_p^{\mathbb{Z}} \subset K(p)$. Por lo que $K(p) = C_p^{\mathbb{Z}}$. Por último por el Teorema 2.2.6, $C_p^{\mathbb{Z}}$ es cerrado en X.

II). Sea $p \in X$. Por I), $K(p) = C_p^{\mathbb{Z}}$. Dado que X es localmente fuertemente conexo, por los Teoremas 3.1.1.2 y 2.2.1.2, $C_p^{\mathbb{Z}} = K(p)$ es un abierto en X.

III). La prueba se sigue de los Teoremas 3.1.1.2 y 2.2.1.3. $\square$

3.2. Conexidad fuerte en espacios compactos

Dado un espacio conexo, podemos hacerlo fuertemente conexo agregando algunas condiciones. Pero que condiciones deberían agregarse es la dificultad. Nuestro punto de partida es un espacio conexo, por lo tanto un conjunto compacto y conexo puede ser útil.

Teorema 3.2.1. *Sea X un espacio compacto de Hausdorff no degenerado. Entonces la siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es fuertemente conexo.*

b) *X es conexo.*

Demostración. a) implica b), se sigue de la Definición 3.1.1.

Para probar b) implica a), supongamos que X no es fuertemente conexo, entonces por definición existe una familia $\{K_i : i \in J\}$ de conjuntos cerrados no vacíos y ajenos entre ellos, tal que $X = \bigcup_{i \in J} K_i$. Dado que X es conexo, J

no puede ser finito. Por lo que J es infinito. Podemos suponer sin pérdidad de generalidad que $J = \mathbb{N}$.

Primero, probaremos que existen dos sucesiones, una de números naturales $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y otra de subconjuntos compactos y conexos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X tales que:

1. $n_1 < n_2 < \cdots$,

2. $X_1 \supset X_2 \supset \cdots$,

3. Para cada $i \in \mathbb{N}$, $X_i \cap K_j = \emptyset$ para toda $j < n_i$.

Dado que un espacio compacto de Hausdorff es normal, existe un conjunto abierto G_1 tal que

$$K_2 \subseteq G_1 \subset \mathrm{Cl}(G_1) \subset (X \setminus K_1).$$

Procedemos a construir X_1 y n_1. Sea X_1 una componente de $\mathrm{Cl}(\mathrm{G}_1)$ tal que $X_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Notemos que X_1 es compacto y conexo. Hagamos $n_1 = 2$. Notemos que X_1, $n_1 = 2$ es el primer paso.
Ahora, procedemos a construir X_2 y n_2. Usando la Proposición 1.3.3, cuando $N = X$ y $G = G_1$, obtenemos que cada componente de $X \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{G}_1) = \mathrm{Cl}(\mathrm{G}_1)$ intersecta a $\mathrm{Fr}(G_1)$, en particular, $X_1 \cap \mathrm{Fr}(G_1) \neq \emptyset$. Así, dado que $\mathrm{Fr}(G_1) = \mathrm{Cl}(\mathrm{G}_1) \setminus \mathrm{G}_1$, X_1 contiene un punto $p \in \mathrm{Fr}(G_1)$ tal que $p \notin G_1$ y $p \notin (K_1 \cup K_2)$. Además, como $X = \bigcup_{i\in J} K_i$ y J es infinito, existe $i > 2$ tal que $X_1 \cap K_i \neq \emptyset$. Sea $n_2 = \min\{i > 2 : X_1 \cap K_i \neq \emptyset\}$. Por la normalidad de X, existe un conjunto abierto G_2 tal que $K_{n_2} \subset G_2 \subset \mathrm{Cl}(G_2) \subset (X \setminus (K_2 \cup K_1))$. Sea X_2 una componente de $X_1 \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{G}_2)$ que contenga un punto de K_{n_2}. Finalmente probaremos que $X_2 \cap K_j = \emptyset$ para toda $j < n_2$. Dado que $X_1 \cap K_j = \emptyset$ para cada $2 < j < n_2$ y $X_2 \subset X_1 \cap \mathrm{Cl}(\mathrm{G}_2) \subset (\mathrm{X} \setminus (\mathrm{K}_2 \cup \mathrm{K}_1))$, $X_2 \cap K_j = \emptyset$ para cada $j < n_2$.

Con lo anterior obtenemos lo siguiente.

a) $n_1 < n_2$

b) $X_1 \supset X_2$

c) para cada $i \leq \{1,2\}$, $X_i \cap K_j = \emptyset$ para toda $j < n_i$.

Ahora, vamos a construir X_3 y n_3. Por a), $X_2 \subset X \setminus \bigcup_{j=1}^{n_2-1} K_j$. Dado que $X_1 \cap K_{n_2} \neq \emptyset$ y $X_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, por la Proposición 1.3.3, $X_2 \cap \mathrm{Fr}(G_2) \neq \emptyset$. Así, dado que $\mathrm{Fr}(G_2) = \mathrm{Cl(G_2)} \setminus \mathrm{G_2}$, X_2 contiene un punto $p \in \mathrm{Fr}(G_2)$ tal que $p \notin (\bigcup_{j=1}^{n_2} K_j)$. Sea $n_3 = \min\{i > n_2 : X_2 \cap K_i \neq \emptyset\}$. Por la normalidad de X, existe un conjunto abierto G_3 tal que $K_{n_3} \subset G_3 \subset \mathrm{Cl}(G_3) \subset (X \setminus \bigcup_{j=1}^{n_2} K_j)$.
Sea X_3 una componente de $X_2 \cap \mathrm{Cl(G_3)}$ que contenga un punto de K_{n_3}.
Finalmente probaremos que $X_3 \cap K_j = \emptyset$ para toda $j < n_3$. Dado que $X_2 \cap K_j = \emptyset$ para cada $n_2 < j < n_3$ y $X_3 \subset X_2 \cap \mathrm{Cl(G_3)} \subset (\mathrm{X} \setminus \bigcup_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n_2}} \mathrm{K_j})$, $X_3 \cap K_j = \emptyset$ para cada $j < n_3$.
Continuando con este proceso obtenemos las sucesiones deseadas.

Dado que los elementos de la sucesión $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son cerrados y anidados y X es compacto, por la Proposición 1.1.5, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \neq \emptyset$.
Por otra parte, vamos a probar que $(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i) \cap K_j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Sea $j \in \mathbb{N}$. Dado que $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ es infinito, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $j < n_l$. Por 3., $X_l \cap K_j = \emptyset$. De donde $(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i) \cap K_j = \emptyset$.
De lo anterior, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$. Así, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \cap X = \emptyset$, lo cual es una contradicción.
Por lo que X es fuertemente conexo. □

Definición 3.2.2. *Un espacio topológico X es* ***fuertemente conexo en pequeño en un punto*** *$p \in X$ si para cada abierto U que contiene a p, existe una vecindad V de p fuertemente conexa tal que $V \subset U$. Se dice que X es* ***fuertemente conexo en pequeño*** *si es fuertemente conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.*

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio topológico. Si X es fuertemente conexo en pequeño, entonces para cada conjunto abierto U de X, cada componente de U es un abierto fuertemente conexo en X.*

Demostración. Sean U un abierto no vacío en X y C una componente de U. Consideremos $x \in C$. Por hipótesis, existe una vecindad V_x de x fuertemente conexa tal que $V_x \subset U$. Dado que $V_x \subset K(x)$ y $C_x^{\mathbb{Z}}$ es conexa, por el Teorema 3.1.1.4. I), $V_x \subset C_x^{\mathbb{Z}} \subset C$. Así, dado que lo anterior se realizó para todos los puntos de C, $\bigcup\limits_{x \in C} \operatorname{Int}(V_x) = \bigcup\limits_{x \in C} V_x = C$. Por lo que C es un abierto en X y por el Teorema 3.1.7. I), C es fuertemente conexa. Por lo tanto C es un abierto fuertemente conexo en X. □

Teorema 3.2.4. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *X es localmente fuertemente conexo.*

b) *X es fuertemente conexo en pequeño.*

Demostración. a) implica b), se sigue de que los abiertos básicos de X son vecindades de cada uno de sus puntos.

Para probar b) implica a), por el Teorema 3.2.3, la familia de las componentes de cada abierto de X es una base de conjuntos abiertos fuertemente conexos para la topología de X. Por lo que X es localmente fuertemente conexo. □

Para lo que sigue recordemos el concepto de compacidad local.

Definición 3.2.5. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$ y cada abierto U tal que $x \in U$, existe una vecindad compacta V de x tal que $V \subset U$.*

Teorema 3.2.6. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Si X es localmente conexo, entonces X es localmente fuertemente conexo.*

Demostración. Sean $p \in X$ y U un abierto que contiene a p. Dado que X es localmente compacto, existe una vecindad compacta V de p tal que $V \subset U$. Sea C la componente de V que contiene a p. Como V es una vecindad de p y X es localmente conexo, por la Proposición 1.2.1.4, existe una vecindad conexa V_p de p tal que $V_p \subset V$. Como C es la componente de V que contiene a p, $V_p \subset C$. De donde C es una vecindad conexa de p en X.
Por otra parte, como V es compacto y C es cerrado en V, C es compacto en V. Así, dado que C es de Hausdorff y conexo, por el Teorema 3.2.1, C es fuertemente conexo. Por lo tanto C es una vecindad fuertemente conexa que contiene a p y se queda contenida en U. Como p es arbitrario, X es fuertemente conexo en pequeño. Así por el Teorema 3.2.4, X es localmente fuertemente conexo. □

Teorema 3.2.7. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Si X es localmente conexo y conexo, entonces X es fuertemente conexo.*

Demostración. Para probar que X es fuertemente conexo, por el Teorema 3.1.1.4. I), es suficiente probar que $X = K(p)$ para cada $p \in X$. Sea $p \in X$. Por el Teorema 3.1.1.4. I), $K(p)$ es cerrada en X.
Por otra parte, dado que X es localmente fuertemente conexo (ver Teorema 3.2.6) y por el Teorema 3.1.1.4. II), $K(p)$ es abierta en X. Así, dado que X es conexo y $K(p) \neq \emptyset$, $K(p) = X$.
Por lo tanto X es fuertemente conexo. □

3.3. Conexidad fuerte en espacios métricos completos

En esta Sección, estudiamos que propiedades se requieren para que un espacio métrico completo sea fuertemente conexo. Primero recordemos los siguientes conceptos.

Definición 3.3.1. *Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico (X, d) es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ si $n \geq N$ y $m \geq N$.*

Definición 3.3.2. *Diremos que un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy contenida en X converge a un elemento de X.*

Teorema 3.3.3. *Sea X un espacio métrico completo, conexo y localmente conexo, entonces X es fuertemente conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es fuertemente conexo, entonces existe una familia $\{E_i : i \in J\}$ de conjuntos cerrados no vacíos y ajenos 2 a 2, tal que J es a lo más numerable, no degenerado y $X = \bigcup_{i \in J} E_i$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $J = \mathbb{N}$. Por cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{A}_k = \{V \subset X : V \text{ es un abierto conexo, no vacío y } \operatorname{diam}(V) \leq \frac{1}{k}\}.$$

Necesitamos probar que existe una sucesión $\{O_k\}_{k=0}^{\infty}$ de subconjuntos de X tal que:

1. $O_0 \supset \operatorname{Cl}(O_1) \supset O_1 \supset \operatorname{Cl}(O_2) \supset O_2 \supset \operatorname{Cl}(O_3) \cdots$.
2. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $O_k \in \mathcal{A}_k$ y $O_k \subseteq O_{k-1} \setminus E_k$

Primero hagamos $O_0 = X$.
Para construir O_1, sea $\mathcal{S}_1 = \{O \in \mathcal{A}_1 : \mathrm{Cl}(O) \subset O_0 \setminus E_1\}$. Por la normalidad de X, $\mathcal{S}_1$ es no vacío y cada uno de sus elementos cumple con las condiciones 1. y 2., sin embargo para la construcción de O_2, necesitamos uno que intersecte a una infinidad de elementos de la sucesión $\{E_i\}_{i=2}^{\infty}$. Por lo que probaremos la siguiente afirmación.

Afirmación. Existe $U \in \mathcal{S}_1$ tal que intersecta a una infinidad de elementos de la sucesión $\{E_i\}_{i=2}^{\infty}$.

Observemos que $X \setminus E_1 = \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} E_i = \bigcup\limits_{O \in \mathcal{S}_1} O$. Para demostrar la afirmación, supongamos que cada $O \in \mathcal{S}_1$ intersecta a una cantidad finita de elementos de la sucesión $\{E_i\}_{i=2}^{\infty}$. Sea $O \in \mathcal{S}_1$. Dado que O es conexo y $O \subset \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} E_i$, entonces $O \subset E_i$ para algún $i > 1$.
Por otra parte, probaremos que cada E_i es abierto para cada $i \geq 2$. Sea $i \geq 2$ y $x \in E_i$. Entonces existe $O_x \in \mathcal{S}_1$ tal que $x \in O_x$. Por lo anterior, $O_x \subset E_i$. De donde $E_i = \bigcup\limits_{x \in E_i} O_x$. Así E_i es abierto. Entonces E_i es un abierto y cerrado no vacío en X y $E_i \neq X$, lo cual es una contradicción. Esto prueba la afirmación.
Regresando a la construcción de O_1, usando la afirmación, hagamos $O_1 = U$. Claramente O_1 cumple las condiciones requeridas.
Ahora procedemos a construir O_2. Sea $\mathcal{S}_2 = \{O \in \mathcal{A}_2 : \mathrm{Cl}(O) \subset O_1 \setminus E_2\}$. Dado que O_1 intersecta a una infinidad de elementos de la sucesión $\{E_i\}_{i=2}^{\infty}$ y por la normalidad de X, $\mathcal{S}_2$ es no vacío. Procediendo de manera similar a la construcción de O_1, existe $O_2 \in \mathcal{S}_2$ tal que intersecta a una infinidad de elementos de la sucesión $\{E_i\}_{i=3}^{\infty}$ y cumple con las condiciones 1. y 2. Continuando con este proceso obtenemos la sucesión deseada.

Finalmente, para cada $k \in \mathbb{N}$, elegimos $x_k \in O_k$. Dado que el diámetro de O_k es menor que $\frac{1}{k}$ y la sucesión $\{O_k\}_{k=0}^{\infty}$ cumple 1., $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Como X es completo, (x_k) converge a un elemento $x \in X$. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_i$. Dado que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Cl}(O_i)$, $x \in \mathrm{Cl}(O_{i+1}) \subset O_i$. Así, $x \in O_i$, esto contradice el hecho de que O_i es disjunto de E_i.
Por lo tanto X es fuertemente conexo. □

Ejemplo 3.3.4. *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Entonces $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es fuertemente conexo y localmente fuertemente conexo.*

Demostración. Dado que $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo, conexo, localmente conexo, localmente compacto y de Hausdorff. Usando los Teoremas 3.3.3 y 3.2.6, $\mathbb{R}^n$ es fuertemente conexo y localmente fuertemente conexo respectivamente. $\square$

Ejemplo 3.3.5. *Un subconjunto de los números reales,* $\mathbb{R}$*, es fuertemente conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Supongamos que A es fuertemente conexo, entonces por el Corolario. 3.1.6, A es conexo. De donde A es un punto, $\mathbb{R}$ o un intervalo.
Ahora, dado que los intervalos son espacios métricos completos, conexos y localmente conexos, por el Teorema 3.3.3, los intervalos son fuertemente conexos. $\square$

Bibliografía

[1] Bo, D. and Yan-loi, W., *Strongly connected spaces*, Depatament of Mathematics, National University of Singapore, 1999.

[2] Bing, R. H., *A connected countable Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. 4, (1953), 474.

[3] Engelking, R., *General topology*, Berlin: Heldermann, Sigma series in pure mathematics; Vol. 6, 1989.

[4] García Máynez, A. y Tamariz Mascarúa, A., *Topología General*, Porrúa S. A. 1988.

[5] Munkres, J. R., *Topología*, 2^a edición, Prentice-Hall Inc., 2002.

[6] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass., 1970.