



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO**

---

---

**CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO**

**Análisis del Requerimiento de Capital de Solvencia por  
riesgo accionario bajo el enfoque de Solvencia II en  
México: Una metodología GARCH con innovaciones  
t-student**

**TESIS**

Que para obtener el Título de

**LICENCIADO EN ACTUARÍA**

Presenta

**C. Luis Angel Salas Alvarez**

**Asesor: Dr. Eduardo Rosas Rojas**  
**Co-asesor: Mtra. Beatriz Herminia de Gpe. Arreola**  
**Ramírez**

**Atizapán de Zaragoza, Edo. de Méx. Septiembre 2019**



# Índice general

Introducción . . . . .	XIV
<b>1. Solvencia II</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Estructura General de Solvencia II . . . . .	7
1.2.1. Pilar I . . . . .	8
1.2.2. Pilar II . . . . .	11
1.2.3. Pilar III . . . . .	13
1.3. Solvencia II en México . . . . .	14
1.3.1. Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas . . . . .	15

1.3.2.	Circular Única de Seguros y Fianzas . . . . .	16
1.3.3.	Formula General del SCR de acuerdo a la CUSF . . . . .	17
1.3.4.	El Riesgo de Mercado . . . . .	24
1.3.5.	Variable de Pérdida Sujeta a la Inversión en Instrumentos de Renta Variable	28
1.4.	Modelos Internos bajo la CUSF . . . . .	29
1.5.	Análisis y posturas sobre Solvencia II . . . . .	31
<b>2.</b>	<b>Series de Tiempo</b>	<b>34</b>
2.1.	Preliminares . . . . .	35
2.1.1.	Componentes de una serie de tiempo . . . . .	35
2.1.2.	Estacionariedad . . . . .	37
2.1.3.	Funciones de Autocovarianza y Autocorrelación . . . . .	38
2.1.4.	Ruido Blanco . . . . .	39
2.2.	Procesos Autorregresivos . . . . .	41
2.2.1.	Propiedades del modelo AR(1) . . . . .	43

2.2.2.	Propiedades del modelo AR(2) . . . . .	45
2.2.3.	Propiedades del modelo AR(p) . . . . .	48
2.2.4.	Funcion de Autocorrelación Parcial (FACP) . . . . .	49
2.3.	Procesos de Medias Móviles . . . . .	50
2.3.1.	Propiedades de los procesos MA . . . . .	51
2.3.2.	Estacionariedad del modelo MA(q) . . . . .	52
2.3.3.	Invertibilidad . . . . .	53
2.4.	Procesos Autorregresivos y de Medias Moviles. . . . .	54
2.4.1.	Propiedades del modelo ARMA(1,1) . . . . .	55
2.4.2.	Propiedades del modelo ARMA(p,q) . . . . .	57
2.4.3.	Criterios de Informacion . . . . .	58
2.4.4.	No Estacionariedad . . . . .	59
2.5.	Modelación de la volatilidad . . . . .	60
2.6.	Procesos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicional . . . . .	62

2.6.1. Proceso ARCH(1) . . . . .	62
2.6.2. Proceso ARCH(p) . . . . .	65
2.6.3. Proceso GARCH(1,1) . . . . .	66
2.6.4. Proceso GARCH(p,q) . . . . .	68
2.7. Variantes del Modelo GARCH(p,q) . . . . .	69
2.7.1. Modelo EGARCH . . . . .	70
2.7.2. Modelo TGARCH . . . . .	71
2.7.3. Modelo GARCH-M . . . . .	72
2.7.4. Modelo RSGARCH . . . . .	72
2.8. Estimación de puntual por Máxima Verosimilitud . . . . .	74
<b>3. Modelación del Riesgo Accionario Mexicano</b>	<b>79</b>
3.1. Objetivos e hipótesis . . . . .	79
3.2. Otros acercamientos a la modelación del IPC . . . . .	81
3.3. El Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores . . . . .	82

3.4. Análisis descriptivo del IPC . . . . .	85
3.5. Calibración de modelos y comparación. . . . .	87
3.5.1. Metodología Box-Jenkins . . . . .	87
3.5.2. Calibración del modelo ARMA-GARCH . . . . .	92
3.5.3. Calibración del modelo ARMA-GARCH-M . . . . .	94
3.5.4. Calibración del modelo ARMA-EGARCH . . . . .	96
3.5.5. Calibración del modelo ARMA-TGARCH . . . . .	98
3.5.6. Calibración del modelo RSGARCH . . . . .	100
3.5.7. Ajuste de los residuos estandarizados . . . . .	102
3.6. Valor en Riesgo de los modelos seleccionados. . . . .	105
<b>4. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>108</b>
<b>A. Apéndice A: Códigos de programación en R</b>	<b>115</b>
<b>B. Apéndice B: Conceptos adicionales de probabilidad y estadística.</b>	<b>123</b>

B.1. Prueba Individual de la FAC . . . . .	123
B.2. Prueba Portmanteau y Ljung-Box . . . . .	124
B.3. Teorema de Herman Wold . . . . .	124
B.4. Ley de los grandes números . . . . .	125
B.5. Desigualdad de Jensen . . . . .	126
B.6. Pruebas de estacionariedad . . . . .	126
B.6.1. Dickey-Fuller y Dickey-Fuller Aumentada . . . . .	126
B.6.2. Prueba Phillips-Perron . . . . .	128
B.6.3. Prueba Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin . . . . .	128
B.7. Pruebas de backtesting . . . . .	129
B.8. Prueba de sesgo en el signo de Engle y Ng . . . . .	131
B.9. Distribuciones elípticas . . . . .	131

**Análisis del Requerimiento de Capital de Solvencia por riesgo accionario  
bajo el enfoque de Solvencia II en México: Una metodología GARCH con  
innovaciones t-student.**

por

C. Luis Angel Salas Alvarez

**Resumen**

En este trabajo se analiza el Requerimiento de Capital de Solvencia (SCR por sus siglas en inglés) por riesgo accionario bajo los lineamientos de la regulación actual de seguros en México (equivalente a Solvencia II). Se parte del supuesto de que el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC/BMV) es una muestra representativa del comportamiento de las acciones listadas en el mercado accionario mexicano. Dos de las características más importantes de la serie de rendimientos del IPC, es que sigue una distribución de colas pesadas (exceso de curtosis) y presenta clusters de volatilidad (heterogeneidad en la varianza).

Se propone una metodología GARCH con innovaciones  $t - student$  para el cálculo del VaR(99.5%) exigido como equivalencia a la formula estándar de la Circular Única de Seguros y Fianzas (CUSF). De esta manera, se busca evidenciar una subestimación del riesgo accionario si se utiliza el modelo estándar de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), o bien, si se utilizan modelos mal especificados, por ejemplo, modelos con innovaciones gaussianas.

La serie de tiempo contemplada abarca de Abril de 1990 a Diciembre de 2018 con periodicidad diaria; los datos son obtenidos del portal del Banco de México (BANXICO).

**Palabras clave:** IPC, Riesgo Accionario, Volatilidad, Solvencia II, Procesos Estocásticos, Series de Tiempo, innovaciones t-student, RCS, CUSF, LISF, Renta Variable, BMV.



**Análisis del Requerimiento de Capital de Solvencia por riesgo accionario  
bajo el enfoque de Solvencia II en México: Una metodología GARCH con  
innovaciones t-student.**

by

C. Luis Angel Salas Alvarez

**Abstract**

This paper analyzes the Solvency Capital Requirement (SCR) for equity risk under the guidelines of the current insurance regulation in Mexico (equivalent to Solvency II). It is assumed that the Mexican Stock Index (IPC/BMV) is a representative sample of the behavior of the shares listed in the Mexican stock market. Two of the most important characteristics of the series of IPC returns is that it follows a distribution of heavy tails (excess kurtosis) and presents volatility clusters (heterogeneity in variance).

A GARCH methodology is proposed with innovations *t – student* for the calculation of the VaR (99.5%) required as equivalence to the standard formula of the Single Circular of Insurance and Bonds (CUSF). In this way, an underestimation of stock risk is evidenced if the standard model of the National Insurance and Guarantees Commission (CNSF) is used, or if poorly specified models are used, for example, models with Gaussian innovations.

The contemplated time series runs from April 1990 to December 2018 on a daily basis; the data are obtained from the Bank of Mexico (BANXICO) portal.

**Key words: IPC, Equity Risk, Volatility, Solvency II, Stochastic Processes, Time Series, Innovations t-student, SCR, CUSF, LISF, BMV.**

# Introducción

Solvencia II tiene como objetivo (entre algunos otros), determinar los recursos propios mínimos requeridos de cada aseguradora, mismos que deben determinarse en función de los riesgos asumidos, con lo cual se pretende proteger a los asegurados y a el sector asegurador en sí mismo. En otras palabras, esta regulación pretende anticipar y evitar el incremento de los riesgos que pudieran poner en peligro la solvencia de las compañías.

Los cambios que introdujo Solvencia II, hacen énfasis en una estructura de regulación y supervisión homogénea, dinámica, prudencial y más eficaz; esto implica que tanto las compañías como las autoridades supervisoras tengan un mejor dominio en técnicas de evaluación de riesgos, así como una mejor comunicación entre los participantes del sector; aseguradoras, supervisores y asegurados.

Debido a que actualmente las compañías de seguros operan en un mercado globalizado, los riesgos que las afectan dejaron de ser solo aquellos relacionados a la operación misma, pues además, tienen que lidiar con los riesgos financieros. En este sentido, Solvencia II exige una evaluación de los riesgos de esta índole a través del módulo del SCR por riesgo de mercado, que en el caso de la regulación mexicana, se conforma al menos del riesgo de tasa de interés, el riesgo de tipo de cambio y el riesgo accionario. Para la determinación del SCR por riesgo de mercado y sus componentes, la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) ha establecido una fórmula general en la Circular Única de Seguros y Fianzas (CUSF); esta formula se ha adoptado del esquema europeo de Solvencia II y se ha elegido por razones de simplicidad en los cálculos, por la facilidad de interpretación de los resultados, por ser un modelo que permite comparar a las compañías de manera sencilla, y, finalmente, porque su implementación representa un gasto tecnológico y financiero pequeño en comparación con otros modelos.

La finalidad de un requerimiento de capital es que la cantidad de dinero que se le requiere mantener a una compañía, sea lo más cercano posible al capital económico. En este sentido, el SCR de una compañía de seguros suele definirse como el nivel de capital suficiente para cubrir las pérdidas probables a un nivel de confianza y un intervalo de tiempo definido. Apegándose a esta idea, las compañías debieran contar con alternativas para la medición de los riesgos que asumen, y no solo utilizar la formula general de la autoridad supervisora, de este modo, podría garantizarse que el SCR está reflejando de mejor manera los riesgos asumidos.

El objeto de estudio de la presente investigación, es el análisis del SCR por riesgo accionario bajo los lineamientos de la CNSF, los cuales se detallan en la Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas (LISF) y la CUSF. Para realizar dicho análisis, en este trabajo se utilizará la serie de rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), que es uno de los instrumentos de referencia de acuerdo a lo establecido en la CUSF, aunado a que por sus características, es un índice que refleja de buena manera el comportamiento general del mercado accionario mexicano. En este sentido, se busca modelar dicha variable a través de una metodología basada en modelos heteroscedásticos condicionales autorregresivos generalizados (GARCH) con innovaciones  $t$ -*student*, que además, consideran en sus estructuras el supuesto de asimetría en los choques (efecto de apalancamiento).

En congruencia con el objeto de estudio y la metodología que se utilizará, este trabajo debe tocar puntos referentes a Solvencia II, modelos de Series de Tiempo, además de establecer cómo es que pueden utilizarse dichos modelos en referencia a esta normativa, por lo tanto, el trabajo se desarrolla de acuerdo a la siguiente estructura:

En el capítulo 1 se abordan los aspectos referentes a Solvencia II tanto del esquema europeo como del esquema mexicano. Se hace un breve repaso de sus antecedentes, sus objetivos y su estructura general. En el mismo sentido, se explica como México adopta la regulación a través de la LISF y la CUSF, y finalmente, se exponen algunas posturas acerca de esta regulación, la

cuales brindan una visión más amplia sobre los alcances y limitantes de la misma.

En el capítulo 2 se aborda la parte teórica de los modelos utilizados en este trabajo. Se hace una explicación de qué es una serie de tiempo y cuales son sus componentes. Posteriormente, se da un bagaje de los modelos clásicos de series de tiempo, así como las adecuaciones realizadas en dichos modelos para captar las regularidades empíricas observadas en las series de rendimientos financieros.

En el capítulo 3 se detalla la variable utilizada (IPC), se hace un breve repaso bibliográfico acerca de la modelación de dicha variable, se presentan los objetivos e hipótesis del trabajo, se calibran los modelos con respecto a la serie de rendimientos del IPC y se estima el Valor en Riesgo (VaR) a un nivel de confianza del 99.5% para cada uno de los modelos seleccionados.

En el último capítulo se presentan las conclusiones del trabajo, se analizan los resultados obtenidos y se proponen algunas ideas para posibles trabajos posteriores.

En el Apéndice A se muestran los códigos de programación en R, mientras que el Apéndice B se ofrecen algunos conceptos, teoría y pruebas estadísticas utilizadas en el desarrollo del trabajo.

Finalmente, se muestra la bibliografía consultada, la cual da base y sustento a este trabajo.

# Capítulo 1

## Solvencia II

Etimológicamente, *solvencia* viene del latín *solve* = “solución, solver, resolver” y *ens-entis* = “que es, que hace, ser, ente”, es decir “ser o ente que resuelve”. Gramaticalmente, se define como la acción de solucionar un problema o como la capacidad de satisfacer deudas. Para el sector asegurador, la palabra solvencia se utiliza para referirse a la solidez financiera que las compañías de seguros tienen para hacer frente a sus obligaciones, en este sentido, el diccionario de seguros MAPFRE la define como la capacidad para atender el pago de los compromisos económicos mediante el conjunto de recursos que constituyen el patrimonio o activo.

Hoy en día, la globalización sigue siendo un tema de enérgico debate para sus investigadores; se le atribuyen una serie de beneficios, pero también se le acusa de ser la raíz de diversos problemas, como lo son las crisis económicas globales. Debido al impacto negativo que las crisis económicas tienen en los activos financieros de las compañías aseguradoras, estas se han visto orilladas a innovar en su administración de riesgos, así mismo, las autoridades encargadas de regular la actividad de este sector, han tenido que buscar la manera de adaptar las normas para que la actividad de sus integrantes se lleve de la mejor manera posible y en un contexto ad-hoc

con la realidad.

Solvencia II es la regulación vigente aplicada a las compañías de seguros en el marco de la Unión Europea (UE) y en los países que han adoptado este esquema de regulación, como es particularmente en el caso de México. Es el resultado de numerosas reformas y adaptaciones a distintos sistemas regulatorios; principalmente motivadas por las adecuaciones implementadas en los sistemas regulatorios orientados a la actividad bancaria.

## 1.1. Antecedentes

La crisis de 1929, derivada de la caída internacional de los mercados financieros, trajo como consecuencia el quiebre de una gran cantidad de compañías, lo cual tuvo un impacto en los niveles de desempleo, descenso demográfico, entre otros [Silva, 2008]. En la etapa en la que los mercados financieros se recuperaban, surgieron críticas y cuestionamientos sobre las normas imperantes que regulaban la actividad de las instituciones financieras, principalmente se señalaba que la disparidad entre las regulaciones de cada país incentivaba una competencia desleal en la actividad bancaria [López y Fernández, 2006].

El Banco Internacional de Pagos (BIS por sus siglas en inglés) estableció un papel fundamental en la creación de varios acuerdos de pagos entre diversos países de Europa, además, facilitó el diálogo y colaboración acerca de la fomentación de la estabilidad financiera y económica, responsabilidades que después de la conferencia de Bretton Woods pasarían a manos del Fondo Monetario Internacional (FMI) y el Banco Mundial (BM) [Ustáriz, 2003].

Castedo [2010] describe que a causa de la crisis originada por la quiebra del Bankhaus Herstatt en 1974<sup>1</sup>, se inició el desarrollo de un sistema de regulación bancaria en el cual participaron

---

<sup>1</sup>Debido a tal cierre, un gran número de operaciones internacionales quedó sin realizarse, por lo que el Chase

los bancos centrales del G-10<sup>2</sup> y el BIS, este último desempeñando un rol de moderador y anfitrión. Los participantes fueron los encargados de debatir acerca de las características, alcances y puntos que debían ser tomados en cuenta para esta nueva regulación bancaria. El resultado fue el documento llamado: “El Acuerdo de Capitales de Basilea - Convergencia internacional de medidas y estándares de capital.”, mejor conocido como *Basilea I*<sup>3</sup>.

Basilea I se firmó el 11 de julio de 1988, pero se requirió su introducción paulatina hasta diciembre de 1992. Bajo esta normativa se exigía a los bancos que mantuvieran un capital mínimo total equivalente al 8% de los activos ajustados al riesgo, con al menos la mitad de dicho capital en acciones ordinarias y reservas, mientras que el restante en instrumentos de capital de deuda híbrida [López y Fernández, 2006].

Con base en la misma idea comenzó a desarrollarse una regulación de características semejantes a Basilea I para aplicarse en el sector asegurador. Esta regulación puntualizaba en exigir un fondo de garantía mínimo, determinado en función de primas y siniestros además de las provisiones técnicas, se le conoce como “Marco Directivo de Solvencia”, o bien, *Solvencia I*.

El marco directivo de solvencia se dividía en dos directivas, *Directiva del Consejo 79/267/CEE*, que representaba la normativa para el caso de seguros de vida y la *Directiva del Consejo 73/239/CEE* para el caso de no vida. El margen de solvencia se calculaba como un porcentaje de las reservas y debía estar representado por el capital, las ganancias retenidas, las reservas especiales, las ganancias financieras no realizadas y otras inversiones. Solvencia I se basaba en un conjunto de ratios que relacionaban el capital exigido con el volumen de negocio [Arjona y Bastera, 2016].

---

Manhattan de Nueva York, rehusó cumplir con órdenes de pago contra la cuenta del Bankhaus, por un valor aproximado de 620 millones de dólares, lo cual provocó un ambiente de incertidumbre en los mercados financieros.

<sup>2</sup>El Grupo de los Diez o G-10 se refiere al grupo de países miembros del FMI: Bélgica, Canadá, Francia, Italia, Japón, los Países Bajos, el Reino Unido, Estados Unidos y los bancos centrales de Alemania y Suecia.

<sup>3</sup>La regulación es conocida así debido a que las reuniones se llevaron a cabo en las instalaciones del BIS, el cual tiene sede en Basilea, Suiza.

Basilea I y Solvencia I no estuvieron exentas del paso del tiempo, ambas regulaciones no contemplaban importantes características de la evolución económica y tecnológica. De manera general, a ambas regulaciones se les criticaba que el excedente de fondos se calculaba con base en ratios y que tales cantidades eran estáticas por intervalos de tiempo medianamente grandes, lo cual era un problema grave ante las características dinámicas de ambos mercados [Camacho, 2009].

En 1999 comenzó la elaboración de la nueva regulación bancaria, el primer acercamiento fue a través de la publicación de los tres documentos consultivos del comité de Basilea, en donde se explicaba la necesidad de amplificar el enfoque de tratamiento de riesgos, se hacía una primer aproximación al uso de modelos internos y se señalaban algunos de los objetivos buscados. En 2004 el comité de Basilea publicó el documento “Convergencia Internacional de Medidas y Normas de Capital - Marco revisado”, mejor conocido como *Basilea II*. Este documento constaba principalmente de tres pilares en los que se basaba su contenido.

- Pilar I: Cálculo de los requisitos mínimos de capital.
- Pilar II: El proceso de supervisión de la gestión de los fondos propios.
- Pilar III: La disciplina del mercado.

Nuevamente, las iniciativas que marcaron el camino hacia Basilea II, marcaron pauta para el desarrollo de un nuevo marco normativo enfocado al sector asegurador, tal es así que Solvencia II toma la misma estructura en cuanto a los tres pilares, sin embargo, se hicieron modificaciones con respecto a la identificación de riesgos, pues tal como menciona Gatzert y Wesker [2012], las compañías bancarias están expuestas principalmente a riesgos meramente financieros (cambios adversos en las condiciones del mercado, los cuales tienen una alta correlación debido a la sensibilidad de los factores en común), mientras que las compañías de seguros están expuestas



a riesgos financieros y no financieros (el clima, cambios demográficos o epidemias, riesgos que generalmente no son sistemáticos y en consecuencia tienen una menor correlación).

La creación de Solvencia II inició en el año 2000 con la realización del estudio de KPMG<sup>4</sup>, con el cual se concluyó que la estructura de tres pilares es adecuada para la supervisión de seguros. El segundo estudio es conocido como el informe Sharma<sup>5</sup>. Este informe es el resultado de una encuesta que se formó de tres partes. La sección inicial preguntó a los reguladores sobre los esfuerzos de intervención temprana disponibles para ellos. En la segunda parte se preguntó acerca de los errores reales. Y en la tercera parte se preguntó sobre los planes de restauración [Eling *et al.*, 2007].

La segunda fase consistió en la creación de una directiva marco. Esta directiva fue la CEIOPS (Sigla de Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors.), creada por la decisión *2004/6/EC* en el año 2003; sin embargo, esta fue derogada y sustituida por la EIOPA (Sigla de European Insurance and Occupational Pensions Authority) mediante el reglamento de la UE *1094/2010*.

Durante la crisis hipotecaria de 2008<sup>6</sup> el desarrollo de Solvencia II estaba en curso; no obstante, esta crisis sirvió para demostrar que Solvencia I era obsoleta, además, fue una prueba de la correlación existente entre los mercados financieros y el mercado asegurador, pues en el momento en el que se anunció la bancarrota de Lehman Brothers<sup>7</sup>, el desplome financiero impactó al sector asegurador de tal manera que la aseguradora AIG tuvo que ser rescatada financieramente por el gobierno de EEUU para evitar una catástrofe mayor<sup>8</sup>.

---

<sup>4</sup>KPMG, 2002, Study into the Methodologies to Assess the Overall Financial Position of an Insurance Undertaking from the Perspective of Prudential Supervision russels.

<sup>5</sup>Prudential Supervision of Insurance Undertakings, 2002. Recibe el nombre de informe Sharma en honor al presidente del grupo de trabajo que lo elaboró.

<sup>6</sup>Conocida también como crisis subprime de los Estados Unidos de América (EEUU), la cual tuvo impacto en prácticamente todos los mercados financieros del mundo, sobre todo en aquellos de países emergentes.

<sup>7</sup>Era el cuarto banco de inversión más grande de EEUU. Se fundó en 1850 y fue declarado en quiebra el 15 de septiembre de 2008.

<sup>8</sup>La Reserva Federal de EEUU inyectó a AIG 85,000 millones de dólares (60,049 millones de euros) que requería para impedir su derrumbe.

El 10 de Julio de 2007, se publica el primer borrador de la directiva de Solvencia II, resultado en gran medida de los primeros tres *Estudios de Impacto Cuantitativo* (QIS por sus siglas en inglés). En ellos se recogieron las opiniones y recomendaciones de una gran cantidad de compañías aseguradoras y de autoridades reguladoras, con la finalidad de proveer pruebas suficientes sobre los posibles impactos causados por el proyecto.

A manera de resumen se presentan los principales puntos tocados en cada uno de los QIS [EIOPA, 2011]:

- QIS 1: Análisis de los requerimientos de las provisiones técnicas y los niveles de prudencia.
- QIS 2: Aspectos relacionados con las provisiones técnicas, el requerimiento de capital de solvencia (SCR), y el requerimiento de capital mínimo (MCR).
- QIS 3: Comprobación de la calibración de parámetros, incluyó activos computables y aspectos relacionados con grupos.
- QIS 4: Análisis de metodologías simplificadas para capital y reservas, la aplicación de parámetros propios y las medidas de implantación de la directiva.
- QIS 5: Aborda los requerimientos de los modelos internos y la fórmula estándar, el enfoque modular y escenario equivalente único para el ajuste de pérdida y capacidad de absorción de las provisiones técnicas e impuestos diferidos.

Para la elaboración del esquema general de Solvencia II, se tomaron en consideración otros sistemas de regulación de solvencia como el ECR (Enhanced Capital Requirement) e ICA (Individual Capital Requirement) del Reino Unido, el SST (Swiss Solvency Test) de Suiza, el modelo NAIC (National Association Insurance Companies) de EEUU, la regulación Australiana, APRA (Australian Prudential Regulation Authority), modelos de agencias calificadoras como Standar & Poors, entre otros [Santomil *et al.*, 2011]. El esquema general de Solvencia II fue

aprobado en 2009, su implementación se tenía prevista para el año 2012; sin embargo, esta entró en vigor de manera obligatoria hasta el 1 de enero de 2016.

La compañía reaseguradora SwissRe [2015] menciona que Solvencia II se ha convertido en un importante punto de referencia para muchos países en vías de modernización regulatoria, debido a que tiene el enfoque de regulación más exhaustivo del sector asegurador hasta el momento, y, aunque en el caso de latinoamérica aún existen problemas relacionados con la inestabilidad macroeconómica (principalmente de los países mas pequeños), ya varios países se encuentran en una etapa avanzada de implementación como Brasil y Chile, mientras que México se ha puesto a la vanguardia en este sentido, pues ha sido el primer país en implementar de manera completa el sistema regulatorio de Solvencia II.

## **1.2. Estructura General de Solvencia II**

Bajo este esquema normativo se busca que el riesgo este en mejor posición dentro de la empresa, además de modificar la comunicación que se dará al mercado. Es por esto que en Solvencia II toda la compañía debe participar y no solo los gerentes o actuarios. Los principales objetivos se enlistan a continuación:

- Moderación eficiente de riesgos asumidos por parte de las compañías aseguradoras
- Correcta gestión de riesgos, mediante técnicas adecuadas de evaluación para cada uno de los riesgos que pudieran afectar de manera significativa la solvencia de la compañía.
- Una directiva de gobierno sólida, especificando las funciones de cada una de las entidades que lo conforman.
- Protección al consumidor mediante la transparencia de la información.

- Informes que permiten la comparabilidad de la situación financiera de las compañías de seguros.

### **1.2.1. Pilar I**

En este pilar se encuentran todos los requerimientos cuantitativos. Se contemplan los recursos con los que cuenta una compañía, la valoración de sus activos y pasivos, el cálculo de provisiones técnicas y los requerimientos de capital obligatorios.

De conformidad con Castañer y Claramunt [2017], medir y controlar la solvencia de una compañía implica valorar los fondos netos disponibles, es decir, valorar los activos con los que cuenta una compañía y los pasivos que le corresponden, aunado a calcular lo que se debería tener, es decir, calcular el capital de solvencia obligatorio.

#### **Valoración de Activos y Pasivos.**

Solvencia II plantea que los activos y pasivos de una compañía deben valorarse de acuerdo a una consistencia de precios de mercado (market consistent); sin embargo, no siempre se tiene acceso a tales precios o el precio de mercado es poco creíble, para lo cual se debe recurrir a criterios de valoración. De acuerdo con Camacho [2009] se tiene lo siguiente:

- Los activos y pasivos se valoran a valor y precios de mercado.
- Si no es conveniente realizar una valoración a precios de mercado, esta deberá hacerse a través de un modelo.
- Si no es conveniente una valoración vía precios de mercado o vía modelo, los activos y

pasivos se valorarán bajo las Normas Internacionales de Información Financiera (IFRS por sus siglas en inglés).

- Valoración según las normas contables adoptadas por cada país.

### **Provisiones Técnicas.**

Las provisiones técnicas son el pasivo más importante de una compañía de seguros, pues de estas depende el cumplimiento de obligaciones hacia los asegurados. Bajo el enfoque de Solvencia II, se tiene que el monto de la reserva será igual a la suma de la *Mejor Estimación* (Best Estimate Liabilities, BEL.) y el *Margen de Riesgo* (MR).

“La definición del BEL dada por la comisión es la del importe asociado al valor presente esperado de los flujos futuros, usando la curva de tipos de interés libres de riesgo y basándose en información actual y en hipótesis realistas.

Respecto al MR, la comisión lo define como el importe que cubre el riesgo asociado a los flujos futuros de los compromisos hasta su desaparición. Se deberán calcular de forma que permitan que las obligaciones puedan ser o bien transferidas o bien liquidadas.” [Lozano y González, 2010]

Dicho de otra manera, la suma del BEL y el MR, representa a aquellos ingresos y egresos asociados a la cartera suscrita, además del capital necesario para que la compañía continúe en operación. El objetivo de la valuación de las provisiones técnicas bajo este enfoque, es encontrar el valor que algún participante del sector asegurador pagaría por la cartera suscrita.

## Requerimientos del Capital de Solvencia.

Santomil *et al.* [2011] define al Requerimiento de Capital de Solvencia (SCR por sus siglas en inglés.) como el nivel de capital que permite a una entidad absorber pérdidas significativas e imprevistas con una determinada probabilidad de ruina y horizonte temporal. Mientras que al Requerimiento de Capital Mínimo (MCR por sus siglas en inglés.), como el nivel o cantidad mínima absoluta de capitales que las compañías de seguros deben mantener para responder a variaciones adversas en la totalidad de sus pasivos asumidos.

El cálculo del SCR debe considerar lo siguiente:

- Principio de continuidad del negocio de la empresa.
- Debe tener en cuenta todos los riesgos cuantificables.
- Cubrirá las actividades existentes (sólo las pérdidas inesperadas) y las nuevas actividades que se espere realizar en los siguiente 12 meses.

El SCR deberá ser calculado en función de los fondos propios básicos a un horizonte temporal de un año. En donde los fondos propios se componen de:

- El excedente de los activos respecto de los pasivos (valorados según los criterios de Solvencia II).
- Los pasivos subordinados<sup>9</sup>.

El cálculo del SCR cubrirá (como mínimo) los siguientes riesgos:

---

<sup>9</sup>La deuda subordinada o pasivos subordinados, son títulos de valores de renta fija con rendimiento explícito, emitidos habitualmente por entidades de crédito y grandes sociedades, en los que el cobro de los intereses puede estar condicionado a la existencia de un determinado nivel de beneficios.

- Riesgo de suscripción de los seguros de vida, no vida y enfermedad.
- Riesgo de mercado.
- Riesgo de incumplimiento de la contraparte.
- Riesgo operacional, incluyendo los riesgos legales, pero no los derivados de decisiones estratégicas ni los riesgos de reputación.

De manera similar a la contabilidad tradicional, la valuación de los fondos propios (capital contable), debiera ser la diferencia entre el valor de mercado de activos y el valor de mercado de pasivos, con lo cual tendría que ser suficiente para cubrir el SCR. Esto se visualiza en la Figura [1-1]

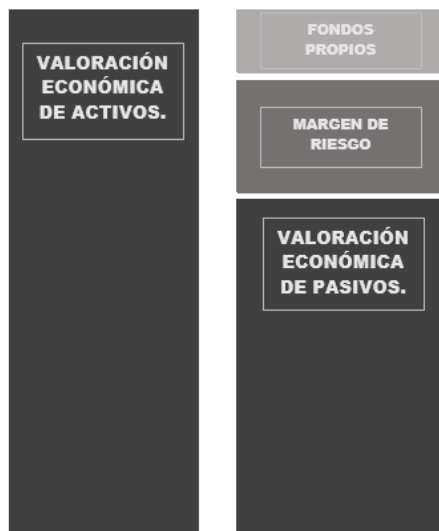


Figura 1-1: Fuente: Elaboración propia.

### 1.2.2. Pilar II

Este pilar enmarca la supervisión a la gestión de riesgos, el control interno y el gobierno corporativo. Tiene la finalidad de garantizar que las aseguradoras tengan un sistema de gestión

de riesgos correcto y que mantengan un nivel de capital de garantía adecuado.

La firma Deloitte [2011] menciona que el Pilar II es el corazón de Solvencia II, ya que en el Pilar I, cuando se habla de capital, este se fija en un año de riesgo, mientras que en el Pilar II se piensa en una proyección, en una estabilidad de ese capital a lo largo del tiempo. Además, el Pilar II incluye aspectos como control interno, administración de riesgos, pruebas de estrés y continuidad de las pruebas.

Bajo este Pilar se introduce el modelo de evaluación interna de los riesgos y la solvencia, ORSA<sup>10</sup> (Sigla de Own Risk and Solvency Assessment). Este modelo debe llevarse a cabo de manera obligatoria en todas las compañías y su objetivo es que estas tengan un proceso de evaluación de los riesgos que pudieran poner en peligro el cumplimiento de sus obligaciones. Con esto se obliga a aseguradoras y autoridades a respetar el principio de responsabilidad en el desarrollo de sus actividades, ya que ambos extremos deben ser capaces de prever las situaciones que pudieran generar un impacto negativo con suficiente antelación.

El trabajo de revisión de la autoridad supervisora es un compendio de los siguientes puntos:

- El sistema de gobierno corporativo.
- Las reservas técnicas.
- Los requisitos de capital.
- Reglamentación de inversiones.
- Calidad y cantidad de recursos propios.
- Cumplimiento de los requerimientos derivados de modelos internos.

---

<sup>10</sup>La evaluación ARSI (Autoevaluación de Riesgos y Solvencia Institucionales) es el equivalente en el caso de la regulación mexicana.



Con completa discreción, la autoridad debe informar a la compañía que:

- El modelo interno o estatutario no está capturando de manera adecuada los riesgos asumidos.
- Existen deficiencias en el control interno (gobierno corporativo).

“Las autoridades reguladoras deben revisar que las compañías estén bien capitalizadas y que los riesgos estén siendo capturados de forma adecuada. En caso de que haya una deficiencia en el capital o en la gestión de los riesgos, el supervisor podrá exigir requerimientos de capital adicional, al igual de que exista un gobierno corporativo eficiente.” [Vilchis, 2013]

### **1.2.3. Pilar III**

Se refiere a la disciplina de mercado y a la transparencia de la información, tiene la finalidad de obligar a las aseguradoras a proporcionar los datos y balances de sus políticas de administración de riesgos. También contempla la presentación de informes sobre planeación, las personas que poseen los datos, la disponibilidad y suficiencia de éstos. Este Pilar es fundamental ya que de aquí es dónde la directiva de Solvencia II obtendrá la información que se utilizará en la toma de decisiones [Deloitte, 2011].

Las aseguradoras están obligadas a entregar a las autoridades supervisoras un informe de situación financiera y de solvencia, conocido como SFCR (Sigla de Solvency and Financial Condition Report)

El SFCR es una herramienta que suministra de información sobre la colocación de capital de las aseguradoras a la autoridad supervisora y a los asegurados. Tiene como objetivos principales:

- Mejorar la transparencia del sector asegurador.
- Otorgar información estándar a los asegurados con la finalidad de que puedan comparar y generar un criterio propio sobre la situación de solvencia de las compañías.
- Otorgar incentivos a las aseguradoras que tengan una buena gestión de riesgos, lo cual convergerá en estabilidad de aquellas que lo estén haciendo de manera correcta y prudente.

Para cumplir con sus objetivos, Solvencia II debe cumplir con una serie de principios, que se resumen a tener una buena administración de riesgos en todas sus facetas; identificación, medición, trato y monitoreo. En la Tabla [1-1] se muestran los principales puntos tocados bajo los tres pilares de Solvencia II.

<b>PILAR 1</b>	<b>PILAR 2</b>	<b>PILAR 3</b>
<i>Requerimiento del mercado</i>	<i>Proceso de Supervisión</i>	<i>Disciplina de Mercado</i>
*Requerimientos de Capital (RCS)	*Sistema de Gobierno Corporativo	*Transparencia
*Reservas	*Proceso de Revisión Regulatoria	*Provisión de Información
*Inversiones		*Información Sobre Competencia

Tabla 1-1: Elaboración Propia.

### 1.3. Solvencia II en México

Precedentemente a la iniciativa de Solvencia II, en México las operaciones del sector asegurador se realizaban bajo la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros (LGISMS) y por la Ley Federal de Instituciones de Fianzas (LFIF), cuya responsabilidad de cumplimiento pertenecía a la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), la cual es un órgano desconcertado de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP).

“La CNSF es la encargada de supervisar que la operación de los sectores asegurador y

afianzador se apegue al marco normativo, preservando la solvencia y estabilidad financiera de las instituciones de Seguros y Fianzas, para garantizar los intereses del público usuario, así como promover el sano desarrollo de estos sectores con el propósito de extender la cobertura de sus servicios a la mayor parte posible de la población.

La función supervisora de la CNSF, debe operar bajo principios de eficiencia, eficacia y calidad, acordes con los estándares internacionales en la materia, con el objeto de coadyuvar a la estabilidad y solvencia financiera de las industrias aseguradora y afianzadora, como elemento para estimular la seguridad y confianza del público usuario de estos servicios financieros.” [Página oficial de la CNSF, 2019]

La CNSF en conjunto con la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS), formaron el comité de solvencia, con el objetivo de tratar los asuntos relacionados con la iniciativa de Solvencia II.

### **1.3.1. Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas**

El 4 de Abril del 2013 se publicó en el Diario Oficial de la Federación la Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas (LISF), misma que entró en vigor a partir del 4 de Abril del 2015 y la cual sustituyó a la LGISMS y a la LFIF, fusionandolas en una sola.

Dentro de los cambios más notorios en esta transición, es que la LISF contempla mecanismos acerca del gobierno corporativo, reemplazando así a la figura del contralor normativo<sup>11</sup> por la del comité de auditoría.

---

<sup>11</sup>Es aquel que establece los procedimientos necesarios para hacer cumplir la normativa, en relación a temas de inversiones, y en general a todas las medidas internas del gobierno corporativo, códigos de control interno y transparencia comercial.

En la LISF se encuentran los lineamientos fundamentales sobre las operaciones permitidas a las compañías, los requisitos para formar una institución de seguros y las políticas internas que debe cumplir una compañía.

En la LISF, el *Artículo 1* establece que: la ley “es de interés público y tiene por objeto regular la organización, operación y funcionamiento de las Instituciones de Seguros, Instituciones de Fianzas y Sociedades Mutualistas de Seguros; las actividades y operaciones que las mismas podrán realizar, así como las de los agentes de seguros y de fianzas, y demás participantes en las actividades aseguradora y afianzadora previstos en este ordenamiento, en protección de los intereses del público usuario de estos servicios financieros”.

Con el fin de evitar una divergencia de interpretaciones de lo establecido en la LISF, la CNSF pone a disposición de los interesados, la Circular Única de Seguros y Fianzas (CUSF), con la cual se intenta dar certeza a los requerimientos derivados de esta ley.

### **1.3.2. Circular Única de Seguros y Fianzas**

La CNSF define a la CUSF como “el cuerpo normativo que contiene las disposiciones derivadas de la Ley de Instituciones de Seguros y de Fianzas, que dan operatividad a sus preceptos y sistematizan su integración, homologando la terminología utilizada, a fin de brindar con ello certeza jurídica en cuanto al marco normativo al que las instituciones y sociedades mutualistas de seguros, instituciones de fianzas y demás personas y entidades sujetas a la inspección y vigilancia de la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas deberán sujetarse en el desarrollo de sus operaciones.”

En la CUSF se recogen los requerimientos para hacer una equivalencia de la regulación mexicana a Solvencia II. Sustituye a la Circular Única de Seguros y a la Circular Única de

Fianzas, las cuales se apegaban al marco normativo de Solvencia I.

### 1.3.3. Formula General del SCR de acuerdo a la CUSF

De acuerdo a lo establecido en la CUSF en su *Capítulo 6.2* y en el *artículo 236* de la LISF, los elementos que conforman la formula general para el cálculo del SCR quedan definidos como:

$$RCS = \max\{RC_{TySF} + RC_{PML}, 0.9RC_{TySF}\} + RC_{TyFP} + RC_{TyFF} + RC_{OC} + RC_{OP}$$

donde:

- $SCR$  es el Requerimiento de Capital de Solvencia;
- $RC_{TySF}$  es el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros;
- $RC_{PML}$  es el Requerimiento de Capital para Riesgos Basados en la Pérdida Máxima Probable;
- $RC_{TyFP}$  es el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de los Seguros de Pensiones.
- $RC_{TyFF}$  es el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Fianzas;
- $RC_{OC}$  es el Requerimiento de Capital por Otros Riesgos de Contraparte, y
- $RC$  es el Requerimiento de Capital por Riesgo Operativo.

## Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros.

De acuerdo a la más reciente modificación del *Capítulo 6.3* de la CUSF, hecha el 16 de Diciembre de 2016, el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros ( $RC_{T_ySF}$ ) se efectuará empleando modelos que tomarán en cuenta los siguientes aspectos:

I. Se desarrollarán bajo metodologías basadas en la generación de escenarios estocásticos que reflejen la variabilidad de los riesgos ante situaciones extremas;

II. El  $RC_{T_ySF}$  reflejará la variación del valor neto de los fondos propios ajustados de la institución, en un horizonte de tiempo de un año, a partir de la fecha en que se realice el cálculo del SCR;

III. El valor neto de los fondos propios ajustados (VNA) a una fecha determinada se calcula como:

$$VNA(t) = VNF(t) + REA_{PML}, \quad \text{para } t = 0, 1.$$

Donde:

- $t$  es la variable de tiempo, tal que  $t = 0$  corresponde a la fecha de cálculo del SCR y  $t = 1$  corresponde a la fecha de proyección, un año después de la fecha de cálculo del SCR;
- $VNA$  es el valor presente de los fondos propios ajustados al tiempo;
- $VNF$  es el valor presente de los fondos propios al tiempo  $t$ ;
- $REA_{PML}$  es el valor total al tiempo de los montos de las coberturas de los contratos de

reaseguro proporcional y de los montos de las coberturas de los contratos de reaseguro de exceso de pérdida, únicamente para los contratos que sirven para cubrir los seguros cuyo requerimiento de capital está basado en la Pérdida Máxima Probable (PML)

IV. El valor neto de los fondos propios, el cual se determina como el monto de los activos sujetos a riesgo menos los pasivos sujetos a riesgo a una fecha determinada, es decir:

$$NF(t) = A(t) - P(t), \quad \text{para } t = 0, 1.$$

Donde:

- $A(t)$  es el valor presente del valor de mercado de los activos expresados en pesos sujetos a riesgo al tiempo  $t$ ;
- $P(t)$  es el valor presente del valor de mercado de los pasivos expresados en pesos sujetos a riesgo al tiempo  $t$ , sin incluir el margen de riesgo;

V. La variable de pérdida del valor de los fondos ajustados, la cual se denota como:

$$L = -\Delta VNA;$$

donde, el cambio o variación del valor de los fondos propios ajustados ( $\Delta VNA$ ) se calcula como:

$$\Delta VNA = VNA(1) - VNA(0)$$

VI. EL  $RC_{TySF}$  se calcula como el máximo entre cero y el valor en riesgo a un nivel de

confianza del 99.5% ( $VaR_{99.5\%}$ ) de la variable de pérdida en el valor de los fondos propios ajustados,  $L$ , es decir:

$$RC_{TySF} = \max\{0, VaR_{99.5\%}(L)\};$$

donde,  $L$  es la variable aleatoria que representa la pérdida prospectiva de los Fondos Propios (capital) y que se puede escribir como:

$$L = L_A + L_P + L_{PML}$$

con:

- $L_A = -A(1) + A(0)$  la variable aleatoria de la pérdida prospectiva en el valor de los activos de la compañía en un año.
- $L_P = P(1) - P(0)$  la variable aleatoria de la pérdida prospectiva en el valor de los pasivos de la compañía en un año, y
- $L_{PML} = -S_{PML}(1) + S_{PML}(0)$  la variable aleatoria de la pérdida prospectiva por los incumplimientos de entidades reaseguradoras (contrapartes) de los contratos de reaseguro, tanto proporcionales como de cobertura exceso de pérdida, que respaldan la PLM en un año.

VII. La variable  $L_A$ , está formada por las pérdidas en el valor de los activos sujetos al riesgo de mercado, así como por las pérdidas en el valor de los activos sujetos al riesgo de concentración y crédito.  $L_A$ , está dada por:



$$L_A = \sum_{j \in CA} L_{A,j}$$

donde,  $CA$  es el conjunto de activos formado por:

- Instrumentos de deuda:
  - Emitidos o avalados por el Gobierno Federal o emitidos por el Banco de México;
  - Instrumentos que sean objetos de oferta pública emitidos en el mercado mexicano o en mercados extranjeros.
  
- Instrumentos de renta variable:
  - Acciones cotizadas en mercados nacionales y acciones cotizadas en mercados extranjeros inscritos en el Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC);
  - Fondos de inversión de instrumentos de deuda y fondos de inversión de renta variable;
  - Certificados bursátiles fiduciarios indizados o vehículos que confieren derechos sobre instrumentos de deuda, de renta variable o de mercancías denominados en moneda nacional o extranjera;
  - Fondos de inversión de capitales, fondos de inversión de objeto limitado, fondos de capital privado o fideicomisos que tengan como propósito capitalizar empresas del país, e
  - Instrumentos estructurados;
  
- Títulos estructurados:
  - De capital protegido, y
  - De capital no protegido;
  
- Operaciones de préstamos de valores;

- Instrumentos no bursátiles;
- Operaciones Financieras Derivadas;
  - Para cubrir instrumentos de deuda, y
  - Para cubrir instrumentos de renta variable, y
- Importes Recuperables de Reaseguro, e
- Inmuebles urbanos de productos regulares.

IX. La variable  $L_P$  está formada por las pérdidas generadas por el incremento en el valor de los pasivos. Para su determinación se consideran todos los riesgos mencionados en el Pilar I del esquema general de Solvencia II.  $L_P$ , está dada por:

$$L_P = \sum_{j \in CP} L_{P,j'}$$

donde  $CP$  es el conjunto de pasivos formado por:

- Seguros de vida:
  - seguros de vida de corto plazo;
    - Vida individual, y
    - Vida grupo, y
  - Seguros de vida de largo plazo;
    - Vida individual, y
    - Vida grupo;
- Seguros de daños:

- Seguros de responsabilidad civil y riesgos profesionales,
  - Seguros de marítimo y transporte,
  - Seguros de incendio,
  - Seguros de automóviles,
  - Seguros de crédito,
  - Seguros de caución, y
  - Seguros de diversos, y
- Seguros de accidentes y enfermedades:
    - Seguros de accidentes personales,
    - Seguros de gastos médicos, y
    - Seguros de salud;

IX. La variable  $L_{PML}$ , está formada por las pérdidas ocasionadas por los incumplimientos de entidades reaseguradoras (contrapartes) de los contratos de Reaseguro, tanto proporcionales, como de cobertura de exceso de pérdida, los cuales respaldan el  $RC_{PML}$ . Esta variable considera los riesgos de contraparte y concentración por Reaseguro cedido.

La variable  $L_{PML}$ , está dada por:

$$L_{PML} = \sum_{j \in CPML} L_{PML,j}$$

donde,  $CPML$  es el conjunto de ramos o tipos de seguros:

- Seguros agrícolas y de animales;

- Seguros de terremoto;
- Seguros de huracán y riesgos hidrometeorológicos, y
- Seguros de crédito a la vivienda.

X. Los parámetros de los modelos que explican el comportamiento de la variable de pérdida  $L$ , se revisan a partir del flujo de información con la que se calibren.

Hasta este punto se han puesto de manifiesto las bases técnicas para el cálculo del SCR, de acuerdo a lo estipulado en la CUSF, pero el interés particular de este trabajo es el análisis de SCR por *Riesgo Accionario*, el cual forma parte del  $RC_{TySF}$ .

#### 1.3.4. El Riesgo de Mercado

El riesgo de mercado se define como el riesgo derivado de una probable pérdida por la disminución en el valor de un instrumento o portafolio financiero; está asociado a la variación o volatilidad de las variables de mercado como pueden ser las tasas de interés, el tipo de cambio, instrumentos de renta variable, spreads, entre otros. Para efectos de la CUSF, el riesgo de mercado se agrupa a partir de 3 subriesgos:

- Riesgo de tasa de interés;
- Riesgo de tipo de cambio, y
- Riesgo accionario.

En el *Anexo 6.3.2* de la CUSF se especifica que los riesgos de mercado se dividen según la naturaleza del instrumento, ya sea porque se trata de un instrumento de deuda o de capitales,

porque el instrumento está denominado en pesos o en moneda extranjera, porque el instrumento es gubernamental o privado, etc.

A continuación se dan las definiciones para cada uno de los submodulos que conforman el riesgo de mercado:

### **Riesgo de tasa de interés**

“El riesgo de tasa de interés existe para todos los activos y pasivos cuyo valor neto de activos sea sensible a los cambios en la estructura de las tasas de interés o que sean afectadas directamente por la volatilidad en la tasa de interés. Esto se aplica tanto a las estructuras reales y a las nominales de largo plazo” [European Comision, QIS 5 Technical Specification, 2010].

El riesgo de tasa de interés se deriva de las fluctuaciones en los tipos de interés de los activos y pasivos que conforman la cartera. El tipo de interés es el costo o remuneración que se origina por el uso del dinero, mismo que puede ser fijo o variable, de modo que, si la compañía tiene contratado un tipo de interés fijo, en principio no le afectará el riesgo de tasa de interés de interés; sin embargo, tendrá un riesgo que emana del costo de oportunidad de acuerdo a la posición que tenga la compañía. Es decir, si la compañía mantiene una posición activa, el incremento de las tasas de interés implica un costo de oportunidad, y si las tasas de interés bajan, la compañía estará “cubierta” del riesgo, pues obtendrá una tasa superior a la que se oferta en el mercado. Por otro lado, si la compañía mantiene una posición pasiva, un decremento en las tasas de interés refleja un costo de oportunidad, pues la compañía está endeudada a un tipo de interés elevado en comparación con el que oferta el mercado, paralelamente, si la tasas de interés se incrementan, la compañía estaría pagando una tasa de interés inferior a la que oferta el mercado.

Para efectos de la CUSF, el riesgo de tasa de interés se divide en:

- Tasas de interés con riesgo: Instrumentos de deuda privados.
- Tasas de interés libres de riesgo: Instrumentos de deuda gubernamentales.

### **Riesgo de tipo de cambio**

El riesgo de tipo de cambio surge de tener inversiones de cualquier tipo valorado en una divisa extranjera. Está relacionado a la pérdida causada por las fluctuaciones de las divisas debido a la volatilidad o posición de estas de un momento a otro. Este riesgo es asumido por aquellas compañías cuyas inversiones o negocios impliquen un intercambio de divisas. De este modo, las compañías pueden generar pérdidas o ganancias con respecto a los movimientos del tipo de cambio y la posición que la compañía tenga en el negocio o inversión.

A menudo, las compañías que realizan operaciones comerciales que implican intercambio entre divisas utilizan estrategias de cobertura para neutralizar o disminuir el riesgo de la exposición en los tipos de cambio; sin embargo, de esta forma también se neutralizan las posibles ganancias de esta exposición.

De acuerdo con la firma consultora PriceWaterhouseCoopers [2011], las variaciones del tipo de cambio afectan directamente los flujos de caja generados por la actividad operativa y financiera de las compañías. En este sentido, las variaciones en el tipo de cambio fueron consideradas como la tercera amenaza para el desarrollo internacional de la actividad empresarial en una encuesta realizada a 1.400 directivos en el año 2004.

El nivel de exposición cambiaría se refiere a todo lo que se encuentra sujeto al riesgo de

tipo de cambio, es decir, a la sensibilidad las fluctuaciones cambiarias. En este sentido, se dice que el riesgo cambiario depende de la intensidad de las fluctuaciones del tipo de cambio (su volatilidad) y, del grado de exposición de la empresa a esas fluctuaciones.

### **Riesgo accionario**

El riesgo accionario es el riesgo que surge de la volatilidad de los precios del mercado de valores y la posible disminución en el valor de una acción o una cartera de acciones. Este riesgo puede ser sistemático o no sistemático. El riesgo no sistemático puede mitigarse a través de la diversificación en diversas acciones, mientras que el sistemático no puede ser mitigado, pues este se deriva de eventos financieros catastróficos, por ejemplo, una crisis económica global.

Al igual que en el riesgo de tipo de cambio, la exposición accionaria se refiere a lo que la compañía tenga expuesta a las fluctuaciones del precio de las acciones.

“El riesgo accionario se debe al nivel o la volatilidad de los precios en el mercado accionario. Su exposición se refiere a todos los activos y pasivos cuyo valor sea sensible a los cambios en el precio de las acciones” [European Comision, QIS 5 Technical Specification, 2010].

Para la modelación de los riesgos que conforman el riesgo de mercado, la CUSF ofrece una lista de instrumentos de referencia, la cual se detalla a continuación.

### **Lista de Instrumentos de Referencia**

Los instrumentos financieros de referencia o base se dividen en tres grupos: tasas de interés, tipos de cambio e índices financieros.

*Instrumentos de Curvas de Tasas de Interés:* Bonos - M; UMS; UDIBONOS; T-Bills; THE, y LIBOR.

*Instrumentos de Tipos de Cambio:* Dólar, y UDI.

*Indices Financieros del Mercado de Capitales Mexicano:* BMV - Consumo RT; BMV - Materiales RT; BMV - Industrial RT; BMV - Financiero RT; BMV - Telecom RT; BMV - Índice de Precios y Cotizaciones; FIBRA Uno; Índice BMV Sociedades de Inversión de Deuda; Índice BMV Sociedades de Inversión de Renta Variable e Índice de Vivienda de Sociedad Hipotecaria Federal.

*Indices Financieros del Mercado de Capitales Extranjero:* S&P Global 1200 Consumer Staples; S&P Global 1200 Energy; S&P Global 1200 Materials; S&P Global 1200 Industrials; S&P Global 1200 Healthcare; S&P Global 1200 Consumer Discretionary; S&P Global 1200 Financial; S&P Global 1200 Information Technology; S&P Global 1200 Telecommunication Services; S&P Global 1200 Utilities; S&P Global 1200; Credit Suisse Yield Enhanced Global Corporate Index, y Credit Suisse Yield Enhanced Sovereign Corporate Index.

### **1.3.5. Variable de Pérdida Sujeta a la Inversión en Instrumentos de Renta Variable**

La variable de pérdida  $L_{A,j}$  correspondiente a la inversión en instrumentos de renta variable, se determina como:

$$L_{A,j} = \sum_{i=0}^{n_j} L_{A,j,i}$$



donde,

- $j$  se refiere al tipo de instrumento de renta variable correspondiente al conjunto de activos  $CA$  descritos en la lista de instrumentos de referencia.
- $n_j$  se refiere al numero total de instrumentos para el tipo de instrumentos  $j,y$ ;
- $L_{A,j,i}$  es la variable de pérdida del instrumento  $i$  correspondiente a inversiones en instrumentos de tipo  $j$ .

$L_{A,j,i}$  se calcula de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$L_{A,j,i} = -S_{j,i}(1) + S_{j,i}(0)$$

donde,

- $S_{j,i}(1)$  es el valor de mercado al tiempo de proyección  $t = 1$ , del  $i$ -ésimo instrumento traído a valor presente para el tipo de instrumento  $j$ , y
- $S_{j,i}(0)$  es el valor de mercado del  $i$ -ésimo instrumento al tiempo de cálculo del  $RCS$ ,  $t = 0$ , para el tipo de instrumento  $j$ .

## 1.4. Modelos Internos bajo la CUSF

Los lineamientos a seguir para la construcción de un modelo interno total o parcial bajo la normativa mexicana se encuentran detallados en el *Capítulo 6.9* de la CUSF.

De acuerdo a la *Disposición 6.9.3* de la CUSF, los modelos internos que las instituciones pretendan utilizar para el cálculo parcial del *RCS*, podrán considerar, entre otras, las siguientes modalidades:

- Uno o más de los riesgos incluidos en la fórmula general para el cálculo del *RCS* a que se refiere el artículo 236 de la LISF, para la totalidad de las operaciones de la Institución, o
- Uno o más de los riesgos incluidos en la fórmula general para el cálculo del *RCS*, para una o más operaciones, ramos o tipo de seguro, o ramos, subramos o tipos de fianzas, de la Institución.

Las Instituciones podrán emplear Modelos Internos Parciales que utilicen categorizaciones de riesgos diferentes a aquellas empleadas en la fórmula general para el cálculo del *RCS*, para modelar riesgos específicos no cubiertos en la fórmula general.

Como parte del proceso de autoevaluación del modelo interno, las Instituciones deberán realizar un proceso periódico de validación de los aspectos tanto cuantitativos como cualitativos del modelo interno. El proceso periódico de validación deberá llevarse a cabo de manera independiente a las áreas encargadas del desarrollo y operación del modelo interno.

En este sentido, deberá realizarse un proceso de validación de, cuando menos, los siguientes ámbitos relacionados con el modelo interno: Información; Metodos; Supuestos; Juicio experto; Documentación; Sistemas y tecnologías de la información; Pruebas de su utilización, y Sistema de Gobierno Corporativo del Modelo Interno.

Un requisito importante para obtener la aprobación del modelo interno se dicta en la *Disposición 6.9.9, sección II, inciso e*, que hace referencia a que la institución debe completar su ARSI al menos un año antes de someter la solicitud de aprobación del modelo interno, presentando

sus resultados, así como un complemento que contenga lo siguiente:

- El proceso de validación empleado para asegurar la precisión de la información inicial, y que ésta se emplea de manera correcta dentro del modelo interno;
- Una descripción y justificación de las debilidades relevantes y de cualquier limitación del modelo interno o defecto identificado durante el proceso de validación y las medidas adoptadas para enfrentarlos. Cuando la solución haya surgido fuera del ámbito del propio sistema de administración integral de riesgos, esto deberá ser señalado;
- El proceso utilizado para demostrar que la estructura del modelo interno es apropiada, así como sus parámetros y metodologías;
- Las pruebas llevadas a cabo para asegurar que los resultados del modelo interno son razonables, precisos, completos, apropiados e integrales, y
- Si el empleo de un modelo interno genera una estimación del RCS diferente a la que resulta del empleo de la fórmula general a la que se refiere el artículo 236 de la LISF, la Institución deberá demostrar que el RCS calculado con el modelo interno ofrece un nivel de protección equivalente al de la fórmula general. Para ello, la Institución deberá conciliar las salidas del modelo interno a un nivel del 99.5%.

## **1.5. Análisis y posturas sobre Solvencia II**

Existen diversas posturas acerca de las características y alcances de esta regulación, hay críticas, comentarios equilibrados y señalamientos a favor de la regulación. Con la finalidad de brindarle al lector una visión más amplia, se presentan algunos de los señalamientos más interesantes acerca de los supuestos e implicaciones inherentes de esta regulación.

*Puntos en contra:* Rossum [2005] critica el grado de regulación y los costos, menciona que las empresas pequeñas podrían ser empujadas fuera del mercado, lo cual afecta de manera directa el nivel de competitividad, además, advierte que los modelos internos podrían usarse como “modelo de arbitraje”, incentivando así que las compañías manipulen sus modelos con el fin de arrojar la mejor versión posible de su fortaleza financiera. En la misma línea, De Soto [2008] señala que Solvencia II es carente desde una perspectiva científica, pues su desarrollo está basado en métodos y supuestos neoclásicos de la teoría financiera, como el supuesto de mercado eficiente; Del mismo modo, Eling *et al.* [2007] mencionan que la regulación es poco confiable, pues los modelos de solvencia analizados para su construcción, no fueron capaces de prever dificultades financieras a pesar de que muchos de ellos ya estaban en aplicación antes de la crisis económica en el año 2007-2008.

*Puntos neutrales:* Doff [2008] desarrolló una serie de pruebas propuestas por Cummins *et al.* [1994]<sup>12</sup>, con la cual se determina que el supuesto de mercado eficiente es adecuado para utilizarse en el mercado asegurador, lo cual pone entredicho los señalamientos de De Soto [2008]. La firma consultora PriceWaterhouseCoopers [2011] pone sobre la mesa los inconvenientes de la fórmula estándar del QIS 5, señalando que la fórmula tiene requisitos ambiguos y contradictorios, aunque, en ese mismo sentido se menciona que esta problemática puede solucionarse de manera sencilla mediante la construcción de modelos internos. Klein *et al.* [2002] establece que la regulación puede mejorar la eficiencia del mercado, pero también puede producir distorsiones que en última instancia perjudiquen al consumidor por la reducción de la oferta y el aumento de los precios. Toro y Svensson [2012] indican que aunque es probable que Solvencia II tenga alguna influencia negativa en la economía debido a la generación de un posible riesgo sistémico, sería muy difícil encontrar una mejor manera de formular las normas, puesto Solvencia II está redactada de tal manera que deja mucho a las aseguradoras decidir por sí mismas.

*Puntos a favor:* La firma Deloitte [2012] menciona que adoptar las herramientas regulatorias

---

<sup>12</sup>Cummins, D., Harrington, S. and Niehaus, G. (1994) ‘An economic overview of risk-based capital requirements for the property-liability industry’, *Journal of Insurance Regulation* 11: 427–447.

es benéfico en el sentido de comparar a las compañías, puesto que esto facilita la visualización del costo que estas tienen en la gestión de su negocio y, así mismo, esto facilita la medición del impacto que esto tiene en el precio de sus productos. De la misma manera, Romera [2011] señala las ventajas de la transparencia de información y la intención de una valuación real del riesgo, pues esta característica es algo que pocos sistemas de regulación tomaban en consideración antes de Solvencia II; Gatzert y Wesker [2012] ponen énfasis sobre las ventajas de la visión prospectiva que tiene la regulación, pues tiene en cuenta tanto los negocios existentes como los que se esperan en el marco temporal del cálculo, lo cual es un buen avance para garantizar la solvencia de las compañías en todo momento; además, que la naturaleza basada en principios y el uso de sistemas internos de Solvencia II también podría adaptarse de forma rentable a Basilea II/III, pues una regulación verdaderamente basada en principios es la mejor manera de garantizar una flexibilidad suficiente para adoptar la regulación del entorno empresarial en constante cambio.

## Capítulo 2

# Series de Tiempo

Hoy en día los modelos de series de tiempo son utilizados en una gran cantidad de organizaciones que tienen a su disposición datos cuantitativos y cualitativos relacionados a su actividad; por ejemplo, a través de un modelo de series de tiempo una tienda puede prever sus ventas, una institución financiera puede proyectar indicadores económicos y financieros como la inflación o las tasas de interés, los gobiernos pueden pronosticar sus ingresos y sus gastos fiscales, bancos y aseguradoras los utilizan como herramientas para el cálculo de los requerimientos de capital, así como para proyectar la siniestralidad, morosidad, o la caída o incremento de carteras; entre muchas otras aplicaciones.

El uso de modelos de series de tiempo se encuentra dividido en dos grandes vertientes. Por un lado, se encuentran los modelos descriptivos, que tal como su nombre lo indica, se utilizan para describir una serie de tiempo a partir de componentes estacionales, tendencias y variables exógenas. Por otro lado, se encuentran los modelos predictivos, utilizados para hacer el pronóstico de la serie de tiempo a partir de la información contenida en la misma serie e información adicional en algunos casos.

Con la finalidad de brindarle al lector los fundamentos técnicos utilizados para analizar el riesgo accionario bajo la normativa mexicana, en este capítulo se presentarán algunos de los modelos más importantes entorno al modelaje de series de tiempo financieras. El cuerpo central de este capítulo esta basado principalmente en Tsay [2013][2010], Neusser [2015] y Enders [2015], mientras que la bibliografía adicional será citada a lo largo del capítulo.

## 2.1. Preliminares

Para introducirse en el análisis de series de tiempo debe tenerse claro qué es una *serie de tiempo*. De manera general, se dice que una serie de tiempo es una colección de observaciones hechas secuencialmente en el tiempo; sin embargo, es necesario resaltar que el análisis de series de tiempo no se centra en aquellas series de comportamiento determinista, sino en aquellas cuyos valores se comportan de acuerdo a las leyes de la probabilidad. A continuación se da una definición formal:

**Definición 1.** *Serie de tiempo:* Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una serie de tiempo  $\{x_t\}$  es un proceso estocástico en  $(\Omega, \mathbb{P})$ , en donde  $t$  cumple con  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{Z}$ , es decir, una serie de tiempo es una colección de variables aleatorias equiespaciadas en tiempo discreto y definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

### 2.1.1. Componentes de una serie de tiempo

En agregación a la definición formal de una serie de tiempo, es importante señalar que estas se diseccionan en una parte sistemática, correspondiente al *nivel, tendencia y estacionalidad*; y una parte no sistemática correspondiente al *ruido*. En este sentido, los componentes de la serie

se describen a continuación:

1. Nivel: este muestra el valor medio de la serie; 2. Tendencia: este componente permite identificar el cambio de pendiente de un periodo a otro y, comúnmente hace referencia al cambio de la media a largo plazo; 3. Estacionalidad: se refiere al comportamiento cíclico a corto plazo que puede observarse varias veces dentro de la serie dada, y 4. Ruido: este tiene la función de describir la aleatoriedad o variación que resulta de un error de medición, un factor fortuito u otras causas no tomadas en cuenta que inciden en la serie de tiempo.

La figura [2-1] muestra la descomposición tradicional de índice S&P 500 desde el año 1990 al año 2018 con una periodicidad diaria. Este índice es uno de los índices bursátiles más importantes de EEUU y es considerado el más representativo de la situación real del mercado accionario norte americano. En la gráfica se puede observar de manera clara *El nivel, la tendencia, la estacionalidad y el ruido* del índice S&P 500.

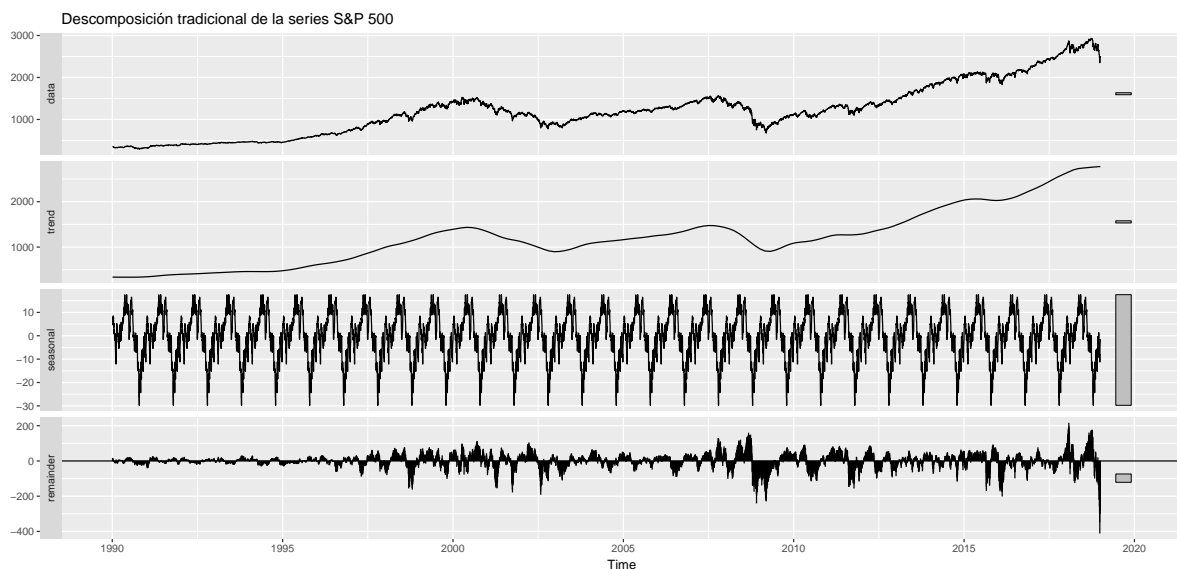


Figura 2-1: Fuente: Elaboración Propia - Descomposición tradicional aditiva del índice S&P 500.

Con respecto a las series de tiempo financieras se ha observado que una gran cantidad de ellas presentan una serie de regularidades empíricas muy definidas, a las cuales se les conoce



como *hechos estilizados*. De acuerdo con Vargas y Martínez [2006] y Enders [2015], se tiene lo siguiente:

1. Las series financieras tienen una distribución leptocurtica con una gran concentración de puntos alrededor de la media, a lo que se le conoce también como distribución de colas pesadas;
2. Regularmente las series financieras tienen una tendencia claramente marcada;
3. La volatilidad (observada a través de la desviación estándar) no es constante en el tiempo;
4. Los choques muestran un alto grado de persistencia;
5. En algunas series se observan periodos de apreciación o depreciación sin marcar alguna tendencia a largo plazo, a lo que se le conoce como comportamiento de *caminata aleatoria*<sup>1</sup>;
6. Algunas series financieras comparten movimientos con otras series;
7. Las series suelen exhibir quiebres estructurales, que generalmente hacen referencia a un cambio brusco en la pendiente de la serie, y
8. El segundo momento recursivo no es convergente, efecto que se asocia a la heterogeneidad de la varianza.

### 2.1.2. Estacionariedad

El concepto de estacionariedad desempeña un papel muy importante en el análisis de series de tiempo, debido a que una serie de tiempo que es estacionaria se encuentra en un “equilibrio estadístico”, que quiere decir que su comportamiento se mantiene “constante” en el tiempo. La noción más restrictiva de estacionariedad es la de estacionariedad estricta, que definimos como sigue:

**Definición 2.** *Estacionariedad Estricta:* Se dice que el proceso  $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es estrictamente estacionario si  $t_1, t_2, \dots, t_h \in T$  y para todo  $h \in T$ , la distribución conjunta  $\{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}\}$  es idéntica a la de  $\{x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_k+h}\}$

---

<sup>1</sup>El termino de caminata aleatoria fue introducido por Bachelier en su tesis doctoral en 1900. El modelo estadístico de una caminata aleatoria normal está dada por el siguiente mecanismo:  $P_t = P_{t-1} + r_t$ ,  $r_t \sim NIID(0, 2\sigma_t^2)$   $t \in T$  donde  $P_t$  es el precio del activo en el periodo  $t$

El requisito de una estacionariedad estricta es severo y por lo general para la mayoría de las aplicaciones, las distribuciones son desconocidas. Por esta razón, a menudo se asume una versión más débil de estacionariedad, en donde se dice que una serie temporal  $\{x_t\}$  es débilmente estacionaria si tanto la media de  $x_t$  como la covarianza entre  $x_t$  y  $x_{t-h}$  son invariantes en el tiempo.

**Definición 3.** *Estacionariedad Débil:* Se dice que el proceso  $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es estacionario en covarianza si sus primeros dos momentos existen y satisfacen:

$$\mathbb{E}[x_t] = \mu \quad \forall t, \quad \text{Var}[x_t] = \sigma^2 < \infty \quad \forall t, \quad \text{Cov}(x_t, x_{t-h}) = \gamma_h \quad \forall h.$$

Es decir, un proceso es estacionario débilmente si sus primeros dos momentos son conocidos e invariantes en el tiempo y los coeficientes de autocorrelación solo dependen del rezago.

Es importante señalar que una serie estacionaria en sentido estricto, será estacionaria también en sentido débil. Además, cuando el proceso estacionario en sentido débil se distribuye como una normal  $N(0, \sigma^2)$ , entonces se demuestra que también es estacionario en sentido estricto [Neusser, 2015, pág 11-13].

### 2.1.3. Funciones de Autocovarianza y Autocorrelación

El coeficiente de correlación entre dos variables  $X$  e  $Y$  está dado por la función

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{[\mathbb{E}(X - \mu_x)^2 \mathbb{E}(Y - \mu_y)^2]}$$

donde  $\mu_x$  y  $\mu_y$  representan la media de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Este coeficiente mide la dependencia lineal que existe entre  $X$  e  $Y$ . Su rango de valores posibles es un anillo cerrado por  $-1 \leq \rho_{x,y} \leq 1$ , además cumple que  $\rho_{x,y} = \rho_{y,x}$ . Se dice que las dos variables aleatorias no están

correlacionadas si y solo si  $X$  e  $Y$  son independientes y  $\rho_{x,y} = 0$ .

Considerando una serie de tiempo  $\{x_t\}$  estacionaria débilmente, medir la dependencia lineal entre  $x_t$  y sus valores rezagados resulta de interés. El coeficiente de correlación entre  $x_t$  y  $x_{t-h}$  se llama coeficiente de autocorrelación del rezago  $h$  de  $x_t$  y se calcula consistentemente mediante la función de autocorrelación (FAC)

$$\rho_h = \frac{\text{Cov}(x_t, x_{t-h})}{\sqrt{\text{Var}(x_t)\text{Var}(x_{t-h})}} = \frac{\text{Cov}(x_t, x_{t-h})}{\text{Var}(x_t)} = \frac{\gamma_h}{\gamma_0},$$

donde la propiedad  $\text{Var}(x_t) = \text{Var}(x_{t-h})$  surge a partir del supuesto de estacionariedad. De la anterior definición tenemos que  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_h = \rho_{-h}$  y  $-1 \leq \rho_h \leq 1$ . Una serie no está autocorrelacionada si  $\rho_h = 0$ ,  $\forall h > 0$ .

Para una muestra  $[(x_t, x_{t-h})]_{t=1}^T$  disponible, la autocorrelación puede ser estimada mediante

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-h} - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2}}, \quad 0 \leq h \leq t-1.$$

#### 2.1.4. Ruido Blanco

Como ya se mencionó, uno de los componentes de una serie de tiempo es el ruido. Para el caso de series de tiempo estacionarias, el ruido es conocido como proceso de ruido blanco. A continuación se da una definición formal:

**Definición 4.** *Ruido Blanco:*  $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso de ruido blanco si es estacionario en

covarianza y tiene la función de autocorrelación:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

Un proceso de Ruido Blanco con media cero y varianza constante sera denotado como  $rb(0, \sigma^2)$ . El ejemplo mas común es el proceso de ruido blanco de una serie de variable aleatorias i.i.d. con varianza finita, al cual se le llama proceso estricto de ruido blanco.

**Definición 5. Proceso Estricto de Ruido Blanco:** Se dice que el proceso  $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso estricto de ruido blanco si es un conjunto de variables aleatorias i.i.d. con varianza finita, es decir, es una secuencia de valores que se distribuyen como una v.a normal  $N(0, \sigma^2)$ . Véase un ejemplo en la figura [2-2].

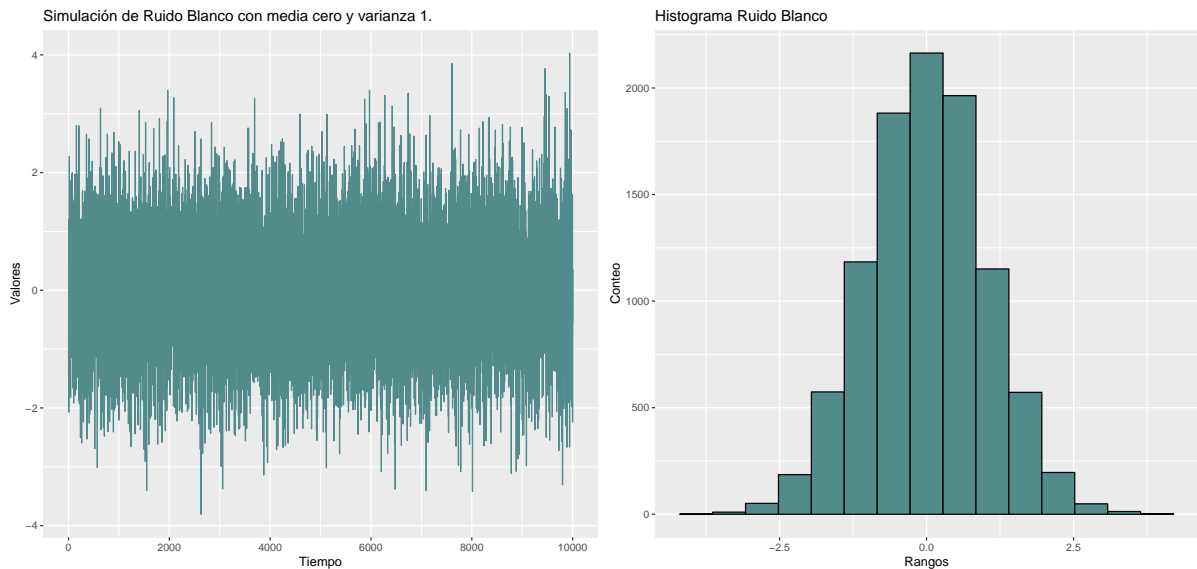


Figura 2-2: Fuente: Elaboración propia. Simulación de 10,000 numeros aleatorios asignados a un espacio t con media cero y varianza 1.

## 2.2. Procesos Autorregresivos

A partir del libro clásico de George Box y Gwilyn Jenkins<sup>2</sup>, la familia de procesos Autorregresivos y de Medias Móviles, *ARMA* (Sigla de Autorregressive and Moving Averages), tomaron mucha popularidad para analizar y pronosticar series de tiempo a través de la *metodología Box-Jenkins*.

La familia de modelos ARMA son en realidad procesos estacionarios en covarianza y su construcción parte de procesos de ruido blanco, así mismo, un modelo *ARMA* es una mixtura de un modelo *AR* (autorregresivo) y un modelo *MA* (media móvil). Una de las ventajas de esta familia de modelos es el que regularmente cumplen con los principios de *parsimonia*<sup>3</sup> y *mejoramiento iterativo*<sup>4</sup>, debido a la simpleza de su estructura.

### Procesos AR(1)

Los procesos autorregresivos de primer orden (*AR(1)*), surgen a partir de la idea de que el comportamiento actual de la serie está explicado en función de su valor inmediato anterior. Un proceso *AR(1)* tiene la forma de un modelo de regresión lineal simple, en donde la variable endógena es  $x_t$  y la variable exógena es su rezago  $x_{t-1}$ . El modelo *AR(1)* tiene la siguiente estructura:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2-1)$$

donde  $\phi_0$  y  $\phi_1 \neq 0$  son los parámetros del modelo y  $\varepsilon_t \sim rb(0, \sigma^2)$ .

---

<sup>2</sup>Box y Jenkins, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, edición revisada, Holden Day, San Francisco, 1978.

<sup>3</sup>El objetivo de este principio es representar de la mejor manera posible el fenómeno de estudio, evitando cuantos parámetros sea posible garantizando una buena aproximación.

<sup>4</sup>El objetivo de los algoritmos iterativos consiste en explorar el estado de soluciones para encontrar las soluciones óptimas.

Los primeros dos momentos del modelo  $AR(1)$  están dados por:

$$\mathbb{E}(x_t|x_{t-1}) = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1}, \quad Var(x_t|x_{t-1}) = Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

Es decir, dado el rezago  $x_{t-1}$ , el valor actual está centrado en  $\phi_0 + \phi_1 x_{t-1}$  con una desviación estándar  $\sigma_\varepsilon$ .

Regularmente un solo rezago es insuficiente para determinar la expectativa condicional de  $x_t$ , por lo cual un modelo  $AR$  que permita un número  $p$  de rezagos ( $AR(p)$ ) podría ser una solución a este problema. Al modelo  $AR$  con  $p$  rezagos se le conoce como modelo  $AR$  generalizado Y tiene la siguiente estructura:

## Proceso AR(p)

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2-2)$$

donde  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son los parámetros del modelo y  $\varepsilon_t \sim rb(0, \sigma^2)$ . El modelo (2-2) puede escribirse de manera simplificada como

$$x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i}$$

## Propiedades de los procesos AR

Para entender los alcances y limitaciones de los modelos  $AR$ , es conveniente hacer un análisis de sus propiedades partiendo por conveniencia del modelo más simple.

### 2.2.1. Propiedades del modelo AR(1)

Si el modelo  $AR(1)$  de la ecuación (2-1), cumple con el supuesto de estacionariedad al menos en el sentido débil, tenemos que  $\mathbb{E}[x_t] = \mu$ ,  $Var(x_t) = \gamma_0$ , y  $Cov(x_t, x_{t-h}) = \gamma_h$ , donde  $\mu$  y  $\gamma_0$  son constantes y  $\gamma_h$  es una función que depende de  $h$  y no de  $t$ . Retomando el valor esperado de (2-1) y que  $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ , se tiene entonces que

$$\mathbb{E}[x_t] = \phi_0 + \phi_1 \mathbb{E}[x_{t-1}].$$

Bajo la condición de estacionariedad  $\mathbb{E}[x_t] = \mathbb{E}[x_{t-1}] = \mu$ , por lo tanto

$$\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu, \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}[x_t] = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}.$$

Este resultado tiene dos implicaciones para  $x_t$ . Primero, que la media de  $x_t$  existe si  $\phi_1 \neq 1$ . Segundo, que la media de  $x_t$  es cero si y solo si  $\phi_0 = 0$ . Por lo tanto, para un proceso  $AR(1)$  estacionario, el término  $\phi_0$  está relacionado con la media de  $x_t$  mediante  $\phi_0 = (1 - \phi_1)\mu$  y  $\phi_0 = 0$ , lo que implica que  $\mathbb{E}[x_t] = 0$ . Usando  $\phi_0 = (1 - \phi_1)\mu$ , el modelo  $AR(1)$  puede reescribirse como

$$x_t - \mu = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \tag{2-3}$$

Iterando  $k$  veces hacia atrás en la ecuación anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} x_t - \mu &= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \end{aligned} \tag{2-4}$$

De la ecuación (2-4) se puede observar que  $x_t - \mu$  es una función lineal de  $\varepsilon_{t-i}$  para  $i \geq 0$ . Utilizando esta propiedad y la independencia de la serie  $\{\varepsilon_t\}$  se obtiene que  $\mathbb{E}[(x_t - \mu)\varepsilon_{t+1}] = 0$ . Por el supuesto de estacionariedad se tiene que  $Cov(x_t, \varepsilon_t) = \mathbb{E}[(x_t - \mu)\varepsilon_t] = 0$ . Si se obtiene el

valor esperado de (2-3) y se eleva al cuadrado, se llega a

$$Var(x_t) = \phi_1^2 Var(x_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2,$$

donde  $\sigma_\varepsilon^2$  es la varianza de  $\varepsilon_t$ . Bajo el supuesto de estacionariedad,  $Var(x_t) = Var(x_{t-1})$ , de este modo se tiene que

$$Var(x_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

siempre que  $\phi_1^2 < 1$ . En consecuencia, para que un proceso  $AR(1)$  sea estacionario débilmente, debe cumplirse que  $-1 < \phi_1 < 1$ , es decir, la condición mínima y necesaria para que un modelo  $AR(1)$  sea estacionario débilmente esta dada por  $|\phi_1| < 1$

Si se multiplica (2-3) por  $\varepsilon_t$  y se obtiene el valor esperado de la ecuación resultante, haciendo uso del supuesto de independenciam entre  $\varepsilon_t$  y  $x_{t-1}$ , se tiene que

$$\mathbb{E}[\varepsilon_t(x_t - \mu)] = \phi_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t(x_{t-1} - \mu)] + \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2,$$

donde  $\sigma_\varepsilon^2$  es la varianza de  $\varepsilon_t$ . Multiplicando (2-3) por  $x_{t-h}$  y obteniendo el valor esperado, se obtiene lo siguiente:

$$\gamma = \begin{cases} \phi_1 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 & si \quad h = 0 \\ \phi_1 \gamma_{h-1} & si \quad h > 0 \end{cases}$$

donde se utiliza que  $\gamma_h = \gamma_{-h}$ . En consecuencia, para un modelo  $AR(1)$  débilmente estacionario, se tiene que

$$Var(x_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2} \quad y \quad \gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} \quad \forall h > 0.$$

De la ecuación anterior tenemos la FAC de  $x_t$  satisface

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1}, \quad \forall h > 0.$$

Debido a que  $\rho_0 = 1$ , tenemos que  $\rho_h = \phi_1^h$ . Utilizando la condición de estacionariedad del



modelo  $AR(1)$ , puede observarse que la FAC del modelo decae exponencialmente, además, si  $\phi_1 > 0$  la FAC del modelo  $AR(1)$  decae exponencialmente hacia cero siempre de lado de los positivos, mientras que si  $\phi_1 < 0$  el decaimiento se dará de forma alternada entre valores positivos y negativos y convergiendo a cero. Véase la figura (2-3).

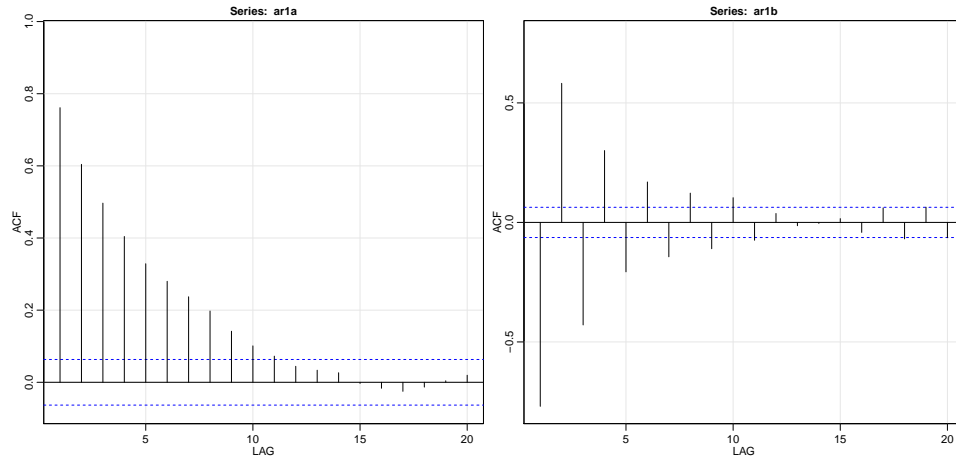


Figura 2-3: Fuente: Elaboración propia - Función de autocorrelación del modelo  $AR(1)$ : a)  $\phi_1 = 0.78$  y b)  $\phi_1 = -0.78$ .

### 2.2.2. Propiedades del modelo $AR(2)$

El modelo  $AR(2)$  tiene la siguiente estructura:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2-5)$$

Análogamente al desarrollo con respecto al modelo  $AR(1)$ , para el modelo  $AR(2)$  se llega a que

$$\mathbb{E}[x_t] = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}$$

siempre que  $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$ . Utilizando  $\phi_0 = (1 - \phi_1 - \phi_2)\mu$ , el modelo  $AR(2)$  puede reescribirse como

$$(x_t - \mu) = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t.$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $(x_{t-h} - \mu)$  se tiene

$$(x_{t-h} - \mu)(x_t - \mu) = \phi_1(x_{t-h} - \mu)(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-h} - \mu)(x_{t-2} - \mu) + (x_{t-h} - \mu)\varepsilon_t.$$

Obteniendo el valor esperado y usando  $\mathbb{E}[(x_{t-h} - \mu)] = 0 \quad \forall \quad h > 0$ , se tiene que

$$\gamma_h = \phi_1\gamma_{h-1} + \phi_2\gamma_{h-2}, \quad h > 0.$$

Dividiendo la ecuación anterior por  $\gamma_0$  se obtiene lo siguiente

$$\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \phi_2\rho_{h-2}, \quad h > 0. \tag{2-6}$$

En el caso particular del primer rezago, la FAC satisface que

$$\rho_1 = \phi_1\rho_0 + \phi_2\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1.$$

De este modo la FAC para un proceso  $AR(2)$  estacionario débilmente queda definida por

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \phi_2\rho_{h-2}, \quad h \geq 2.$$

La ecuación (2-6) denota que la FAC de un proceso estacionario  $AR(2)$  debe satisfacer la ecuación en diferencias

$$(1 - \phi_1\mathcal{B} - \phi_2\mathcal{B}^2)\rho_h = 0,$$

donde  $\mathcal{B}$  es un operador de “rezago”, de tal modo que  $\mathcal{B}\rho_h = \rho_{h-1}$ .

Podemos observar que la ecuación anterior expresada con el operador  $\mathcal{B}$  tiene la estructura

de una ecuación de segundo orden:

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0 \quad (2-7)$$

En donde la solución para  $x$  está dada por

$$x = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}.$$

A las inversas de las soluciones se les conoce como raíces características del modelo  $AR(2)$ , denotadas por  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$ . Si ambos  $\vartheta_i$  están valorados en términos reales, entonces la ecuación de segundo orden del modelo puede ser factorizado como  $(1 - \vartheta_1 \mathcal{B})(1 - \vartheta_2 \mathcal{B})$  y el modelo  $AR(2)$  puede considerarse como un modelo  $AR(1)$  que funciona encima de otro modelo  $AR(1)$ , de esto se dice que la FAC de  $x_t$  es entonces una mezcla de dos decaimientos exponenciales. Si  $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$  entonces las raíces características del modelo son números complejos, lo que causa que la FAC  $x_t$  muestre una amortiguación de las ondas seno y coseno. La figura (2-4) muestra el comportamiento de distintos casos de una FAC de un modelo  $AR(2)$ .

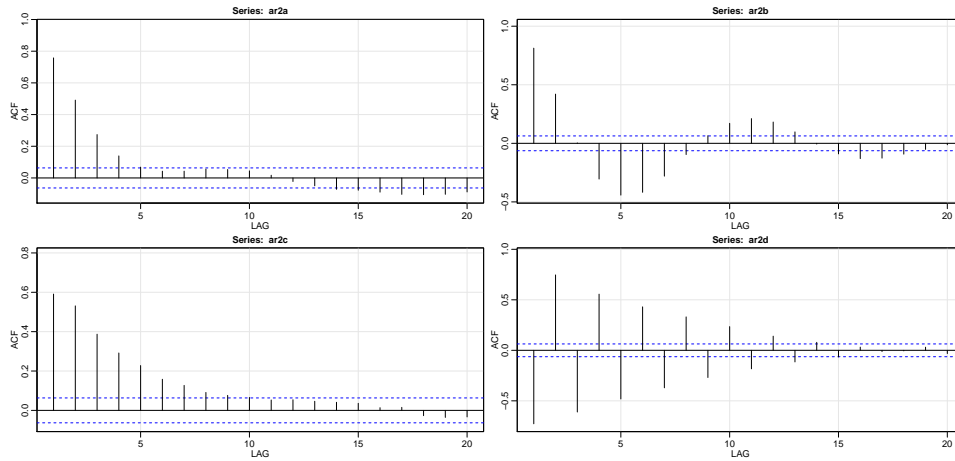


Figura 2-4: Fuente: Elaboración propia - Función de autocorrelación del modelo  $AR(2)$ : a)  $\phi_1 = .9$ ,  $\phi_2 = -.2$ ; b)  $\phi_1 = 1.4$ ,  $\phi_2 = -.7$ ; c)  $\phi_1 = .4$ ,  $\phi_2 = .3$  y d)  $\phi_1 = -.35$ ,  $\phi_2 = .5$ .

La condición de estacionariedad de un modelo  $AR(2)$  es equivalente a la condición definida

para un modelo  $AR(1)$ , es decir, los valores absolutos de las dos raíces características deben ser menores que 1, lo que implica que las soluciones para  $x$  tengan que ser mayores a 1 en valor absoluto. Bajo esta condición se asegura que la FAC del modelo dado en (2-5) convergerá a 0 en la medida de que el número de rezagos incremente.

### 2.2.3. Propiedades del modelo $AR(p)$

Con los resultados de los modelos  $AR(1)$  y  $AR(2)$  se pueden generalizar las propiedades del modelo  $AR(p)$  de manera simple. La media en este caso está dada por:

$$\mathbb{E}[x_t] = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \dots - \phi_p}$$

siempre que  $(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p) \neq 0$ . De manera análoga al modelo  $AR(2)$ , para hallar las raíces características del modelo  $AR(p)$ , puede reescribirse el modelo como

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0.$$

Si todas las soluciones son mayores a 1 en valor absoluto, se asegura que la serie utilizada es estacionaria. Para un modelo  $AR(p)$  estacionario, la FAC satisface la ecuación en diferencias

$$(1 - \phi_1 \mathcal{B} - \phi_2 \mathcal{B}^2 - \dots - \phi_p \mathcal{B}^p) \rho_h = 0, \quad h > 0.$$

La gráfica de la FAC de un modelo  $AR(p)$  se comportará de acuerdo al tipo de raíces características obtenidas.

Una de las desventajas de la identificación del orden  $p$  mediante el uso de la FAC, es que los diagramas muestran características muy similares para cualquier orden, lo que hace que sea muy difícil diferenciar de un modelo a otro. Existen dos posibles alternativas ante este problema, la

primera es hacer uso de la Función de Autocorrelación Parcial (FACP) y la segunda es hacer uso de criterios de información. Estos últimos se detallarán posteriormente a la explicación del modelo  $ARMA(p, q)$ , pues hasta entonces se justifica la necesidad de su utilización. A continuación se describe la FACP:

#### 2.2.4. Funcion de Autocorrelación Parcial (FACP)

Para comprender en que consiste la FACP considere lo siguiente:

$$\begin{aligned}x_t &= \phi_{0,1} + \phi_{1,1}x_{t-1} + \varsigma_{1t} \\x_t &= \phi_{0,2} + \phi_{1,2}x_{t-1} + \phi_{2,2}x_{t-2} + \varsigma_{2t} \\x_t &= \phi_{0,3} + \phi_{1,3}x_{t-1} + \phi_{2,3}x_{t-2} + \phi_{3,3}x_{t-3} + \varsigma_{3t} \\&\vdots\end{aligned}$$

donde  $\phi_{0,j}$ ,  $\phi_{i,j}$  y  $\varsigma_{jt}$  son respectivamente el termino constante, el parámetro de  $x_{t-i}$  y el termino de error de un modelo  $AR(j)$ . Puede observarse que los modelos tienen la forma de un modelo de regresión múltiple, entonces la estimación de  $\phi_{1,1}$  en la primera ecuación se llama FACP de la muestra del primer rezago de la serie. La estimación de  $\phi_{2,2}$  corresponde a la muestra del segundo rezago de la serie, y así sucesivamente para cada coeficiente  $\phi_{i,j}$ . La características de la FACP para un modelo  $AR(p)$  estacionario son las siguientes:

- $\phi_{p,p}$  converge en  $\phi_p$  debido a que se supone que el tamaño de la muestra es infinito;
- $\phi_h$  converge a 0 si  $h > p$ ;

En otras palabras la FACP representa la autocorrelación existente entre  $x_t$  y  $x_{t-k}$  a través de una dependencia lineal de  $x_{t-1}$  hasta  $x_{t-k-1}$ .

### 2.3. Procesos de Medias Móviles

Los procesos de medias móviles o procesos  $MA$ , son procesos estocásticos que representan una suma finita ponderada de impactos aleatorios, en el cual las variables observadas son generadas a partir de una combinación lineal de ruidos blancos y sus rezagos.

En teoría, si  $p \rightarrow \infty$ , el modelo  $AR(p)$  puede escribirse como

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t,$$

sin embargo, un modelo  $AR$  de este tipo no es realista debido a que tiene infinitos parámetros. Una manera de hacer que un modelo de este tipo sea práctico es asumir que los coeficientes  $\phi_i$  satisfacen una serie de condiciones que hacen que el modelo esté determinado por un número finito de parámetros. El caso especial de esta idea es

$$x_t = \phi_0 - \theta_1 x_{t-1} - \theta_1^2 x_{t-2} - \theta_1^3 x_{t-3} - \cdots + \varepsilon_t \quad (2-8)$$

donde los coeficientes dependen solo de  $\theta_1$  mediante  $\phi_i = -\theta_1^i$  para  $i > 1$ . La condición de estacionariedad para el modelo (2-8) es que  $|\theta_1| < 1$ . Esto es fácil de comprender debido a que si  $|\theta_1| < 1$ , entonces  $\theta_1^i \rightarrow 0$  si  $i \rightarrow \infty$ , mientras que si  $|\theta_1| > 1$  el modelo sería explosivo.

Si se reescribe el modelo (2-8) como

$$x_t + \theta_1 x_{t-1} + \theta_1^2 x_{t-2} + \cdots = \phi_0 + \varepsilon_t \quad (2-9)$$

se obtiene que

$$x_{t-1} + \theta_1 x_{t-2} + \theta_1^2 x_{t-3} + \cdots = \phi_0 + \varepsilon_{t-1}. \quad (2-10)$$

Multiplicando la ecuación (2-10) por  $\theta_1$  y restando el resultado de la ecuación (2-9) se llega a

$$x_t = \phi_0(1 - \theta_1) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1},$$

que denota que excepto para el termino constante  $\phi_0$ ,  $x_t$  es una media ponderada de los choques de  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_{t-1}$ . A este modelo se le conoce como modelo MA de primer orden o simplemente  $MA(1)$ .

De manera general un modelo  $MA(1)$  se expresa como

$$x_t = \zeta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} \quad o \quad x_t = \zeta_0 + \varepsilon_t(1 - \theta_1B), \quad (2-11)$$

donde  $\zeta_0$  es la constante y  $\varepsilon_t$  es un proceso de ruido blanco. De manera análoga, el modelo  $MA(2)$  es de la forma

$$x_t = \zeta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} \quad (2-12)$$

y el modelo  $MA$  de orden  $q$  es

$$x_t = \zeta_0 + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad (2-13)$$

o bien

$$x_t = \zeta_0 + \varepsilon_t(1 - \theta_1B - \dots - \theta_qB^q), \quad (2-14)$$

donde  $q > 0$

### 2.3.1. Propiedades de los procesos MA

De manera similar al análisis desarrollado para los modelos  $AR$ , se parte de los modelos  $MA(1)$  y  $MA(2)$  para obtener las propiedades del modelo general  $MA(q)$

Los modelos  $MA$  son siempre débilmente estacionarios debido a que son una combinación

lineal de ruidos blancos, lo que implica que sus primeros dos momentos sean constantes en el tiempo.

### 2.3.2. Estacionariedad del modelo $MA(q)$

Considerando el modelo  $MA(1)$  dado en (2-11) y obteniendo el valor esperado se llega a

$$\mathbb{E}[x_t] = \zeta_0,$$

que evidentemente es invariable en el tiempo. Obteniendo la varianza se tiene que

$$Var(x_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2),$$

en donde se utiliza el supuesto de que  $\varepsilon_t$  y  $\varepsilon_{t-1}$  no están autocorrelacionados. De estos resultados pueden generalizarse de manera sencilla las primeras dos propiedades para los modelos  $MA(q)$ . La media para un modelo  $MA$  de orden  $q$  es el término constante, es decir

$$\mathbb{E}[x_t] = \zeta_0,$$

mientras que la varianza está dada por

$$Var(x_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_\varepsilon^2.$$



## Función de Autocorrelación

Si el modelo  $MA(1)$  dado en (2-11) se multiplica por  $x_{t-h}$ , asumiendo por simplicidad que  $\zeta_0 = 0$ , se tiene que

$$x_{t-h}x_t = x_{t-h}\varepsilon_t - \theta_1 x_{t-h}\varepsilon_{t-1}.$$

Aplicando el valor esperado a ambos lados de la ecuación, se llega a que

$$\gamma_1 = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 \quad \gamma_h = 0, \quad \text{para } h > 1.$$

Utilizando el resultado anterior y sabiendo que  $Var(x_t) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \theta_1^2)$ , se tiene que

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 - \theta_1^2}, \quad \rho_h = 0 \quad \text{para } h > 1.$$

Para un modelo  $MA(2)$  los coeficientes de autocorrelación están dados por

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad \rho_h = 0 \quad \text{para } h > 2.$$

De estos resultados puede generalizarse que para un modelo  $MA(q)$ , la FAC del rezago  $q$  no es cero, si no que será cero siempre que el rezago sea mayor que  $q$ .

### 2.3.3. Invertibilidad

Si asume por simplicidad que  $\zeta_0 = 0$  entonces el modelo  $MA(1)$  puede reescribirse como  $\varepsilon_t = x_t + \theta_1\varepsilon_{t-1}$ , si se sustituye iteradamente se obtiene

$$\varepsilon_t = x_t + \theta_1 x_{t-1} + \theta_1^2 x_{t-2} + \dots$$

Esta ecuación expresa el choque actual  $\varepsilon_t$  como una combinación lineal de las observaciones presentes  $x_t$  y pasadas  $x_{t-j}$ . Intuitivamente  $\theta_1^j$  tiende a cero en la medida en la que  $j$  incrementa, lo cual es factible debido a que la observación  $x_{t-j}$  debería tener muy poco impacto en el choque actual. De este modo, para que el uso de un modelo  $MA(1)$  sea viable, se requiere que  $|\theta_1| < 1$ . Si se cumple con esta condición se dice que el modelo  $MA(1)$  es invertible y causal<sup>5</sup>, es decir, este puede ser representado como un modelo  $AR$ . (Véase Apendice B - Teorema de Herman Wold)

## 2.4. Procesos Autorregresivos y de Medias Mviles.

Una desventaja de utilizar por si solos los procesos  $AR$  o  $MA$  es que para describir una serie de tiempo financiera, en ocasiones se tienen que utilizar modelos de un orden elevado, lo que implica que el numero de parámetros por estimar también sea elevado. Para superar esta desventaja se introdujeron los modelos  $ARMA(p, q)$ , que como se mencionó al inicio del capítulo, son una mezcla de un modelo  $AR$  y un modelo  $MA$ , y tienen la ventaja de poder explicar los fenómenos de estudio con muchos menos parámetros en comparación con los modelos procesos  $AR$  o  $MA$  por separado. Aunque actualmente ya no seán utilizados en demasía, son pieza fundamental en el modelado de series de tiempo financieras, pues son la base de los modelos heteroscedásticos condicionales autorregresivos ( $ARCH$ ).

Se dice que una serie de tiempo  $\{x_t\}$  sigue un modelo  $ARMA(1, 1)$  si satisface

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} = \phi_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}. \quad (2-15)$$

Puede observarse que del lado izquierdo de la ecuación, la estructura corresponde a un modelo  $AR(1)$ , mientras que el lado derecho corresponde a un modelo  $MA(1)$ .

---

<sup>5</sup>Más detalles sobre invertibilidad de modelos ARMA en Neusser (2015, p. 32-39)

Para que este modelo sea útil, se necesita que  $\phi_1 \neq \theta_1$ , de lo contrario el proceso se reduce a un proceso de ruido blanco.

### 2.4.1. Propiedades del modelo ARMA(1,1)

Las propiedades del modelo  $ARMA(1,1)$  pueden generalizarse de manera sencilla a partir de las propiedades del modelo  $AR(1)$  y algunas modificaciones en las propiedades del modelo  $MA(1)$ .

Iniciando por la condición de estacionariedad, si se obtiene el valor esperado de (2-15), se tiene que

$$\mathbb{E}[x_t] - \phi_1 \mathbb{E}[x_{t-1}] = \phi_0 + \mathbb{E}[\varepsilon_t] - \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}].$$

Debido a que  $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0 \quad \forall i$ , la media de  $x_t$  está dada por

$$\mathbb{E}[x_t] = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

siempre que la serie sea estacionaria al menos débilmente.

Asumiendo por simplicidad que  $\phi_0 = 0$  y considerando la función de autocovarianza de  $x_t$ , si (2-15) se multiplica por  $\varepsilon_t$  y se obtiene el valor esperado, se tiene que

$$\mathbb{E}[x_t \varepsilon_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] - \theta_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2. \quad (2-16)$$

Reescribiendo el modelo como  $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$  y obteniendo la varianza, se llega a que

$$Var(x_t) = \phi_1^2 Var(x_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 - 2\phi_1 \theta_1 \mathbb{E}[x_{t-1} \varepsilon_{t-1}].$$

Bajo el supuesto de que no existe correlación entre  $x_{t-1}$  y  $\varepsilon_t$ , utilizando la ecuación (2-16) se tiene que

$$Var(x_t) = \phi_1^2 Var(x_{t-1}) = \sigma_\varepsilon^2(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2).$$

Si la serie es estacionaria al menos en covarianza, se tiene que ( $Var(x_t) = Var(x_{t-1})$ ), utilizando este resultado se llega entonces a que

$$Var(x_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2)}{1 - \phi_1^2}.$$

Debido a que la varianza siempre es positiva, se necesita que  $\phi_1^2 < 1$ , o bien que  $|\phi_1| < 1$ .

Para obtener la función de autocovarianza de  $x_t$  asumimos por simplicidad que  $\phi_0 = 0$ . Multiplicando (2-15) por  $x_{t-h}$  se obtiene que

$$x_t x_{t-h} - \phi_1 x_{t-1} x_{t-h} = \varepsilon_t x_{t-h} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} x_{t-h}.$$

Para  $h = 1$ , obteniendo el valor esperado y utilizando (2-16) para  $x_{t-1}$ , se tiene que

$$\gamma_1 - \phi_1 \gamma_0 = -\theta_1 \sigma_\varepsilon^2,$$

donde  $\gamma_h = Cov(x_t, x_{t-h})$ . Para  $h = 2$  se tiene que

$$\gamma_2 - \phi_1 \gamma_1 = 0,$$

de donde puede deducirse que la función de autocovarianza se trunca para el segundo rezago, de este modo se generaliza que

$$\gamma_h - \phi_1 \gamma_{h-1} = 0, \quad \text{para } h > 1.$$

En términos de la FAC, los resultados previos muestran que un modelo estacionario  $ARMA(1, 1)$  cumple con

$$\rho_1 = \phi_1 - \frac{\theta_1 \sigma_\varepsilon^2}{\gamma_0}, \quad \rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} \quad \text{para } h > 1.$$

Observe que la condición de estacionariedad es igual a la de un modelo  $AR(1)$ , así mismo la FAC de un modelo  $ARMA(1, 1)$  se comporta de forma muy parecida a la FAC de un modelo  $AR(1)$  con excepción de que el decaimiento exponencial da en el segundo rezago.

### 2.4.2. Propiedades del modelo $ARMA(p, q)$

El modelo  $ARMA(p, q)$  es de la forma

$$x_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i x_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i},$$

donde  $\{\varepsilon_t\}$  es un proceso de ruido blanco y  $p, q$  son enteros positivos. Utilizando el operador  $\mathcal{B}$ , el modelo  $ARMA(p, q)$  puede reescribirse como

$$(1 - \phi_1 \mathcal{B} - \dots - \phi_p \mathcal{B}^p)x_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 \mathcal{B} - \dots - \theta_q \mathcal{B}^q)\varepsilon_t, \quad (2-17)$$

Se requiere que no existan factores comunes para que el orden  $(p, q)$  no se reduzca. Si el valor absoluto de las raíces de ambos polinomios son mayores a uno, el modelo es débilmente estacionario. En este caso, la media del modelo es  $\mathbb{E}[x_t] = \phi_0 / (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ .

Bajo el criterio de invertibilidad un modelo  $AR(\infty)$  puede ser representado como un modelo  $MA$ , debido a ello, la FAC y la FACP dejan de ser métodos informativos para la determinación del orden del modelo, por lo cual es conveniente el uso de criterios de información para este fin.

### 2.4.3. Criterios de Informacion

Los criterios de información surgen de la necesidad de identificar el mejor modelo de una gama de alternativas posibles derivadas de la combinación de variables a disposición, o bien, para seleccionar modelos de diferente naturaleza. En el análisis de series de tiempo, los criterios de información son muy utilizados para determinar el orden “óptimo” de un modelo; sin embargo, no existe una postura definida sobre cual es la mejor forma o el mejor criterio de selección. Olaverri [1996], menciona que no existe una postura definida debido a que no todos los criterios han sido definidos con el mismo fin, además, también existe el debate sobre la idea del "mejor modelo"; debido a esto se dice que los criterios ofrecen solo una sugerencia del mejor modelo.

En términos estadísticos, un criterio de información es una medida de bondad de ajuste. Los más comunes en el análisis de series de tiempo son el *criterio de información de Akaike* (AIC), el *criterio de información bayesiano* (BIC) y el *criterio de información de Hanan-Quinn* (HQC). Estos criterios de información se derivan de una minimización insesgada del valor esperado del criterio de Kullback-Leibler y tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}AIC(p, q) &= \ln(\sigma_{p,q}^2) + (p + q)\frac{2}{T} \\BIC(p, q) &= \ln(\sigma_{p,q}^2) + (p + q)\frac{\ln(T)}{T} \\HQC(p, q) &= \ln(\sigma_{p,q}^2) + (p + q)\frac{2\ln(\ln(T))}{T}\end{aligned}$$

El criterio de Akaike tiende a ofrecer los modelos más grandes, es decir, los de mayor orden  $p + q$ , mientras que el criterio bayesiano es más restrictivo y tiende a ofrecer los modelos más pequeños. Neusser [2015] menciona que el criterio de Akaike tiende a ofrecer modelos “sobre-dimensionados”; sin embargo, sigue siendo utilizado debido a que el sobreajuste se considera menos dañino que el subajuste. Por otro lado, Olaverri [1996] mencionan que el *BIC* y el *HQC*

conducen a resultados consistentes sobre la estimación de  $p$  y  $q$  de acuerdo al principio de parsimonia.

#### 2.4.4. No Estacionariedad

El desarrollo de modelos en este capítulo se ha dado bajo el supuesto de que las series de tiempo son estacionarias, sin embargo, en la practica es difícil encontrar una serie que cumpla con este requisito, sobre todo si se trata de series de tiempo financieras. Tal como lo describe [Tsay, 2010, pág. 72], las series de tasas de interés, tipos de cambio y precios de activos tienden a ser no estacionarias. Se dice que una serie de tiempo no estacionaria es una serie que contiene *raíces unitarias*.

Para solucionar este problema comúnmente se recurre a transformaciones matemáticas de la serie. Por ejemplo Tsay [2010] menciona que en finanzas se cree que las diferencias logarítmicas de las series son estacionarias. Es decir,  $\log(y_t)$  es la serie en logaritmos de  $y_t$ , y puede diferenciarse mediante

$$d_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1})$$

donde  $d_t$  es la serie en logaritmos en su primer diferencia. Con esta transformación la serie debiera ser estacionaria de acuerdo a lo que se cree en finanzas; no obstante, existen series que contienen múltiples raíces unitarias y por ende deben ser transformadas varias veces; cabe señalar que no es recomendable hacer más de una transformación debido a que se pierde información valiosa de la serie, además de que es difícil dar una interpretación a los resultados obtenidos del modelo.

Una manera de probar formalmente si una serie de tiempo es estacionaria, o si de manera contraria, contiene raíces unitarias, es mediante pruebas estadísticas; destacan por ejem-

pló las pruebas Dickey-Fuller Aumentada (DFA), Philips-Perron (PPT), y KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin) (Veasé Apéndice B).

## 2.5. Modelación de la volatilidad

La palabra *volatilidad* deriva del latín *volare*=“volar” e *il*=“posibilidad pasiva”, que en conjunto forman *volatilitis*=“que tiene la posibilidad de volar”. En el ámbito financiero, volatilidad se refiere a la inestabilidad en los precios de los mercados financieros y suele utilizarse como una medida empírica de la variación de dichos precios; entre mayor escala de variación tengan los precios, se dice que son más volátiles.

Aunque la volatilidad no es directamente observable, haciendo uso de la estadística se han logrado captar algunas características muy comunes en las series de tiempo de rendimientos financieros. La primer característica es que la volatilidad se presenta en grupos (la volatilidad es alta para unos periodos de tiempo, y baja para otros). La segunda característica es que la volatilidad evoluciona a lo largo del tiempo de manera continua, es decir, que no presenta el mismo comportamiento en su evolución. La tercera es que la volatilidad no es divergente, que quiere decir que se encuentra definida dentro de un rango fijo de valores. La cuarta es que la volatilidad se correlaciona positiva o negativamente con los cambios en los precios de la variables, de tal modo que la volatilidad reacciona de manera diferente para una alza de precios que para una caída de precios, pues un aumento en el riesgo de un activo, conduce a una disminución de su valor; a esto se se le conoce como *efecto de apalancamiento*.

En los modelos que hemos analizado hasta el momento (AR, MA, ARMA), la varianza del termino de perturbación se considera constante (homocedástica); sin embargo, cuando dicha varianza varía en el tiempo (heterocedástica), la incertidumbre tiende a agruparse en periodos



de alta y baja volatilidad.

Antes de pasar a la descripción matemática de los modelos de volatilidad, es conveniente identificar la diferencia entre un modelo condicional y un modelo no condicional; retomando el modelo estacionario ARMA(1,0) tenemos la siguiente estructura:

$$x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Realizando el pronóstico para el periodo  $t + 1$ , tenemos entonces que:

$$x_{t+1} = \phi_0 + \phi_1 x_t + \varepsilon_{t+1}.$$

Obteniendo los dos primeros momentos del pronóstico, tenemos que  $\mathbb{E}[x_{t+1}] = \phi_0 + \phi_1 x_t$ , y  $\mathbb{E}[(x_{t+1} - \phi_0 - \phi_1 x_t)^2] = \mathbb{E}[(\varepsilon_{t+1})^2] = \sigma^2$ , donde ambas ecuaciones representan el valor esperado y la varianza condicional respectivamente. De manera contraria, si se utiliza la media no condicional dada por  $\mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1}$ , la varianza no condicional está dada por  $\mathbb{E}\left[\left(x_{t+1} - \frac{\phi_0}{1-\phi_1}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$ . Debido al supuesto de estacionariedad  $|\phi_1| < 1$ , entonces  $\frac{1}{1-\phi_1^2} > 1$ . Estos resultados nos muestran que el pronóstico no condicional tiene una mayor varianza que el pronóstico condicional, de este modo, puede asegurarse que la varianza del modelo condicional es más precisa.

Una vez identificada la diferencia entre el pronóstico condicional y no condicional, procedemos a describir los modelos de volatilidad estocástica.

## 2.6. Procesos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicional

A partir de las características de la volatilidad, Robert Engle [1982]<sup>6</sup> propuso un modelo que buscaba modelar la varianza del término de perturbación en el tiempo, al cual se le conoce como modelo autorregresivo con heterocedasticidad condicional o modelo *ARCH* (Sigla de Autorregresive Conditional Heteroskedasticity); este modelo tiene como objetivo proporcionar una medida de volatilidad para ser utilizada en decisiones financieras relacionadas con el *análisis de riesgos*, selección de carteras y precios de derivados [Engle, 2001, pág. 158]

Los procesos ARCH parten de la idea de que debe incluirse información rezagada y su volatilidad observada como variables explicativas de la serie. Engle [1982] propuso el siguiente modelo como una alternativa para modelar la volatilidad de los precios de los mercados financieros:

### 2.6.1. Proceso ARCH(1)

Una serie de tiempo  $\{z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso autorregresivo heterocedástico condicionado de primer orden, *ARCH*(1), si

$$z_t = \nu_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2}, \quad \text{con } \alpha_0 > 0 \quad \text{y} \quad 0 < \alpha_1 < 1 \quad (2-18)$$

donde  $\nu_t \sim i.i.d.N(0, 1)$  para un modelo que sigue innovaciones gaussianas o  $\nu_t \sim i.i.d.t(0, v, \frac{v-2}{v})$  para innovaciones *t-student*, además  $\nu_t$  es independiente con respecto a  $z_{t-1} \forall t \in \mathbb{Z}$

**Teorema 2.6.1** *El proceso ARCH(1) definido en (2-18) posee una solución única y estricta-*

---

<sup>6</sup>Robert. F. Engle recibió el Premio Nobel de Economía en 2003 por su trabajo de volatilidad variable en el tiempo.

mente estacionaria con  $\mathbb{E}[z_1^2] < \infty$ , dada por

$$z_t = \nu_t \sqrt{\alpha_0 \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \nu_{t-1}^2 \nu_{t-2}^2 \cdots \nu_{t-j}^2 \right)} \quad (2-19)$$

**Demostración.** Definimos el proceso

$$y_t = z_t^2 = \nu_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}) \quad (2-20)$$

Iterando  $k$  veces hacia atrás tenemos que:

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_0 \nu_t^2 + \alpha_1 \nu_t^2 y_{t-1} = \alpha_0 \nu_t^2 + \alpha_1 \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 (\alpha_0 + \alpha_1 y_{t-2}) \\ &= \alpha_0 \nu_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 y_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \alpha_0 \nu_t^2 + \alpha_0 \alpha_1 \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_0 \alpha_1^k \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 \cdots \nu_{t-k}^2 \\ &\quad + \alpha_1^{k+1} \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 \cdots \nu_{t-k}^2 y_{t-k-1} \end{aligned}$$

Definiendo entonces al proceso  $\{y'_t\}$  como

$$y'_t = \alpha_0 \nu_t^2 + \alpha_0 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 \cdots \nu_{t-j}^2.$$

De la expresión anterior se puede observar que del lado derecho de la ecuación se tienen términos no negativos, además, haciendo uso del supuesto de  $\{\nu_t\} \sim i.i.d.$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y'_t] &= \mathbb{E}(\alpha_0 \nu_t^2) + \alpha_0 \mathbb{E} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_1^j \nu_t^2 \nu_{t-1}^2 \cdots \nu_{t-j}^2 \right) \\ &= \alpha_0 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}. \end{aligned}$$

Así, si  $0 \leq y'_t < \infty$ , entonces  $\{y'_t\}$  es estrictamente estacionario y satisface la ecuación (2-20).

Esto implica que  $z_t = \sqrt{y_t}$  también sea estrictamente estacionario, con lo cual se satisfacen las condiciones en (2-18). ■

El proceso  $ARCH(1)$  tiene las siguientes propiedades

- El valor esperado de  $z_t$  es:

$$\mathbb{E}[z_t] = \mathbb{E}[\nu_t] \mathbb{E} \left[ \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2} \right] = 0$$

debido a que  $\nu_t$  y  $z_{t-1}$  son independientes.

- La covarianza entre  $z_t$  y  $z_{t-h}$ , para  $h \neq 0$  está dada por:

$$\begin{aligned} Cov(z_t, z_{t+h}) &= \mathbb{E} \left( \nu_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2} \nu_{t-h} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-h-1}^2} \right) \\ &= \mathbb{E}[\nu_t \nu_{t-h}] \mathbb{E} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2} \mathbb{E} \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-h-1}^2} = 0 \end{aligned}$$

debido a la independencia de  $\nu_t$  y  $z_{t-1}$ , y  $\nu_{t-h}$  y  $z_{t-h-1}$ .

- La varianza de  $z_t$  es:

$$\begin{aligned} \sigma^2(z_t) &= \mathbb{E}[z_t^2] = \mathbb{E}[\nu_t^2] \mathbb{E}[\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2] \\ &= \mathbb{E}[\nu_t^2] \mathbb{E}[(\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2)] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} < \infty \end{aligned}$$

Este resultado se deriva del supuestos de independencia entre  $\nu_t^2$  y  $z_{t-1}$  y estacionariedad de  $\{z_t\}$ . Debido a que  $\alpha_0 > 0$  y  $0 < \alpha < 1$ , la varianza será estrictamente positiva y definida.

- Debido a que  $\nu_t \sim N(0, \sigma^2)$  o  $\nu_t \sim t(0, v)$ , el sesgo del proceso esta dado por  $\mathbb{E}[\nu_t^3] = 0$ , que quiere decir que la distribución del proceso  $z_t$  es simétrica.

La propiedades del proceso  $ARCH(1)$  muestran que  $\{z_t\}$  es un proceso de ruido blanco y de

manera implícita que es un proceso estacionario sin autocorrelación entre  $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$ , pero no necesariamente muestra independencia con su pasado. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(z_t|z_{t-1}, z_{t-2}, \dots) &= \mathbb{E}_t \left[ \nu_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2} \right] = 0 \\ \sigma^2(z_t|z_{t-1}, z_{t-2}, \dots) &= \mathbb{E}(z_t^2|z_{t-1}, z_{t-2}, \dots) \\ &= \mathbb{E}_t \nu_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2\end{aligned}$$

De este modo, la varianza condicional de  $z_t$  depende de  $z_{t-1}$ . Observe que  $\alpha_1 > 0$ , por lo que la dependencia es positiva. Postulando que  $\alpha_0 > 0$  y  $0 < \alpha_1 < 1$  se puede garantizar que la dependencia siempre será positiva, de manera que una alta volatilidad en el pasado será seguida por una alta volatilidad en el futuro. La precisión del pronóstico, medido por la desviación condicional del error del pronóstico, depende entonces del historial del error del proceso.

### 2.6.2. Proceso ARCH(p)

El proceso  $ARCH(1)$  ha sido generalizado en varias direcciones, el mismo Engle [1982] generalizó el proceso introduciendo mas rezagos en la ecuación (2-18), derivando así el modelo  $ARCH(p)$ :

$$z_t = \nu_t \sigma_t \quad \text{con} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j z_{t-j}^2 \quad (2-21)$$

donde  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$  y  $\nu_t \sim i.i.d.N(0, 1)$  para un modelo que sigue innovaciones gaussianas, y  $\nu_t \sim i.i.d.t(0, v, \frac{v-2}{v})$  para innovaciones  $t$ -student con  $\nu_t$  independiente de  $z_{t-j}$  en donde  $j \geq 1$

De conformidad con [Tsay, 2013], el uso modelo  $ARCH$  tiene una serie de desventajas, por ejemplo, asumen que los choques positivos y negativos tienen el mismo impacto en los niveles de volatilidad, lo cual se contradice con las características de la volatilidad dadas inicialmente. Por otro lado, para la capturar de manera eficiente la dinámica de volatilidad de una serie

financiera, en ocasiones se requiere de un modelo ARCH con un orden elevado.

## Procesos Autorregresivos con Heterocedasticidad Condicional Generalizada

Otra generalización del modelo  $ARCH(1)$ , es el modelo  $GARCH(p, q)$  propuesto por Tim Bollerslev [1986]. Los modelos  $GARCH$  no solo toman las observaciones pasadas de la serie, si no que además incorporan la varianza condicional rezagada como variable explicativa del proceso. La propuesta de Bollerslev [1986] era que bajo este modelo podría describirse el efecto de agrupamiento de la volatilidad, es decir, analizar los periodos de alta o baja volatilidad seguida de periodos de tiempo en donde la volatilidad se mantenía constante.

### 2.6.3. Proceso GARCH(1,1)

El modelo  $GARCH(1, 1)$  es considerado en la literatura económetrica como un punto de referencia para el desarrollo de modelos de la misma especie como los modelos  $GARCH - M$ ,  $EGARCH$ ,  $TGARCH$ ,  $RSGARCH$ , entre muchos otros. El modelo  $GARCH(1, 1)$  se define como:

$$z_t = \nu_t \sigma_t \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_{t-1} \sigma_{t-1}^2 \quad (2-22)$$

donde  $[\alpha_0, \alpha_1, \beta] \geq 0$ . Se asume que  $\alpha_1 + \beta > 0$  debido a que si  $\alpha_1 = \beta = 0$  implicaría que  $\{z_t\}$  fuese tan solo una secuencia de variables aleatorias i.i.d.

Partiendo del supuesto de independencia entre  $\nu_t$  y  $\sigma_t$ , se tiene que

$$\mathbb{E}[z_t] = \mathbb{E}[\nu_t \sigma_t] = \mu = 0.$$

Análogamente, la varianza se obtiene a partir de

$$\mathbb{E}[z_t^2] = \mathbb{E}[(\sigma_t \nu_t)^2] = \mathbb{E}[\alpha_0 + \alpha_1 z_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2],$$

haciendo uso del supuesto de estacionariedad se tiene que

$$\mathbb{E}[z_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}[z_t^2] + \beta_1 \mathbb{E}[z_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}$$

Debido a que  $\nu_t \sim i.i.d.$  y  $\mathbb{E}[\log(\alpha_1 \nu_t^2 + \beta)] < 0$ , por ley de los grandes números (véase apéndice B) se tiene que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \left( \sum_{i=1}^j \log(\alpha_{t-i}) \right) < 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \log \left( \prod_{i=1}^j \alpha_{t-i} \right)^{1/j} < 0.$$

De este modo se garantiza que  $\{y_t\}$  sea un proceso estrictamente estacionario y que cumpla las condiciones de (2-22).

El supuesto  $1 - \alpha_1 - \beta > 0$  garantiza que la varianza exista, mientras que se asume que el tercer momento de  $z_t$  es cero debido al supuesto de distribución simétrica para  $\nu_t$ . La existencia del cuarto momento está sujeta a la condición  $\mathbb{E}[z_t^4]$  y  $\sigma_t^2$  existan, de este modo, la curtosis está dada por

$$k = \frac{\mathbb{E}[z_t^4]}{\mathbb{E}[z_t^2]^2} = 3 \times \frac{1 - (\alpha_1 + \beta)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta)^2 - 2\alpha_1^2} > 3.$$

#### 2.6.4. Proceso GARCH(p,q)

Partiendo del modelo  $GARCH(1,1)$  puede generalizarse el modelo  $GARCH(p,q)$  como sigue

$$z_t = \nu_t \sigma_t \quad \text{con} \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j z_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2-23)$$

donde se asume que  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha_j \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  y  $\nu_t \sim i.i.d.N(0,1)$  para un modelo que sigue innovaciones gaussianas, y  $\nu_t \sim i.i.d.t(0, v, \frac{v-2}{v})$  para innovaciones  $t$  - student donde  $\nu_t$  es independiente de  $z_{t-j}$  y  $j \geq 1$ . Este proceso es análogo al proceso ARMA, señalando que todos los coeficiente deben ser positivos para garantizar que la varianza siempre sea positiva. Además puede demostrarse que  $\{z_t\}$  es estrictamente estacionario con varianza finita si y solo si  $\sum_{j=1}^p \alpha_j + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ . Así se cumple la condición  $\{z_t\} \sim rb(0, \sigma^2)$  con

$$\sigma^2(z_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j - \sum_{j=1}^q \beta_j}.$$

El supuesto de que  $\nu_t$  se i.i.d., implica que el proceso tenga una distribución simétrica. El cuarto momento de  $z_t$ ,  $\mathbb{E}[z_t^4]$ , existe si

$$\sqrt{3} \frac{\sum_{j=1}^p \alpha_j}{1 - \sum_{j=1}^q \beta_j} < 1.$$

Además  $\{z_t\}$  es un proceso de ruido blanco con propiedad de cola pesada si  $\{z_t^2\}$  es estrictamente estacionario con un cuarto momento definido.

El proceso  $GARCH(p,q)$  tiene la ventaja de ser más potente en cuanto a ajuste se refiere en comparación con el modelo  $ARCH(p)$ , sin embargo sigue manteniendo la desventaja de ser un modelo simétrico que asigna los mismos pesos a los choques negativos y positivos, esto quiere decir que la varianza condicional está en función de la magnitud de los residuos rezagados, pero ignora los signos de los mismos.



## 2.7. Variantes del Modelo GARCH(p,q)

En el caso particular de las series de tiempo financieras, se ha observado de manera empírica que un choque negativo puede provocar un aumento en la volatilidad de manera más pronunciada del modo en que lo provocaría un choque positivo. Una manera de representar gráficamente el fenómeno de apalancamiento puede observarse en la figura [2-5]. Note que si el choque es positivo, la volatilidad aumentará a lo largo de  $ab$ , pero si el choque es negativo, la volatilidad aumentará a lo largo de  $ac$ .

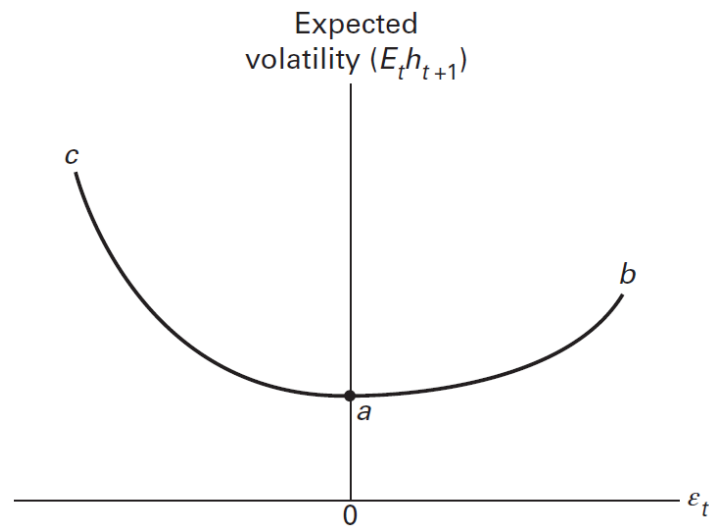


Figura 2-5: Fuente: [Enders, 2015, pág. 156] - Efecto de apalancamiento.

Brooks [2019] menciona tres principales razones por las cuales es necesario hacer modificaciones al modelo *GARCH* estándar. Primero, las condiciones de no negatividad pueden ser violadas por el modelo estimado, lo cual puede solucionarse imponiendo restricciones artificiales que garanticen la no negatividad de los coeficientes del modelo. Segundo, el modelo *GARCH* no puede explicar los efectos de apalancamiento. Por último, el modelo *GARCH* no permite ninguna retroalimentación directa entre la varianza condicional y la media condicional. A partir de estas dificultades se han propuesto una gran cantidad de modelos que intentan captar de

manera más eficiente las características que una serie real presenta, con esto la familia de modelos GARCH ha crecido sustancialmente. A continuación se presentan algunas de las estructuras más importantes y frecuentemente utilizadas para la modelación de series financieras:

### 2.7.1. Modelo EGARCH

Nelson [1991] mostró una alternativa de estimar la varianza condicional de manera asimétrica a través de su modelo *GARCH* exponencial (*EGARCH*). El modelo está desarrollado bajo la idea de que los rendimientos negativos (malas noticias) impactan de manera negativa en la estimación de la volatilidad, y los rendimientos positivos (buenas noticias) lo hacen de manera positiva. Para captar esta característica se integra al modelo *GARCH*( $p, q$ ) una función ponderada de innovaciones que dependerá directamente del signo y magnitud de los valores de  $\{\epsilon_t\}$ . Un modelo *EGARCH*( $m, s$ ) se expresa como

$$z_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \left[ \alpha_i \frac{\epsilon_{t-i}}{\sqrt{\sigma_{t-i}}} + \gamma_i \left( \left| \frac{\epsilon_{t-i}}{\sqrt{\sigma_{t-i}}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) \right] + \sum_{i=1}^p \beta_i \log(\sigma_{t-i})$$

Observe que a diferencia de las especificaciones anteriores, la variable dependiente es el logaritmo de  $\sigma_t^2$  y no  $\sigma_t^2$ ; además,  $\epsilon$  siempre está dividido por  $\sigma$ , es decir, utiliza los residuos estandarizados. Esta especificación tiene la ventaja de que la varianza es siempre positiva independientemente de los valores de los coeficientes; Nelson [1991] argumenta que utilizar los residuos estandarizados permite una interpretación más natural del tamaño y la persistencia de los choques.

## 2.7.2. Modelo TGARCH

El modelo GARCH por umbrales TGARCH (Sigla de Threshold GARCH) y el modelo GJR-GARCH fueron desarrollados independientemente por Zakoian [1994] y Glosten *et al.* [1993] respectivamente. Estos modelos tienen prácticamente la misma estructura, con la diferencia de que el modelo TGARCH busca captar la dinámica de la desviación estándar condicional, mientras que el segundo busca captar la dinámica de la varianza condicional.

El modelo TGARCH en su versión más sencilla, es decir, el modelo  $TGARCH(1, 1)$ , modela la varianza de la siguiente manera:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 d_{t-1} \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2,$$

donde  $d_{t-1}$  es una variable indicadora,  $d_{t-1} = 1$  si  $\epsilon_{t-1} < 0$  (malas noticias), y  $d_{t-1} = 0$  si  $\epsilon_{t-1} \geq 0$  (buenas noticias).

Por conveniencia el umbral está dado para  $d_i = 0$ , pero Tsay [2010] muestra la manera en como el umbral puede adaptarse a otros valores. Suponiendo que  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$  y  $\gamma_1$  son mayores que cero, esta especificación postula un efecto de apalancamiento porque las realizaciones negativas tienen un mayor impacto que las positivas; es decir, las buenas noticias  $\epsilon_{t-1} > 0$ , y las malas noticias  $\epsilon_{t-1} < 0$ , tienen diferentes efectos sobre la varianza condicional; las buenas noticias tienen un impacto sobre  $\alpha_i$ , mientras que las malas noticias lo tienen sobre  $\alpha_i + \gamma_i$ .

De manera análoga se define la varianza condicional para el proceso  $TGARCH(p, q)$  de la siguiente manera:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i d_{t-i}) \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

### 2.7.3. Modelo GARCH-M

Brooks [2019] menciona que la mayoría de los modelos utilizados en finanzas, suponen que las inversiones deben ser recompensadas por asumir riesgos adicionales y que una forma de hacer operativo este concepto es dejar que el retorno de una garantía sea en parte determinado por su riesgo. Engle *et al.* [1987] propusieron el modelo *ARCH* en media (*ARCH-M*), en el cual la varianza condicional de los rendimientos de los activos entra a través de la media condicional.

Debido a que los modelos *GARCH* presentan ventajas sobre los modelos *ARCH*, el modelo *ARCH-M* fue generalizado como un modelo *GARCH-M* (*GARCH* en media), mismo que tiene la siguiente estructura.

$$y_t = \mu + \delta\sigma_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Si  $\delta$  es positivo y estadísticamente significativo, entonces el aumento del riesgo, dado por un aumento en la varianza condicional, lleva a un aumento en el rendimiento medio. De esta manera,  $\delta$  puede interpretarse como una “prima de riesgo”.

### 2.7.4. Modelo RSGARCH

Cuando el modelo *GARCH* se estima utilizando datos de frecuencia diaria o superior, la estimación de esta suma tiende a ser cercana a uno, lo que indica que el proceso de volatilidad es muy elevado, persistente y puede no ser estacionario en covarianza. Mikosch *et al.* [2004] argumentan que la alta persistencia puede ser provocada artificialmente por los cambios de régimen en los parámetros del modelo *GARCH* a lo largo del tiempo. Hamilton y Susmel [1994] y Cai [1994] especificaron el modelo *RSGARCH* (Sigla de Regime Switching *GARCH*), que permite el cambio de régimen en los parámetros a través de una cadena markoviana.

Se define para cada  $t$  una variable de estado no observada  $s_t \in \{1, 2, \dots, n\}$ , que selecciona los parámetros del modelo con probabilidad  $p_{jt} = \mathbb{P}r(s_t = j | \mathcal{F}_{t-1})$  donde  $\mathcal{F}_t$  es un conjunto de información disponible en el tiempo  $t$ , que incluye  $(y_t, \sigma_t, \dots, y_1, \sigma_1)$ . Así el modelo *RSGARCH* tiene la siguiente estructura:

$$y_t = \mu_{s_t} + \epsilon_t = \mu_{s_t} + \sigma_t u_t, \quad u_t \sim i.i.d.n(0, 1) \quad o \quad u_t \sim i.i.d.t(0, v, \frac{v-2}{v})$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_{s_t} + \beta_{s_t} \sigma_{t-1}^2 + \gamma_{s_t} \epsilon_{t-1}^2$$

$$p_{jt} = \mathbb{P}r(s_t = j | \mathcal{F}_{t-1}) = p_{jt}(y_{t-1}^2), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

donde la función  $p_{jt}$  puede ser una función de enlace logístico o exponencial. Se asume que en el primer régimen ( $s_t = 1$ ) el proceso se comporta localmente como un proceso estacionario y existe su segundo momento. En otros regímenes ( $s_t > 1$ ), la volatilidad condicional puede ser integrada o incluso explosiva, es decir, no se imponen restricciones de estabilidad a los parámetros de estos regímenes. A continuación se dan algunas propiedades del modelo *RSGARCH* [Bauwens *et al.*, 2010].

- $u_t$  es una variable aleatoria i.i.d. y tiene una densidad continua en  $\mathbb{R}^+$ , con  $\mathbb{E}[u_t] = 0$  y  $Var(u_t) = 1$ .
- $\beta_j > 0$  y  $\gamma_j > 0$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ .
- $p_{1t}(y_{t-1}^2) > 0$  y  $p_{1t}(y_{t-1}^2) \rightarrow 1$  si  $y_{t-1}^2 \rightarrow \infty \quad \forall t$ .
- $\beta_1 + \gamma_1 < 1$ .

En la Figura [2-6], se ilustra la dependencia del camino en un modelo con dos regímenes y cero medias. Los subíndices muestran las rutas de los regímenes: por ejemplo,  $\sigma_{2|1,2}^2$  representa la varianza condicional en el momento 2, dado que el proceso estaba en el régimen 1 y 2, respectivamente, en los momentos 1 y 2. Por lo tanto, cada variación condicional depende no

sólo del régimen actual, sino de toda la historia del proceso. Cai [1994] y Hamilton y Susmel [1994] fueron los primeros en señalar esta dificultad. Es por eso que aplican el enfoque de cambio de régimen sólo a un proceso *GARCH* de bajo orden, lo cual es adecuado para este trabajo, pues regularmente no se necesita de un orden elevado para captar las características de una serie financiera.

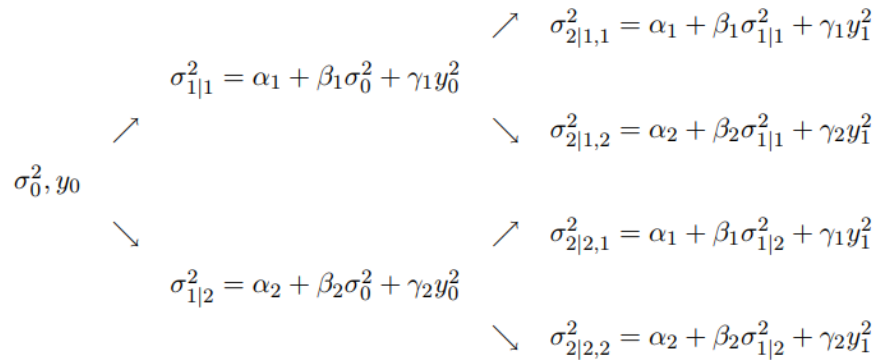


Figura 2-6: Fuente: Bauwens *et al.* [2010] - El problema de la dependencia del trayecto en un modelo RSGARCH con dos estados.

## 2.8. Estimación de puntual por Máxima Verosimilitud

Hasta este punto se ha desarrollado y explicado la estructura y propiedades de algunos modelos de series de tiempo, como lo son la familia de modelos ARMA y la familia de modelos GARCH; sin embargo, no se tocado el problema de como es que se estiman sus parámetros. En este trabajo se utiliza la estimación puntual por máxima verosimilitud, que consiste en encontrar los parámetros del modelo que *maximicen la probabilidad* de que la muestra de datos utilizados haya emanado del *modelo poblacional* que se busca parametrizar.

Partiendo de que se tiene una muestra de observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , se sabe que cada

observación de esta muestra proviene de una función de distribución  $f(x, \theta)$  desconocida. De este modo, si cada observación de la muestra es una realización independiente, la probabilidad de ver realizadas todas las observaciones de la muestra al mismo tiempo será:

$$f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = f(\vec{x}, \theta).$$

A la anterior función se le conoce como función de verosimilitud y comúnmente está denotada por  $L(\theta)$ . De este modo, el estimador *máximo verosímil* de los parámetros  $\theta$  se obtiene al maximizar  $L(\theta) = f(\vec{x}, \theta)$  o el logaritmo de dicha función, que es equivalente a maximizar la misma función, pero reduce considerablemente el procedimiento de las operaciones:

$$\frac{\partial \log(L(\theta))}{\partial \theta} = 0$$

Si la función de densidad del conjunto de datos estudiados cumple con las condiciones de Lindberg y Levy<sup>7</sup>, es posible demostrar que la varianza MELI (Mejor Estimador Lineal e Insesgado) de un parámetro  $\theta$  es siempre mayor o igual a:

$$I(\theta)^{-1} = \left[ -\mathbb{E} \left( \frac{\partial^2 \log(L(\theta))}{\partial \theta^2} \right) \right]^{-1} = \left[ -\mathbb{E} \left( \left[ \frac{\partial \log(L(\theta))}{\partial \theta} \right]^2 \right) \right]^{-1}.$$

A la expresión anterior se le conoce como *cota de Crámer-Rao* o matriz informacional; su utilidad es que si un estimador MELI alcanza la cota de Crámer-Rao, entonces se asegura que el estimador es óptimo. (Véase más detalles en Lehmann y Casella [2006] y Greene [2018])

Un estimador máximo verosímil debe ser consistente, es decir, que a medida que el tamaño de la muestra crezca, el estimador máximo verosímil tiende al valor del parámetro. Dicho de otro modo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{mv} = \theta \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|x_n - \theta| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

---

<sup>7</sup>a. el conjunto  $\{x : f(\hat{x}, \theta) \geq 0\}$  no depende de  $\theta$ ; b. las derivadas parciales de la función de densidad con respecto al vector de parámetros  $\theta$  existen para todo  $i, \theta$ ; c.  $I(\theta)$  es un anillo acotado.

A continuación, se muestra el método de máxima verosimilitud para el caso del modelo GARCH<sup>8</sup>.

Definiendo a  $\Theta = \{\theta : \theta = (\beta', \alpha')\}$  como el espacio de parámetros posibles pertenecientes a un espacio euclidiano, donde  $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)$  y  $\alpha' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ . La función de verosimilitud de los procesos GARCH con una muestra de observaciones de tamaño  $T$ , está dada por:

$$f(y_t|\psi_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_t - \mu_t)^2}{\sigma_t}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t}} \quad (2-24)$$

y su logaritmo es:

$$l_t = -\frac{1}{2} \log(\sigma_t - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t}) \quad (2-25)$$

Así, el logaritmo de la función de verosimilitud  $l$  para  $T$  observaciones es:

$$l = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T l_t \quad (2-26)$$

Si la función  $l_t$  se maximiza con respecto a los parámetros para la varianza, obtendremos las condiciones de primer y segundo orden como:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \omega} = \frac{1}{2\sigma_t^{-1}} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} \left( \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} - 1 \right) \quad (2-27)$$

$$\frac{\partial l_t^2}{\partial \omega \partial \omega'} = \left( \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \omega'} \left[ \frac{1}{2} \sigma_t^{-2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} \right] - \frac{1}{2} \sigma_t^{-2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega'} \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} \quad (2-28)$$

donde  $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} = z_t + \sum_{i=1}^p \gamma_i \frac{\partial \sigma_{t-i}}{\partial \omega}$ .

Este resultado se obtiene de que  $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega_i} = \frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha_i} = \epsilon_{t-i}^2 + \sum_i \gamma_i \frac{\partial \sigma_{t-i}}{\partial \alpha_i}$  para  $i \leq i \leq q$ ,  $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega_0} = \frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha_0} =$

---

<sup>8</sup>Para el caso de las variantes del modelo GARCH, así como para el caso de la estimación de parámetros de los modelos ARMA, el proceso se realiza de manera análoga.



$$1 + \sum_i \gamma_i \frac{\partial \sigma_{t-1}}{\partial \alpha_0} \text{ y } \frac{\partial \sigma_{t-i}}{\partial \omega_{q+i}} = \frac{\sigma_t}{\partial \gamma_i} = \sigma_{t-i} + \sum_i \gamma_i \frac{\partial \sigma_{t-1}}{\partial \gamma_i} \text{ para } 1 \leq i \leq p.$$

Dado que

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} | \psi_{t-1} \right] = 1 \quad \text{Y} \quad \mathbb{E}[\epsilon_t | \psi_{t-1}] = 0,$$

entonces el valor de la esperanza condicionada a la información pasada del primer término de la ecuación (2-18) es cero, la matriz de información para los parámetros de la varianza está dada por:

$$I_{\omega\omega} = \frac{1}{T} \sum_t \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega'} \right]$$

$I_{\omega\omega}$  es estimado consistentemente por su análogo muestral

$$\hat{I}_{\omega\omega} = \frac{1}{T} \sum_t \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega'}$$

Con respecto a los parámetros de la media, de manera análoga se obtienen las condiciones de primer y segundo orden:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta} = \frac{\epsilon_t x'_t}{\sigma_t} + \frac{1}{2\sigma_t} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta} \left( \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \beta \partial \beta'} = \frac{x_t x'_t}{\sigma_t} - \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta'} \left( \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} \right) - \frac{2\epsilon_t x'_t}{\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta'} + \left( \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \beta'} \left[ \frac{1}{2\sigma_t} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta} \right]$$

donde  $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta} = -2 \sum_{j=1}^q \alpha_j \epsilon_{t-j} x'_{t-j} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \frac{\partial \sigma_{t-j}}{\partial \beta}$ . De este modo, la matriz de información para los parámetros de la media es

$$I_{\beta\beta} = \frac{1}{T} \sum_t \mathbb{E} \left[ \frac{x_t x'_t}{\sigma_t} + \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta'} \right].$$

En este sentido, la matriz de información conjunta estará dada por

$$I_{\omega\beta} = \frac{1}{T} \sum_t \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2\sigma_t^2} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta'} \right]$$

Evidentemente, encontrar la solución de las matrices se complica en la medida que el número de observaciones incrementa; por lo tanto, se requiere de técnicas de optimización numérica para obtener dichas estimaciones; entre las técnicas más conocidas se encuentran la de Berndt, Hall, Hall y Hausman (BHHH), Marquadt o Nelder-Mead, que son variaciones del método de Gauss-Newton. Greene [2018] menciona que no hay una postura definida sobre una técnica de optimización estadísticamente preferible, puesto que, asintóticamente son equivalentes; sin embargo, el estimador BHHH es más sencillo de calcular, pero hay que tener cuidado, pues existen diferencias que aunque pequeñas, pueden dar resultados diferentes en muestras finitas. El método utilizado en este trabajo es el método de Nelder-Mead, debido a que es el método iterativo que siguen los paquetes que en este trabajo se utilizan, además, de que este método tiene la capacidad de no estancarse en un mínimo local (Más detalles en Gao y Han [2012]).

## Capítulo 3

# Modelación del Riesgo Accionario Mexicano

### 3.1. Objetivos e hipótesis

Se ha observado empíricamente que la serie de rendimientos del IPC sigue una distribución de colas pesadas, lo cual se traduce a que existe una alta probabilidad de ocurrencia de eventos extremos. En sentido se busca evidenciar que la utilización del modelo normal de la CNSF y los modelos que se basan en el supuesto de normalidad, pueden dar lugar a una subestimación del SCR por riesgo accionario para el caso de México.

La propuesta es modelar la serie de rendimientos del IPC a través e una metodología basada en modelos heteroscedásticos condicionales autorregresivos generalizados (GARCH) con innovaciones  $t - student$ , que además, consideran en sus estructuras el supuesto de asimetría en los choques (efecto de apalancamiento), para que posteriormente, se pueda realizar una

comparativa de dichos modelos con respecto al modelo normal de la CNSF (VaR (Normal) al 99.5 %).

Se ha hecho la elección de la distribución t-student para la innovaciones de los modelos GARCH, por ser una distribución que asigna más peso a las colas en comparación a la distribución normal; esta distribución pertenece al estudio de las distribuciones elípticas<sup>1</sup>, cuyos contornos de sus densidades tienen la misma forma elíptica de una distribución normal, pero además contienen modificaciones en las colas, para lograr que estas sean más o menos pesadas. Esto brinda una solución para una modelación más eficiente de la curtosis observada empíricamente en el IPC.

Este trabajo tiene el objetivo de brindarle al mercado mexicano de seguros, una metodología que permita identificar algún o algunos modelos que reflejen de manera eficiente el riesgo accionario asumido y, así hacer una correcta estimación del SCR para dicho riesgo. De esto, se derivan las siguientes hipótesis:

- $H_1$  : El modelo estándar de CNSF subestima el SCR del riesgo accionario al utilizar la hipótesis de comportamiento normal para los rendimientos del mercado accionario mexicano.
- $H_2$  : Los modelos GARCH con innovaciones gaussianas no logran modelar de manera eficiente la cola de la distribución de pérdidas (resultados extremos) de la volatilidad de mercado accionario mexicano [Espinosa, 2016].
- $H_3$  : Con respecto a la dinámica del mercado accionario mexicano, los modelos heterocedásticos con innovaciones t-student muestran un mejor ajuste que los modelos heterocedásticos con innovaciones gaussianas.

---

<sup>1</sup>Véase Apéndice B

### 3.2. Otros acercamientos a la modelación del IPC

La literatura con respecto a la modelación del IPC se encuentra en constante crecimiento, en donde la utilización de la familia de modelos *GARCH* es una de las ramas más destacadas; por ejemplo, Mejía *et al.* [2011] encuentra evidencia de una alta persistencia de la volatilidad a través de un modelo *ARMA*(5, 1) y la volatilidad es a su vez capturada con un modelo *EGARCH*(1, 1). Vazquez *et al.* [2013] propone un modelo *GARCH* asimétrico, modelado a través del enfoque de Brooks [2005]; se concluye que el modelo propuesto capta de buena manera la volatilidad para los periodos de crisis, tomando como ejemplo la crisis subprime de 2008. Herrera [2004] hace una comparación de algunas variantes del modelo *GARCH*, en donde los modelos *EGARCH*(1, 1), *TARCH*(1) y *GARCH*(1, 1) replican de buena manera los primeros cuatro momentos de la serie, además, se concluye que el modelo *EGARCH*(1, 1) es el que captura de mejor manera los choques negativos para el periodo utilizado. Salado *et al.* [2013] propone una estimación del VaR mediante modelos asimétricos *GARCH* y hace una comparación con respecto a la nota metodológica de Riskmetrics; se concluye que los modelos asimétricos captan mejor las características de la serie, aunque generan estimaciones del VaR más pequeñas con respecto a Riskmetrics. Venegas-Martínez *et al.* [2018] realiza una comparativa a través de modelos *GARCH* asimétricos y un modelo de enfoque continuo como lo es el *PJ-RS-SV* (Sigla de Poisson Jumps - Regime Switching - Stochastic Volatility); se concluye que el modelo *PJ-RS-SV* replica de mejor manera la dinámica real de la serie IPC con respecto a los modelos analizados. Finalmente, Espinosa [2016] muestra que los modelos *GARCH* con innovaciones *t - student* e innovaciones *GDP* (Distribución de Pareto Generalizada) logran captar de mejor manera las colas de la distribución de los rendimientos del IPC, en comparación a lo logrado con modelos de innovaciones gaussianas.

### 3.3. El Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores

El IPC es el indicador de la evolución del mercado accionario mexicano en su conjunto, refleja cuanto ganó o perdió la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) en una jornada. Se forma de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de emisoras cotizadas en la bolsa.

De acuerdo a la mas reciente nota metodológica<sup>2</sup>, publicada el 5 de Mayo de 2017, para el cálculo del IPC se consideran los siguientes puntos:

- El universo elegible está compuesto por todas las series accionarias (excepto FIBRAS y Fideicomisos Hipotecarios) listadas en la BMV.
- Valor de Capitalización de Mercado Flotante calculado con el precio promedio ponderado (PPP): Cada serie accionaria elegible deberá tener un mínimo de \$10,000 millones de pesos de valor de capitalización de mercado flotante calculado con el PPP.
- Factor de Acciones Flotantes<sup>3</sup> (IWF): Al menos 10 %.
- Días negociados: 95 % de días operados de los últimos 6 meses.
- Historial de negociación: Las series accionarias deberán contar con un historial de al menos 3 meses de operación previos a la fecha de referencia del cambio de muestra.
- Liquidez:

---

<sup>2</sup>El documento puede consultarse en el siguiente enlace: <https://docplayer.es/76841289-S-p-bmv-indices-metodologia.html>

<sup>3</sup>El concepto de acciones flotantes engloba a todas las acciones que se negocian regularmente en las bolsas de valores, y que por consiguiente cambian constantemente de manos. En este sentido, las acciones por lo general pertenecen a inversionistas minoritarios cuyo único objetivo es la especulación.

- Un valor mínimo de 25 % anualizado para el factor de la mediana mensual del importe operado (MTVR por sus siglas en inglés) de los 3 y 6 meses previos a la fecha de referencia del cambio de muestra.
  - Un valor mínimo de \$50 millones de pesos mexicanos para la mediana mensual del importe operado diario registrado (MDTV por sus siglas en inglés) operado de los últimos 3 y 6 meses.
- Selección: Todas las series accionarias que cumplan con los criterios mínimos de capitalización de mercado y liquidez podrán ser parte del índice.
  - Si hay más de 35 series accionarias seleccionadas, las elegibles serán ranqueadas por su valor de capitalización de mercado flotante calculado con el PPP y su mediana mensual del importe operado de 6 meses (6 MDTV). Las series accionarias con los rankings mayores serán excluidas hasta que el índice alcance la muestra de 35 series accionarias seleccionadas. Si hay menos de 35 series accionarias seleccionadas, todas las series accionarias que no cumplieron con los criterios mínimos de Valor de Capitalización de Mercado Flotante calculado con el PPP y de liquidez, serán ranqueados por su Capitalización de Mercado y su Mediana mensual del importe operado de 6 meses (6 MDTV) y las series accionarias con los rankings menores serán incluidas hasta que el índice alcance la muestra de 35 series accionarias.
  - Si existe un empate en el ranking, la serie accionaria con la mayor liquidez en base a la Mediana mensual del importe operado de 6 meses (6 MDTV) será seleccionada.
  - Series Accionarias Múltiples: si una emisora cuenta con más de una serie accionaria que cumpla con los criterios de elegibilidad, se elegirá a la serie accionaria con la mayor liquidez a la fecha de referencia del cambio de muestra en septiembre/marzo, con base al valor mensual del MTVR de los últimos 6 meses.
  - Criterios de Holgura para evitar rotación excesiva: una serie accionaria que forme parte del índice no será eliminada si cumple con los siguientes criterios mínimos de liquidez

durante el cambio de muestra:

- Valor de Capitalización de Mercado Flotante calculado por el PPP: \$8,000 millones de pesos.
- MTVR: 15 % anualizado.
- MDTV: 30 millones de pesos mexicanos.

El cambio de muestra y rebalanceo se realiza semestralmente en la apertura de mercado del lunes siguiente al tercer viernes de marzo y septiembre de cada año. Adicionalmente, será rebalanceado en la apertura de mercado del lunes siguiente al tercer viernes de junio y diciembre de cada año.

La fecha de referencia para el cambio de muestra semestral será el último día hábil de dos meses previos a la fecha efectiva del cambio de muestra; por ejemplo, la fecha de referencia para el cambio de muestra de marzo será el último día hábil de enero y la fecha de referencia para el cambio de muestra de septiembre será el último día hábil de julio.

Las acciones del Índice serán asignadas basándose en el precio de dos días hábiles previo a la fecha pro-forma, y los archivos pro-forma estarán disponibles con 5 días de anticipación de la fecha efectiva de los rebalanceos y 10 días de anticipación en marzo y septiembre para los periodos de cambio de muestra.

Los reemplazos de series accionarias sólo serán incluidos en cada cambio de muestra semestral. En el caso en que la muestra disminuya a un número menor de 30 emisoras, el Comité de Índices revisará el índice para determinar si un reemplazo de series accionarias es requerido para mantener el objetivo del índice.



### 3.4. Análisis descriptivo del IPC

Entrando en materia, la figura [3-1] muestra la gráfica de la cotización diaria del IPC, para el periodo de Abril de 1990 a Diciembre de 2018; en el mismo sentido, la figura [3-2] muestra los rendimientos logarítmicos de la serie en cuestión.

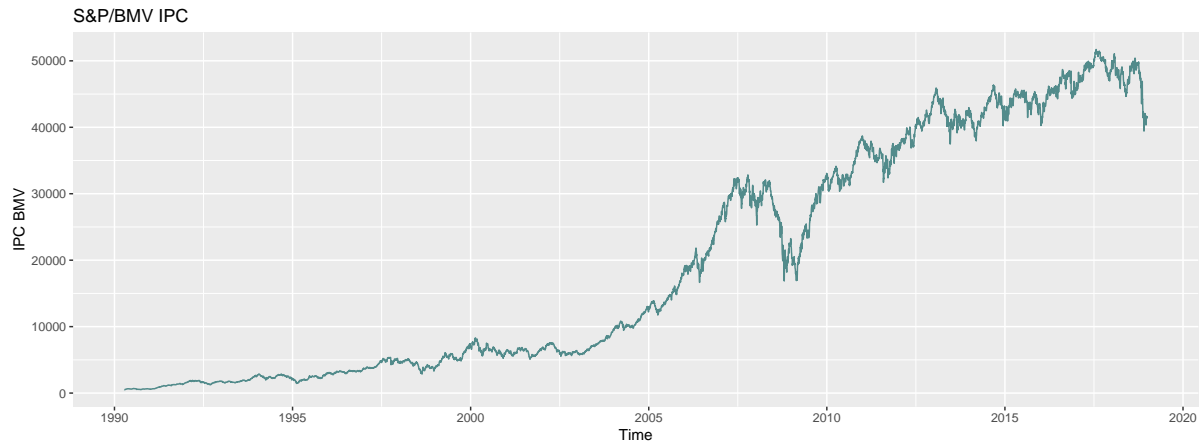


Figura 3-1: Fuente: Elaboración propia con datos del Banco de México (BANXICO).

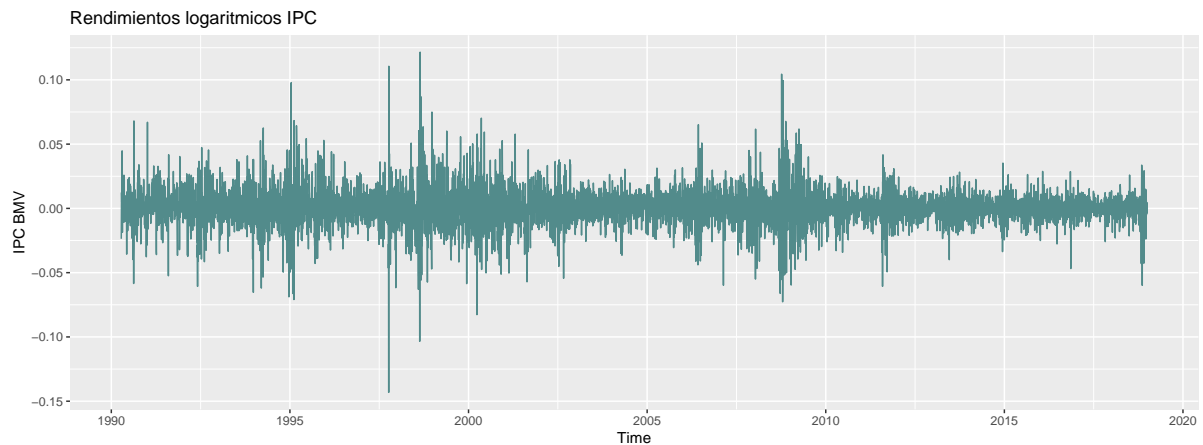


Figura 3-2: Fuente: Elaboración propia.

En la tabla [3-1] se muestran algunas estadísticas descriptivas de las serie en niveles y rendimientos logarítmicos, en donde puede observarse que el coeficiente de curtosis de la serie en niveles es negativo, lo cual de acuerdo con Westfall [2014], indica que los datos tienen una distribución bimodal, mientras que con respecto a la serie de rendimientos, el coeficiente de

curtosis es casi el doble con respecto al coeficiente de normalidad, lo cual indica que la serie sigue una distribución de colas pesadas; ambos resultados se sustentan con la prueba Jarque-Bera que rechaza la hipótesis de normalidad en ambos casos, además, en la figura [3-3] se muestran los histogramas de la serie en niveles y rendimientos, que sustentan de manera gráfica el análisis previo.

	IPC	IPC(dif.log.)
Media	19524.6	0.0006935
Mediana	10687.1	0.0006058
Máximo	51713.4	0.1215364
Mínimo	514.2	-0.1431388
Desv.Std.	17313.79	01454144
Sesgo	0.444998	0.02925312
Curtosis	-1.442141	6.473482
JBtest	862.48	12599
JB p.value	2.2e-16	2.2e-16
Observaciones	7210	7209

Tabla 3-1: Elaboración Propia.

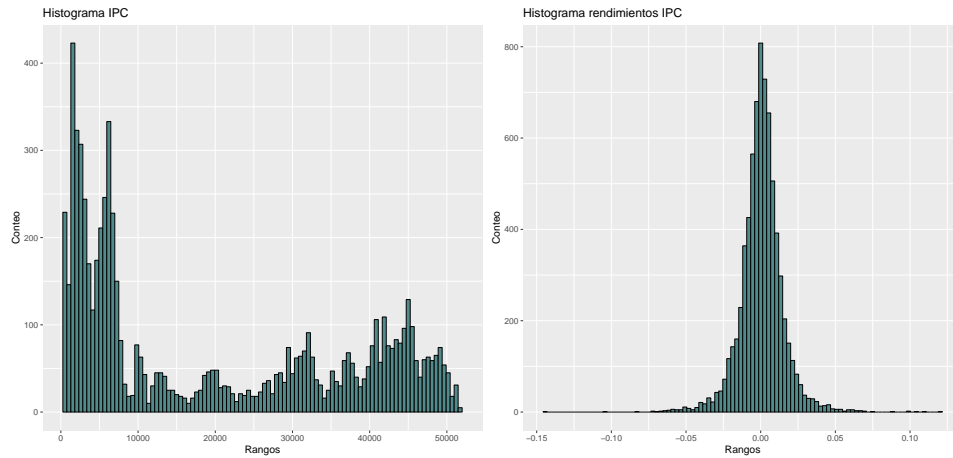


Figura 3-3: Fuente: Elaboración propia con datos del Banco de México (BANXICO).

De acuerdo a lo observado en los trabajos de Bai *et al.* [2003]; Alberg *et al.* [2008]; Curto *et al.* [2009]; Espinosa [2016] y Acuña [2017], el exceso de curtosis observado en las serie de

rendimientos logarítmicos puede ser capturado mediante modelos *GARCH* con innovaciones *t – student*, debido a que esta distribución asigna más peso a las colas y logra capturar de manera eficiente los valores extremos relacionados con la cola izquierda de la distribución.

### 3.5. Calibración de modelos y comparación.

En esta sección se presentan los resultados de los diferentes modelos aplicados al IPC para el periodo de Abril de 1990 a Diciembre de 2018. Los modelos son estimados utilizando el lenguaje de programación *R-Project* de R Core Team [2018] (Véase Apéndice A), utilizando además la librerías *rugarch* de Ghalanos [2019] y *MSGARCH* de Ardia *et al.* [2018].

#### 3.5.1. Metodología Box-Jenkins

Box y Jenkins [1970] desarrollaron una metodología que tiene la finalidad de facilitar el trabajo a investigadores con respecto a la construcción de modelos de series de tiempo. Esta metodología consta de cuatro pasos que se explican a continuación:

- **Identificación:** Consiste en encontrar el orden apropiado del modelo para la serie estacionaria. Esto tiene que ver con el análisis gráfico (FAC y FACP), sin embargo, tal como se mencionó en el capítulo dos, este análisis no es del todo confiable y tiene que recurrirse a un análisis de criterios de selección (AIC, BIC, HQ), el cual se da posterior a la calibración de modelos tentativos.
- **Estimación:** Consiste en estimar los parámetros del modelo para la serie estacionaria.
- Después de seleccionar un modelo y estimar sus parámetros, se debe hacer un análisis

con respecto a si el modelo tiene un buen ajuste para los datos utilizados, debido a que es posible que exista otro modelo que también lo haga o lo haga mejor. De esto es que se dice que el diseño de un modelo de series de tiempo es un arte, pues se requiere de una buena habilidad para seleccionar el modelo correcto.

- Pronóstico: Una vez verificado el buen ajuste del modelo se hace el pronóstico de la serie, en este caso, la volatilidad del IPC.

En la figura [3-4], puede observarse que la serie IPC en su primer diferencia logarítmica parece ser estacionaria, pues no existe un patrón de tendencia definido. Además, la estacionariedad de la serie se comprueba de manera formal con los resultados de las pruebas DFA, PPT y KPSS dadas en la tabla [3-2]; Las pruebas DFA y PPT utilizan la hipótesis nula  $H_o$  : existencia de raíces unitarias, es decir, serie no estacionaria, de este modo, ambas pruebas indican que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis alternativa, en otras palabras, las pruebas indican que estadísticamente la serie es estacionaria. La prueba KPSS, utiliza la hipótesis nula  $H_o$  : la serie es estacionaria; en este sentido los resultados muestran que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula y se dice que la serie es estadísticamente estacionaria.

	Prueba D.F.A.	Prueba P.P.	Prueba KPSS
Estadístico	-76.059	-6125.8	0.04043
P-Value	0.01	0.01	0.146

Tabla 3-2: Pruebas de estacionariedad de la serie de rendimientos logarítmicos del IPC

Una prueba formal para saber si es viable utilizar modelos GARCH, es el prueba de McLeod-Li, utilizada para determinar de manera estadística si la serie contiene una estructura ARCH. Esta prueba consiste en calcular la regresión lineal de la variable en función de sus residuos cuadráticos rezagados; si los coeficientes resultantes de la regresión son estadísticamente significativos, se asegura que la serie tiene una estructura ARCH. En la figura [3-5] se muestra la gráfica de los residuales de la serie de rendimientos IPC en función de la constante, mientras que

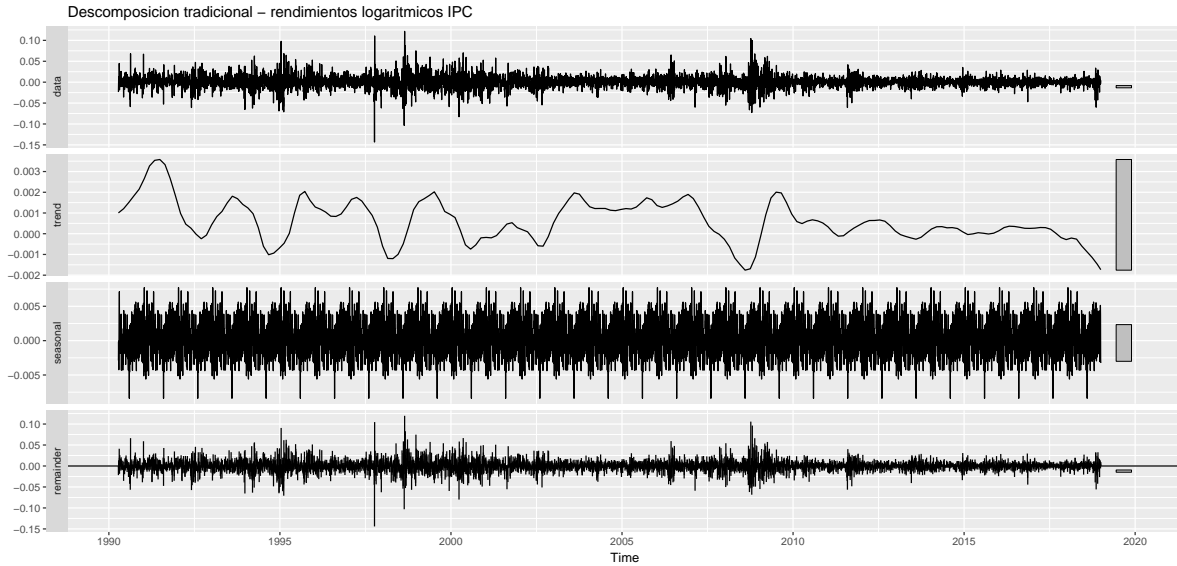


Figura 3-4: Fuente: Elaboración propia.

en la tabla [3-3] se muestran los resultados de la prueba de McLeod-Li, que muestra claramente la existencia de una estructura ARCH en la serie utilizada.

Coefficientes	Estimación	E. Estándar	t-value	p-value
Intercepto	9.888e-05	8.026e-06	12.321	2e-16
Residuos (rezago 1)	1.788e-01	1.176e-02	15.200	2e-16
Residuos (rezago 2)	7.317e-02	1.189e-02	6.154	7.98e-10
Residuos (rezago 3)	1.207e-01	1.192e-02	10.123	2e-16
Residuos (rezago 4)	-7.590e-03	1.192e-02	-0.637	0.524
Residuos (rezago 5)	1.001e-01	1.189e-02	8.421	2e-16
Residuos (rezago 6)	6.722e-02	1.176e-02	5.715	1.14e-08

Tabla 3-3: Prueba de McLeod-Li con 6 rezagos

La FAC y FACP de la serie IPC en rendimientos logarítmicos se muestran en la Figura [3-6]. Puede observarse una fuerte estructura de dependencia en la variación de los rendimientos diarios, además, mediante la *FAC* podría pensarse que la serie pudiera modelarse mediante el modelo *GARCH*(1,1) debido a la fuerte correlación asociada al rezago uno; sin embargo, de acuerdo a lo que puede observarse en la *FACP*, no podría asegurarse de manera certera tal aseveración.

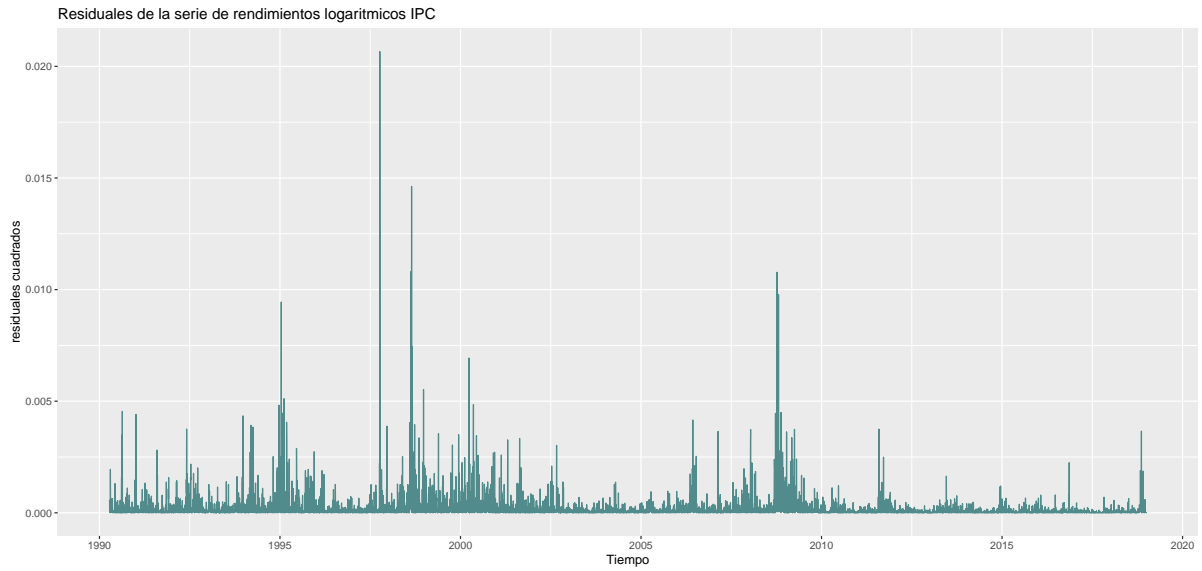


Figura 3-5: Fuente: Elaboración propia.

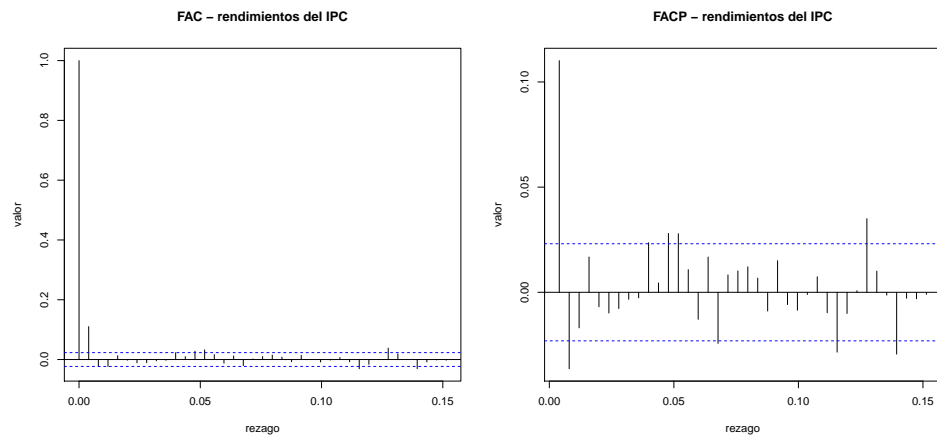


Figura 3-6: Fuente: Elaboración propia.

Dado que se pretende calibrar una varianza condicional adecuada, se debe partir una media condicional igualmente adecuada; por lo tanto, en este trabajo se utiliza una estructura de modelos ARMA-GARCH.

El paquete *forecast* del lenguaje *R-project*, contiene la función “*auto.arima*”; que es un procedimiento iterativo que busca el modelo ARMA óptimo con respecto a un criterio de selección dado, como pueden ser los criterios AIC, BIC, HQC, entre otros. Esta función es una herramienta informativa de bastante ayuda para modelar la media de la serie. Utilizando el criterio BIC como el criterio de selección, se encontró que el modelo óptimo para la serie IPC en rendimientos logarítmicos es un  $ARMA(0, 1)$ , o bien, un  $MA(1)$ .

A continuación se procede a calibrar las diferentes mixturas de modelos ARMA(0,1)-GARCH con respecto a cada una de las variantes del modelo GARCH definidas en el capítulo anterior.

### 3.5.2. Calibración del modelo ARMA-GARCH

Modelo	Coefficientes	E. Estándar	t-value	p-value	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>HQC</i>
<i>ARMA</i> (0,1) <i>GARCH</i> (1,1)	$\zeta = 0.000787$	0.000130	6.0629	0.00000	-5.9981	-5.9923	-5.9961
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.114412$	0.012155	9.4130	0.00000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	1.6001	0.10958			
	$\alpha_1 = 0.093778$	0.014706	6.3770	0.00000			
	$\beta_1 = 0.900707$	0.014859	60.6163	0.00000			
<i>ARMA</i> (0,1) <i>GARCH</i> (1,2)	$\zeta = 0.000778$	0.000130	5.9715	0.00000	-5.9983	-5.9916	-5.9960
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.115033$	0.012364	9.3037	0.00000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	2.8516	0.00435			
	$\alpha_1 = 0.117620$	0.013453	8.7432	0.00000			
	$\beta_1 = 0.580156$	0.048716	11.9089	0.00000			
	$\beta_2 = 0.295421$	0.026007	11.3595	0.00000			
<i>ARMA</i> (0,1) <i>GARCH</i> (2,1)	$\zeta = 0.000786$	0.000130	6.050057	0.000000	-5.9978	-5.9911	-5.9955
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.114347$	0.012214	9.361745	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	2.404667	0.016187			
	$\alpha_1 = 0.093539$	0.015575	6.005600	0.000000			
	$\alpha_2 = 0.000000$	0.011550	0.000024	0.999981			
	$\beta_1 = 0.901054$	0.010845	83.085341	0.000000			
<i>ARMA</i> (0,1) <i>GARCH</i> (2,2)	$\zeta = 0.000779$	0.000130	5.9812	00000	-5.9980	-5.9904	-5.9954
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.114793$	0.012389	9.2660	00000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000000	7.8659	0.0000			
	$\alpha_1 = 0.117424$	0.017796	6.5984	0.0000			
	$\alpha_2 = 0.000000$	0.012475	0.0000	1.0000			
	$\beta_1 = 0.581076$	0.018438	31.5147	0.0000			
	$\beta_2 = 0.294835$	0.049249	5.9866	0.0000			

Tabla 3-4: Resultados de la estimación de los modelos ARMA(0,1)-GARCH por el método de máxima verosimilitud

En la tabla [3-3] se muestran los parámetros obtenidos para los distintos modelos ARMA(0,1)-GARCH(p,q)<sup>4</sup>, así mismo se muestran los criterios *AIC*, *BIC* y *HQC* para la selección del

<sup>4</sup>Se corrieron los modelos hasta el segundo orden, es decir *GARCH*(2,2) debido a que en este trabajo se ha hecho hincapié sobre la búsqueda de modelos parsimoniosos.



modelo. De acuerdo a la estructura utilizada (ARMA-GARCH) la ecuación de la media está dada por la constante  $\zeta$  y coeficiente  $MA$  ( $\theta_1$ ), mientras que la ecuación de la varianza está dada por los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  correspondientes al orden del modelo.

El criterio AIC sugiere la utilización del modelo ARMA(0,1)-GARCH(1,2); sin embargo, el criterio BIC sugiere el modelo ARMA(0,1)-GARCH(1,1). Utilizando como criterio de desempate al HQC, se toma el modelo ARMA(0,1)-GARCH(1,1) como el mejor modelo con respecto a los modelos *GARCH* estándar.

Cabe señalar que la prueba de Ljung-Box (Véase Apéndice B) muestra la existencia de autocorrelación en los residuales estandarizados, además, la prueba de sesgo de signos de Engle y Ng (Véase Apéndice B) dada en la tabla [3-5] muestra que todos los modelos estimados presentan sesgo en los signos, es decir, que los modelos GARCH no son capaces de capturar el efecto de apalancamiento, lo cual habla de una mala especificación del modelo.

ARMA(0,1)GARCH(1,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)GARCH(1,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	4.1675	3.116e-05	Sesgo de signo negativo	3.2712	1.076e-03
Sesgo de signo positivo	1.9443	5.190e-02	Sesgo de signo positivo	2.3028	2.132e-02
Efecto conjunto	39.9942	1.069e-08	Efecto conjunto	33.3449	2.724e-07
ARMA(0,1)GARCH(2,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)GARCH(2,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	4.1564	3.271e-05	Sesgo de signo negativo	3.2748	1.062e-03
Sesgo de signo positivo	1.9301	5.363e-02	Sesgo de signo positivo	2.3032	2.130e-02
Efecto conjunto	39.9869	1.072e-08	Efecto conjunto	33.3657	2.697e-07

Tabla 3-5: Prueba de sesgo de signo en los modelos ARMA-GARCH

En la figura [3-7] se muestra la gráfica de las simulaciones del modelo seleccionado y la serie de rendimientos del IPC; se puede observar que el modelo tiene poca capacidad de replicar la dinámica real del IPC.

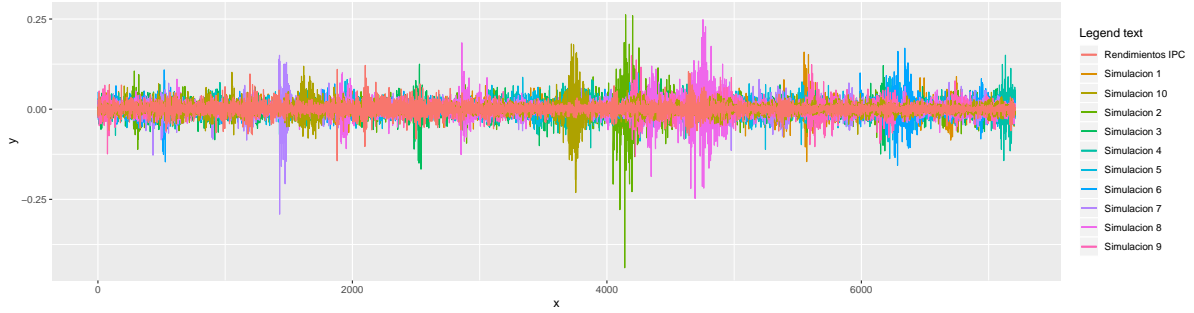


Figura 3-7: 10 simulaciones del proceso  $ARMA(0,1) - GARCH(1,1)$  más la serie en rendimientos logarítmicos.

### 3.5.3. Calibración del modelo ARMA-GARCH-M

En la tabla [3-4] se muestra la estimación de los distintos modelos  $ARMA(0,1)$ - $GARCH$ - $M(p,q)$ , así como los criterios de selección  $AIC$ ,  $BIC$  y  $HQ$ . En este caso, el criterio  $AIC$  sugiere utilizar el modelo  $ARMA(0,1)$ - $GARCH$ - $M(1,2)$ ; sin embargo, el criterio  $BIC$  sugiere el modelo  $ARMA(0,1)$ - $GARCH$ - $M(1,1)$ . Utilizando nuevamente como criterio de desempate al criterio  $HQ$ , se selecciona el modelo  $ARMA(0,1)$ - $GARCH$ - $M(1,1)$ .

Para todos los modelos  $ARMA$ - $GARCH$ - $M$  probados, el estadístico de Ljung-Box muestra la existencia de autocorrelación en los residuos estandarizados en todos los modelos, además, la prueba de sesgo de signos dada en la tabla [3-7] muestra que para todos los modelos estimados existe un sesgo en los signos significativo, que nos dice que el modelo no es capaz de captar por completo el fenómeno de apalancamiento.

En la figura [3-8] se muestra la simulación del modelo seleccionado y su comparación con la serie de rendimientos logarítmicos del IPC. Puede apreciarse que las simulaciones replican de buena manera los clusters de alta volatilidad, sin embargo, en los periodos de baja volatilidad las simulaciones sobrestiman a la serie en niveles en casi todos los casos.

Modelo	Coefficientes	E. Estándar	t-value	p-value	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>HQC</i>
<i>ARMA(0,1)GARCH – M(1,1)</i> (ecuación de la media)	$\zeta = -0.000360$	0.000369	-0.97588	0.32913	-5.9993	-5.9926	-5.9970
	$\theta_1 = 0.113498$	0.012159	9.33479	0.00000			
	$\delta = 0.113636$	0.034292	3.31378	0.00092			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	1.51428	0.12995			
	$\alpha_1 = 0.095991$	0.015914	6.03185	0.00000			
	$\beta_1 = 0.898359$	0.016074	55.88783	0.00000			
<i>ARMA(0,1)GARCH – M(1,2)</i> (ecuación de la media)	$\zeta = -0.000341$	0.000372	-0.91691	0.359190	-5.9995	-5.9918	-5.9968
	$\theta_1 = 0.113930$	0.012387	9.19786	0.000000			
	$\delta = 0.111262$	0.034518	3.22333	0.001267			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	2.85629	0.004286			
	$\alpha_1 = 0.119803$	0.013763	8.70446	0.000000			
	$\beta_1 = 0.583896$	0.054835	10.64825	0.0000000			
	$\beta_2 = 0.289514$	0.012624	22.93288	0.000000			
<i>ARMA(0,1)GARCH – M(2,1)</i> (ecuación de la media)	$\zeta = -0.000353$	0.000371	-0.949533	0.342350	-5.9990	-5.9913	-5.9963
	$\theta_1 = 0.113316$	0.012233	9.263038	0.000000			
	$\delta = 0.112747$	0.034529	3.265251	0.001094			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	2.358921	0.018328			
	$\alpha_1 = 0.095714$	0.015505	6.173120	0.000000			
	$\alpha_2 = 0.000000$	0.011156	0.000028	0.999978			
	$\beta_1 = 0.898769$	0.011318	79.407351	0.000000			
<i>ARMA(0,1)GARCH – M(2,2)</i> (ecuación de la media)	$\zeta = -0.000350$	0.000372	-0.939822	0.347309	-5.9992	-5.9906	-5.9962
	$\theta_1 = 0.113721$	0.012411	9.162968	0.000000			
	$\delta = 0.111947$	0.034609	3.234634	0.001218			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000000	8.016178	0.000000			
	$\alpha_1 = 0.119389$	0.017724	6.735931	0.000000			
	$\alpha_2 = 0.000001$	0.012341	0.000086	0.999931			
	$\beta_1 = 0.586588$	0.003716	157.843928	0.000000			
	$\beta_2 = 0.287286$	0.046091	6.233004	0.000000			

Tabla 3-6: Resultados de la estimación de los modelos ARMA-GARCH-M por máxima verosimilitud

ARMA(0,1)GARCH-M(1,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)GARCH-M(1,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	3.8173	1.360e-04	Sesgo de signo negativo	2.9449	3.241e-03
Sesgo de signo positivo	2.1371	3.262e-02	Sesgo de signo positivo	2.4718	1.346e-02
Efecto conjunto	35.6227	8.998e-08	Efecto conjunto	30.2943	1.197e-06
ARMA(0,1)GARCH-M(2,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)GARCH-M(2,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	3.816557	1.365e-04	Sesgo de signo negativo	2.9549	3.138e-03
Sesgo de signo positivo	2.129644	3.323e-022	Sesgo de signo positivo	2.4673	1.364e-02
Efecto conjunto	35.641675	8.915e-08	Efecto conjunto	30.3514	1.164e-06

Tabla 3-7: Prueba de sesgo de signo en los modelos ARMA-GARCH-M

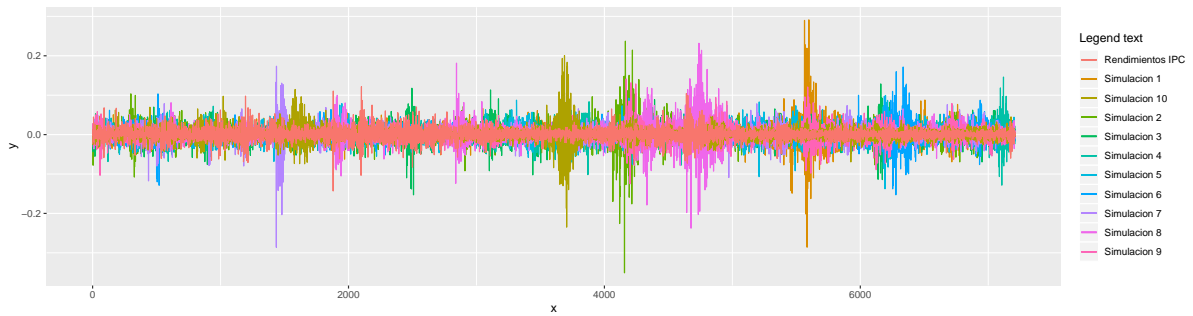


Figura 3-8: 10 simulaciones del proceso  $ARMA(0,1) - GARCH - M(1,1)$  más la serie en rendimientos logarítmicos.

### 3.5.4. Calibración del modelo ARMA-EGARCH

En la tabla [3-5] se muestra la estimación de los distintos modelos ARMA-EGARCH, así como los criterios de selección  $AIC$ ,  $BIC$  y  $HQC$ . En este caso el criterio  $AIC$  sugiere el modelo  $ARMA(0,1)$ -EGARCH(2,1), mientras que el criterio  $BIC$  sugiere el modelo  $ARMA(0,1)$ -EGARCH(1,1). Utilizando como criterio de desempate al criterio  $HQC$ , se selecciona el modelo  $ARMA(0,1)$ -EGARCH(1,1).

En la tabla [3-9] se muestran los resultados de la prueba de sesgo de signo; todos los modelos logran captar el sesgo (fenómeno de apalancamiento), lo cual nos habla de una mejora sustancial en la especificación del modelo.

En la figura [3-9] se muestra la simulación del proceso seleccionado. Puede observarse que las 10 simulaciones realizadas replican de manera muy aproximada la dinámica real de la serie.

Modelo	Coefficientes	E. Estándar	t-value	p-value	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>HQC</i>
<i>ARMA(0,1)EGARCH(1,1)</i>	$\zeta = 0.000483$	0.000123	3.943	8e-05	-6.0145	-6.0078	-6.0122
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.116087$	0.011424	10.162	0e+00			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = -0.137285$	0.011936	-11.502	0e+00			
	$\alpha_1 = -0.079796$	0.007572	-10.538	0e+00			
	$\beta_1 = 0.984418$	0.001375	716.026	0e+00			
	$\gamma_1 = 0.179579$	0.016579	10.832	0e+00			
<i>ARMA(0,1)EGARCH(1,2)</i>	$\zeta = 0.000484$	0.000118	4.0942	0.000042	-6.0146	-6.0069	-6.0119
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.116210$	0.011342	10.2459	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = -0.151460$	0.053641	-2.8236	0.004749			
	$\alpha_1 = -0.091338$	0.007828	-11.6688	0.000000			
	$\beta_1 = 0.792021$	0.002724	290.7629	0.000000			
	$\beta_2 = 0.190788$	0.002711	70.3724	0.000000			
	$\gamma_1 = 0.206965$	0.028092	7.3675	0.000000			
<i>ARMA(0,1)EGARCH(2,1)</i>	$\zeta = 0.000484$	0.000124	3.9093	0.000093	-6.0148	-6.0062	-6.0119
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.115619$	0.011834	9.7697	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = -0.114413$	0.014221	-8.0455	0.000000			
	$\alpha_1 = -0.115187$	0.019359	-5.9502	0.000000			
	$\alpha_2 = 0.043354$	0.019909	2.1776	0.029434			
	$\beta_1 = 0.987013$	0.001665	592.7854	0.000000			
	$\gamma_1 = 0.210345$	0.039501	5.3250	0.000000			
	$\gamma_2 = -0.043731$	0.030347	-1.4410	0.149575			
<i>ARMA(0,1)EGARCH(2,2)</i>	$\zeta = 0.000487$	0.000115	4.2382	2.3e-05	-6.0140	-6.0045	-6.0107
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.116272$	0.011361	10.2341	0.0e+00			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = -0.232026$	0.055165	-4.2060	2.6e-05			
	$\alpha_1 = -0.072330$	0.014180	-5.1007	0.0e+00			
	$\alpha_2 = -0.064935$	0.015004	-4.3277	1.5e-05			
	$\beta_1 = 0.247345$	0.006198	39.9099	0.0e+00			
	$\beta_2 = 0.726323$	0.007246	100.2393	0.0e+00			
	$\gamma_1 = 0.209902$	0.023211	9.0430	0.0e+00			
	$\gamma_2 = 0.096729$	0.024302	3.9803	6.9e-05			

Tabla 3-8: Resultados de la estimación de los modelos ARMA-EGARCH por máxima verosimilitud.

ARMA(0,1)EGARCH(1,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)EGARCH(1,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	2.3234	0.02019	Sesgo de signo negativo	1.5496	0.1213
Sesgo de signo positivo	0.7252	0.46835	Sesgo de signo positivo	0.9151	0.3602
Efecto conjunto	9.7126	0.02117	Efecto conjunto	5.5031	0.1385
ARMA(0,1)EGARCH(2,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)EGARCH(2,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	1.0896	0.2759	Sesgo de signo negativo	1.811232	0.07015
Sesgo de signo positivo	0.5903	0.5550	Sesgo de signo positivo	1.233364	0.21748
Efecto conjunto	2.0300	0.5662	Efecto conjunto	9.101375	0.02797

Tabla 3-9: Prueba de sesgo de signo en los modelos ARMA-EGARCH

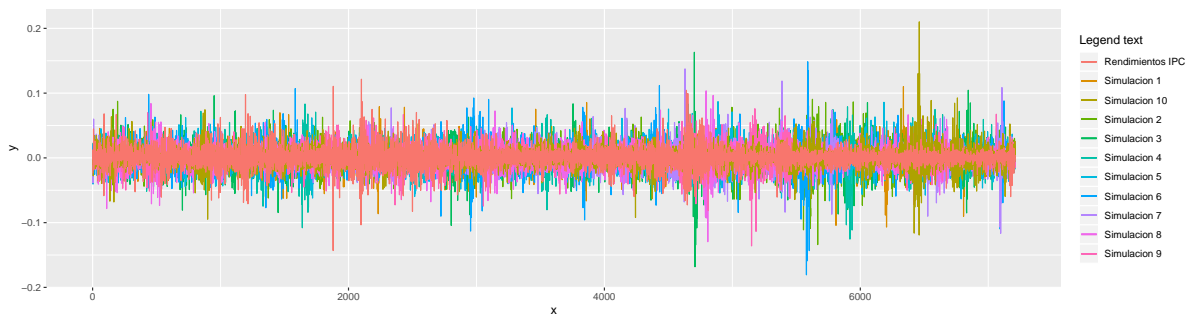


Figura 3-9: 10 simulaciones del proceso  $ARMA(0,1) - EGARCH(1,1)$  más la serie en rendimientos logarítmicos.

### 3.5.5. Calibración del modelo ARMA-TGARCH

En la tabla [3-6] se muestran los parámetros obtenidos para los distintos modelos  $TGARCH$  estimados, así mismo se muestran los criterios de selección  $AIC$ ,  $BIC$  y  $HQC$ , utilizados como sugerencia en la selección del modelo.

El criterio de selección  $AIC$  sugiere utilizar un modelo  $ARMA(0,1)-TGARCH(2,1)$ , por su parte, el criterio  $BIC$  sugiere el modelo  $ARMA(0,1)-TGARCH(1,1)$ . No podemos seleccionar el modelo mediante el criterio  $HQC$  pues este es indiferente entre seleccionar los modelos seleccionados por los criterios  $AIC$  y  $BIC$ , de este modo, conviene mirar la prueba de sesgo de signo, para seleccionar el modelo que capture de manera más eficiente el efecto de apalancamiento; en

este sentido, se selecciona el modelo ARMA(0,1)-TGARCH(2,1).

Modelo	Coefficientes	E. Estándar	t-value	p-value	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>HQC</i>
<i>ARMA</i> (0,1) <i>TGARCH</i> (1,1)	$\zeta = 0.000563$	0.000131	4.2916	0.000018	-6.0123	-6.0056	-6.0100
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.117712$	0.012042	9.7751	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000002	1.3188	0.187238			
	$\alpha_1 = 0.040757$	0.009495	4.2924	0.000018			
	$\beta_1 = 0.900117$	0.018902	47.6214	0.000000			
	$\gamma_1 = 0.107298$	0.013168	8.1481	0.000000			
<i>ARMA</i> (0,1) <i>EGARCH</i> (1,2)	$\zeta = 0.000565$	0.000131	4.3063	0.000017	-6.0123	-6.0046	-6.0097
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.117537$	0.012205	9.6303	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	2.5020	0.012350			
	$\alpha_1 = 0.047354$	0.004237	11.1752	0.000000			
	$\beta_1 = 0.688994$	0.039728	17.3428	0.000000			
	$\beta_2 = 0.195818$	0.029947	6.5389	0.000000			
	$\gamma_1 = 0.122803$	0.006971	17.6169	0.000000			
<i>ARMA</i> (0,1) <i>TGARCH</i> (2,1)	$\zeta = 0.000566$	0.000131	4.31274	0.000016	-6.0129	-6.0043	-6.0100
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.117758$	0.012150	9.69213	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000001	2.69488	0.007041			
	$\alpha_1 = 0.022690$	0.016142	1.40563	0.159834			
	$\alpha_2 = 0.015040$	0.015622	0.96279	0.335651			
	$\beta_1 = 0.912378$	0.008317	109.70674	0.000000			
	$\gamma_1 = 0.184356$	0.030545	6.03547	0.000000			
	$\gamma_2 = -0.093523$	0.029434	-3.17737	0.001486			
<i>ARMA</i> (0,1) <i>TGARCH</i> (2,2)	$\zeta = 0.000565$	0.000131	4.307715	0.000016	-6.0127	-6.0031	-6.0094
(ecuación de la media)	$\theta_1 = 0.117628$	0.012153	9.678697	0.000000			
(ecuación de la varianza)	$\alpha_0 = 0.000002$	0.000000	4.127452	0.000037			
	$\alpha_1 = 0.022899$	0.016187	1.414633	0.157176			
	$\alpha_2 = 0.014784$	0.015791	0.936202	0.349169			
	$\beta_1 = 0.912454$	0.002972	307.054799	0.000000			
	$\beta_2 = 0.000006$	0.003907	0.001638	0.998693			
	$\gamma_1 = 0.184187$	0.030549	6.029288	0.000000			
	$\gamma_2 = -0.093454$	0.029738	-3.142638	0.001674			

Tabla 3-10: Estimación de los modelos ARMA-TGARCH aplicado a los rendimientos logarítmicos del IPC.

ARMA(0,1)TGARCH(1,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)TGARCH(1,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	1.3994	0.16174	Sesgo de signo negativo	0.8629	0.3882
Sesgo de signo positivo	1.1853	0.23593	Sesgo de signo positivo	1.3374	0.1811
Efecto conjunto	9.8010	0.02034	Efecto conjunto	7.6262	0.0544
ARMA(0,1)TGARCH(2,1)	t-value	p-value	ARMA(0,1)TGARCH(2,2)	t-value	p-value
Sesgo de signo negativo	0.1222	0.9027	Sesgo de signo negativo	0.1193	0.9050
Sesgo de signo positivo	0.5678	0.5702	Sesgo de signo positivo	0.5759	0.5647
Efecto conjunto	1.6651	0.6447	Efecto conjunto	1.6793	0.6415

Tabla 3-11: Prueba de sesgo de signo en los modelos ARMA-TGARCH

En la figura [3-10] se muestra la simulación del modelo seleccionado; puede observarse que las 10 simulaciones realizadas se replican de manera muy aproximada la dinámica real del IPC en rendimientos logarítmicos.



Figura 3-10: 10 simulaciones del proceso  $ARMA(0,1) - TGARCH(2,1)$  más la serie en rendimientos logarítmicos.

### 3.5.6. Calibración del modelo RSGARCH

En la tabla [3-6] se muestran los parámetros obtenidos para los distintos modelos  $RS - GARCH$  estimados, así mismo se muestran los criterios de selección  $AIC$ ,  $BIC$  y  $HQC$ , utilizados como sugerencia en la selección del modelo<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Cabe señalar que debido a que el número de parámetros se multiplica conforme el número de regímenes incrementa, se optó por estimar solo los modelos de dos y tres regímenes, con el fin de apegarse al principio de



Modelo	Coefficientes	E. Estándar	t-value	p-value	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	<i>HQ</i>
<i>RS(2)GARCH(1,1)</i>	$\alpha_{0,1} = 0.0000$	0	5.000005e+07	<1e-16	-43133.2119	-43064.381	-43098.4
	$\alpha_{1,1} = 0.0224$	0	2.980547e+20	<1e-16			
	$\beta_1 = 0.9723$	0	6.865940e+22	<1e-1			
	$\mathbb{P}_{1,1} = 0.9465$	0	1.724398e+22	<1e-1			
	$\alpha_{0,2} = 0.0000$	0	4.140486e+20	<1e-1			
	$\alpha_{1,2} = 0.1798$	0	7.188213e+20	<1e-16			
	$\beta_2 = 0.8068$	0	2.080754e+22	<1e-1			
	$\mathbb{P}_{2,1} = 0.0666$	0	4.695616e+21	<1e-16			
<i>RS(3)GARCH(1,1)</i>	$\alpha_{0,1} = 0.0000$	0.0000	1.379400e+00	8.389e-02	-43132.2552	-43008.3596	-43042.34
	$\alpha_{1,1} = 0.0167$	0.0199	8.413000e-01	2.001e-01			
	$\beta_1 = 0.9107$	0.0461	1.974510e+01	<1e-16			
	$\mathbb{P}_{1,1} = 0.7096$	0.1492	4.756400e+00	9.853e-07			
	$\mathbb{P}_{1,2} = 0.0017$	0.2008	8.400000e-03	4.966e-01			
	$\alpha_{0,2} = 0.0000$	0.0000	3.274200e+00	5.299e-04			
	$\alpha_{1,2} = 0.0787$	0.0607	1.296100e+00	9.747e-02			
	$\beta_2 = 0.9167$	0.0039	2.368385e+02	<1e-16			
	$\mathbb{P}_{2,1} = 0.0005$	0.0013	4.085000e-01	3.414e-01			
	$\mathbb{P}_{2,2} = 0.9995$	0.0000	5.488189e+08	<1e-16			
	$\alpha_{0,3} = 0.0000$	0.0000	1.738500e+00	4.107e-02			
	$\alpha_{1,3} = 0.2031$	0.1657	0.225200e+00	1.103e-01			
	$\beta_3 = 0.7864$	0.0107	7.339910e+01	<1e-16			
	$\mathbb{P}_{3,1} = 0.2699$	0.2062	1.309000e+00	9.527e-02			
	$\mathbb{P}_{3,2} = 0.0000$	0.0010	0.000000e+00	5.000e-01			

Tabla 3-12: Modelo RSGARCH - Resultados de estimación por Máxima Verosimilitud.

El modelo seleccionado es el  $RS(2) - GARCH(1,1)$  pues los tres criterios así lo sugieren, además la prueba de Ljung-Box sobre los residuos estandarizados al cuadrado, muestra que los residuos no se encuentran autocorrelacionados a partir del segundo rezago.

En la figura [3-11] se muestra la simulación del modelo  $RS(2)$ - $GARCH(1,1)$ . Puede observar-se parsimonia, además, de acuerdo a lo observado en [Santomil *et al.*, 2011]; [Otero *et al.*, 2012] y [Bauwens *et al.*, 2010], el proceso  $RS(2)GARCH(1,1)$  suele presentar un buen ajuste y no resulta necesario estimar modelos de ordenes elevados.

varse que replica de manera muy precisa la dinámica real de la serie en las 10 simulaciones realizadas.

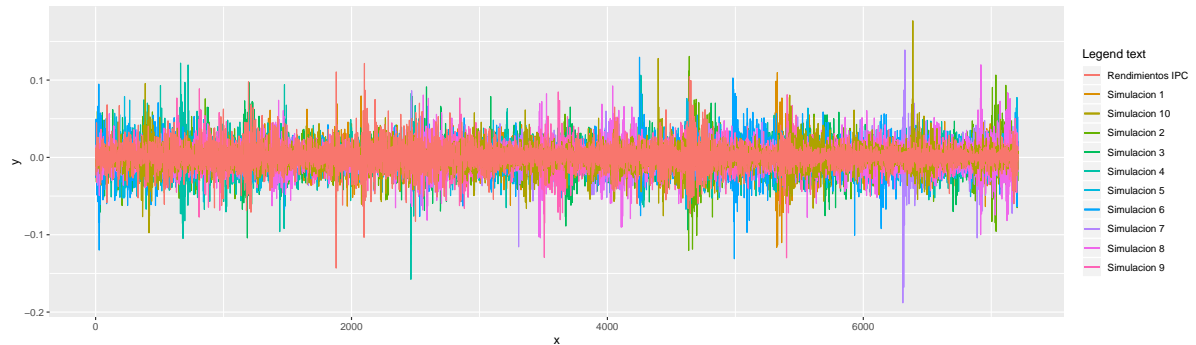


Figura 3-11: Fuente: Elaboración propia - 10 simulaciones del proceso  $RS(2)GARCH(1,2)$  y la serie en rendimientos logarítmicos.

### 3.5.7. Ajuste de los residuos estandarizados

Santomil *et al.* [2011] menciona que los modelos  $GARCH$  consideran los datos atípicos como outliers, mismos que “desde el punto de vista de la gestión del riesgo tienen un significado crucial ya que determinan en gran medida las máximas pérdidas a las que está expuesta la compañía. Por lo tanto, se debe evaluar en qué medida los residuos superan el test de normalidad, especialmente en la cola izquierda de la distribución”. Cabe señalar que debido a que los modelos estimados en este trabajo siguen innovaciones  $t - student$  y no innovaciones normales, se debe evaluar el ajuste con respecto a la distribución teórica  $t - student$  y no a la distribución normal.

En la figura [3-12] se muestran las gráficas de cuantiles y su ajuste a la distribución teórica  $t - student$  para los modelos  $ARMA(0,1) - GARCH(1,1)$ ,  $ARMA(0,1) - GARCH - M(1,1)$ ,  $ARMA(0,1) - EGARCH(1,1)$ ,  $ARMA(0,1) - TGARCH(2,1)$  y  $RS(2)GARCH(1,1)$  respectivamente. Puede observarse que el modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  muestra el mejor ajuste, sobre todo en la cola izquierda de la distribución, lo cual implica que los valores extremos negati-

vos están capturados de manera adecuada bajo este modelo. Así mismo, en la imagen [3-13] se muestra el histograma de los residuales estandarizados y su comparación con la función de densidad de la distribución teórica  $t$  - student. Nuevamente puede observarse un mejor ajuste del modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  en comparación con el resto de modelos.

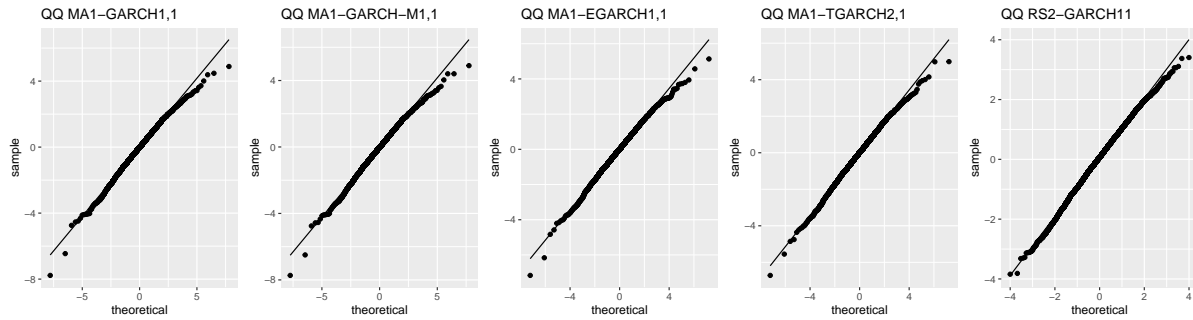


Figura 3-12: Fuente: Elaboración propia - Gráfica cuantiles-cuatiles (ajuste a la distribución teórica  $t$ -student).

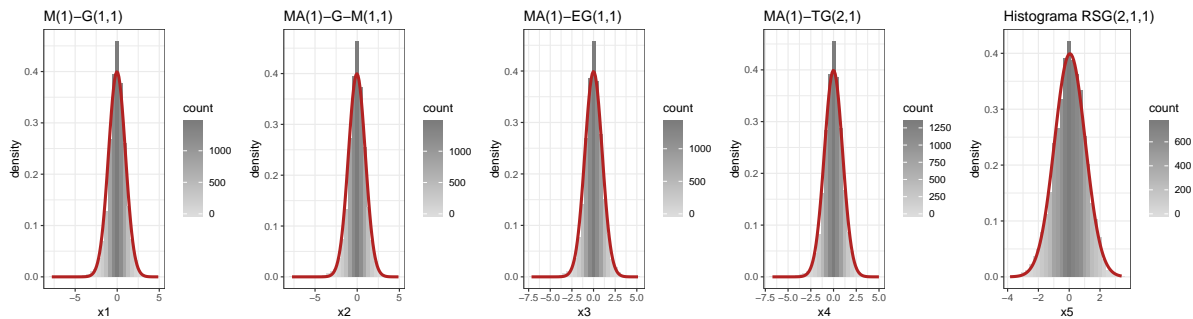


Figura 3-13: Fuente: Elaboración propia - Histogramas y su comparación con la función de densidad de la distribución teórica correspondiente a cada modelo.

En la figura [3-14] se muestran las gráficas de probabilidades residuales y su ajuste a la distribución normal para los modelos con innovaciones gaussianas. Es evidente que el modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  es el que muestra un mejor ajuste con respecto al resto de modelos, sin embargo, puede observarse que no logra capturar algunos datos atípicos de la cola izquierda. En la figura [3-15] se muestra el histograma de los residuales estandarizados de los modelos con innovaciones gaussianas y su comparación con la función de densidad de la distribución normal. Nuevamente puede observarse que el mejor ajuste lo muestra el modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  en comparación con el resto de modelos.

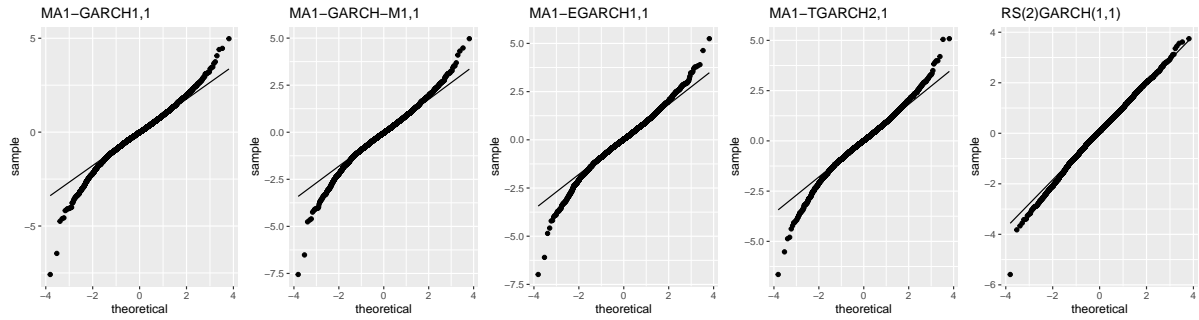


Figura 3-14: Fuente: Elaboración propia - Gráfica cuantiles-cuatiles (ajuste a la distribución normal).

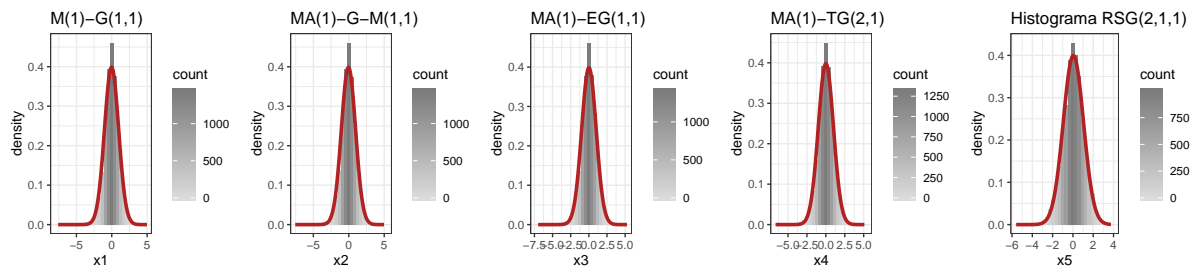


Figura 3-15: Fuente: Elaboración propia - Histogramas y su comparación con la función de densidad de la distribución normal.

### 3.6. Valor en Riesgo de los modelos seleccionados.

Los modelos que se han calibrado tienen la finalidad de captar la volatilidad de la serie IPC, para que a partir de ello pueda analizarse el riesgo asumido por las compañías aseguradoras a la hora de hacer inversiones en carteras de renta variable en el mercado accionario mexicano. Jorion *et al.* [2007] define al VaR como “la peor pérdida en un horizonte objetivo, de manera que existe una probabilidad baja y preespecificada de que la pérdida real sea mayor”; así mismo menciona que la estimación del  $VaR$  de las inversiones puede realizarse de dos formas. Una es mediante la modelación de la distribución de los rendimientos o capturando el proceso de volatilidad asociado a la serie de rendimientos.

Matemáticamente el VaR representa el nivel de pérdida en un horizonte de tiempo, tal que hay una probabilidad  $p$  de que sean iguales o mayores que la pérdida estimada.

$$VaR_p(Y) = \mathbb{P}(Y \geq \hat{Y}) = p$$

En los modelos paramétricos, los cuantiles son funciones directas de la varianza, y por lo tanto, los modelos  $GARCH$  presentan una medida dinámica del VaR definida como:

$$VaR_{t+1}^p(r) = \mu + \sigma_{t+1} F_p^{-1}(z)$$

donde  $VaR_{t+1}^p(r)$  representa la máxima pérdida probable para el periodo  $t + 1$  a un nivel de confianza definido <sup>6</sup>,  $\mu$  es la media de la serie,  $\sigma_{t+1}$  es la varianza (volatilidad) en el periodo  $t + 1$ , y  $F_p^{-1}(z)$  es el valor crítico de la función de densidad probabilística inversa correspondiente al nivel de confianza establecido.

En la tabla [3-8] se muestra el resultado de la estimación del VaR para los modelos selec-

---

<sup>6</sup>para este trabajo se usará un nivel de confianza del 99.5%, debido a que es la equivalencia a la fórmula estándar exigida en la CUSF.)

cionados además del VaR asociado al modelo normal por ser la hipótesis base con la que se trabaja en la formula general del *SCR*.

innovaciones t	<i>NORMAL</i>	<i>MA(1)GARCH(1,1)</i>	<i>MA(1)GARCH – M(1,1)</i>	<i>MA(1)EGARCH(1,1)</i>	<i>MA(1)TGARCH(2,1)</i>	<i>RS(2)GARCH(1,1)</i>
VaR(99.5 %)	-0.02153869	-0.01992522	-0.01957371	-0.01961492	-0.02099736	-0.02403225
VaR(99.5 %) anualizado	-34.1237 %	-31.56749 %	-31.07588 %	-31.9124 %	-32.6607 %	<b>-38.07424 %</b>
Kupiec (p-value)	0.690	0.22	0.337	0.164	0.897	0.163
Christoffersen (p-value)	0.423	0.35	0.63	0.343	0.919	0.8095
innovaciones gaussianas	<i>NORMAL</i>	<i>MA(1)GARCH(1,1)</i>	<i>MA(1)GARCH – M(1,1)</i>	<i>MA(1)EGARCH(1,1)</i>	<i>MA(1)TGARCH(2,1)</i>	<i>RS(2)GARCH(1,1)</i>
VaR(99.5 %)	-0.02153869	-0.01918209	-0.01893084	-0.01895381	-0.0205369	-0.02235902
VaR(99.5 %) anualizado	-34.1237 %	-30.39015 %	-29.99209 %	-30.02848 %	-32.53657 %	<b>-35.42335 %</b>
Kupiec (p-value)	0.690	0.06	0.06	0.0602	0.164	0.00901
Christoffersen (p-value)	0.148	0.148	0.14801	0.343	0.919	0.004

Tabla 3-13: Valor en Riesgo de los modelos seleccionados y su comparacion con modelos de innovaciones gaussianas.

De la tabla anterior puede observarse que con respecto a las cargas de capital, todos los modelos con innovaciones t-student superan a sus símiles con innovaciones gaussianas. Por otro lado, la consistencia de los modelos es adecuada de acuerdo a los test de Kupiec y Christoffersen (Véase Apéndice B), con excepción al modelo *RS(2)GARCH(1,1)* con innovaciones gaussianas. Paralelamente puede apreciarse que todos los modelos muestran cargas de capital menores en comparación con el modelo *RS(2)GARCH(1,1)* con innovaciones t-student, por lo tanto, este modelo podría utilizarse como un modelo interno confiable para la determinación del SCR por riesgo accionario, primero por la capacidad que tiene el modelo para replicar de manera muy aproximada la dinámica de la serie, y segundo, por la consistencia para el cálculo del VaR a un nivel de confianza (99.5 %), que es la equivalencia al modelo normal exigida por la CNSF.

Tomando como supuesto que el modelo *RS(2)GARCH(1,1)* de innovaciones t-student refleja de manera más realista la dinámica del mercado accionario mexicano, en la Tabla [3-9] se muestra el porcentaje de capital subestimado de los modelos seleccionados y el modelo estándar con respecto al *VaR(99.5 %) – RS(2)GARCH(1,1)* de innovaciones t-student. Puede apreciarse que las compañías que utilicen el modelo estándar o tengan una mala especificación en sus

modelos internos estarían subestimando en promedio el 15% del riesgo accionario asumido, lo cual podría poner en riesgo la solvencia de las compañías en caso de darse un evento catastrófico o extremo en la BMV.

Modelo	VaR(99.5%)	Porcentaje subestimado	Diferencia puntos porcentuales
<i>NORMAL</i>	-34.1237%	-10.37589%	-3.95054%
std- <i>MA(1)GARCH(1,1)</i>	-31.56749%	-17.08964%	-6.50675%
std- <i>MA(1)GARCH - M(1,1)</i>	-31.07588%	-18.38083%	-6.99836%
std- <i>MA(1)EGARCH(1,1)</i>	-31.9124%	-16.18375%	-6.16184%
std- <i>MA(1)TGARCH(2,1)</i>	-32.6607%	-14.21838%	-5.41354%
norm- <i>MA(1)GARCH(1,1)</i>	-30.39015%	-20.18186%	-7.68409%
norm- <i>MA(1)GARCH - M(1,1)</i>	-29.99209%	-21.22734%	-8.08215%
norm- <i>MA(1)EGARCH(1,1)</i>	-30.02848%	-21.13177%	-8.04576%
norm- <i>MA(1)TGARCH(2,1)</i>	-32.53657%	-14.5444%	-5.53767%
norm- <i>RS(2)GARCH(1,1)</i>	-35.42335%	-6.962424%	-2.65089%

Tabla 3-14: Diferencias con respecto al std-VaR-RS(2)GARCH(1,1)

## Capítulo 4

# Conclusiones y trabajos futuros

Tal como se mencionó en la introducción de este trabajo, el supuesto de normalidad implícito en la formula estándar del SCR por riesgo técnicos y financieros ha sido elegido por la CNSF por razones de simplicidad en los cálculos, por la facilidad de interpretación de los resultados, por ser un modelo que permite comparar a las compañías de manera sencilla, y, finalmente, porque su implementación representa un gasto tecnológico y financiero pequeño en comparación con otros modelos, sin embargo, es evidente que el supuesto de normalidad no se apega al comportamiento del mercado accionario mexicano, pues los eventos catastróficos hacen que las distribuciones presenten más peso en las colas y generan clusters de alta volatilidad. Una alternativa para subsanar en cierta medida esta problemática, es la utilización de modelos heterocedásticos con innovaciones  $t - student$ , pues en virtud de sus características, los eventos extremos y la volatilidad de la serie, pueden capturarse de manera eficiente.

La utilización de modelos más sencillos como el modelo estándar de CNSF o modelos mal especificados, como en este caso, los modelos GARCH con innovaciones gaussianas, podrían dar lugar a una subestimación del riesgo. De esta manera, las compañías aseguradoras que



opten por el modelo estándar o asuman hipótesis de normalidad en los rendimientos de las carteras invertidas en instrumentos de la BMV, podrían estar subestimando el riesgo accionario asumido, sobre todo, en periodos de alta volatilidad. Este trabajo presenta una alternativa que podría utilizarse para la identificación de un modelo interno que refleje de manera más eficiente el riesgo accionario asumido.

De acuerdo a lo observado en el análisis del ajuste de los modelos, es evidente que los modelos con innovaciones t-student son mas eficientes al momento de capturar los outliers de la serie, sobre todo, aquellos de la cola izquierda de la distribución (referentes a pérdidas potenciales). Esto hace que los modelos que siguen innovaciones t-student, reflejen un perfil de riesgo accionario más realista en comparación con los modelos que siguen innovaciones gaussianas.

El modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  con innovaciones gaussianas presenta buen ajuste a los datos utilizados; sin embargo, no supera los test de Kupiec y Christoffersen, por lo tanto no es un modelo consistente para la estimación del VaR al nivel de confianza de 99.5 %. En el caso del modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  con innovaciones t-student, este replica de manera muy aproximada los 4 momentos de la serie, además, supera los test de consistencia de Kupiec y Christoffersen, aunado a que asigna cargas de capital mayores en comparación con los modelos seleccionados y el modelo normal. Por tanto, los resultados ponen al modelo  $VaR-RS(2)GARCH(1,1)$  con innovaciones t-student como una herramienta muy atractiva para la determinación del SCR de riesgo accionario, sobre todo para periodos de alta volatilidad, debido a la carga de capital asociada al modelo.

Las cargas de capital y el ajuste de modelos es la parte crucial de este trabajo de investigación, pues retomando la definición del SCR, este debe reflejar el nivel de capital suficiente para cubrir las pérdidas probables a un nivel de confianza y un intervalo de tiempo definido, en este sentido, con respecto al ajuste observado de los modelos y a su capacidad para capturar las choques negativos de la serie, el modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  con innovaciones t-student

muestra ser un modelo confiable y de buen ajuste, por lo tanto, es un modelo que puede reflejar de manera muy aproximada el riesgo accionario asumido.

Podría pensarse que la diferencia porcentual entre el modelo estándar y el modelo  $VaR - RS(2)GARCH(1,1)$  es mínima y que no habría un desajuste muy significativo, sin embargo, debe recordarse que las inversiones en renta variable de las compañías de seguros son en miles de millones de pesos, por ejemplo, al cierre de Diciembre de 2018, el ranking de las 5 aseguradoras más importantes<sup>1</sup>, tuvo inversiones de estas magnitudes, tal como se muestra en la tabla [4-1].

Si suponemos que las carteras de inversión correspondientes a cada compañía tienen un comportamiento similar al IPC debido a la diversificación de sus carteras, entonces es evidente que en términos monetarios sí existe una diferencia bastante pronunciada entre el modelo estándar y el modelo  $RS(2)GARCH(1,1)$  de innovaciones t-student.

Compañía	Inversión en renta variable	VaR-Normal(99.5%)	VaR(99.5%)-RS(2)GARCH(1,1)
GNP	\$971,529,894	\$331,521,946	\$369,902,624
Metlife	\$1,243,076,285.29	\$424,183,622	\$473,291,848
AXA	\$1,243,740,839.16	\$424,410,393	\$473,544,872
BBVA Bancomer	\$54,836,724,281.34	\$18,712,319,284	\$20,878,666,011
Banorte	\$1,575,716	\$537,692.6	\$599,941.9

Tabla 4-1: Cargas de capital de las inversiones en renta variable de las compañías de seguros top 5 en México.

Recordando que algunos de los objetivos de Solvencia II son garantizar en todo momento la solvencia de las compañías, brindar estabilidad al sector y confianza a los consumidores, esa diferencia porcentual del modelo RSGARCH con respecto al modelo Normal, representa de manera estricta una buena o mala medición del riesgo, y en el mismo sentido, esa diferencia

<sup>1</sup>Top de acuerdo al sitio “el asegurador”: <https://www.elasegurador.com.mx/blog/crecen-ventas-del-sector-seguros-7-96-a-junio-las-5-grandes-captan-44-22-del-primaje-total/>

podría traducirse en la solvencia o insolvencia de una compañía; de esto, se resalta la importancia de que las compañías cuenten con alternativas para evaluar de manera constante los riesgos que se están asumiendo. La importancia de tener modelos alternativos se extiende también hacia las autoridades reguladoras (en nuestro caso, la CNSF), pues con esto podría identificarse si el modelo estatutario está capturando de manera adecuada los riesgos de aquellas compañías que hayan optado por este, además, podría detectarse a aquellas compañías que pudieran estar utilizando sus modelos internos como modelos de arbitraje.

Por otro lado, es importante señalar algunas desventajas de los modelos que aquí se analizaron. Una de las desventajas observadas del modelo  $RS(k)GARCH(p, q)$  con innovaciones t-student e innovaciones gaussianas es que el número de parámetros asciende paralelamente al número de regímenes  $k$ , esto hace que la estimación del modelo sea cada vez más complicada conforme  $k$  incrementa. En el mismo sentido, el costo computacional es elevado en comparación con el resto de modelos aquí presentados, e inclusive hay problemas de convergencia para ordenes elevados; sin embargo, de acuerdo a lo observado en Otero *et al.* [2012], Santomil *et al.* [2011], Porcel [2017] y en este trabajo, el modelo  $RS(2)GARCH(1, 1)$  se ajusta de manera muy eficiente a series financieras mensuales y diarias.

Los modelos  $EGARCH$  y  $TGARCH$  con innovaciones t-student replican de muy buena manera la dinámica real de la serie y, de acuerdo a la prueba de sesgo de signo y magnitud, logran capturar de manera muy eficiente el efecto de apalancamiento; sin embargo, tienen la desventaja de asignar cargas de capital menores en comparación al modelo VaR-normal. Esto convierte a ambos modelos en herramientas que reflejan un perfil de riesgo más realista, adecuados para brindar una idea del riesgo asumido, pero presentaron para esta serie de tiempo, la desventaja de no ser tan potentes para capturar los outliers referentes a la izquierda de la distribución, por lo tanto, para los datos utilizados no son modelos adecuados para la determinación del SCR por riesgo accionario.

Es poco factible realizar una comparación justa de los resultados que aquí se han obtenido con respecto a otros trabajos, pues en el caso del SCR por riesgo accionario en México, solo existe el trabajo de Vilchis [2013], sin embargo, este fue realizado cuando aún no se definía por completo la adaptación de Solvencia II en México, además de que la modelación del riesgo se lleva a cabo con una metodología y datos completamente diferentes.

Existen trabajos aplicados a Solvencia II con metodologías parecidas pero aplicados a índices del sector europeo, como son los trabajos de Santomil *et al.* [2011], Otero *et al.* [2012] y Porcel [2017], en donde los resultados son consistentes con los que aquí se han encontrado; el modelo RSGARCH(1,1) es un modelo adecuado para la determinación del SCR por riesgo accionario, sin embargo, los modelos que en estos trabajos se prueban siguen innovaciones gaussianas, y con base en los resultados que en este trabajo se han obtenido, estos modelos no fueron eficientes para capturar la dinámica del IPC, en especial la referente a la cola izquierda de la distribución.

Por último, aunque son trabajos que se han aplicado a normativas diferentes, los resultados que aquí se han obtenido refuerzan el trabajo de Espinosa [2016]; en este sentido, esta es la comparación más justa, pues la frecuencia de datos utilizados (aunque no así el periodo) y la variable modelada, son las mismas. De este modo, en ambos trabajos se ha encontrado que los modelos GARCH con innovaciones t-student son más eficientes para el cálculo del VaR a distintos niveles de confianza, si se les compara con los modelos que siguen innovaciones gaussianas.

Debido a su buena flexibilidad al momento de utilizar distribuciones con más o menos peso en las colas, la utilización de distribuciones elípticas es una herramienta en crecimiento exponencial, y es una de las ramas de la estadística más prometedoras, pues permite elegir, diseñar e inclusive hacer mixturas de distribuciones de acuerdo al experimento. En este sentido, este trabajo muestra un avance significativo con respecto a la bibliografía revisada, en donde se utilizaron los modelos GARCH tradicionales (con innovaciones gaussianas); aquí en cambio,

se propone el uso de la distribución t-student para las innovaciones de los modelos GARCH, con lo cual se encuentran mejores resultados en todos los casos con respecto a los modelos con innovaciones gaussianas.

### **Trabajos Futuros:**

Este trabajo puede extenderse en diferentes vertientes, primero, hacia más submódulos del SCR como el riesgo de tipo de cambio o el riesgo de tasa de interés; por ejemplo, tomando el caso particular del riesgo de tasa de interés, existen diversos trabajos aplicados a la regulación mexicana en donde se utiliza el modelo de Vasicek, sin embargo, este modelo ha sido criticado debido a que no logra explicar completamente la evolución de la tasas (sobre todo en el corto plazo) y es incapaz de describir completamente la estructura de volatilidad observada, por lo que podría hacerse una comparación interesante entre el modelo Vasicek y un modelo *GARCH* asimétrico o un modelo *GARCH* con cambio de régimen.

Otra una posible extensión a este trabajo podría ser la comparación del modelo *RS – GARCH* con respecto a un modelo *RS – GARCH* asimétrico como el modelo *RS – EGARCH* o el *RS – TGARCH*, y en el mismo sentido podría hacerse una comparación con modelos *GARCH* multivariados como el modelo BEKK o el VARXGARCH, en donde pueda evaluarse el impacto de los choques del mercado accionario norteamericano sobre el mercado accionario mexicano.

Finalmente, en estudios recientes se ha evidenciado que ignorar los quiebres estructurales de una serie podría dar lugar a un pronostico menos preciso, así como rechazar la hipótesis de estacionariedad; por lo tanto, otra extensión a este trabajo podría ser la búsqueda de quiebres estructurales y outliers, modelarlos a través de una variable ficticia (dummy) e insertarla como variable regresora en los modelos *GARCH*, *GARCH – M*, *EGARCH* y *TGARCH*; esto con

la finalidad de comparar la capacidad predictiva frente a los modelos *RSGARCH*.

## Apéndice A

# Apéndice A: Códigos de programación en R

Aquí se presenta el código referente a la calibración de los modelos. Este código y los códigos referentes al calculo del VaR, la generación de gráficos y la simulación de modelos se encuentran como archivos descargables en:

<https://github.com/WichoSalas/Codigos-Tesis>

```
#####Estimacion de modelos univariados con "rugarch" y "MSGARCH" #####
```

```
rm(list=ls()) #Borra variables y datos almacenados en la memoria
```

```
ls()
```

```
library(forecast)
```

```

library(rugarch)
library(MSGARCH)

-----

###Acceder a datos (IPC diario)###

bd=read.csv(file.choose(), header=T)
attach(bd)
summary(bd)

dlipc=diff(log(DATOS)) #Rendimiento logaritmico del IPC

-----

#####auto.arima para selección del modelo ARMA optimo#####3###

mod.arma=auto.arima(dlipc, max.p=12, max.q=12, max.P=12, max.Q=12,
max.d=1, max.D=1, start.p=2, start.q=2, start.P=1,
start.Q=1,stationary=FALSE , seasonal=TRUE, ic=c("bic"),stepwise=T, test=c("kpss"),
seasonal.test=c("ocsb"))

mod.arma

#####rugarch#####

#####GARCH(p,q)#####

###GARCH(1,1)###

```



```
spec1=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit1=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec1)
```

```
fit1
```

```
###GARCH(1,2)###
```

```
spec2=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(1, 2)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit2=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec2)
```

```
fit2
```

```
###GARCH(2,1)###
```

```
spec3=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(2, 1)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit3=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec3)
```

```
fit3
```

```
###GARCH(2,2)###
```

```
spec4=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(2, 2)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit4=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec4)
```

```
fit4
```

```
-----  
#####GARCH-M(p,q)#####
```

```
###GARCH-M(1,1)###
```

```
spec5=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),  
mean.model=list(armaOrder=c(0,1), archm=TRUE), distribution.model="std")
```

```
fit5=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec5)
```

```
fit5
```

```
###GARCH-M(1,2)###
```

```
spec6=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(1, 2)),  
mean.model=list(armaOrder=c(0,1), archm=TRUE), distribution.model="std")
```

```
fit6=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec6)
```

```
fit6
```

```
###GARCH-M(2,1)###
```

```
spec7=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(2, 1)),  
mean.model=list(armaOrder=c(0,1), archm=TRUE), distribution.model="std")
```

```
fit7=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec7)
```

```
fit7
```

```
###GARCH-M(2,2)###
```

```
spec8=ugarchspec(variance.model=list(model="sGARCH", garchOrder = c(2, 2)),
```

```
mean.model=list(armaOrder=c(0,1),archm=TRUE), distribution.model="std")
```

```
fit8=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec8)
```

```
fit8
```

```
-----
```

```
#####EGARCH(p,q)#####
```

```
###EGARCH(1,1)###
```

```
spec9=ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
```

```
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit9=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec9)
```

```
fit9
```

```
###EGARCH(1,2)###
```

```
spec10=ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH", garchOrder = c(1, 2)),
```

```
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit10=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec10)
```

```
fit10
```

```
###EGARCH(2,1)###
```

```
spec11=ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH", garchOrder = c(2, 1)),
```

```
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit11=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec11)
```

```
fit11
```

```
###EGARCH(2,2)###
```

```
spec12=ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH", garchOrder = c(2, 2)),
```

```
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit12=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec12)
```

```
fit12
```

```
-----
```

```
#####TGARCH(p,q)#####
```

```
###TGARCH(1,1)###
```

```
spec13=ugarchspec(variance.model=list(model="gjrGARCH", garchOrder = c(1, 1)),
```

```
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit13=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec13)
```

fit13

###TGARCH(2,1###

```
spec14=ugarchspec(variance.model=list(model="gjrGARCH", garchOrder = c(2, 1)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit14=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec14)
```

fit14

###TGARCH(1,2)###

```
spec15=ugarchspec(variance.model=list(model="gjrGARCH", garchOrder = c(1, 2)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit15=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec15)
```

fit15

###TGARCH(2,2)###

```
spec16=ugarchspec(variance.model=list(model="gjrGARCH", garchOrder = c(2, 2)),
mean.model=list(armaOrder=c(0,1)), distribution.model="std")
```

```
fit16=ugarchfit(data=dlipc,spec=spec16)
```

fit16

-----

```
#####RS(k)GARCH(1,1)#####
```

```
###RS(2)GARCH(1,1)###
```

```
spec17=CreateSpec(variance.spec = list(model = c("sGARCH")),  
distribution.spec = list(distribution = c("std")),  
switch.spec = list(do.mix = FALSE, K = 2))
```

```
fit17=FitML(spec = spec17, data = dlipc)  
fit17
```

```
###RS(3)GARCH(1,1)###
```

```
.  
spec18=CreateSpec(variance.spec = list(model = c("sGARCH")),  
distribution.spec = list(distribution = c("std")),  
switch.spec = list(do.mix = FALSE, K = 3))
```

```
fit18=FitML(spec = spec18, data = dlipc)  
fit18
```

## Apéndice B

# Apéndice B: Conceptos adicionales de probabilidad y estadística.

### B.1. Prueba Individual de la FAC

Para un número entero positivo  $h$ , puede probarse  $H_0 : \hat{\rho} = 0$  frente a  $H_a : \hat{\rho} \neq 0$  mediante la siguiente prueba estadística:

$$t = \frac{\hat{\rho}_h}{\sqrt{(1 + 2 \sum_{i=1}^{h-1} \hat{\rho}_i^2)/T}}$$

Si  $\{x_t\}$  es estacionario, entonces satisface que  $\rho_j = 0$  para  $j > h$  la prueba  $t$  es asintóticamente distribuida como una variable aleatoria normal estándar. Por lo tanto, la regla de decisión para rechazar  $H_0$  es que  $|t| > \mathcal{Z}_{\alpha/2}$  donde  $\mathcal{Z}_{\alpha/2}$  es el percentil  $100(1 - \alpha/2)$  de la distribución normal.

## B.2. Prueba Portmanteau y Ljung-Box

Las aplicaciones financieras a menudo requieren probar de manera conjunta que varias autocorrelaciones de  $x_t$  son cero. Esto puede realizarse mediante la prueba estadística propuesta por Box y Pierce (1970).

$$Q^*(m) = T \sum_{h=1}^m \rho_h^2$$

Este estadístico prueba  $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$  frente a  $H_a : \rho_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Bajo el supuesto de que  $\{x_t\}$  es una secuencia de variables aleatorias i.i.d. con ciertas condiciones en los momentos.  $Q^*$  es asintóticamente una variable aleatoria chi-cuadrada con  $m$  grados de libertad.

Ljung y Box (1978) modificaron el estadístico  $Q^*$  para aumentar la potencia de la prueba en muestras finitas.

$$Q(m) = T(T-2) \sum_{h=1}^m \frac{\hat{\rho}_h^2}{T-h}$$

La regla de decisión para rechazar  $H_0$  es que  $Q(m) > \chi_\alpha^2$ , donde  $\chi_\alpha^2$  denota el percentil  $100(1 - \alpha)$  de la distribución chi-cuadrada con  $m$  grados de libertad.

## B.3. Teorema de Herman Wold

Sea  $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  una serie de tiempo estacionaria, entonces esta puede escribirse como

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i} + \mu,$$



donde  $\psi_1 = 0$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$ ,  $\epsilon_t$  es un proceso de ruido blanco y  $\mu$  es la media de la serie de tiempo.

La demostracion puede consultarse en Neusser [2015].

## B.4. Ley de los grandes números

**Ley débil de los grandes números:** Establece que si  $x_1, x_2, x_3, \dots$  es una sucesion infinita de variables aleatorias independientes que tienen el mismo valor esperado  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , entonces el promedio

$$\bar{x}_n = (x_1 + \dots + x_n)/n$$

converge en probabilidad a  $\mu$ . Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{x}_n - \mu| < \epsilon) = 1.$$

**Ley fuerte de los grandes números:** Establece que si  $x_1, x_2, x_3, \dots$  es una sucesion infinita de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas que cumplen con  $\mathbb{E}[x_i] < \infty$  y tienen el valor esperado  $\mu$ , entonces

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \mu) = 1.$$

Es decir, el promedio de las variables aleatorias converge a  $\mu$  casi seguramente (en un conjunto de probabilidad 1).

## B.5. Desigualdad de Jensen

**Definición B.5.1** *Desigualdad de Jensen:* Una función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $t \in [0, 1]$ , se tiene que

$$F((1-t)x + ty) \leq (1-t)F(x) + tF(y).$$

**Teorema B.5.1** (*Desigualdad de Jensen*). Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, sea  $F$  una función real integrable con valores en un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  y sea  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa.

Entonces

$$\rho\left(\int_{\Omega} F d\mathbb{P}\right) \leq \int_{\Omega} \rho \circ F d\mathbb{P}.$$

De lo anterior se deduce lo siguiente:

Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo,  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa y  $x$  una variable aleatoria acotada.

Entonces

$$\rho(\mathbb{E}[x]) \leq \mathbb{E}[\rho(x)]$$

## B.6. Pruebas de estacionariedad

### B.6.1. Dickey-Fuller y Dickey-Fuller Aumentada

Se probará  $H_o : \phi_1 = 1$  contra  $H_a : \phi_1 < 1$  considerando los siguientes modelos:

$$p_t = \phi_1 p_{t-1} + \varepsilon_t \quad (\text{B-1})$$

$$p_t = \phi_0 + \phi_1 p_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (\text{B-2})$$

Para hacer la prueba es conveniente utilizar una prueba individual, por ejemplo la prueba  $t$  para la estimación de  $\phi_1$  mediante mínimos cuadrados. Para (B-1), tenemos que los estimadores por mínimos cuadrados son:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T p_{t-1} p_t}{\sum_{t=1}^T p_{t-1}^2}, \quad \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (p_t - \hat{\phi}_1 p_{t-1})^2}{T-1},$$

donde  $p_0 = 0$  y  $T$  es el tamaño de la serie. Entonces la prueba  $t$  está dada por:

$$DF = t = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{std(\hat{\phi}_1)} = \frac{\sum_{t=1}^T p_{t-1} \varepsilon_t}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\sum_{t=1}^T p_{t-1}^2}}.$$

A esta prueba se le conoce como la prueba de Dickey-Fuller. Si  $\phi_0 = 0$  pero se utiliza la ecuación (B-2), entonces la prueba  $t$  resultante para probar  $\phi_1 = 1$  convergerá a una distribución asintótica no estándar, por lo que se tendrá que recurrir a métodos de simulación para conocer los valores críticos de la distribución. Si  $\phi_0 \neq 0$  y se utiliza (B-2) entonces la prueba  $t$  es asintóticamente normal, siempre que la muestra sea de tamaño grande.

Para verificar la existencia de una raíz unitaria en un proceso  $AR(p)$ , puede realizarse la prueba  $H_o : \beta = 1$  contra  $H_a : \beta < 1$ , utilizando la regresión

$$x_t = c_t + \beta x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (\text{B-3})$$

donde  $c_t$  es una función determinista del índice de tiempo  $t$  y  $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$  es la serie en diferencias de  $x_t$ . En la práctica  $c_t$  puede ser  $c_t = 0$  o  $c_t = \omega_0 + \omega_1 t$ . La prueba  $t$  para  $\beta - 1$  está dado por

$$ADF_{test} = \frac{\hat{\beta} - 1}{std(\hat{\beta})},$$

donde  $\hat{\beta}$  denota el estimador de mínimos cuadrados de  $\beta$ . Esta prueba es conocida como la prueba de Dickey-Fuller Aumentada.

### B.6.2. Prueba Phillips-Perron

En estadística y en particular en econometría, la prueba de Peter Phillips y Pierre Perron es una prueba utilizada para conocer si una serie de tiempo tiene raíz unitaria. De manera formal, se utiliza para probar la hipótesis nula de que una serie de tiempo es integrada de orden 1. Se basa en la prueba de Dickey-Fuller de que la hipótesis nula es  $\rho = 0$  en el proceso  $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$ .

Al igual que la prueba DFA, la prueba de Phillips-Perron (PPT) aborda la cuestión de que el proceso de generación de datos para  $y_t$  podría tener un orden superior de autocorrelación que es admitido en la ecuación de prueba, haciendo  $y_{t-1}$  endógeno e invalidando así DF. Mientras que la prueba DFA aborda esta cuestión mediante la introducción de retardos de la serie en diferencias como variables independientes en la ecuación de la prueba, la prueba de Phillips-Perron hace una corrección no paramétrica a la estadística t-test.

### B.6.3. Prueba Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin

En econometría, la prueba Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) se usa para probar una hipótesis nula de que una serie de tiempo observable es estacionaria alrededor de una

tendencia determinista frente a la alternativa de una raíz unitaria.

Al contrario de la mayoría de las pruebas de raíz unitaria, la presencia de una raíz unitaria no es la hipótesis nula sino la alternativa. Además, en la prueba KPSS, la ausencia de una raíz unitaria no es una prueba de estacionariedad sino, por su diseño, de tendencia-estacionariedad. Esta es una distinción importante, ya que es posible que una serie de tiempo no sea estacionaria, no tenga una raíz unitaria y, sin embargo, sea estacionaria.

Denis Kwiatkowski , Peter CB Phillips , Peter Schmidt y Yongcheol Shin (1992) propusieron una prueba de la hipótesis nula de que una serie observable es una tendencia estacionaria (estacionaria en torno a una tendencia determinista). La serie se expresa como la suma de la tendencia determinista, la caminata aleatoria y el error estacionario.

Las pruebas de tipo KPSS están destinadas a complementar las pruebas de raíz unitaria, como las pruebas DFA y PPT. Al probar tanto la hipótesis de la raíz unitaria como la hipótesis de la estacionariedad, se pueden distinguir series que parecen ser estacionarias, series que parecen tener una raíz unitaria y series para las cuales los datos (o las pruebas) no son lo suficientemente informativos para estar seguros de si Son estacionarios o integrados.

## **B.7. Pruebas de backtesting**

Las pruebas de backtesting se desarrollan para evaluar y calibrar la medición de riesgos por parte del modelo que se está usando. Este tipo de pruebas son ampliamente recomendadas por los reguladores de Basilea II/III, pues con este tipo de pruebas puede analizarse si los administradores de riesgos están midiendo el VaR de manera adecuada.

**Estadístico de Kupiec:** La prueba de proporción de fallas (POF por sus siglas en inglés) evalúa la hipótesis nula que la probabilidad de falla sea igual a  $1 - \alpha$ . Es decir, si se calcula el VaR con un nivel de confianza del 95 %, entonces  $H_0: p = 0.05$ . El número de fallos se encuentra calculado como

$$\hat{p} = \frac{\# \text{ de excepciones}}{H}$$

donde  $H$  es el número total de observaciones empleadas en la evaluación. De este modo, la hipótesis se va a evaluar mediante

$$t_v = \frac{\hat{p} - \alpha}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/H}},$$

donde  $t_v$  sigue una distribución  $t$  con  $H - 1$  grados de libertad.

**Estadístico de Christoffersen:** La prueba de pronóstico de intervalos de Christoffersen es una prueba condicional. Esta prueba no sólo cubre la tasa de violación sino también la independencia de la excepción. Si el modelo es exacto, entonces una excepción hoy no debería depender de si ocurrió o no una excepción el día anterior. La estadística de prueba para la independencia de la excepción es la relación de probabilidad:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left( \frac{(1 - \Pi)^{n_{00} + n_{10}} \Pi^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \Pi_0)^{n_{00}} \Pi_0^{n_{01}} (1 - \Pi_1)^{n_{10}} \Pi_1^{n_{11}}} \right)$$

donde  $\Pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}$ ,  $\Pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}$  y  $\Pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$ . Entonces  $n_{ij}$  se define como el número de días en que ocurrió la condición  $j$  asumiendo que la condición  $i$  ocurrió el día anterior.

## B.8. Prueba de sesgo en el signo de Engle y Ng

La prueba de sesgo en el signo examina el impacto de los choques, tanto positivos como negativos no predichos por el modelo que se evalúa.

De acuerdo con Engle y Ng, se puede efectuar una prueba conjunta para examinar ambos choques, tanto positivos como negativos, además de examinar el impacto conjunto. La prueba esta definida por:

$$\epsilon_t^2 = \alpha + \beta_1 d_{t-1}^+ + \beta_2 d_{t-1}^- \epsilon_{t-1} + \beta_3 d_{t-1}^+ \epsilon_{t-1}$$

donde  $\epsilon_t^2$  son los residuales estandarizados,  $d_t$  es una variable ficticia = 1 si  $\epsilon_t < 0$  y = 0 en cualquier otro caso. Los valores  $t$  - student  $\beta_i$  son respectivamente las pruebas de sesgo en signo, signo negativo y signo positivo.

## B.9. Distribuciones elípticas

Las distribuciones elípticas son una extensión a la clase de distribuciones normales. El desarrollo de este tipo de distribuciones está centrado en resolver casos de no normalidad, colas pesadas e inclusive bimodalidad; una de las grandes ventajas de estas distribuciones es que se mantienen dentro de una familia de distribuciones simétricas, lo cual facilita mucho su estimación y su utilización en aplicaciones estadísticas.

Para definir formalmente a las distribuciones elípticas, es necesario definir previamente a las distribuciones esféricas.

Utilizando la definicion de Fang [2018], tenemos lo siguiente: Un vector aleatorio  $x$  de di-

mensión  $nx1$  se dice que tiene una distribución esférica simétrica o simplemente distribución esférica si para todo  $\gamma \in \oplus$  se tiene que  $X =^d \gamma X$ , donde  $\oplus$  denota el conjunto de matrices ortogonales  $nxn$ . Es decir, se dice que una distribución es esférica, si esta es invariante ante rotaciones.

Ahora bien, se dice que un vector aleatorio  $x$  de dimensión  $nx1$  tiene distribución elíptica con parámetros  $\mu_{nx1}$  y  $\Sigma_{nxn}$  si  $x = \mu + Ay$  donde  $y \sim s_k(\phi)$  (sigue una distribución esférica;  $A^tA = \Sigma$  con  $\text{rango}(\Sigma) = k$ ). Una distribución elíptica se denota como  $x \sim EC(\mu, \Sigma; \phi)$

Nota: El lector interesado puede encontrar una explicación muy robusta a cerca de distribuciones elípticas en [Fang, 2018] y [Sánchez y García, 2001]



# Bibliografía

- ACUÑA, O.A.E. Ajuste de modelos GARCH Clásico y Bayesiano con innovaciones t-Student para el índice COLCAP. *Economía del Caribe* (19):1–32 (2017)
- ALBERG, D., SHALIT, H., Y YOSEF, R. Estimating stock market volatility using asymmetric GARCH models. *Applied Financial Economics* **18**(15):1201–1208 (2008)
- ARDIA, D., BLUTEAU, K., BOUDT, K., CATANIA, L., GHALANOS, A., PETERSON, B., Y TROTTIER, D.A. *Markov-Switching GARCH Models in R: The MSGARCH Package* (2018)
- ARJONA, J.C. Y BASTERRA, D.C. Solvencia II (2016)
- BAI, X., RUSSELL, J.R., Y TIAO, G.C. Kurtosis of GARCH and stochastic volatility models with non-normal innovations. *Journal of Econometrics* **114**(2):349–360 (2003)
- BAUWENS, L., PREMINGER, A., Y ROMBOUTS, J.V. Theory and inference for a Markov switching GARCH model. *The Econometrics Journal* **13**(2):218–244 (2010)
- BROOKS, C. *Introductory econometrics for finance*. Cambridge university press (2019)
- CAI, J. A Markov model of switching-regime ARCH. *Journal of Business & Economic Statistics* **12**(3):309–316 (1994)
- CAMACHO, A. Solvencia II: supervisión basada en riesgo de entidades aseguradoras en el marco de la Unión Europea (2009)

- CASTAÑER, A. Y CLARAMUNT, M.M.B. Solvencia II (2017)
- CASTEDO, P.B. Introducción a la regulación de la solvencia bancaria. *Docta Ignorancia Digital* **1**(1):6–13 (2010)
- CURTO, J.D., PINTO, J.C., Y TAVARES, G.N. Modeling stock markets' volatility using GARCH models with Normal, Student's t and stable Paretian distributions. *Statistical Papers* **50**(2):311 (2009)
- DE SOTO, J.H. El error fatal de Solvencia II. *Partida Doble* (199):92–97 (2008)
- DELOITTE. Desafíos clave en la implementación de Solvencia II (2011)
- DELOITTE. Avances en Solvencia II (2012)
- DOFF, R. A critical analysis of the Solvency II proposals. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice* **33**(2):193–206 (2008)
- ELING, M., SCHMEISER, H., Y SCHMIT, J.T. The Solvency II process: Overview and critical analysis. *Risk management and insurance review* **10**(1):69–85 (2007)
- ENDERS, W. *Applied econometric time series*. John Wiley & Sons (2015)
- ENGLE, R. GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. *Journal of economic perspectives* **15**(4):157–168 (2001)
- ENGLE, R.F., LILIEN, D.M., Y ROBINS, R.P. Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* págs. 391–407 (1987)
- ESPINOSA, A.S. *Estimación de medidas de riesgo de mercado en series financieras mexicanas: Un estudio comparativo entre procesos GARCH con innovaciones gaussianas, t-student y pareto generalizada*. Proyecto Fin de Carrera (2016)
- FANG, K.W. *Symmetric multivariate and related distributions*. Chapman and Hall/CRC (2018)

- GAO, F. Y HAN, L. Implementing the Nelder-Mead simplex algorithm with adaptive parameters. *Computational Optimization and Applications* **51**(1):259–277 (2012)
- GATZERT, N. Y WESKER, H. A comparative assessment of Basel II/III and Solvency II. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice* **37**(3):539–570 (2012)
- GHALANOS, A. *rugarch: Univariate GARCH models*. (2019). R package version 1.4-1.
- GLOSTEN, L.R., JAGANNATHAN, R., Y RUNKLE, D.E. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance* **48**(5):1779–1801 (1993)
- GREENE, W.H. *Econometric analysis*. Pearson Education India (2018)
- HAMILTON, J.D. Y SUSMEL, R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of econometrics* **64**(1-2):307–333 (1994)
- HERRERA, F.L. Modelado de la volatilidad y pronóstico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría y Administración* (213) (2004)
- JORION, P. *et al. Financial risk manager handbook*, tomo 406. John Wiley & Sons (2007)
- KLEIN, R.W., PHILLIPS, R.D., Y SHIU, W. The capital structure of firms subject to price regulation: evidence from the insurance industry. *Journal of Financial Services Research* **21**(1-2):79–100 (2002)
- LEHMANN, E.L. Y CASELLA, G. *Theory of point estimation*. Springer Science & Business Media (2006)
- LÓPEZ, C.G. Y FERNÁNDEZ, J.M.F. Evolución del proceso de regulación bancaria hasta Basilea-2: origen, características y posibles efectos. *Pecunia: Revista de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de León* (2):23–63 (2006)

- LOZANO, I.A. Y GONZÁLEZ, P.A. *Métodos estocásticos de estimación de las provisiones técnicas en el marco de Solvencia II*. Fundación MAPFRE, Instituto de Ciencias del Seguro (2010)
- MEJÍA, S.H. *et al.* Capacidad predictiva de los modelos ARCH: una aplicación para los rendimientos del índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *eseconomía* **6**(30):3–19 (2011)
- MIKOSCH, T., STARICA, C. *et al.* Changes of structure in financial time series and the GARCH model. *Revstat Statistical Journal* **2**(1):41–73 (2004)
- NELSON, D.B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society* págs. 347–370 (1991)
- NEUSSER, K. Time series analysis in economics (2015)
- OLAVERRI, C.G. Estabilidad de algunos criterios de selección de modelos (1996)
- OTERO, L., DURÁN, P., FERNÁNDEZ, S., Y VIVEL, M. Estimating insurers capital requirements through Markov switching models in the Solvency II framework. *International Research Journal of Finance and Economics* (86):20–38 (2012)
- PORCEL, J.P. Análisis del Riesgo de Acciones en Solvencia II: Efecto Divergente del Mecanismo de Ajuste Simétrico sobre el Valor en Riesgo (Analysis of the Equity Risk Under Solvency II: Divergent Effect of the Symmetric Adjustment Mechanism on Value at Risk) (2017)
- PRICEWATERHOUSECOOPERS. Countdown to Solvency II, Is a full internal model a step too far? (2011)
- R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria (2018)
- ROMERA, S. Solvencia II, una oportunidad única que conviene aprovechar. *Economía y Finanzas* págs. 14–21 (2011)

- ROSSUM, A.V. Regulation and insurance economics. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice* **30**(1):43–46 (2005)
- SALADO, A.I.A., HUERTA, H.V., GUZMÁN, M.E.R., LAZALDE, J.R.V., Y SALADO, C.A.A. Estimación del valor en riesgo en la Bolsa Mexicana de Valores usando modelos de heteroscedasticidad condicional y teoría de valores extremos. *Economía mexicana. Nueva época* **22**(1):177–205 (2013)
- SÁNCHEZ, V.L. Y GARCÍA, J.A.D. *Distribuciones elípticas multivariadas singulares y no singulares: teoría y aplicaciones*. Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro (2001)
- SANTOMIL, P.D., GONZÁLEZ, L.A.O., LÓPEZ, S.F., Y BÚA, M.V. Análisis del riesgo de renta variable en el marco de solvencia II: modelos internos frente al modelo estándar. *Cuadernos de Economía y Dirección de la Empresa* **14**(2):91–101 (2011)
- SILVA, S.S. La Crisis de 1929, URL: <https://www.zonaeconomica.com/crisis-1929> (2008)
- SWISSRE. La regulación de la solvencia del seguro en Latinoamérica: modernización a diferentes velocidades (2015)
- TORO, M.R. Y SVENSSON, J. MSA400-Reading project Solvency II (2012)
- TSAY, R.S. *Analysis of financial time series*, tomo 543. John Wiley & Sons (2010)
- TSAY, R.S. *An Introduction to analysis of financial data whit R*. John Wiley & Sons (2013)
- USTÁRIZ, G.L.H. El Comité de Basilea y la supervisión bancaria. *Vniversitas* (105):431–462 (2003)
- VARGAS, A.S. Y MARTÍNEZ, O.R. Regularidades probabilísticas de las series financieras y la familia de modelos GARCH. *CIENCIA ergo-sum* **13**(2):149–156 (2006)
- VAZQUEZ, R.D., VALDES, A.L., Y PORRAS, A.R. Un modelo GARCH con asimetría condicional autorregresiva para modelar series de tiempo: Una aplicación para los rendimientos del índice de precios y cotizaciones de la BMV (2013)

VENEGAS-MARTÍNEZ, F., CRUZ-AKÉ, S., Y REYES-GARCÍA, N.J. Un análisis comparativo entre GARCH-M, EGARCH y PJ-RS-EV para modelar la volatilidad de Índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (2018)

VILCHIS, J.A.G. *Solvencia II: Aplicación de Riesgo Accionario al Enfoque de los Seguros en México*. Proyecto Fin de Carrera (2013)

WESTFALL, P.H. Kurtosis as peakedness, 1905–2014. RIP. *The American Statistician* **68**(3):191–195 (2014)

ZAKOIAN, J.M. Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and control* **18**(5):931–955 (1994)