Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias

Hiperespacios y Continuos Pseudo-contráctiles

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Fatima Itzel Regis Avila

DIRECTORES DEL TRABAJO:
Leonardo Juárez Villa
Félix Capulín Pérez

Cerrillo Piedras Negras, 19 de Septiembre de 2019.

Introducción

La presente tesis pertenece al área de la Topología conocida como Teoría de continuos y sus hiperespacios. En esta tesis estudiamos propiedades topológicas de espacios que son métricos, compactos, conexos y no vacíos conocidos como continuos y sus hiperespacios, los cuales son ciertas familias de subconjuntos de un continuo con alguna característica particular.

Tiene como principal objetivo el estudio de la Contractibilidad y Pseudo-contractibilidad en los hiperespacios de continuos; analizaremos estos conceptos de acuerdo a las referencias [10], [3] y [8] señaladas en la bibliografía.

Para facilitar la lectura, se han incluido los resultados necesarios de Topología General, continuos e hiperespacios que se requieren para su comprensión y se organiza el material en cinco capítulos.

En el Capítulo 1 se mencionan algunos conceptos básicos necesarios para desarrollar el tema principal, por ejemplo, la definición de continuo, nombrando también algunos ejemplos. Se enuncian resultados que nos servirán para obtener demostraciones importantes para el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2 se hace referencia a los hiperespacios, exponiendo los más conocidos, se introduce una métrica, conocida como la métrica de Hausdorff utilizada para los hiperespacios y se mencionan algunos resultados sobre conexidad y compacidad de los hiperespacios, así como también sobre funciones de Whitney y arcos ordenados. En el Capítulo 3 se presentan algunos modelos de hiperespacios, los cuales nos servirán para dar ejemplos de algunos resultados de los capítulos siguientes. En el Capítulo 4 analizamos los conceptos de:

1. Contráctil.
2. Contráctil con respecto a...
3. Contráctil en...
4. Propiedad de Kelley.

Además se demuestra que para un continuo X dado, las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$,

b) $F_1(X)$ es contráctil en 2^X,

c) $C(X)$ es contráctil,

d) 2^X es contráctil,

e) $C_n(X)$ es contráctil,

f) $C_\infty(X)$ es contráctil.

Y que si X es un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley. Por último, el Capítulo 5 es la parte fundamental del trabajo, aquí mencionamos las definiciones de:

1. Pseudo-contráctil.

2. Pseudo-contráctil en...

3. Pseudo-contráctil con respecto a...

Así como también se prueba, que si X es un continuo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$,

b) $F_1(X)$ es contráctil en 2^X,

c) $C(X)$ es contráctil,

d) 2^X es contráctil,

e) $C_n(X)$ es contráctil,

f) $C_\infty(X)$ es contráctil,

g) $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C(X)$,

h) $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X,

i) $C(X)$ es pseudo-contráctil,

j) 2^X es pseudo-contráctil,

k) $C_n(X)$ es pseudo-contráctil,

l) $C_\infty(X)$ es pseudo-contráctil.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este Capítulo presentamos los conceptos básicos de la Teoría de Continuos y de sus Hiperespacios, además de algunos resultados que son necesarios para el desarrollo del presente trabajo. Algunos de los cuales no se probarán pero se dejará la referencia para consultar la demostración.

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1. *Sea X un conjunto y τ una familia de conjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** para X si:*

1. *$\emptyset, X \in \tau$,*
2. *Si $\mathcal{C} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{C} \in \tau$,*
3. *Si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$.*

*La pareja (X, τ) se le llama **espacio topológico**, o simplemente espacio. Por comodidad denotaremos por X al espacio topológico, de ser necesario se usará la notación anterior.*
*Si τ es una topología para X, a los elementos de τ los llamaremos **abiertos**.*

Observación 2. *Si $X \setminus A \subseteq \tau$, entonces se dirá que el conjunto A es un conjunto **cerrado** en X.*

Definición 3. *Una **métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$0 \leq d(x, y)$ para todos $x, y \in X$; la igualdad se da si y sólo si, $x = y$.*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ para todos $x, y \in X$.*
3. *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos $x, y, z \in X$.*

Definición 4. *Sean X un conjunto no vacío y d una métrica para X. La pareja ordenada (X, d) formada por el conjunto X y la métrica d en X es llamado* ***espacio métrico****. Al igual que en espacios topológicos se usará X para denotar un espacio métrico si no hay confusión.*

Definición 5. *Dados $\varepsilon > 0$ y $p \in X$, se define:*
$\mathcal{B}(\epsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \varepsilon\}$, la bola de radio ε alrededor de p.

Definición 6. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Decimos que $x \in \overline{A}$ si y sólo si para todo $U \in \tau$ que cumple que $x \in U$ se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$.*
Al conjunto $\overline{A}$ se le llama la ***cerradura*** *de A en X.*

Definición 7. *Sean X un espacio topológico y $D \subseteq X$. Decimos que D es* ***denso*** *en X si $\overline{D} = X$.*

Definición 8. *Sean X un espacio topológico y E un subconjunto de X. Llamaremos* ***cubierta*** *de E a una colección $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de X tales que $E \subseteq \bigcup_n A_n$. Si cada A_α de la cubierta es un conjunto abierto, entonces diremos que la cubierta es* ***abierta****. Una* ***subcubierta*** *de E es una subcolección de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la cual es una cubierta.*

Definición 9. *Se dice que un conjunto K de un espacio topológico X es* ***compacto*** *si toda cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita, en otras palabras si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de K entonces existe un número finito de indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}$.*

Proposición 10. *Todo subconjunto cerrado A de un espacio compacto X es compacto.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de A. Cada elemento de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es de la forma $A_\alpha = A \cap U_\alpha$, donde U_α es un conjunto abierto de X. La colección $\{X - A\} \cup \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de X y como X es compacto, entonces tiene una subcubierta abierta finita. Las intersecciones con A de los elementos de esta cubierta finita, forman una subcubierta finita de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para A. Por lo tanto A es compacto. □

Definición 11. *Se dice que una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio X,* ***converge*** *si existe un punto $p \in X$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe un número entero N tal que si $n \geq N$ entonces $d(p_n, p) < \varepsilon$. En este caso, decimos que $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p, o que p es el límite de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y escribimos $\lim_{n \to \infty} p_n = p$. Si $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge, se dice que* ***diverge****.*

Definición 12. *Sea X un espacio topológico. Se dice que X es* ***secuencialmente compacto*** *si cada sucesión de puntos de X contiene una subsucesión convergente.*

La demostración de la siguiente proposición se encuentra en [7, Teorema 28.2].

Proposición 13. *Sea X un espacio métrico. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *X es compacto,*
2. *X es secuencialmente compacto.*

Definición 14. *Dos conjuntos A y B de un espacio X se dice que son* ***mutuamente separados*** *si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.*

Definición 15. *Sea X un espacio topológico. Una* ***separación de*** *X es un par A, B de conjuntos mutuamente separados y no vacíos cuya unión es X.*

Definición 16. *Un conjunto $E \subseteq X$ se dice que es* ***conexo*** *si no existe una separación de E.*

Proposición 17. *Si los conjuntos C y D son una separación de X y Y es un subespacio conexo de X, entonces Y es un subconjunto de C o de D.*

Demostración. Supongamos que $C \cap Y \neq \emptyset$ y $D \cap Y \neq \emptyset$, probaremos que los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son una separación de Y. Si $a \in (C \cap Y) \cap \overline{(D \cap Y)}$, entonces $a \in C$, $a \in Y$, $a \in \overline{D}$ y $a \in \overline{Y}$, por lo que, en particular, $a \in C \cap \overline{D}$, lo cual es una contradicción pues C y D son mutuamente separados, por lo tanto $(C \cap Y) \cap \overline{(D \cap Y)} = \emptyset$. De la misma manera se prueba que $(D \cap Y) \cap \overline{(C \cap Y)} = \emptyset$. Por lo que $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son una separación de Y, lo cual contradice la conexidad de Y. Por lo tanto $Y \subseteq C$ o $Y \subseteq D$. $\square$

La demostración de la siguiente proposición se encuentra en [7, Teorema 23.3].

Proposición 18. *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es un conjunto conexo.*

Lema 19. *Sea X un espacio topológico. Si A es un subconjunto conexo de X, entonces para todo B subconjunto de X tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, se tiene que B es conexo.*

Proposición 20. *Sea X un espacio topológico. Si existe un subconjunto denso y conexo D de X, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que existe un conjunto conexo D de X, entonces por el Lema 19, $\overline{D}$ es conexo y como $\overline{D} = X$, X es conexo. $\square$

Definición 21. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es* ***continua*** *si para cada subconjunto abierto V de Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es un abierto de X.*

Proposición 22. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*
3. *La imagen inversa de cada subconjunto cerrado de Y es cerrado en X.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Sean A un subconjunto de X, $x \in \overline{A}$ y V un conjunto abierto tal que $f(x) \in V$. Como f es continua, entonces $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X que tiene a x e intersecta a A en algún punto y. Así $f(y) \in V \cap f(A)$, por lo que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Por lo tanto $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
2) $\Rightarrow$ 3) Sea B un cerrado de Y y sea $A = f^{-1}(B)$. Se tiene que $f(A) = f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. De aquí que, si $x \in \overline{A}$, $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{B} = B$, por lo que $x \in f^{-1}(B) = A$. Así, $\overline{A} \subseteq A$, entonces $\overline{A} = A$, es decir A es cerrado.
3) $\Rightarrow$ 1) Sea V un conjunto abierto de Y. Entonces

$$f^{-1}(Y \setminus V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(V).$$

Como $Y \setminus V$ es cerrado, por hipótesis $f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto y por tanto, f es continua. □

Proposición 23. *La imagen de un espacio compacto bajo una función continua y suprayectiva es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de Y. Veamos que la colección $\{f^{-1}(A_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de X. Cada $f^{-1}(A_\alpha)$ es abierto pues f es continua. Por otra parte si $x \in X$, $f(x) \in Y$, por lo que existe $A \in \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $f(x) \in A$. De esta manera $x \in f^{-1}(A)$. Por lo tanto $\{f^{-1}(A_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, existe un número finito de ellos que cubren a X, digamos $f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_n)$ es decir, $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)$. Así

$$Y = f(X) \subseteq f(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k)) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(A_k)) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Entonces los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ cubren Y, por lo que Y es compacto. □

Proposición 24. *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Si f es continua entonces para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a un punto $p \in X$ se tiene que $\lim_{n \to \infty} f(p_n) = f(p)$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea V un conjunto abierto tal que $f(p) \in V$, entonces $p \in f^{-1}(V)$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in f^{-1}(V)$ para $n \geq N$. Así $f(p_n) \in V$ para $n \geq N$.
$\Leftarrow\rfloor$ Sea $A \subseteq X$. Demostraremos que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Sea $p \in \overline{A}$, entonces existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en A que converge a p. Por hipótesis, $f(p_n)$ converge a $f(p)$, dado que $f(p_n) \in f(A)$, entonces $f(p) \in \overline{f(A)}$. Por lo que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, entonces f es continua. □

La demostración del siguiente lema la podemos ver en [7, Teorema 18.3].

Lema 25. *Sea $X = A \cup B$, donde A y B son conjuntos cerrados en X. Sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una nueva función continua $h : X \to Y$ definida mediante*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ g(x) & si \quad x \in B. \end{cases}$$

Definición 26. *Un conjunto A es llamado* ***conjunto ordenado*** *si existe un orden $\preceq$ que tiene las mismas propiedades relativas al orden que $\mathbb{R}$, es decir, si es reflexivo (para toda $a \in A: \ a \preceq a$), transitivo (para todos $a, b, c \in A: \ a \preceq b$ y $b \preceq c$, entonces $a \preceq c$) y antisimétrico (para todos $a, b \in A: \ a \preceq b$ y $b \preceq a$, entonces $a = b$).*

El siguiente teorema es conocido como el teorema del valor intermedio y su demostración la podemos encontrar en [7, Teorema 24.3].

Teorema 27. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, donde X es un espacio conexo y Y un conjunto ordenado. Si a y b son dos puntos de X y r es un punto de Y que se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un punto c en X tal que $f(c) = r$.*

Definición 28. *Un espacio topológico X se denomina* ***espacio de Hausdorff*** *si para cada par de puntos distintos x_1, x_2 de X, existen conjuntos abiertos disjuntos U_1 y U_2 que contienen a x_1 y x_2, respectivamente.*

Definición 29. *Un espacio topológico X se dice que es* ***normal*** *si para cada par de conjuntos cerrados disjuntos A y B de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.*

Proposición 30. *Todo espacio métrico es normal.*

Demostración. Sea X un espacio métrico con distancia d. Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, elijamos ε_a de manera que $\mathcal{B}(\varepsilon_a, a) \cap B = \emptyset$, esto es posible ya que A y B son disjuntos. De la misma manera, para cada $b \in B$, elijamos ε_b de manera que $\mathcal{B}(\varepsilon_b, b) \cap A = \emptyset$. Definamos

$$U = \bigcup_{a \in A} \mathcal{B}(\frac{\varepsilon_a}{2}, a) \text{ y } V = \bigcup_{b \in B} \mathcal{B}(\frac{\varepsilon_b}{2}, b).$$

Entonces U y V son conjuntos abiertos que contienen a A y B respectivamente y afirmamos que son disjuntos. De no ser así, es decir, si existiera $z \in U \cap V$, entonces $z \in \mathcal{B}(\frac{\varepsilon_a}{2}, a) \cap \mathcal{B}(\frac{\varepsilon_b}{2}, b)$ para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Utilizando la desigualdad del triángulo se tiene que $d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} = \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}{2}$. Si $\varepsilon_a < \varepsilon_b$, entonces $d(a, b) < \varepsilon_b$, por lo que $a \in \mathcal{B}(\varepsilon_b, b)$. Si $\varepsilon_b < \varepsilon_a$, entonces $d(a, b) < \varepsilon_a$, por lo que $b \in \mathcal{B}(\varepsilon_a, a)$. Lo cual no es posible. Por lo tanto U y V son disjuntos, así X es normal. $\square$

Definición 31. *Un espacio topológico X es* ***localmente conexo****, si para cada $x \in X$ y para cada $\mathcal{U} \in \tau$ tal que $x \in \mathcal{U}$, existe $\mathcal{V} \in \tau$ conexo tal que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.*

Definición 32. *Un espacio topológico X es* ***conexo por trayectorias*** *si para cualesquiera $p, q \in X$ existe una función $\alpha : [0, 1] \to X$ continua tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$.*

Definición 33. *Decimos que X es un* ***arco****, si X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ con la topología usual de $\mathbb{R}$.*

Definición 34. *Un espacio topológico X es* ***conexo por arcos o arco conexo*** *si para cualesquiera $p, q \in X$ existe un arco con extremos p y q.*

Proposición 35. *Sea X un espacio topológico. Si X es arco conexo, entonces X es conexo.*

Demostración. Supongamos que X no es conexo, es decir, que existe A, B una separación. Tomemos $p \in A$ y $q \in B$, dado que X es arco conexo, existe un arco con extremos p y q, así por la Proposición 17, ese arco es un subconjunto de A o B, lo cual es una contradicción pues el arco va de un punto de A a un punto de B. Por lo tanto, X es conexo. $\square$

Observación 36. *Si X es un espacio topológico conexo por arcos, entonces es conexo por trayectorias.*

Observación 37. *No siempre se tiene que todo espacio conexo es arco conexo o conexo por trayectorias.*

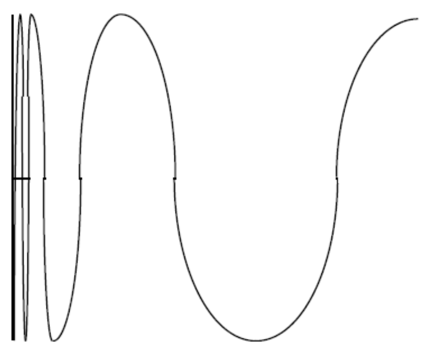


Figura 1.1: $S \cup F$

Sea $S = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\}$. Como S es la imagen del conjunto conexo $(0, 1]$ bajo la función $g : (0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida como $g(x) = (x, sen(\frac{1}{x}))$, entonces S es conexo. Dado que $\overline{S}$ es la unión de S con el conjunto $F = \{(0, x) : -1 \leq x \leq 1\}$, entonces $\overline{S}$ también es conexo. Supongamos que existe una trayectoria $f : [0, 1] \to \overline{S}$ tal que $f(0) = (0, 0)$ y $f(1) = (1, sen(1))$. El conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado pues f es continua y, por tanto, tiene un máximo que denotaremos por b. Entonces $f : [b, 1] \to \overline{S}$ es una trayectoria que satisface que $f(b) \in F$, mientras que $f((b, 1]) \subseteq S$. Sustituimos a $[b, 1]$ por $[0, 1]$; de tal manera que $f(t) = (x(t), y(t))$, donde $x(0) = 0$, mientras que $x(t) > 0$ y $y(t) = sen(\frac{1}{x(t)})$ para $t > 0$. Construiremos una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ y $y(t_n)$ no es convergente, contradiciendo la continuidad de f. Para encontrar los números t_n procedemos del siguiente modo: dada n, elegimos u con $0 < u < x(\frac{1}{n})$ tal que $sen(\frac{1}{u}) = (-1)^n$. Usando el Teorema 27 podemos encontrar t_n con $0 < t_n < \frac{1}{n}$ tal que $x(t_n) = u$. Por lo tanto $\overline{S}$ no es conexo por trayectorias, así no es conexo por arcos.

Observación 38. *Sea X es un espacio topológico. Si X es conexo por trayectorias, no necesariamente se cumple que sea conexo por arcos.*
Como ejemplo se tiene $X = \{0, 1\}$, con la topología de Sierpinski, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. X es conexo por trayectorias, pues existe $\alpha : [0, 1] \to X$ continua definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, 1) \\ 1 & si \quad t = 1 \end{cases}$$

pero no es conexo por arcos, pues no existe un arco que conecte a $\{0\}$ con el punto $\{1\}$.

La demostración de la siguiente proposición se puede ver en [7, Teorema 26.6].

Proposición 39. *Sean X, Y espacios topológicos. Si X es compacto, Y es Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva, entonces f es homeomorfismo.*

La siguiente proposición es demostrada en [11, Corolario 31.6].

Proposición 40. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces X es conexo por trayectorias si y sólo si X es conexo por arcos.*

Definición 41. *Sea X un espacio topológico conexo. Decimos que X es* ***unicoherente*** *si, dados A y B conjuntos cerrados y conexos en X tales que $X = A \cup B$, tenemos que $A \cap B$ es conexo.*

Ejemplo 42. *Sea $X = [0, 1]$ con la topología usual, X es unicoherente pues $[0, a]$ y $[b, 1]$ son cerrados conexos de X tales que $[0, a] \cup [b, 1] = X$, y*

$$[0, a] \cap [b, 1] = \begin{cases} [b, a] & si \quad b < a \\ \{a\} & si \quad a = b \end{cases}$$

el cual es conexo.

Ejemplo 43. *Sea S la circunferencia unitaria en el plano $\mathbb{R}^2$. S no es unicoherente pues si A es el arco que va de p a q y B el arco que va de q a p, con $p, q \in S$, $A \cup B = S$ y $A \cap B = \{p\} \cup \{q\}$ el cual no es conexo.*

1.2. Continuos

En esta sección definiremos algunos conceptos relacionados a la Teoría de continuos.

Definición 44. *Decimos que un espacio X es un* ***continuo****, si X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Definición 45. *Un* ***subcontinuo*** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo. Es decir, es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo.*

A continuación, daremos algunos ejemplos de continuos.

Ejemplo 46. *Sea* $[0,1]$ *el intervalo cerrado como subespacio de* $\mathbb{R}$. *Dado que* $[0,1]$ *es cerrado y acotado, entonces es compacto, además como los puntos, los intervalos y* $\mathbb{R}$ *son los únicos conexos en* $\mathbb{R}$, *se tiene que* $[0,1]$ *es un continuo.*

Figura 1.2: Intervalo

Ejemplo 47. *El disco relleno, o la 2-celda,* $([0,1]^2)$ *que son espacios topológicos, con la topología usual, los cuales son otro ejemplo de continuos, ya que son compactos y conexos.*

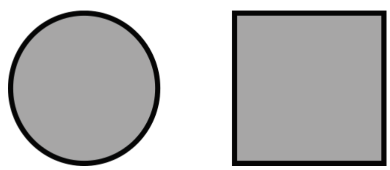


Figura 1.3: 2-celda

Ejemplo 48. *Los continuos que son una unión finita de arcos tales que cada dos de ellos se intersectan sólo en un número finito de puntos los cuales son conocidos como gráficas finitas.*

Ejemplo 49. *El Círculo de Varsovia, que es la cerradura en* $\mathbb{R}^2$ *de la gráfica de la función* $\sin(\frac{1}{x})$, *definida en el intervalo* $(0,1]$, *añadiendo un arco como se muestra en la figura.*

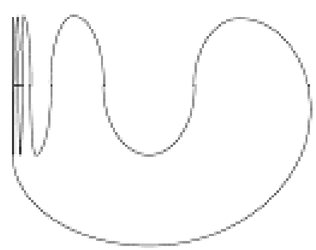


Figura 1.4: Círculo de Varsovia

Ejemplo 50. *La escoba o abanico armónico y el peine como espacios de* $\mathbb{R}^2$, *son continuos obtenidos de unir una infinidad de segmentos.*

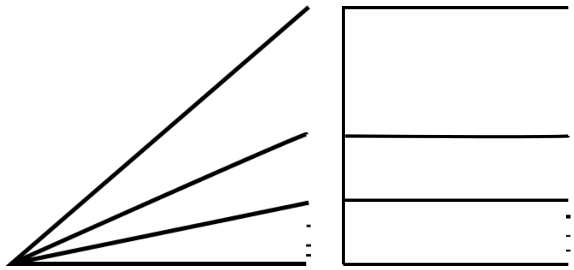


Figura 1.5: Abanico y Peine

Ejemplo 51. *Las dendritas son continuos localmente conexos que no tienen circunferencias, a continuación mostraremos a F_ω la cual tiene un sólo punto de ramificación pero una infinidad de segmentos saliendo de él; la dendrita de Gehman la cual se construye empezando por su vértice superior del que salen dos segmentos, al final de estos dos segmentos se ponen otros dos segmentos más pequeños, este proceso se continúa una infinidad de veces; la dendrita llamada D_4 se construye empezando por una cruz, usando cada uno de los cuatro extremos de la cruz se construye una pequeña cruz, con esto la figura se parte en 16 sementos, cada uno de ellos se usa para hacer una cruz menor, siguiendo este proceso una cantidad numerable de pasos; la dendrita D_ω se construye empezando con F_ω. En el punto medio de cada uno de los segmentos se planta una copia pequeña de F_ω; en el punto medio de cada uno de los segmentos plantamos una nueva copia de F_ω. Este proceso se realiza una cantidad numerable de veces y al final se toma la cerradura de la unión de todos los segmentos construidos.*

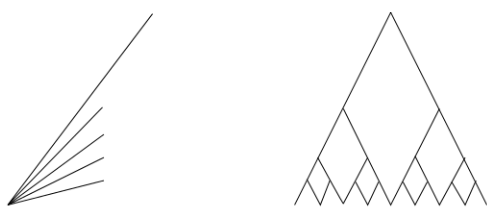


Figura 1.6: F_ω y Dendrita de Gehman

Proposición 52. *Si X es un continuo y $A_1, A_2, \ldots$ son subcontinuos tales que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, entonces el conjunto $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Dado que A es una intersección de cerrados y X es compacto, A es cerrado y compacto. Veamos que $A \neq \emptyset$. Supongamos $A = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned} X &= X \setminus A \\ &= X \setminus (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i). \end{aligned}$$

Así, dado que cada A_i es cerrado, $\{X \setminus A_1, X \setminus A_2, X \setminus A_3, \cdots\}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $A_{n_1}, \ldots, A_{n_m}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{m} (X \setminus A_{n_i})$.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_{n_1} \supseteq A_{n_2} \supseteq \ldots \supseteq A_{n_m}$, con $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_m$. Entonces

$$\begin{aligned} X &= (X \setminus A_{n_1}) \cup (X \setminus A_{n_2}) \cup (X \setminus A_{n_3}) \cup \cdots \cup (X \setminus A_{n_m}) \\ &= X \setminus (A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap A_{n_3} \cap \cdots \cap A_{n_m}) \\ &= X \setminus A_{n_m}. \end{aligned}$$

De donde $A_{n_m} = \emptyset$, esto es una contradicción. Por lo que $A \neq \emptyset$.
Ahora veamos que A es conexo. Supongamos que A no es conexo, es decir, $A = K \cup L$ con K y L cerrados, ajenos no vacíos. Por Proposición 30, X es normal, así existen abiertos U y V tales que $U \cap V = \emptyset$, $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Dado que

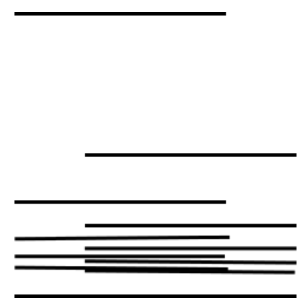
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \cup \cdots = X \setminus A = X \setminus (K \cup L) \supseteq X \setminus (U \cup V),$$

la familia $\{X \setminus A_1, X \setminus A_2, \ldots\}$ es una cubierta abierta del cerrado $X \setminus (U \cup V)$. Dado que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, entonces podemos encontrar un índice $i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subseteq U \cup V$. Como A_i es un continuo, por la Proposición 17, $A_i \subseteq U$ o $A_i \subseteq V$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_i \subseteq U$. Dado que $A = K \cup L \subseteq A_i$, se tiene que $L \subseteq U$. De donde $L \subseteq (U \cap V)$, esto es una contradicción pues $U \cap V = \emptyset$. Con esto se concluye que A es conexo.
Por lo tanto A es subcontinuo de X. $\square$

Definición 53. *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, definimos:*
$\lim\sup A_n = \{x \in X$: *para todo* $U \in \tau_X$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ *para una cantidad infinita de n's*$\}$
y
$\lim\inf A_n = \{x \in X$: *para todo* $U \in \tau_X$, $U \cap A_n \neq \emptyset$ *para toda n salvo una cantidad finita de n's*$\}$.

Definición 54. *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$, el* ***limite*** *de la sucesión que denotamos por* $\lim A_n = A$, *existe cuando* $\lim\sup A_n \subseteq \lim\inf A_n$. *Es decir,* $A = \lim\inf A_n = \lim\sup A_n$.

Ejemplo 55. *Sea* $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = [0, \frac{3}{4}] \times \{\frac{1}{n}\}$ *si* n *es impar y* $A_n = [\frac{1}{4}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$ *si* n *es par.* $\limsup A_n = [0,1] \times \{0\}$ *y* $\liminf A_n = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times \{0\}$



Capítulo 2

Hiperespacios de continuos

En este apartado se demostrará que algunos hiperespacios son continuos si X es continuo.

Definición 56. *Los* ***hiperespacios*** *son ciertas familias de subconjuntos de un continuo X, con alguna característica particular. Los más estudiados son:*
$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$,
$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$,
$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$, $n \in \mathbb{N}$,
$F_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene un número finito de puntos}\}$,
$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$, $n \in \mathbb{N}$.
$C_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene un número finito de componentes}\}$.

Observación 57. *Para un continuo X se tiene lo siguiente:*
$C(X) = C_1(X)$.
$F_n(X) \subset F_{n+1}(X) \subset F_\infty(X)$ *y* $C_n(X) \subset C_{n+1}(X) \subset C_\infty(X)$, $n \in \mathbb{N}$.
$F_n(X) \subseteq C_n(X)$.

2.1. La Métrica de Hausdorff

A continuación vamos a introducir la métrica de Hausdorff.
Como 2^X contiene a los demás hiperespacios, para darle una métrica a todos ellos, basta con dársela a 2^X.

Definición 58. *Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, se define la nube de radio ε alrededor de A como:*
$\mathcal{N}(\epsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x,q) < \varepsilon\}$.

Definición 59. *Sea (X,d) un espacio métrico. d es acotada si existe $k > 0$ tal que $d(x,y) < k$ para todo x, $y \in X$*

Lema 60. *Sea f una función continua definida en X. Si X es compacto entonces existe algún número $y \in X$ tal que $f(y) > f(x)$ para todo $x \in X$.*

Lema 61. *Sea X un espacio métrico compacto con métrica d. Entonces d es acotada.*

Demostración. Sea $f : X \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = d(p, x)$, para algún $p \in X$ fijo. Dado que X es compacto, por la Proposición 23, $f(X)$ es compacto, así por el Lema 60 existe $x_0 \in X$ tal que $d(p, x_0) \geq d(p, x)$ para todo $x \in X$. Entonces $d(x, y) \leq d(p, x) + d(p, y) \leq 2d(p, x_0)$. Así d es acotada. $\square$

Definición 62. *La métrica usual para 2^X es conocida con el nombre de* ***métrica de Hausdorff****. Sea $\mathcal{H} : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida de la siguiente manera*

$$\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)\}.$$

Proposición 63. *Dado un continuo X, la función $\mathcal{H}$ es una métrica para 2^X.*

Demostración. Primero vamos a probar que $\mathcal{H}$ está bien definida. Para $A, B \in 2^X$, definimos el conjunto

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)\},$$

entonces $\mathcal{H}(A, B) = \text{ínf}\, E(A, B)$.
Demostraremos que $E(A, B) \neq \emptyset$ y que está acotado inferiormente.
Notemos que $d(p, q) < diam(X) + 1$ para cualesquiera $p, q \in X$ (ver Lema 61). Así $A \subseteq \mathcal{N}(diam(X) + 1, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(diam(X) + 1, A)$. Por lo que el $diam(X) + 1 \in E(A, B)$ y $E(A, B) \neq \emptyset$. Así, dado que $E(A, B)$ está acotado inferiormente por el 0, $\mathcal{H}(A, B) \geq 0$ y $\mathcal{H}$ está bien definida.
De la definición se sigue que $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B, A)$.
Veamos que $\mathcal{H}(A, A) = 0$. Notemos que, $E(A, A) = (0, \infty)$ y $\text{ínf}\, E(A, B) = 0$. Así, $\mathcal{H}(A, A) = 0$.
Supongamos $\mathcal{H}(A, B) = 0$, demostraremos que $A = B$.
Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$, como $\text{ínf}\, E(A, B) = 0 < \varepsilon$, entonces existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$ y entonces $A \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$. Así existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$, por lo tanto $\mathcal{B}(\varepsilon, a) \cap B \neq \emptyset$ para todo ε. Por lo que $a \in \overline{B}$ en X, pero B es cerrado, así $a \in B$. Por lo tanto $A \subseteq B$. Análogamente $B \subseteq A$. Por lo tanto $A = B$.
Por último probaremos la desigualdad del triángulo. Sea $C \in 2^X$, demostraremos que

$$\text{ínf}\, E(A, C) \leq \text{ínf}\, E(A, B) + \text{ínf}\, E(B, C).$$

Como el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, solo nos queda probar que

$$\text{ínf}\, E(A, C) \leq \text{ínf}\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B)$$

y $\eta \in E(B, C)\}$.
Sean $\delta \in E(A, B)$ y $\eta \in E(B, C)$, por definición $A \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\eta, C)$. Dada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, además existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \eta$. Por desigualdad del triángulo $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < \delta + \eta$. Así $A \subseteq \mathcal{N}(\delta + \eta, C)$, análogamente, $C \subseteq \mathcal{N}(\delta + \eta, A)$ por lo que $\delta + \eta \in E(A, C)$, entonces $\text{ínf}\, E(A, C) \leq \delta + \eta$. Por lo tanto $\text{ínf}\, E(A, C)$ es cota inferior de $\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}$.
Así, $\text{ínf}\, E(A, C) \leq \text{ínf}\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}$.

Por lo tanto $\mathcal{H}(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$ y así, $\mathcal{H}$ es una métrica para 2^X. $\square$

Lema 64. *Sean X un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$. Veamos que $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Sea $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon' < \varepsilon$. Por definición de ínfimo, existe $0 < r < \varepsilon'$ tal que $A \subseteq \mathcal{N}(r, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(r, A)$. Entonces $A \subseteq \mathcal{N}(r, B) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon', B) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(r, A) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon', A) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Así, $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Recíprocamente, supongamos que $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Probaremos que existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta < \varepsilon$, $A \subseteq \mathcal{N}(\eta, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\eta, A)$. Antes, necesitamos probar que $A \subseteq \bigcup\limits_{\delta<\varepsilon} \mathcal{N}(\delta, B)$.
Sea $a \in A$. Como $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Tomemos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$. Entonces $a \in \mathcal{B}(\delta, b) \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$, por lo que $A \subseteq \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} \mathcal{N}(\delta, B)$.

Ahora, por la compacidad de A, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n < \varepsilon$ tales que $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{N}(\delta_i, B)$. Definamos $\eta_1 = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Entonces $0 < \eta_1 < \varepsilon$ y $A \subseteq \mathcal{N}(\eta_1, B)$.
De forma análoga, podemos encontrar $\eta_2 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta_2 < \varepsilon$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\eta_2, A)$.
Tomemos $\eta = \text{máx}\{\eta_1, \eta_2\}$. Entonces $0 < \eta < \varepsilon$, $A \subseteq \mathcal{N}(\eta, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\eta, A)$.
Por tanto $\mathcal{H}(A, B) \leq \eta < \varepsilon$.

□

Lema 65. *Sea X un continuo. Si $A \in 2^X$ y U es un abierto en X tal que $A \subseteq U$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \subseteq U$.*

Demostración. Sea $A \subseteq U$. Se tiene que $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Notemos que A y $X \setminus U$ son conjuntos cerrados en X, así por Proposición 10 son compactos, de manera que $d(A, X \setminus U) > 0$. Sea $\varepsilon = \frac{d(A, X \setminus U)}{2}$, veamos que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \subseteq U$. Si $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Así $x \in \mathcal{B}(\varepsilon, a)$. Afirmamos que $x \in U$, pues si $x \in X \setminus U$, entonces $d(A, X \setminus U) \leq d(a, x)$. Así, $d(A, X \setminus U) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por tanto $x \in U$. □

Denotaremos a $\beta(\varepsilon, A)$ como la bola de radio ε alrededor de A con la métrica de Hausdorff.

Proposición 66. *Sea X un continuo. Entonces el hiperespacio $F_1(X)$ es homeomorfo a X.*

Demostración. Sea $G : F_1(X) \to X$ una función definida por $G(\{x\}) = x$. Veamos que es biyectiva. Para probar que es inyectiva, notemos que si $G(\{x\}) = G(\{y\})$, entonces $x = y$, por lo que G es inyectiva. Para probar que es suprayectiva, observemos que para todo x de X existe $\{x\}$ de $F_1(X)$, tal que $G(\{x\}) = x$, por lo que G es suprayectiva. Así la función G es biyectiva. Probaremos que G es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \varepsilon$. Supongamos que $\mathcal{H}(\{x\}, \{y\}) < \delta$, entonces $\{x\} \subseteq \mathcal{N}(\delta, \{y\})$ y $\{y\} \subseteq \mathcal{N}(\delta, \{x\})$, así $G(\{x\}) \subseteq G(\mathcal{N}(\delta, \{y\})) = \mathcal{N}(\delta, G(\{y\}))$ y $G(\{y\}) \subseteq G(\mathcal{N}(\delta, \{x\})) = \mathcal{N}(\delta, G(\{x\}))$, por lo que $x \in \mathcal{B}(\delta, y)$ y $y \in \mathcal{B}(\delta, x)$, de donde $d(x, y) < \delta$, así G es continua. De la misma manera G^{-1} es continua. Por lo tanto G es un homeomorfismo. Así $F_1(X)$ es homeomorfo a X. □

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [9, Teorema 4.11].

Teorema 67. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de X. Entonces $\lim A_n = A$ si y sólo si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Proposición 68. *Sean $A, B \in 2^X$. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos en 2^X tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, entonces:*

a) Si $A_n \subseteq B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subseteq B$,

b) $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$,

c) Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$,

d) no siempre es cierto que $\lim A_n \cap B_n = A \cap B$.

Demostración. $a\rfloor$ Sea $x \in A$, dado que $B \in 2^X$, demostraremos que $x \in \overline{B}$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_1$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, de la misma manera, como $\lim B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_2$, $\mathcal{H}(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Entonces, para cada $n > N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\mathcal{H}(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por el Lema 64, se tiene que $A \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$, $A_n \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$, $B \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, B_n)$, y $B_n \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, B)$, para cada $n \geq N$. Fijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Dado que $x \in A$, existe $y \in A_m$, tal que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis, $A_m \subseteq B_m$, por lo que $y \in B_m$ y como $B_m \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, B)$, existe $z \in B$ tal que $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, por la desigualdad del triángulo, se tiene que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon$, de donde $z \in \mathcal{B}(\varepsilon, x) \cap B$. En consecuencia, $\mathcal{B}(\varepsilon, x) \cap B \neq \emptyset$. Así, $x \in \overline{B} = B$. Por lo tanto, $A \subseteq B$.
$b\rfloor$ Sea $\varepsilon > 0$, probaremos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $A_n \cup B_n \in \mathcal{B}(\varepsilon, A \cup B)$. Como $\lim A_n = A$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \varepsilon$. De la misma manera, como $\lim B_n = B$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N_2$, $\mathcal{H}(B_n, B) < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \varepsilon$ y $\mathcal{H}(B_n, B) < \varepsilon$. Por Lema 64, para cada $n \geq N$, $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_n)$, $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B_n)$, $A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y $B_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$. De manera que, $A \cup B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_n) \cup \mathcal{N}(\varepsilon, B_n)$ y $A_n \cup B_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A) \cup \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, para cada $n \geq N$, de donde $A \cup B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_n \cup B_n)$ y $A_n \cup B_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$. Por tanto, para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A \cup B, A_n \cup B_n) < \varepsilon$. Así, para cada $n \geq N$, $A_n \cup B_n \in \mathcal{B}(\varepsilon, A \cup B)$. Por lo que $\lim(A_n \cup B_n) = A \cup B$.
$c\rfloor$ Supongamos que $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) = \emptyset$. Por otro lado, como $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que, para cada $n_1 \geq N_1$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \varepsilon$ y para cada $n_2 \geq N_2$, $\mathcal{H}(B_n, B) < \varepsilon$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para cada $n \geq N$, $\mathcal{H}(A_n, A) < \varepsilon$ y $\mathcal{H}(B_n, B) < \varepsilon$. Por el Lema 64, tenemos que $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_n)$, $B \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B_n)$, $A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y $B_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, para cada $n \geq N$. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > N$. Por hipótesis tenemos que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$, sea $c_m \in A_m \cap B_m$, entonces $c_m \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y $c_m \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, así, $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$.
$d\rfloor$ Consideremos el continuo $X = [0, 1] \times [0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = [\frac{1}{2}, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$, $q_n = (0, \frac{1}{n+1})$, y $B_n = \overline{p_n q_n}$, donde $\overline{p_n q_n}$ es el segmento de línea que une a los puntos p_n y q_n. Observemos que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de elementos de 2^X

tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$, donde $A = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$, $B = [0,1] \times \{0\}$. Notemos que $A \cap B = [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\} = A$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \cap B_n = \{p_n\}$. Así, $\lim(A_n \cap B_n) = \{p_0\}$, donde p_0 es el punto $(1,0)$. Por tanto, $\lim(A_n \cap B_n) \neq A \cap B$. □

La prueba de la siguiente proposición la podemos encontrar en [4, Teorema 1.19].

Proposición 69. *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Si $\lim A_n = A$, entonces $p \in A$ si y sólo si existe una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$.*

2.2. Topología de Vietoris

En esta sección analizaremos la topología de Vietoris para 2^X y probaremos que es igual a la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

Definición 70. *Sean X un continuo y $A \subseteq X$ definimos los siguientes conjuntos en 2^X:*

1. $\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subseteq A\}$,
2. $\Lambda(A) = \{B \in 2^X : A \cap B \neq \emptyset\}$,
3. $\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subseteq B\}$.

Definición 71. *Sean X un continuo y $U_1, U_2, \cdots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X. El símbolo $\langle U_1, U_2, \cdots, U_n\rangle$ denota el conjunto:*

$$\{A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, 2, \cdots, n\}\}.$$

Teorema 72. *Sean X un continuo y $U_1, U_2, \cdots, U_n$ subconjuntos no vacíos de X, entonces:*

a) $\langle U_1, U_2, \cdots, U_n\rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$,

b) $\Gamma(A) = \langle A\rangle$ *para cada* $A \subseteq X$,

c) $\Lambda(A) = \langle X, A\rangle$ *para cada* $A \subseteq X$.

Demostración. a) $\subseteq]$ Sea $A \in \langle U_1, U_2, \cdots, U_n\rangle$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de donde $A \in \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$ y $A \in \Lambda(U_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. De aquí que $A \in \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)$. Así $A \in \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$.

$\supseteq]$ Sea $A \in \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$. Entonces $A \in \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$ y $A \in (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$, así

$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $A \in \Lambda(U_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, por lo que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, por lo tanto $A \in \langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$.

b) Se sigue de la definición de $\Gamma(A)$ y de $\langle A \rangle$.

c) $\subseteq \rfloor$ Sea $B \in \Lambda(A)$. Claramente $B \cap A \neq \emptyset$ y $B \cap X \neq \emptyset$. Entonces, $B \in \langle X, A \rangle$.
$\supseteq \rfloor$ Sea $B \in \langle X, A \rangle$. Entonces $B \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B \in \Lambda(A)$.

□

Teorema 73. *Sean $U_1, \cdots, U_n$ y $V_1, \cdots, V_m$ subconjuntos de un continuo. Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ y $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \neq \emptyset$, entonces:*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle = \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle.$$

Demostración. Primero notemos que:

$$U \cap V = (U \cap V) \cup (V \cap U) = [U \cap (\bigcup_{i=1}^{m} V_i)] \cup [V \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)] = [\bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i)] \cup [\bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)]. \quad (2.1)$$

$\subseteq \rfloor$ Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Por definición $A \subseteq U \cap V$. Así, por la igualdad (2.1), $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (U \cap V_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap U_i)$.
Como $A \subseteq U$ se tiene que $A = A \cap U$ además $\emptyset \neq A \cap V_i = A \cap U \cap V_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Del mismo modo se prueba que $A \cap V \cap U_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por lo tanto $A \in \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle$.
$\supseteq \rfloor$ Sea $A \in \langle U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m, V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n \rangle$. Entonces, por la igualdad (2.1), $A \subseteq U \cap V$.
Ahora, sea $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $A \cap U \cap V_i \neq \emptyset$, $A = A \cap U$ y $A \cap V_i = A \cap U \cap V_i$, se tiene que $A \cap V_i \neq \emptyset$.
Del mismo modo se prueba que $A \cap U_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Por tanto, $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. □

Teorema 74. *Sean X un continuo, el conjunto $\mathcal{S} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : U_1, \ldots, U_n$ son abiertos en $X\}$ es base para una topología del hiperespacio 2^X.*

Demostración. Primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{S}$. Notemos que $\langle X \rangle = \{A \in 2^X : A \subseteq X\} = 2^X$. Así, $2^X \in \mathcal{S}$. De manera que $2^X \subseteq \bigcup \mathcal{S}$, por lo que $2^X = \bigcup \mathcal{S}$. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{S}$ y $A \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Por el Teorema 73, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathcal{S}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}$ es una base para una topología denotada por τ_V y conocida como la topología de Vietoris. □

Para demostrar que τ_V y τ_H coinciden, necesitamos los siguientes resultados.

Teorema 75. *Sean X un continuo y $A \subseteq X$. Entonces se tienen las siguientes condiciones.*

i) Si A es abierto, $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son abiertos en 2^X.

ii) Si A es cerrado, $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X.

Demostración. i) Demostraremos que $\Gamma(A)$ es abierto. Si $B \in \Gamma(A)$, $B \subseteq A$. Como A es abierto y $B \in 2^X$, por el Lema 65, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(\varepsilon, B) \subseteq A$. Veamos $\beta(\varepsilon, B) \subseteq \Gamma(A)$. Sea $C \in \beta(\varepsilon, B)$. Entonces, $\mathcal{H}(B, C) < \varepsilon$. Así, por el Lema 64, $C \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$. Por lo que $C \in \Gamma(A)$. De aquí que $\beta(\varepsilon, B) \subseteq \Gamma(A)$.
Ahora probaremos que $\Lambda(A)$ es abierto. Sean $B \in \Lambda(A)$ y $x \in B \cap A$. Como A es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(\varepsilon, x) \subseteq A$. Demostraremos $\beta(\varepsilon, B) \subseteq \Lambda(A)$. Sea $D \in \beta(\varepsilon, B)$. Entonces $\mathcal{H}(D, B) < \varepsilon$. Por el Lema 64, $D \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$. Como $x \in B$, existe $y \in D$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, $y \in \mathcal{B}(\varepsilon, x) \subseteq A$. Así $y \in D \cap A$. Por lo que $D \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto $D \in \Lambda(A)$.

ii) Sea A un cerrado en X. Así $X \setminus A$ es un abierto en X. Notemos que $\Gamma(A) = 2^X \setminus \Lambda(X \setminus A)$ y $\Lambda(X \setminus A)$ es un abierto en 2^X, por i), tenemos que $\Gamma(A)$ es cerrado en 2^X.
Por otro lado, $X \setminus A$ es abierto en X. Por i), se sigue que $\Gamma(X \setminus A)$ es abierto en 2^X, así $2^X \setminus \Gamma(X \setminus A)$ es cerrado en 2^X. Notemos que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X \setminus A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(A)$ es cerrado en 2^X.
Ahora, veamos que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X. Sea $B \in \overline{\Phi(A)}$ y supongamos que $B \notin \Phi(A)$, es decir, A no es un subconjunto de B. Sea $a \in A \setminus B$. Notemos que $\Phi(A) \cap \beta(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Tomemos $E \in \Phi(A)$ tal que $\mathcal{H}(B, E) < \varepsilon$. Por el Lema 64, se sigue que $E \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$. Como $a \in A$ y $E \in \Phi(A)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Como $d(a, B) \leq d(a, b)$, tenemos que $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, $B \in \Phi(A)$. Así, $\overline{\Phi(A)} \subseteq \Phi(A)$. Hemos demostrado que $\Phi(A)$ es cerrado en 2^X.

□

Teorema 76. *Si X es un continuo, entonces la topología de Vietoris τ_V y la topología inducida por la métrica de Hausdorff $\tau_{\mathcal{H}}$ en 2^X son iguales.*

Demostración. $\subseteq]$ Sea $\mathcal{S}$ como en el Teorema 74. Dado que $\tau_{\mathcal{H}}$ es una topología y $\mathcal{S}$ es una base para τ_V, es suficiente probar que $\mathcal{S} \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \mathcal{S}$. Por los Teoremas 75 y 72, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)) \in \tau_{\mathcal{H}}$. Por lo que $\tau_V \subseteq \tau_{\mathcal{H}}$.
$\supseteq]$ Consideremos $\mathcal{S}$ como en el Teorema 74. Ahora, sean $\mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{H}}$ y $F \in \mathcal{V}$. Demostraremos que existe $\mathcal{W} \in \mathcal{S}$ tal que $F \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Dado que $\mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{H}}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $F \in \beta(\varepsilon, F) \subseteq \mathcal{V}$. Por otro lado, la colección $\{\mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b) : b \in F\}$ es una cubierta abierta para F. Como F es compacto, existe $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq F$ tal que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b_i)$. Sea $U_i = \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos $\mathcal{W} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Notemos que $F \in \mathcal{W}$. Finalmente probaremos que $\mathcal{W} \subseteq \beta(\varepsilon, F)$. Sea $D \in \mathcal{W}$. Por Teorema 72, $D \in \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$. Así $D \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $D \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Demostraremos que $D \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, F)$. Si $e \in D$, entonces

existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $e \in U_j = \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b_j)$, así $d(e, b_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, además $b_j \in F$. En resumen, para cada $e \in D$, existe $b_j \in F$ tal que $d(e, b_j) < \varepsilon$. Por lo que $D \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, F)$.
Ahora, probaremos que $F \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, D)$. Si $b \in F$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b \in U_k = \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b_k)$, así $d(b, b_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado que $D \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $D \cap U_k \neq \emptyset$, es decir, $D \cap \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b_k) \neq \emptyset$, por lo que existe $z \in D \cap \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, b_k)$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(b, z) \leq d(b, b_k) + d(b_k, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, $d(b, z) < \varepsilon$. Por tanto, para cada $b \in F$ existe $z \in D$ tal que $d(b, z) < \varepsilon$. Así $F \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, D)$.
Por lo probado anteriormente y el Lema 64, $\mathcal{H}(F, D) < \varepsilon$, así $D \in \beta(\varepsilon, F)$. Por lo tanto $\mathcal{W} \subseteq \beta(\varepsilon, F)$. Dado que $\beta(\varepsilon, F) \subseteq \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Así $\tau_{\mathcal{H}} \subseteq \tau_V$.
Por lo tanto, $\tau_{\mathcal{H}} = \tau_V$. □

2.3. Compacidad

Lema 77. *Sea $A_1, A_2, \ldots$ una sucesión de elementos de 2^X tal que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$. Entonces la sucesión converge en 2^X y $\lim A_n = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $A = \bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demostraremos que $\lim A_n = A$. Notemos que A es no vacío pues es una intersección anidada de compactos, y dado que A es cerrado, entonces A es un elemento de 2^X. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hacemos $B_n = A_n \setminus \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Notemos que cada B_n es cerrado en X y, por lo tanto, compacto. Además $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$. Por lo que la sucesión de los conjuntos B_n es una sucesión de compactos anidados. Si cada uno de ellos fuera distinto del vacío tendríamos que su intersección sería diferente del vacío. Pero $\bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\} = (\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}) \setminus \mathcal{N}(\varepsilon, A) = A \setminus \mathcal{N}(\varepsilon, A) = \emptyset$, lo cual no puede pasar. Por lo que se concluye que existe alguna $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_N = \emptyset$. Es decir, $A_N \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Dado que los conjuntos A_n están anidados, tenemos que $A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, para toda $n \geq N$. Por otra parte, $A \subseteq A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Así $\mathcal{H}(A, A_n) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Por lo que $\lim A_n = A$. □

Teorema 78. *El hiperespacio 2^X es compacto.*

Demostración. Demostraremos que toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X. Sea $Y = \overline{(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})}$ (la cerradura en X de la unión de los conjuntos A_n). Como Y es compacto, existen $p_1, \ldots, p_m$ en Y tales que $Y \subseteq \mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_1) \cup \cdots \cup \mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_m)$. En particular, cada A_n está contenido en esa unión de bolas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n intersecta sólo a algunas de ellas, dado que los números n son una infinidad y las combinaciones que podemos tomar de las bolas son finitas, podemos elegir a una infinidad de números n tales que todos esos A_n intersecten exactamente a las mismas bolas. Sea $F = \{1, 2, \ldots, m\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n = \{i \in F : A_n \cap \mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_i) \neq \emptyset\}$. Es decir, F_n es el conjunto de los índices de las bolas intersectadas por A_n. Los conjuntos F_n son subconjuntos de un conjunto finito F, por lo que los conjuntos F_n sólo se pueden escoger de una colección finita, pero los números n son una infinidad, de modo que debe haber una infinidad de números n a los que les toca el mismos conjunto F_n. O lo que es lo mismo, existe un subconjunto infinito N_1 de $\mathbb{N}$ y existe un subconjunto G_1 de F tal que $F_n = G_1$

para toda $n \in N_1$. En particular se tiene que $A_n \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_i) : i \in G_1\}$ para toda $n \in N_1$. Consideremos el conjunto $Y_1 = \overline{(Y \cap (\bigcup\{\mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_i) : i \in G_1\}))}$. Notemos que $A_n \subseteq Y_1$ para toda $n \in N_1$, probaremos que $\mathcal{H}(A_n, Y_1) < \frac{1}{2}$ para toda $n \in N_1$. Sea $n \in N_1$, como $A_n \subseteq Y_1$, basta probar que $Y_1 \subseteq \mathcal{N}(\frac{1}{2}, A_n)$, tomemos un punto $y \in Y_1$, entonces existe $i_0 \in G_1$ tal que $y \in \overline{(\mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_{i_0}))}$ de donde, $d(y, p_{i_0}) \leq \frac{1}{4}$. Por otra parte, como $i_0 \in G_1 = F_n$, entonces $A_n \cap \mathcal{B}(\frac{1}{4}, p_{i_0}) \neq \emptyset$, por lo que existe un elemento a en dicha intersección, de manera que $d(y, a) \leq d(y, p_{i_0}) + d(p_{i_0}, a) < \frac{1}{2}$, de donde $y \in \mathcal{N}(\frac{1}{2}, A_n)$. Esto prueba que $Y_1 \subseteq \mathcal{N}(\frac{1}{2}, A_n)$ y por tanto $\mathcal{H}(A_n, Y_1) < \frac{1}{2}$.

Con esto hemos conseguido un subconjunto infinito de los números naturales (N_1) y un subconjunto cerrado (Y_1) de X tales que, para toda $n \in N_1$, $A_n \subseteq Y_1$ y $\mathcal{H}(A_n, Y_1) < \frac{1}{2}$. Éste es el primer paso de una inducción para obtener una sucesión de subconjuntos infinitos $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$, de los números naturales y una sucesión infinita de subconjuntos cerrados $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ de X tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $n \in N_k$, $A_n \subseteq Y_k$ y $\mathcal{H}(A_n, Y_k) < \frac{1}{k+1}$.

Supongamos entonces que se han encontrado subconjuntos infinitos $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_k$ de los naturales y subconjuntos cerrados $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_k$ de X tales que, para cada $l \in \{1, \ldots, k\}$ y cada $n \in N_l$, $A_n \subseteq Y_l$ y $\mathcal{H}(A_n, Y_l) < \frac{1}{l+1}$.

Como Y_k es compacto, existen puntos $q_1, \ldots, q_r \in Y_k$ tales que

$$Y_k \subseteq \mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_1) \cup \cdots \cup \mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_r).$$

Hacemos $E = \{1, \ldots, r\}$. Para cada $n \in N_k$, sea $E_n = \{i \in E : A_n \cap \mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_i) \neq \emptyset\}$. Es decir, E_n son los indices de las bolas intersectadas por A_n. Los conjuntos E_n son subconjuntos de un conjunto finito E, por lo que los conjuntos E_n sólo se pueden escoger de una colección finita, pero los números $n \in N_k$ son una infinidad, de modo que debe haber una infinidad de números n a los que les toca el mismo conjunto E_n. O lo que es lo mismo, existe un subconjunto infinito N_{k+1} de N_k y existe un subconjunto G de E tal que $E_n = G$ para toda $n \in N_{k+1}$. En particular se tiene que $A_n \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_i) : i \in G\}$ para toda $n \in N_{k+1}$. Consideremos el conjunto $Y_{k+1} = \overline{(Y_k \cap (\bigcup\{\mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_i) : i \in G\}))}$. Notemos que $A_n \subseteq Y_{k+1}$ para toda $n \in N_{k+1}$. Ahora demostraremos que $\mathcal{H}(A_n, Y_{k+1}) < \frac{1}{k+2}$ para toda $n \in N_{k+1}$. Sea $n \in N_{k+1}$, como $A_n \subseteq Y_{k+1}$, basta probar que $Y_{k+1} \subseteq \mathcal{N}(\frac{1}{k+2}, A_n)$. Tomemos un punto $y \in Y_{k+1}$, entonces existe $i_0 \in G$ tal que $y \in \overline{(\mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_{i_0}))}$, de manera que $d(y, q_{i_0}) \leq \frac{1}{2(k+2)}$. Por otra parte, como $i_0 \in G = E_n$, entonces $A_n \cap \mathcal{B}(\frac{1}{2(k+2)}, q_{i_0}) \neq \emptyset$, así que existe un elemento a en dicha intersección, de modo que $d(y, a) \leq d(y, q_{i_0}) + d(q_{i_0}, a) < \frac{1}{k+2}$. Por lo que $y \in \mathcal{N}(\frac{1}{k+2}, A_n)$. Esto prueba que $Y_{k+1} \subseteq \mathcal{N}(\frac{1}{k+2}, A_n)$, por lo tanto $\mathcal{H}(A_n, Y_{k+1}) < \frac{1}{k+2}$.

Con esto hemos conseguido el subconjunto infinito de los naturales (N_{k+1}) y el subconjunto cerrado (Y_{k+1}) de X tales que, para toda $n \in N_{k+1}$, $A_n \subseteq Y_{k+1}$ y $\mathcal{H}(A_n, Y_{k+1}) < \frac{1}{k+2}$.

Esto termina el paso inductivo, y por ende, la justificación de que existen sucesiones $N_1, N_2, \ldots$ y $Y_1, Y_2, \ldots$ con las propiedades mencionadas.

Elijamos un número $n_1 \in N_1$, como N_2 es infinito, existe un elemento $n_2 \in N_2$ tal que $n_2 > n_1$, como N_3 es infinito, podemos elegir un elemento $n_3 \in N_3$ tal que $n_3 > n_2$. Siguiendo así, se puede elegir una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ en $\mathbb{N}$ tal que $n_k \in N_k$ para cada

$k \in \mathbb{N}$. Dada $k \in \mathbb{N}$, $n_k \in N_k \subseteq N_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq N_1$, por lo que, para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, $n_k \in N_i$, de manera que $A_{n_k} \subseteq Y_i$ y $\mathcal{H}(A_{n_k}, Yi) < \frac{1}{i+1}$. Hacemos $Y' = Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots$, de acuerdo con el Lema 77, $\lim Y_k = Y'$, entonces demostraremos que $\lim A_{n_k} = Y'$. Sean $\varepsilon > 0$ y $K \in \mathbb{N}$ tal que $H(Y_K, Y') < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{K+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dada $k \geq K$, por lo demostrado anteriormente, $\mathcal{H}(A_{n_k}, Y_K) < \frac{1}{K+1}$. Así que, por la desigualdad del triángulo, $\mathcal{H}(A_{n_k}, Y') < \varepsilon$. Como esto ocurre para toda $k \geq K$, concluimos que $\lim A_{n_k} = Y'$. Así, por Proposición 13, 2^X es compacto. □

Corolario 79. *El hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Como ya se demostró 2^X es compacto, basta probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de $C(X)$. Supongamos que $\lim A_n = A$, donde $A \in 2^X$. Demostraremos que $A \in C(X)$ o lo que es lo mismo, que A es conexo. Supongamos que A no es conexo, entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos G y K de X tales que $A = G \cup K$. Sea $\varepsilon = \inf\{d(p,q) : p \in G \text{ y } q \in K\}$. Debido a la compacidad de G y K, tenemos que $\varepsilon > 0$. Para el número $\frac{\varepsilon}{2}$, sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{H}(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. De modo que $A \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A) = \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, G) \cup \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, K)$. Notemos que, por la elección de ε, los conjuntos $\mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, G)$ y $\mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, K)$ son ajenos y abiertos. Ya que A_n es conexo, no puede intersectar a esos dos conjuntos, por lo que tiene que estar contenido en sólo uno de ellos. Supongamos, que $A_n \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, G)$. Entonces $K \subseteq A \subseteq \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_n) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, G)$. Pero K es ajeno a $\mathcal{N}(\varepsilon, G)$, así que $K = \emptyset$, lo cual contradice la elección de K y termina la prueba de que A es conexo. Por lo tanto $C(X)$ es cerrado en 2^X, y entonces por el Teorema 10, $C(X)$ es compacto. □

Definición 80. *Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(p), f(q)) < \epsilon$ para todos p y q en X para los que $d(p,q) < \delta$. Notemos que toda función uniformemente continua es continua.*

Teorema 81. *Sea X un continuo. La función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ definida por*

$$\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\},$$

para cada $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, es continua.

Demostración. Sean X un continuo. Probaremos que la función unión $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ es uniformemente continua. Veamos que dados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C} \in 2^{2^X}$, se cumple que $\mathcal{H}(\bigcup\mathcal{A}, \bigcup\mathcal{C}) \leq \mathcal{H}^2(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, donde $\mathcal{H}^2$ es la métrica de Hausdorff para 2^{2^X}.
Sea $\mathcal{A}, \mathcal{C} \in 2^{2^X}$ y $\varepsilon \in E^2(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Así $\mathcal{A} \subseteq \beta(\varepsilon, \mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \subseteq \beta(\varepsilon, \mathcal{A})$. Supongamos que $a \in \bigcup\mathcal{A}$, entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. Así existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{H}(A, C) < \varepsilon$. Por el Lema 64, tenemos que $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, C)$ y $C \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$. Por lo que existe $c \in C$ tal que $d(a, c) < \varepsilon$. Luego, $a \in \mathcal{N}(\varepsilon, \bigcup\mathcal{C})$. Así, $\bigcup\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, \bigcup\mathcal{C})$. De la misma manera $\bigcup\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, \bigcup\mathcal{A})$, de donde $\varepsilon \in E(\bigcup\mathcal{A}, \bigcup\mathcal{C})$. Dado que $E^2(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \subseteq E(\bigcup\mathcal{A}, \bigcup\mathcal{C})$, entonces $\inf E(\bigcup\mathcal{A}, \bigcup\mathcal{C}) \leq \inf E^2(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, es decir, $\mathcal{H}(\bigcup\mathcal{A}, \bigcup\mathcal{C}) \leq \mathcal{H}^2(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.
Sean $\mathcal{A}, \mathcal{C} \in 2^{2^X}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Si $\mathcal{H}^2(\mathcal{A}, \mathcal{C}) < \delta$, entonces, $\mathcal{H}(\bigcup\mathcal{A}, \bigcup\mathcal{C}) < \varepsilon$. Así, la función unión es uniformemente continua. Por tanto, la función unión es continua. □

Proposición 82. *Sean $f : X \to Y$ una función entre continuos y $f^* : 2^X \to 2^Y$ definida por $f^*(E) = f(E)$, se tiene que f^* es continua si y sólo si f es continua.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Probaremos que f es uniformemente continua. Sea $\gamma > 0$. Como f^* es continua definida en un compacto, entonces es uniformemente continua. Así existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{H}(A, B) < \delta$, entonces $\mathcal{H}(f^*(A), f^*(B)) < \gamma$. De esta manera si $d(x, y) < \delta$, entonces $x \in \mathcal{B}(\delta, y)$ y $y \in \mathcal{B}(\delta, x)$. Así $\{x\} \subseteq \mathcal{N}(\delta, \{y\})$ y $\{y\} \subseteq \mathcal{N}(\delta, \{x\})$, es decir, $\mathcal{H}(\{x\}, \{y\}) < \delta$, de donde $\mathcal{H}(f^*(\{x\}), f^*(\{y\})) < \gamma$, por lo que $\mathcal{H}(f(\{x\}), f(\{y\})) < \gamma$. Por lo tanto f es uniformemente continua.
$\Leftarrow\rfloor$ Sea $\gamma > 0$. Como f es continua existe $\delta > 0$ tal que si $\mathcal{H}(x, y) < \delta$, entonces $\mathcal{H}(f(x), f(y)) < \gamma$. Sean $A, B \in 2^X$ tal que $\mathcal{H}(A, B) < \delta$, se tiene que $A \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$ y $B \subseteq \mathcal{N}(\delta, A)$. Si $w \in f(A)$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = w$, así existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \delta$, de la continuidad de f se tiene que $d(f(x), f(y)) < \gamma$. De esta manera $f(A) \subseteq \mathcal{N}(\gamma, f(B))$. De la misma forma se prueba que $f(B) \subseteq \mathcal{N}(\gamma, f(A))$. De aquí se concluye que $\mathcal{H}(f^*(A), f^*(B)) < \gamma$. Por lo que f^* es continua. $\square$

La demostración de la siguiente proposición la podemos encontrar en [7, Lema 26.4].

Proposición 83. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y $x_0 \notin Y$, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y Y respectivamente.*

Proposición 84. *Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.*

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff compacto. Sea F_1 y F_2 subconjuntos cerrados ajenos de X. Demostraremos que existen U y V conjuntos abiertos ajenos tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Sea $x_1 \in F_1$, por Proposición 83, existen abiertos ajenos U_1 y V_1 tales que $x_1 \in U_1$ y $F_2 \subseteq V_1$. Así, existen abiertos ajenos U_n y V_n tales que $x_n \in U_n$ y $F_2 \subseteq V_n$ para todo $x_n \in F_1$. Como F_2 es cerrado, entonces es compacto y por lo anterior $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una cubierta abierta de él, por lo que existe una subcubierta finita. Tomemos $U = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$ y $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_m$. Notemos que $U \cap V = \emptyset$, pues de lo contrario, $U_i \cap V_i \neq \emptyset$ para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, lo cual no puede ocurrir. Así, U y V son abiertos ajenos tales que $F_1 \subseteq U$ y $F_2 \subseteq V$. Por lo tanto X es normal. $\square$

2.4. Conexidad

Definición 85. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Definimos la **componente de** p como $C(p) = \bigcup\{D \subseteq X : D$ es conexo y $p \in D\}$.*

Definición 86. *Sean X un espacio topológico y $p \in X$. Definimos la **quasi-componente** de $p \in X$ como $Q(p) = \bigcap\{D \subseteq X : D$ es abierto y cerrado y $p \in D\}$*

El siguiente lema se encuentra demostrado en [1, Teorema 2.41].

Lema 87. *Sea $\{K_j : j \in J\}$ una colección de subconjuntos compactos de un espacio de Hausdorff. Si U es un abierto de X que contiene a $\bigcap_{j\in J} K_j$, entonces existe un subconjunto finito S de J tal que $\bigcap_{j\in S} K_j \subseteq U$.*

Proposición 88. *Si X es un espacio topológico y $p \in X$, entonces $C(p) \subseteq Q(p)$.*

Demostración. Sea $p \in X$ y A un conjunto abierto y cerrado en X tal que $p \in A$. Dado que $C(p)$ es conexo, no puede intersectar a A y $X \setminus A$. Como $p \in C(p) \cap A$, entonces $C(p) \subseteq A$. Así la componente conexa de p en X es un subconjunto de cada conjunto abierto y cerrado en X al cual pertenece p. Por lo que $C(p) \subseteq Q(p)$. □

Proposición 89. *Sea X un espacio topológico. Si X es compacto y de Hausdorff, entonces para cada $x \in X$, $C(x) = Q(x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por la Proposición 88, se cumple que $C(x) \subseteq Q(x)$. Para demostrar que $Q(x) \subseteq C(x)$ es suficiente ver que $Q(x)$ es conexo.
Supongamos que $Q(x)$ no es conexo. Entonces, por Definición 16, existe una separación de cerrados A, B tal que $Q(x) = A \cup B$ pues $Q(X)$ es cerrado. Como X es normal por Teorema 84, existen dos abiertos ajenos U y V tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in U$.
Sea $\mathcal{F} = \{W \subseteq X : x \in W$ y W es abierto-cerrado en $X\}$, como $\bigcap \mathcal{F} = Q(x) \subseteq U \cup V$, por el Lema 87, existe $\mathcal{G}$ una subcolección finita de $\mathcal{F}$ tal que $\bigcap \mathcal{G} \subseteq U \cup V$. Sea $G = \bigcap \mathcal{G}$. Entonces G es abierto-cerrado en X, además:

$$\begin{aligned}\overline{U \cap G} &\subseteq \overline{U} \cap G \qquad \text{pues G es cerrado}\\ &= \overline{U} \cap (U \cup V) \cap G\\ &= U \cap G\end{aligned}$$

Entonces $U \cap G = \overline{U \cap G}$ es abierto-cerrado, $x \in U \cap G$ y $Q(x) \subseteq U \cap G$.
Así, $B \subseteq Q(x) \subseteq U \cap G \subseteq U$ y $B \subseteq V$, esto es una contradicción. Por lo tanto $Q(x)$ es conexo. □

Proposición 90. *Sea X un espacio topológico compacto y de Hausdorff. Si K es una componente de X y F un subconjunto cerrado de X tales que $F \cap K = \emptyset$, entonces existe un abierto-cerrado L de X tal que $K \subseteq L$ y $L \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Sea $p \in K$, por la Proposición 89, $K = C(p) = Q(p)$. Dado que $F \cap Q(p) = \emptyset$, por cada $y \in F$, existe un abierto-cerrado V_y tal que $p \in V_y$ y $y \notin V_y$. Para cada $y \in F$, sea $U_y = X \setminus V_y$. Notemos que cada U_y es abierto-cerrado tal que $y \in U_y$ y $p \notin U_y$.
Hagamos $\mathcal{F} = \{U_y : y \in F\}$. Claramente $\mathcal{F}$ es una cubierta abierta de F, por Proposición 10, F es compacto, entonces existen $y_1, y_2, \dots, y_m$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$. Sea $L = \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i}$.

Notemos que L es abierto-cerrado y $p \in L$. Así, dado que $K = Q(p)$, $K \subseteq L$. Ahora, como $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$ y $L = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$, $L \cap F = \emptyset$. Esto prueba que L cumple con las condiciones de la proposición. $\square$

Lema 91. *Sea X un continuo. El conjunto $F_\infty(X) = \bigcup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en 2^X.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$ y sea $\varepsilon > 0$. Como A es compacto y $\{\mathcal{B}(\varepsilon, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subseteq \mathcal{B}(\varepsilon, a_1) \cup \ldots \cup \mathcal{B}(\varepsilon, a_n) = \mathcal{N}(\varepsilon, \{a_1, \ldots, a_n\})$. Además, dado que $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, por Lema 64, $\mathcal{H}(A, \{a_1, \ldots, a_n\}) < \varepsilon$. De donde $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathcal{B}(\varepsilon, A) \cap F_\infty(X)$.
Por lo tanto $F_\infty(X)$ es denso en 2^X. $\square$

Sea $X^n = X \times \cdots \times X$, con la métrica $D : X^n \times X^n \to [0, \infty)$, definida como

$$D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}.$$

Es natural definir la siguiente función $g : X^n \to F_n(X)$ como $g(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Lema 92. *La función g es uniformemente continua y suprayectiva.*

Demostración. Para probar que g es uniformemente continua, sean $\varepsilon > 0$ y $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in X^n$ tales que $D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\} < \varepsilon$. Ahora, probaremos $\mathcal{H}(g(x_1, \ldots, x_n), g(y_1, \ldots, y_n)) < \varepsilon$. Dado que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, \{y_1, \ldots, y_n\})$ y $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, \{x_1, \ldots, x_n\})$. Así, por el Lema 64, $\mathcal{H}(g(x_1, \ldots, x_n), g(y_1, \ldots, y_n)) < \varepsilon$
Por lo tanto g es uniformemente continua.
Para ver que g es suprayectiva, sea $\{x_1, \ldots, x_k\} \in F_n(X)$, donde $k \leq n$. Entonces

$$g((x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_k\},$$

donde $x_{k+1} = \cdots = x_n = x_k$. Por lo que g es suprayectiva. $\square$

Teorema 93. *Si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dado que X^n es conexo, por el Lema 92, por lo que $F_n(X)$ es imagen continua de un conexo, así por Proposición 23, $F_n(X)$ es conexo. $\square$

Teorema 94. *El hiperespacio 2^X es conexo.*

Demostración. Para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $F_1(X) \subseteq F_n(X)$, por el Teorema 93, $F_n(X)$ es conexo.
Dado que $F_1(X) \subseteq F_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 18, $F_\infty(X) = \bigcup\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo. Por el Lema 91, $F_\infty(X)$ es denso en 2^X, así por la Proposición 20, 2^X es conexo. $\square$

En la Sección 2.5 se demostrará que $C(X)$ y $C_n(X)$ son conexos.

2.5. Funciones de Whitney y Arcos Ordenados

Definición 95. *Sea X un continuo. Una **función de Whitney** para 2^X es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:*

a) $\mu(\{x\}) = 0$ *para toda* $x \in X$,

b) Para $A, B \in 2^X$, *si* $A \subsetneq B$, *entonces* $\mu(A) < \mu(B)$.

La demostración del siguiente lema se encuentra en [6, Teorema 10.5].

Lema 96. *Sea $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones continuas de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$ y $0 < M$ tales que $|\mu_n| < M$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ es continua.*

Lema 97. *Sea X un espacio métrico, con métrica d. La métrica $d'(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$ induce la misma topología que d.*

Demostración. Sean d la métrica de X y $d'(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$ Demostraremos que $\mathcal{B}_{d'}(\delta, a) \subseteq \mathcal{B}_d(\delta', a)$. Sean $\delta = \text{mín}\{1, \delta'\}$ y $b \in \mathcal{B}_{d'}(\delta, a)$. Entonces $d'(a, b) < \delta = \text{mín}\{1, \delta'\}$. Si $\delta = 1$, así $d'(a, b) < \delta < \delta'$. Si $\delta = \delta'$, se tiene que $d'(a, b) < \delta = \delta'$. Por lo que $b \in \mathcal{B}_d(\delta', a)$. Para ver que $\mathcal{B}_d(\delta', a) \subseteq \mathcal{B}_{d'}(\delta, a)$. Sean $\delta = \delta'$ y $b \in \mathcal{B}_d(\delta', a)$. Entonces $d'(a, b) < \delta = \delta'$. Por lo que $b \in \mathcal{B}_{d'}(\delta, a)$. □

Teorema 98. *Sea X un continuo. Entonces existen funciones de Whitney para 2^X.*

Demostración. Sea X un continuo. Entonces X es métrico compacto, por lo que existe un conjunto denso numerable, digamos $D = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$. Por Lema 97, podemos suponer que $d(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$. Sea $\mu_n : 2^X \to \mathbb{R}$ definida por $\mu_n(A) = \text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} - \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}$, para cada $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que μ_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Como A es compacto, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $d(a_1, p_n) = \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}$ y $d(a_2, p_n) = \text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. Por Lema 64, $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, así, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \varepsilon$ y $d(a_2, b_2) < \varepsilon$. Notemos que $\text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} = d(a_2, p_n) \leq d(a_2, b_2) + d(b_2, p_n) < \varepsilon + \text{máx}\{d(b, p_n) : b \in B\}$ y $\text{mín}\{d(b, p_n) : b \in B\} = d(b_1, p_n) \leq d(b_1, a_1) + d(a_1, p_n) < \varepsilon + \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}$, de aquí que $\text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} + \text{mín}\{d(b, p_n) : b \in B\} < \varepsilon + \text{máx}\{d(b, p_n) : b \in B\} + \varepsilon + \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}$.
Entonces $\mu_n(A) - \mu_n(B) = (\text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} - \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}) - (\text{máx}\{d(b, p_n) : b \in B\} - \text{mín}\{d(b, p_n) : b \in B\}) < 2\varepsilon$. Por tanto μ_n es continua.

Ahora, vamos a demostrar que $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$ está bien definida y es continua. Notemos que $0 \leq \mu_n(A) \leq \text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} \leq 1$.
Demostraremos que $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$. Observemos que $\mu_n(\{x\}) = \text{máx}\{d(w, p_n) : w \in \{x\}\} - \text{mín}\{d(w, p_n) : w \in \{x\}\} = d(x, p_n) - d(x, p_n) = 0$.
Supongamos que $A \subseteq B$, se demostrará que $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$. Como $A \subseteq B$, entonces

$\{d(a,p_n) : a \in A\} \subset \{d(b,p_n) : b \in B\}$, por lo que $\text{máx}\{d(a,p_n) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(b,p_n) : b \in B\}$ y $-\text{mín}\{d(a,p_n) : a \in A\} \leq -\text{mín}\{d(b,p_n) : b \in B\}$, así $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.
Supongamos que $A \subseteq B$, $A \neq B$, probaremos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_m(A) < \mu_m(B)$. Sea $b_0 \in B \setminus A$. Como $A \in 2^X$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(2\varepsilon, b_0) \cap A = \emptyset$. Como D es denso existe $p_m \in D$ tal que $d(p_m, b_0) < \varepsilon$.
Probaremos que $d(a,p_m) > \varepsilon$ para toda $a \in A$. Supongamos que $d(a,p_m) < \varepsilon$ para algún $a \in A$, entonces $d(a,b_0) \leq d(a,p_m)+d(p_m,b_0) < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$, por lo que $a \in \mathcal{B}(2\varepsilon, b_0)$, lo cual no puede ocurrir pues $\mathcal{B}(2\varepsilon, b_0)\cap A = \emptyset$. Notemos que $\text{mín}\{d(b,p_m) : b \in B\} \leq d(b_0,p_m) < \varepsilon$, además $\varepsilon < \text{máx}\{d(a,p_m) : a \in A\}$, por lo demostrado anteriormente $\varepsilon < \text{mín}\{d(a,p_m) : a \in A\}$, entonces $\text{mín}\{d(b,p_m) : b \in B\} < \text{mín}\{d(a,p_m) : a \in A\}$, además $\text{máx}\{d(a,p_m) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(b,p_m) : b \in B\}$, por lo que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$. □

El siguiente teorema es conocido con el nombre de **Golpes en la frontera**.

Teorema 99. *Sean X un espacio topológico conexo, compacto y de Hausdorff y U un subconjunto propio abierto de X. Si K es una componente de $\overline{U}$, entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $K \cap Fr(U) = \emptyset$. Sean $Y = \overline{U}$ y K la componente de $\overline{U}$. Entonces $K \subseteq \overline{U}$ y $Fr(U)$ es un cerrado de Y, por Proposición 89, existe un abierto-cerrado L tal que $K \subseteq L$ y $L \cap Fr(U) = \emptyset$. Entonces L es cerrado en X, $L \neq \emptyset$ y $L \subseteq \overline{U} \setminus Fr(U) = U$. Como L es abierto en $\overline{U}$, existe W abierto en X tal que $\overline{U} \cap W = L$. Dado que $L \subseteq U \subseteq \overline{U}$, se tiene que $L = U \cap W$, es decir, L es abierto en X, por lo que L es abierto-cerrado en X. Como X es conexo, entonces $L = X$, además $L \subseteq U$ de donde $U = X$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. □

Teorema 100. *Sean X un espacio topológico conexo, compacto, Hausdorff y A, B no vacíos, conexos y cerrados de X tales que $A \subsetneq B$.Entonces existe un subconjunto cerrado y conexo C de X tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

Demostración. Sea $p \in B \setminus A$. Dado que por Proposición 84, B es normal, entonces existe un abierto U de B tal que $A \subseteq U \subseteq \overline{U^B} \subseteq B \setminus \{p\}$. Sea C la componente de $\overline{U^B}$ que contiene a A. Dado que $\overline{U^B}$ es cerrado en X, C es cerrado en X. Por otra parte, como $p \notin C$ se tiene que $C \subseteq B$ y $C \neq B$. Falta demostrar que $A \subseteq C$ y $A \neq C$. Sabemos que U es abierto de B entonces $U \cap Fr(U) = \emptyset$. Dado que $A \subseteq U$ tenemos que $A \cap Fr(U) = \emptyset$, por Teorema 99, $C \cap Fr(U) \neq \emptyset$ por lo que se tiene $A \subseteq C$, $A \neq C$. □

Lema 101. *Sean A y B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney y $t \in [\mu(A), \mu(B)]$. Entonces existe $C \in C(X)$ tal que $\mu(C) = t$.*

Demostración. Sea $\gamma = \mu^{-1}([t,1]) \cap \{D \in C(X) : A \subseteq D \subseteq B\}$. Notemos que $\mu^{-1}([t,1])$ es cerrado en $C(X)$ pues μ es continua. Además $\{D \in C(X) : A \subseteq D \subseteq B\}$ es cerrado. Por lo que γ es cerrado y por tanto compacto. Además $\gamma \neq \emptyset$ pues $B \in \gamma$. Por lo que μ alcanza su mínimo en γ, es decir, existe $E \in \gamma$ tal que $\mu(E) \leq \mu(D)$ para toda $D \in \gamma$.
Ahora, sea $\beta = \mu^{-1}([0,t]) \cap \{D \in C(X) : A \subseteq D \subseteq E\}$. Notemos que β es compacto pues $\mu^{-1}([0,t]) \subseteq C(X)$ y $\{D \in C(X) : A \subseteq D\} \subseteq C(X)$ son cerrados, por lo que β es cerrado.

Además $\beta \neq \emptyset$ pues $A \in \beta$. Como μ alcanza su máximo, entonces existe $F \in \beta$ tal que $\mu(F) \geq \mu(D)$ para todo $D \in \beta$. Si $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$, entonces podríamos proponer al conjunto C. Supongamos $\mu(F) < t < \mu(E)$. Como $F \subsetneq E$. Por Teorema 100 existe $G \in C(X)$ tal que $A \subseteq F \subsetneq G \subsetneq E \subseteq B$, entonces $\mu(F) < \mu(G) < \mu(E)$. Si $\mu(G) \geq t$, entonces $G \in \gamma$ y $\mu(E) > \mu(G)$, lo cual es una contradicción. Si $\mu(G) \leq t$, entonces $G \in \beta$ y $\mu(F) < \mu(G)$, lo cual contradice la elección de F. Por lo que $\mu(E) = t$ o $\mu(F) = t$. $\square$

Definición 102. *Sean $A, B \in C(X)$, $A \subsetneq B$. Diremos que una función continua $\alpha : [0,1] \to C(X)$, es un **arco ordenado** de A a B si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, para $0 \leq s < t \leq 1$.*

Teorema 103. *Sean $A, B \in C(X)$, $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Demostración. Sean $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney fija y $\{r_1, r_2, \ldots\}$ una numeración del conjunto $E = \{\mu(A), \mu(B)\} \cup \{(\mu(A), \mu(B)) \cap \mathbb{Q}\}$ tal que $\mu(A) = r_1$ y $\mu(B) = r_2$. Construiremos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$ con la propiedad de que si $r_n < r_m$, entonces $A_n \subseteq A_m$ y $\mu(A_m) = r_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Si $\mu(A) = r_1$, $\mu(B) = r_2$ por Teorema 100, existe $A_3 \in C(X)$ tal que $A_1 = A \subseteq A_3 \subseteq B = A_2$, $A \neq A_3 \neq B$ y $\mu(A_3) = r_3$.
Supongamos que por inducción hemos construido $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in C(X)$ cumpliendo las condiciones. Consideremos r_{n+1}. Como E es denso, existen $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $r_i < r_{n+1} < r_j$ y además $(r_i, r_j) \cap \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \neq \emptyset$, por Teorema 100, existe $A_{n+1} \in C(X)$ tal que $A_i \subseteq A_{n+1} \subseteq A_j$ y $\mu(A_{n+1}) = r_{n+1}$. Así existe A_i en $C(X)$.
Sean $\mathcal{A} = Cl_{C(X)}\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ la cerradura en $C(X)$ de $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ y $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [r_1, r_2]$. Demostraremos que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. Por Proposición 39, basta probar que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es biyectiva. Para ver que es sobreyectiva notemos que $\mu(A) \subseteq [r_1, r_2]$, además $\mu(A)$ es compacto que contiene a $\mathbb{Q} \cap [r_1, r_2]$ por lo que $\mu(A) = [r_1, r_2]$.
Para ver que es inyectiva, sean $C, D \in \mathcal{A}$. Existen subsucesiones $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to C$ y $\{A_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \to D$. Consideremos $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ las correspondientes sucesiones, entonces $r_{n_k} < r_{m_k}$ o $r_{m_k} < r_{n_k}$, como $\mathbb{N}$ es infinito, entonces $r_{n_k} < r_{m_k}$ o $r_{m_k} < r_{n_k}$ para una cantidad infinita. Supongamos $r_{n_k} < r_{m_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $A_{n_k} \subseteq A_{m_k}$, así $C \subseteq D$, por lo que $\mu(C) < \mu(D)$. Por lo tanto $\mu|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva y de aquí que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo.
Para definir el arco ordenado consideremos $\Phi : [0,1] \to [r_1, r_2]$ un homeomorfismo creciente y sea $\alpha = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \Phi$. Tenemos que $\alpha(0) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\Phi(0)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_1) = A$ y $\alpha(1) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\Phi(1)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(r_2) = B$.
Por último demostraremos que si $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\alpha(s) \subseteq \alpha(t)$. Sean s, t tales que $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\Phi(s) < \Phi(t)$. Sean $C = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\Phi(s))$ y $D = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\Phi(t))$. Se tiene que $\mu(C) < \mu(D)$. Observemos que $C \subseteq D$ o $D \subseteq C$, si $D \subseteq C$ contradecimos el hecho de que $\mu(C) < \mu(D)$. Si $C \subseteq D$, entonces $\alpha(s) \subseteq \alpha(t)$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ lo cual termina la demostración. $\square$

Teorema 104. *Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subseteq B$, $A \neq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si, toda componente de B intersecta a A.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea $\alpha : [0,1] \to 2^X$ un arco ordenado de A a B en 2^X. Entonces $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subseteq \alpha(t)$, $\alpha(s) \neq \alpha(t)$ cuando $0 \leq s < t \leq 1$.
Supongamos que existe una componente K de B que no intersecta a A. Por Proposición 90, existe un subconjunto abierto-cerrado L de B tal que $K \subseteq L$ y $L \cap A = \emptyset$. Entonces los conjuntos L y $B \setminus L$ son subconjuntos cerrados de B, ajenos, diferentes del vacío y su unión es B. Por Teorema 75, los conjuntos $\Gamma(B \setminus L) = \{C \in 2^X : C \subseteq B \setminus L\}$ y $\Lambda(L) = \{C \in 2^X : C \cap L \neq \emptyset\}$ son cerrados en 2^X. Observemos que $\Gamma(B \setminus L)$ y $\Lambda(L)$ son ajenos, si $M \in \Gamma(B \setminus L) \cap \Lambda(L)$, entonces $M \subseteq (B \setminus L)$ y $M \cap L \neq \emptyset$, de donde $M \cap L \subseteq ((B \setminus L) \cap L) = \emptyset$, por lo que $M \cap L = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $M \cap L \neq \emptyset$.
Sea $t \in [0,1]$ tal que $\alpha(t) \subseteq \alpha(1) = B$. Así $\alpha(t) \subseteq B$ por lo que $\alpha(t) \in \Gamma(B \setminus L) \cup \Lambda(L)$. De aquí que $\alpha([0,1]) \subseteq \Gamma(B \setminus L) \cup \Lambda(L)$. Notemos que $\alpha(0) = A \in \Gamma(B \setminus L)$ y $\alpha(1) = B \in \Lambda(L)$. Entonces $\alpha([0,1])$ es un conjunto conexo contenido en la unión de dos cerrados ajenos y los intersecta a ambos. Esto contradice la conexidad de $\alpha([0,1])$.
$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que toda componente de B intersecta a A. Fijemos una función de Whitney $\mu : 2^X \to [0,1]$. Hacemos $\Gamma(B) = \{D \in C(X) : D \subseteq B\}$. Por Teorema 75, $\Gamma(B)$ es cerrado, y por lo tanto compacto.
Para cada $a \in A$ y $t \in [0,1]$, definimos $F(a,t) = \bigcup\{D \in \Gamma(B) : a \in D \text{ y } \mu(D) \leq t\}$. Probaremos que, para cada $t \in [0,1]$, el conjunto $\alpha(t) = \bigcup\{F(a,t) : a \in A\}$. Sea p de X tal que $p = \lim p_n$, para cada $p_n \in \alpha(t)$. Entonces existen sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A y de subcontinuos de B, respectivamente, tales que $p_n \in D_n$, $a_n \in D_n$ y $\mu(D_n) \leq t$, para toda $n \in \mathbb{N}$, pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \{F(a_n,t) : a_n \in A\} = \bigcup\{D \in \Gamma(B) : a_n \in A$ y $\mu(D) \leq t\}$, por lo que $p_n \in \{D_n \in \Gamma(B) : a_n \in A$ y $\mu(D_n) \leq t\}$.
Como A es compacto y $\Gamma(B)$ también lo es, podemos tomar subsucesiones convergentes $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente, que convergen a un punto $a \in A$ y a un subcontinuo D de B, respectivamente. Por Proposición 68, $a \in A \cap D$ y $p \in D$ y, por la continuidad de μ, $\mu(\lim D_n) = \mu(D) \leq t$. De manera que $p \in F(a,t) \subseteq \alpha(t)$. Por lo tanto $\alpha(t)$ es cerrado.
Mostraremos que la función $\alpha : [0,1] \to 2^X$ es continua. Por la Proposición 24, sólo basta probar que si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de puntos de $[0,1]$ tal que $\lim t_n = t$ y $\lim \alpha(t_n) = E$ para alguna $E \in 2^X$, entonces $E = \alpha(t)$.
Demostraremos que $\alpha(t) \subseteq E$. Sea $p \in \alpha(t)$. Entonces existen $a \in A$ y $D \in \Gamma(B)$ tales que $p, a \in D$ y $\mu(D) \leq t$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $s_n = \min\{t_n, \mu(D)\}$. Por el Lema 101, existe un subcontinuo D_n de D tal que $a \in D_n$ y $\mu(D_n) = s_n$. Como $\Gamma(D)$ es compacto existe una subsucesión $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a un elemento D_0 de $\Gamma(D)$. Notemos que

$$\lim \mu(D_n) = \lim s_n = \lim \min\{t_n, \mu(D)\} = \min\{\lim t_n, \mu(D)\} = \min\{t, \mu(D)\} = \mu(D).$$

De manera que $\mu(D_0) = \lim \mu(D_{n_k}) = \lim s_{n_k} = \mu(D)$. De modo que $\mu(D_0) = \mu(D)$. Dado que $D_0 \subseteq D$, concluimos que $D_0 = D$. Observemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $D_{n_k} \subseteq F(a, t_{n_k}) \subseteq \alpha(t_{n_k})$. Por la Proposición 68, $D_0 = \lim D_{n_k} \subseteq \lim \alpha(t_{n_k}) = E$. De modo que $D \subseteq E$. En particular, $p \in D$. Por lo que $\alpha(t) \subseteq E$.

Falta probar que $E \subseteq \alpha(t)$. Sea $p \in E$. Por la Proposición 69, existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\lim p_n = p$ y $p_n \in \alpha(t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n \in A$ y $D_n \in \Gamma(B)$ tales que $p_n, a_n \in D_n$ y $\mu(D_n) \leq t_n$. Como A y $\Gamma(B)$ son compactos, existen subsucesiones $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{D_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ respectivamente, tales que $\lim a_{n_k} = a$ y $\lim D_{n_k} = D$ para algunos $a \in A$ y $D \in \Gamma(B)$. Por la continuidad de μ, $\mu(D) \leq t$ y por la Proposición 68, $p, a \in D$. De manera que $p \in F(a,t) \subseteq \alpha(t)$. Por lo que $E \subseteq \alpha(t)$. Por lo tanto α es continua.
Sea $a \in A$, se tiene que $F(a,0) = \bigcup\{D \in \Gamma(B) : a \in D \text{ y } \mu(D) \leq 0\} = \{a\}$. Por lo que $\alpha(0) = A$. Dada $a \in A$, si $D \in \Gamma(B)$ y $a \in D$, entonces D está contenido en la componente $C_B(a)$ de B que contiene a a. Así que $F(a,1) \subseteq C_B(a)$. Por otra parte, $C_B(a) \in \Gamma(B)$, $a \in C_B(a)$ y $\mu(C_B(a)) \leq 1$. De manera que $C_B(a) \subseteq F(a,1)$. Por lo que $F(a,1) = C_B(a)$ para toda $a \in A$. Como A intersecta a todas las componentes de B, $B = \bigcup\{C_B(a) : a \in A\} = \bigcup\{F(a,1) : a \in A\} = \alpha(1)$. Por lo tanto $\alpha(1) = B$.
Si $0 \leq s \leq t \leq 1$ y $p \in \alpha(s)$, entonces existe $a \in A$ y $D \in \Gamma(B)$ tales que $a, p \in D$ y $\mu(D) \leq s \leq t$. De manera que $p \in \alpha(t)$. De aquí que $\alpha(s) \subseteq \alpha(t)$.
Ahora veamos que si $0 \leq s < t \leq t$, entonces $\alpha(s) \subseteq \alpha(t)$. Como esto no necesariamente es cierto, se dará una reparametrización de α que cumpla con esta condición.
Sean $u = \mu(A)$ y $v = \mu(B)$. Dada $t \in [0,1]$, $A = \alpha(0) \subset \alpha(t) \subset \alpha(1) = B$. Así que $u = \mu(A) = \mu(\alpha(0)) \leq \mu(\alpha(t)) \leq \mu(\alpha(1)) = \mu(B) = v$. De modo que $\mu(\alpha(t)) \in [u,v]$.
Sea $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$. Entonces $\mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de 2^X tal que $\mu(\mathcal{A}) = [u,v]$. Dadas $s \leq t$ tales que $\alpha(s) \neq \alpha(t)$, tenemos que $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$. De modo que $\mu(\alpha(s)) < \mu(\alpha(t))$. Por lo que $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [u,v]$ es una biyección. Como $A \subsetneq B$, $u < v$. Consideremos $\varphi : [0,1] \to [u,v]$ una biyección estrictamente creciente y $\beta : [0,1] \to \mathcal{A}$ dada por $\beta = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \varphi$. Tenemos que $\beta(0) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \varphi(0) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\varphi(0)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(u) = A$, $\beta(1) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \varphi(1) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\varphi(1)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(v) = B$ y $\beta(s) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \varphi(s) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\varphi(s)) \leq (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1}(\varphi(t)) = (\mu|_{\mathcal{A}})^{-1} \circ \varphi(t) = \beta(t)$, por lo que β es el arco ordenado que buscabamos y une a A con B en 2^X. □

Corolario 105. *$C(X)$ es conexo por arcos.*

Demostración. Sea $A \in C(X) \setminus \{X\}$. Por Teorema 103, existe arco ordenado de A a X para todo $A \in C(X) \setminus \{X\}$, por lo que $C(X)$ es arco conexo. □

Corolario 106. *$C(X)$ es conexo.*

Corolario 107. *2^X es arco conexo.*

Demostración. Mostraremos que cualquier $A \in 2^X$ puede ser conectado con X. Sean $A \in 2^X$ y $a \in A$. Por Teorema 103, existe un arco ordenado de $\{a\}$ a X, es decir existe una función continua $\beta : [0,1] \to C(X)$, tal que $\beta(0) = \{a\}$ y $\beta(1) = X$.
Sea $\alpha : [0,1] \to 2^X$ definida por $\alpha(t) = A \cup \beta(t)$. Notemos que $\alpha(0) = A \cup \beta(0) = A \cup \{a\} = A$ y $\alpha(1) = A \cup \beta(1) = A \cup X = X$. Solo nos falta mostrar que α es continua. Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Demostraremos que $\lim_{n\to\infty} \alpha(t_n) = \alpha(t)$. Como β es continua, entonces $\lim \beta(t_n) = \beta(t)$, por lo que $\lim A \cup \beta(t_n) = A \cup \beta(t)$. Por lo tanto α es continua, y así α es una arco ordenado de A a X. □

La demostración del siguiente teorema se puede ver en [5, Teorema 4.11].

Teorema 108. *X es arco conexo si, y sólo si $F_n(X)$ es arco conexo.*

Teorema 109. *X es arco conexo si, y sólo si $F_\infty(X)$ es arco conexo.*

Teorema 110. *Sea X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(X)$ es arco conexo.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por Corolario 105, $C(X)$ es un continuo arco conexo, por Teorema 108, $F_n(C(X))$ es arco conexo. Sea $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup A$, con $A \in \mathcal{A}$. Por Teorema 81, σ es continua. Observemos que $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$, además $\sigma|_{F_n(C(X))} : F_n(C(X)) \to C_n(X)$ es una función continua. Por tanto $C_n(X)$ es un continuo arco conexo. $\square$

Teorema 111. *Sea X es un continuo. Entonces $C_\infty(X)$ es un continuo arco conexo.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por Corolario 105 $C(X)$ es un continuo arco conexo, por Teorema 109, $F_\infty(C(X))$ es arco conexo. Sea $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup A$, con $A \in \mathcal{A}$. Por Teorema 81, σ es continua. Observemos que $\sigma(F_\infty(C(X))) = C_\infty(X)$, además $\sigma|_{F_\infty(C(X))} : F_\infty(C(X)) \to C_\infty(X)$ es una función continua. Por tanto $C_\infty(X)$ es un continuo arco conexo. $\square$

Capítulo 3

Modelos de Hiperespacios

En este capítulo se realizarán algunas representaciones geométricas de ciertos hiperespacios. No se mostrará formalmente los homeomorfismos entre los conjuntos y los hiperespacios, pero se dará la asignación correspondiente.

Ejemplo 112. *A continuación se mostrará un modelo geométrico para* $C([0,1])$.
Sabemos que los subcontinuos del intervalo $[0,1]$ *son sus subintervalos cerrados por lo que podemos hacer las siguientes identificaciones:*

$$\begin{aligned} C([0,1]) &= \{A \subseteq [0,1] : A \text{ es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de } [0,1]\} \\ &= \{[a,b] \subseteq [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \\ &\approx \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \end{aligned}$$

El símbolo " $\approx$ *" significa "homeomorfo a".*
Notemos que el conjunto $T = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ *es el triángulo en* $\mathbb{R}^2$ *acotado por el eje* Y*, la recta que une los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,1)$ *y la recta que está formada por los puntos cuya segunda coordenada es igual a 1. Este triángulo se muestra en la siguiente figura.*

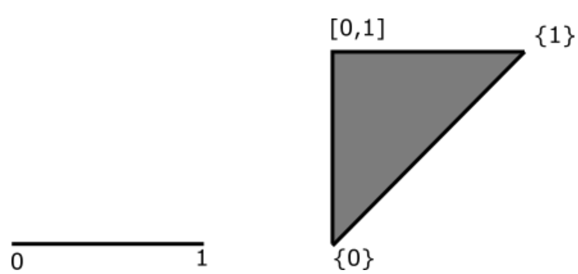


Figura 3.1: $C([0,1])$

Entonces podemos decir que un modelo geométrico para $C([0,1])$ *es el triángulo* T*. Veamos como quedan representados algunos conjuntos particulares. Por ejemplo, el intervalo* $[0,1]$ *queda representado por el vértice* $(0,1)$ *de* T*. Un conjunto de la forma* $\{p\}$ *, donde* $p \in [0,1]$, *también pertenece a $C([0,1])$ y lo podemos representar como $\{p\} = [p,p]$, por lo que el punto de T que lo representa es el punto (p,p). De modo que con todos los puntos de esta forma obtenemos uno de los lados de T, la diagonal. A los conjuntos de la forma $[0,b]$, donde b varía en $[0,1]$, les corresponde el punto $(0,b)$. De manera que si consideramos a todos los subcontinuos de $[0,1]$ que contienen al punto 0, veamos que quedan representados como otro de los lados de T (lo que tiene T en común con el eje Y). Otra manera diferente de hacer una representación para $C([0,1])$ consiste en emplear la identificación $[a,b] \longrightarrow (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Es decir, a cada intervalo le asignamos su punto medio y su longitud. Con esta identificación, obtenemos lo siguiente:*

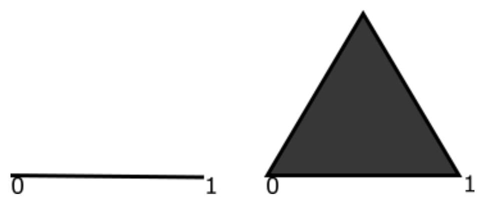


Figura 3.2: C([0,1])

Ejemplo 113. *En este ejemplo se realizará un modelo geométrico para $C(S)$.*
Sea S la circunferencia unitaria en el plano, centrada en el origen. Sus únicos subcontinuos son los conjuntos que constan de un solo punto, los subarcos y S mismo. Cada subarco A está determinado por su punto medio $m(A)$ y por su longitud $l(A)$. Así que al continuo A le podemos asignar el punto $p(A)$ que se encuentra afuera de S, que tiene distancia $l(A)$ de S y que satisface que la recta que une a $m(A)$ y $p(A)$ pasa por el origen, representado en la imagen siguiente, donde A es el arco que está dibujado sobre S con una línea más gruesa.

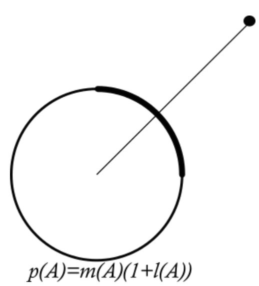


Figura 3.3: p(A)

Esta es una buena representación y los conjuntos que constan de un solo punto $\{p\}$, simplemente le asignamos p. Todo estaría perfecto si no le tuvieramos que asignar un punto del plano también al elemento S de $C(S)$. Notemos que a medida que nos alejamos de la circunferencia, hacia afuera, los puntos respectivos representan a arcos que se parecen cada vez más a S por lo que al final de cada segmento, para que la asocación sea continua, deberiamos poner un punto que represente a S como se muestra en la siguiente figura.

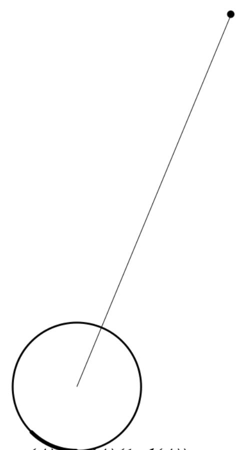


Figura 3.4: p(A)

Como no podemos poner muchos puntos que representen al elemento S, mejor cambiamos un poco la representación y hacemos que, en lugar de ir hacia afuera de la circunferencia, los segmentos se vayan hacia adentro y terminen en el origen. De esta manera ya no tendremos ningún problema de continuidad si a S le asignamos el origen.
Esto se puede conseguir fácilmente usando la asignación $f(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$, para cuando A es un subarco de S o un conjunto de un solo punto, y $f(S) =$ origen. Como en la siguiente figura.

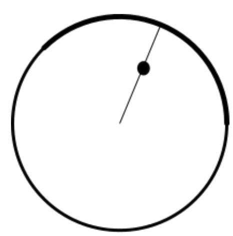


Figura 3.5: q(A)

Así hemos obtenido que el modelo para $C(S)$ es el disco unitario D (centrado en el origen) del plano. Veamos a que lugar han ido algunos subcontinuos particulares. Por ejemplo, los subcontinuos de un solo punto van a dar a la frontera de D. Los subarcos que tienen una longitud predeterminada y fija conforman una circunferencia con centro en el origen. Ahora veamos qué le correponde al conjunto $\mathcal{A} = \{A \in C(S) : p \in A\}$, donde $p = (0, 1)$. Veamos qué le corresponde al conjunto $\mathcal{B}_1$ que consta de los subarcos de S que tienen a p como extremo izquierdo, es decir, es el extremo del subarco que queda a la izquierda cuando nos paramos sobre el arco y vemos en dirección al origen. Primero notemos que para cada $A \in \mathcal{B}_1$, el punto medio de A está en la mitad de arriba de S. Los elementos de $\mathcal{B}_1$ van desde los muy *pequeños, que son casi iguales al conjunto* $\{p\}$ *(para estos su punto medio está también muy cercano a* p *y como su longitud es casi cero, ellos quedan representados en el disco muy cerca de* p*); hasta los muy grandes que son casi iguales a* S*, cuyo punto medio está muy cercano al punto* $(-1, 0)$ *de* S*, y como su longitud es casi igual a* 2π*, estarán representados por puntos muy cercanos al origen, no es difícil convencerse que* $\mathcal{B}_1$ *tiene una representación como la de la figura, en la cual también incluimos la representación del conjunto* $\mathcal{B}_2$ *que consta de los subarcos de* S *que tienen a* p *como extremo derecho.*

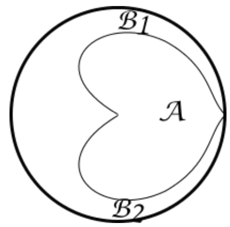


Figura 3.6: C(S)

Como cada subarco A *que contiene a* p *está entre dos subarcos del mismo tamaño que* A*, uno que tiene a* p *como extremo izquierdo y uno que lo tiene como extremo derecho, podemos concluir que el conjunto* $\mathcal{A}$ *queda representado como la región limitada por* $\mathcal{B}_1$ *y* $\mathcal{B}_2$*.*

Ejemplo 114. *Ahora, se construirá un modelo geométrico para* $F_2([0, 1])$*.*
Un elemento de $F_2([0, 1])$ *puede ser denotado de la forma* $\{a, b\}$*. Al conjunto* $\{a, b\}$ *le podemos asociar la pareja* $\varphi(\{a, b\}) = (\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$*. Claramente, cada conjunto* $\{a, b\}$ *está determinado de manera única por su pareja* $(\text{mín}\{a, b\}, \text{máx}\{a, b\})$*, y víceversa. Ahora notemos que* $0 \leq \text{mín}\{a, b\} \leq \text{máx}\{a, b\} \leq 1$ *y que cualquier pareja de la forma* (u, v) *con* $0 \leq u \leq v \leq 1$ *es igual a* $\varphi(\{u, v\})$ *por lo que la imagen de* φ *es exactamente el triángulo* $T = \{(u, v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$*. Así que otra vez obtenemos al triángulo* T *como el modelo para un hiperespacio de* $[0, 1]$*.*

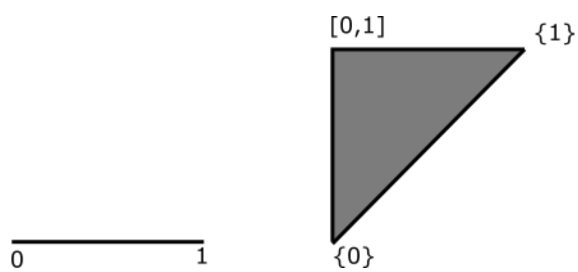


Figura 3.7: $F_2([0, 1])$

Ejemplo 115. *A continuación se realizará un modelo geométrico para* $F_2(S)$*.*
Sea S *la circunferencia unitaria del plano, centrada en el origen, podemos hacer un intento*

similar el ejemplo 113. Es decir, dado un subconjunto $A = \{a, b\}$ *de* S *elijamos el arco menor que une a* a *y* b*, sea* $m(A)$ *el punto medio de tal arco y sea* $l(A)$ *la longitud de tal arco. Entonces hagamos la asignación* $\mathcal{G}(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$. *Esta asociación está perfecta para los conjuntos para los que existe tal arco menor, dichos conjuntos son aquellos en los que* a *y* b *no son antípodas.*

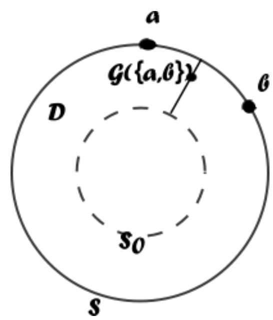


Figura 3.8: $\mathcal{G}(A)$

De modo que si omitimos, los pares de conjuntos antípodas, tenemos una buena función G *cuya imagen es el conjunto* $\{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < \| z \| \leq 1\}$. *Ponemos el* $\frac{1}{2}$ *por que la longitud que tiene un arco menor que une a dos puntos de* S *siempre es menor que* π *y se puede acercar a* π *tanto como queramos. Esta aproximación ocurre precisamente cuando nos acercamos a un par de puntos antípodas. De hecho, si insistieramos en asociarle algo parecido a dos puntos antípodas, a un conjunto de tal tipo (*$A = \{a, -a\}$*) le corresponderían dos puntos. Uno si tomamos uno de sus arcos como el menor y otro si tomamos el otro arco como el menor. Esto nos permitiría extender* f *y obtener como imagen total al anillo* $D = \{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \| z \| \leq 1\}$. *Esto estaría casi bien salvo que a cada par de antípodas le estaríamos asociando un par de puntos también antípodas de la circunferencia* $S_0 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \| z \| = \frac{1}{2}\}$. *Entonces todo se resuelve si en el conjunto* D *identificamos cada par de puntos antípodas del conjunto* S_0. *Hagámosla pues y obtengamos el modelo final para* $F_2(S)$. *El resultado final de esta identificación es una Banda de Möbius. En la figura 3.9 se muestra como se obtiene la banda.*

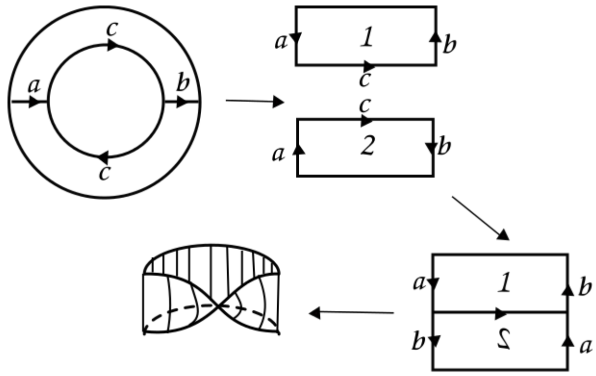


Figura 3.9: Banda de Möbius

Primero ponemos flechas en la circunferencia interior S_0, le ponemos dos flechas etiquetadas con la letra c. Observemos que para pegar puntos antípodas en S_0 es equivalente a pegar una flecha c con la otra, empezando por sus colas y avanzando en las direcciones marcadas por ellas. Hacemos dos cortes donde están las flechas a y b, marcamos con flechas para que no se nos olvide volver a pegar la parte que cortamos y para hacerlo en el orden correcto. Se tienen las piezas 1 y 2 que se obtienen después de cortar. Después giramos la pieza 2 para que las flechas c puedan pegarse. Notemos que tenemos un cuadrado en el que hay que pegar dos orillas, si torcemos el cuadrado las flechas quedan listas para pegarse y, al hacer esto, se obtiene la banda de Möbius. Es importante ver cómo han quedado representados algunos subconjuntos especiales de $F_2(S)$ para después hacer modelos de continuos más interesantes. Veamos cómo quedan representados los conjuntos de la forma $\{p\}$, donde $p \in S$. Para empezar, $\{p\}$ se debe colocar en la circunferencia exterior del anillo D. Notemos que a dicha circunferencia no le ponemos flechas de pegado, por lo que se mantiene siempre como la parte de $F_2(X)$ que nunca se pegó con ninguna otra cosa. Ahora tomemos un punto especial de S, como todos los puntos de S son similares podemos tomar el punto $q = (1, 0)$, veamos como queda representado el conjunto $\mathcal{B}$ que consta de todos los subconjuntos de la forma $\{x, q\}$, donde x varía sobre S. Notemos que en el anillo D el conjunto $\mathcal{B}$ está representado como la unión de los dos arcos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ ilustrados en la siguiente figura, esto es por que podemos empezar tomando $x = q$, en ese caso, el conjunto $A = \{q\}$ queda representado por el punto $(1, 0)$ en D.

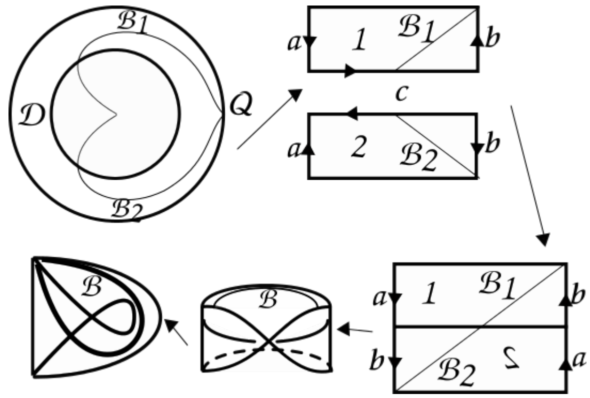


Figura 3.10: $F_2(S)$

Si x varía en la semicircunferencia de arriba, entonces el punto medio entre x y q varía entre el cuarto de la circunferencia que va de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y la longitud del arco menor que une a x con q varía desde 0 hasta π. Entonces el punto que representa a $\{x, q\}$ varía desde $(0, 1)$ hasta el punto $(0, \frac{1}{2})$. El otro segmento corresponde a los puntos de la forma $\{x, q\}$, donde x varía en la semicircunferencia de abajo. Notemos que lo que se obtiene al final es una circunferencia en la banda de Moebius que toca en un solo punto a la orilla (el punto que representa a $\{q\}$) y que le da una vuelta a la banda, internándose en ella hasta tocar una vez a la circunferencia central. En la figura 3.10 hemos puesto una banda de Moebius en la que la circunferencia que representa a $\mathcal{B}$ está dibujada de tal manera que se puede ver completa.

Capítulo 4

Contractibilidad e hiperespacios

En el siguiente capítulo se dará la definición de contractibilidad, es decir, la deformación continua de un espacio hasta llegar a un solo punto, así como propiedades necesarias para ser contráctiles. Es natural preguntarse si, un espacio es contráctil implica que los hiperespacios lo sean o viceversa, en este capítulo veremos las condiciones que se necesitan para resolver estas preguntas.

4.1. Contractibilidad

Definición 116. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Diremos que f y g son* ***homotópicas*** *($f \simeq g$), si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. La función H es llamada homotopía.*

Ejemplo 117. *Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = 0$. Consideremos $H : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ una función, definida por $H(x, t) = (1 - t)x$, se tiene que H es continua, además $H(x, 0) = (1 - 0)x = x = f(x)$ y $H(x, 1) = (1 - 1)x = 0 = g(x)$. Entonces $f \simeq g$.*

Teorema 118. *Sean X y Y espacios topológicos y $f, g, h : X \to Y$ funciones.*

1. *$f \simeq f$*

2. *Si $f \simeq g$, entonces $g \simeq f$.*

3. *Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces $f \simeq h$.*

Con esto se tiene que $\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las funciones continuas entre X y Y.

Demostración. 1. Sea $H : X \times I \to Y$ definida por $H(x, t) = f(x)$. Tenemos que H es continua, además $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = f(x)$ para todo $x \in X$.

2. Como $f \simeq g$, existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Sea $H' : X \times I \to Y$ definida por $H'(x,t) = H(x,1-t)$, claramente H' es continua pues H es continua. Notemos que $H'(x,0) = H(x,1) = g(x)$ y $H'(x,1) = H(x,0) = f(x)$. Por lo tanto $g \simeq f$.

3. Como $f \simeq g$, existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$. Además $g \simeq h$, por lo que existe una función continua $H' : X \times I \to Y$ tal que $H'(x,0) = g(x)$ y $H'(x,1) = h(x)$. Sea $H_1 : X \times I \to Y$ una función definida por
$$H_1(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \\ H'(x,2t-1) & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$
Notemos que $H_1(x,\frac{1}{2}) = H(x,2(\frac{1}{2})) = H(x,1) = g(x)$, mientras que $H_1(x,\frac{1}{2}) = H'(x,2(\frac{1}{2})-1) = H'(x,0) = g(x)$, así por Lema 25, H_1 está bien definida y es continua, además $H_1(x,0) = H(x,0) = f(x)$ y $H_1(x,1) = H'(x,1) = h(x)$. De aquí que $f \simeq h$. $\square$

Teorema 119. *Sean $f,g : X \to Y$ y $f',g' : Y \to Z$. Si $f \simeq g$ y $f' \simeq g'$, entonces $f' \circ f \simeq g' \circ g$.*

Demostración. Como $f \simeq g$ y $f' \simeq g'$, existen homotopías $H : X \times I \to Y$ y $H' : Y \times I \to Z$ tales que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $H'(y,0) = f'(y)$ y $H'(y,1) = g'(y)$ respectivamente. Demostraremos que existe una función continua $H_1 : X \times I \to Z$ tal que $H_1(x,0) = f'(f(y))$ y $H_1(x,1) = g'(g(x))$.
Sea $H_1(x,t) = H'(H(x,t),t)$. Notemos que $H_1(x,0) = H'(H(x,0),0) = H'(f(x),0) = f'(f(x))$ y $H_1(x,1) = H'(H(x,1),1) = H'(g(x),1) = g'(g(x))$ y además H_1 es continua pues es composición de funciones continuas, por lo que $f' \circ f \simeq g' \circ g$. $\square$

Definición 120. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es* ***contráctil*** *si $id_X \simeq k$, con k una función constante. Cuando esto ocurre, comúnmente se dice que X se puede contraer a un punto.*

A continuación se darán ejemplos de espacios contráctiles.

Ejemplo 121. *Sean $X = [0,1]$ y $H : X \times I \to X$, definida como $H(x,t) = (1-t)x$.*

Ejemplo 122. *Sean $X = \{x \in \mathbb{R}^2 :\| x \|\leq 1\}$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$ y $H(x,t) = (1-t)x$, como en el Ejemplo 117, X es contráctil.*

Teorema 123. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es contráctil si y sólo si para cada espacio Y y cada función continua $f : X \to Y$ se tiene que $f \simeq c$, con c una constante.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Como X es contráctil, existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = k$. Sea Y un espacio topológico y $f : X \to Y$ una función continua. Definimos $H' : X \times I \to Y$ de la siguiente manera $H'(x,t) = f(H(x,t))$. Notemos que H' es continua pues f y H son continuas, además $H'(x,0) = f(H(x,0)) = f(x)$ y $H'(x,1) = f(H(x,1)) = f(k) = c$, con c una función constante, por lo que $f \simeq c$.
$\Leftarrow\rfloor$ Haciendo $Y = X$ y $f = id_X$ se tiene que X es contráctil. $\square$

Teorema 124. *Sea X un espacio topológico. Si X es contráctil, entonces X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Como X es contráctil, existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = k$.
Sean $p, q \in X$ y $\alpha : [0, 1] \to X$ una función definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} H(p, 2t) & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(q, 2-2t) & si \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dado que $H(p, 2(\frac{1}{2})) = k = H(q, 2-2(\frac{1}{2}))$, por el Lema 25, α está bien definida y es continua. Notemos que $\alpha(0) = H(p, 0) = p$ y $\alpha(1) = H(q, 0) = q$, es decir existe una trayectoria de p a q en X, por lo que X es conexo por trayectorias. □

Definición 125. *Sean X, Y espacios topológicos. Decimos que X es **contráctil con respecto a Y** si para toda función $f : X \to Y$ se tiene que $f \simeq k$, con k una constante.*

El siguiente corolario es otra manera de escribir el Teorema 123 usando este lenguaje.

Corolario 126. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es contráctil si y sólo si X es contráctil con respecto a Y, para todo espacio topológico Y.*

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [2, Lema 19.7].

Teorema 127. *Sea X un espacio conexo. Entonces X es contráctil con respecto a S si, y solo si X es unicoherente.*

Corolario 128. *Si X es un espacio topológico contráctil, entonces X es unicoherente.*

Definición 129. *Se dice que un espacio $Y \subseteq X$ es **contráctil en** X si existen, una función continua $H : Y \times I \to X$ y un punto $x_0 \in X$ tal que, para toda $y \in Y$, $H(y, 0) = y$ y $H(y, 1) = x_0$.*

Ejemplo 130. *Sean $X = S$ y D un disco unitario. Sabemos que $X \subseteq D$ y que X no es contráctil pues no es unicoherente. Sin embargo, X es contráctil en D.*

Teorema 131. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $Y \subseteq X$ y X es contráctil, entonces Y es contráctil en X.*

Demostración. Dado que X es contráctil, existe $H : X \times I \to X$ una función continua, tales que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$. Sea $i : Y \to X$ la función inclusión. Definimos $H' : Y \times I \to X$ como $H'(x, t) = H(i(x), t)$. Notemos que H' es continua y además $H'(y, 0) = H(i(y), 0) = H(y, 0) = y$ y $H'(y, 1) = H(i(y), 1) = H(y, 1) = x_0$, por lo que Y es contráctil en X. □

Teorema 132. *Sean X, Y espacios topológicos homeomorfos. Si X es contráctil, entonces Y es contráctil.*

Demostración. Como X es contráctil, existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$. Como X, Y son homeomorfos existe $f : X \to Y$ un homeomorfismo.
Sea $H' : Y \times I \to Y$ definida por $H'(y,t) = f \circ H(f^{-1}(y),t)$. Notemos que $H'(y,1) = f \circ H(f^{-1}(y),1) = f(H(f^{-1}(y),1)) = f(x_0) = k$ y $H'(y,0) = f \circ H(f^{-1}(y),0) = f(H(f^{-1}(y),0)) = f(f^{-1}(y)) = y$. De aquí que Y es contráctil. $\square$

4.2. Contractibilidad en Hiperespacios

Lema 133. *Sean $\Lambda \subseteq 2^X$ y $h : \Lambda \times I \to 2^X$ una función continua. Entonces, para cada $(A,t) \in \Lambda \times I$, se tiene que $\bigcup\{h(A,s) : 0 \leq s \leq t\} \in 2^X$.*

Demostración. Para cada $(A,t) \in \Lambda \times [0,1]$, sea $g(A,t) = \{h(A,s) : 0 \leq s \leq t\}$. Como h es una función continua en 2^X y $g(A,t) = h(\{A\} \times [0,t])$ para cada $(A,t) \in \Lambda \times [0,1]$, se tiene que g es una función que va de $\Lambda \times [0,1]$ en 2^{2^X}. Como $\bigcup$ es una función de 2^{2^X} en 2^X, entonces $\bigcup g(A,t) \in 2^X$ para cada $(A,t) \in \Lambda \times [0,t]$. Por lo que $\bigcup g(A,t) = \bigcup\{h(A,s) : 0 \leq s \leq t\} = \bigcup h(\{A\} \times [0,t]) \in 2^X$. $\square$

Teorema 134. *Sea X un continuo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *$F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$,*

b) *$F_1(X)$ es contráctil en 2^X,*

c) *$C(X)$ es contráctil,*

d) *2^X es contráctil,*

e) *$C_n(X)$ es contráctil ($n \in \mathbb{N}$),*

f) *$C_\infty(X)$ es contráctil.*

Demostración. a) implica b) se sigue de que $C(X) \subseteq 2^X$.
Para demostrar las siguientes implicaciones b) implica d) y b) implica c), supongamos que existen una función continua $K : F_1(X) \times [0,1] \to 2^X$ y un elemento $A_0 \in 2^X$ tales que, para todo $p \in X$, $K(\{p\},0) = \{p\}$, y $K(\{p\},1) = A_0$. Por hipótesis y del hecho de que 2^X es arco conexo, podemos suponer que $A_0 = X$.
Definimos $L : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ por:

$$L(A,t) = \bigcup\{K(\{p\},s) : p \in A \text{ y } s \in [0,t]\}.$$

Probaremos que L es continua. Sea $\varepsilon > 0$, como $F_1(X) \times [0,1]$ es compacto y K es continua, entonces K es uniformemente continua, por lo que existe $\delta > 0$ tal que, si $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$, entonces $H(K(A,t),K(B,u)) < \varepsilon$.
Sean $A, B \in 2^X$ y $t, u \in [0,1]$ tales que $H(A,B) < \delta$ y $|t-u| < \delta$. Veamos que $H(L(A,t),L(B,u)) <$

ε. Sea $m \in L(A,t)$. Entonces existen $p \in A$ y $s \in [0,t]$, las cuales satisfacen que $m \in K(\{p\},s)$. Ya que $p \in A \subseteq \mathcal{N}(\delta, B)$, existe $q \in B$ tal que $d(p,q) < \delta$. Tomemos $r = \text{mín}\{s,u\}$ y notemos que $r \in [0,u]$. Si $s \leq u$, entonces $r = s \in [0,t] \cap [0,u]$ y, si $u < s$, entonces $r = u < s \leq t$ y como $t - u < \delta$, tenemos que $|s - r| < \delta$. En los dos casos obtenemos $|s-r| < \delta$. Por la elección de δ, se tiene que $H(K(\{q\},s), K(\{q\},r)) < \varepsilon$. De manera que $p \in K(\{p\},s) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, K(\{q\},r)) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, L(B,u))$, por lo que $L(A,t) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, L(B,u))$. De la misma manera se muestra que $L(B,u) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, L(A,t))$. Por lo tanto $H(L(A,t), L(B,u)) < \varepsilon$. De aquí que L es continua.

Ahora demostraremos que $L(A,0) = A$ y $L(A,1) = X$, para toda $A \in 2^X$. Observemos que $L(A,0) = \bigcup\{K(\{p\},s) : p \in A \text{ y } s \in [0,0]\} = \bigcup\{K(\{p\},0) : p \in A\} = \bigcup\{\{p\} : p \in A\} = A$, y $L(A,1) = \bigcup\{K(\{p\},s) : p \in A \text{ y } s \in [0,1]\} \supseteq \bigcup\{K(\{p\},1) : p \in A\} = X$.

Así L es una homotopía para 2^X entre la función identidad y una función constante. Por tanto 2^X es contráctil.

Notemos que si, $A \in 2^X$ y $0 \leq u \leq t \leq 1$, entonces $[0,u] \subseteq [0,t]$ y así $L(A,u) \subseteq L(A,t)$.

Si $A \in C(X)$ y $t \in [0,1]$, probaremos que $L(A,t) \in C(X)$. Supongamos que esto no es cierto y que existe una $t \in [0,1]$ tal que $L(A,t)$ no es conexo, es decir, $L(A,t) = G \cup K$, donde G y K son cerrados, ajenos y no vacíos. Por lo anteriormente demostrado, tenemos que $A \subseteq L(A,t) = G \cup K$, y como A es conexo, tiene que estar contenido en uno de ellos. Supongamos que $A \subseteq G$, tomemos $P = \{s \in [0,t] : L(A,s) \subseteq G\}$, $Q = \{s \in [0,t] : L(A,s) \cap K \neq \emptyset\}$ y sea $f : [0,t] \to 2^X$ definida por $f(s) = L(A,s)$. Ya demostramos que L es continua, por lo que f es continua y notemos que $P = f^{-1}(D)$ y $Q = f^{-1}(B)$, donde $D = \{E \in 2^X : E \subseteq G\}$ y $B = \{E \in 2^X : E \cap K \neq \emptyset\}$. Por Teorema 75, D y B son cerrados en 2^X, además f es continua, entonces P y Q son cerrados. Como G y K son ajenos, P y Q también son ajenos. Por lo demostrado anteriormente, para toda $s \in [0,t]$, $L(A,s) \subseteq L(A,t) = G \cup K$, por lo que $s \in P \cup Q$. Entonces P y Q son cerrados, ajenos y su unión es $[0,t]$. Como $[0,t]$ es conexo, alguno de ellos tiene que ser vacío. Pero $L(A,0) = A \subseteq G$, por lo que $0 \in P$ y $L(A,t) = G \cup K$ y $K \neq \emptyset$ de donde $t \in Q$. Por lo cual hemos llegado a una contradicción.

Por último de lo ya demostrado tenemos que $L|_{C(X)\times[0,1]} : C(X) \times [0,1] \to C(X)$ es una homotopía para $C(X)$, con lo cual queda demostrado c).

Observemos que c) implica a) y d) implica b) se cumplen pues si un espacio es contráctil, cualquier subespacio es contráctil en él.

d) implica e). Como 2^X es contráctil, existe una función $H' : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que para cada $A \in 2^X$, $H'(A,0) = A$ y $H'(A,1) = X$. Sea $H : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ una homotopía asociada con H' definida por

$$H(A,t) = \bigcup\{H'(A,s) : 0 \leq s \leq t\}.$$

Por Teorema 81, H es continua. Observemos que para cada $A \in 2^X$, $H(A,0) = A$, $H(A,1) = X$ y $H(\{A\} \times [0,1])$ es un arco ordenado de A a X. Notemos que si $A \in C_n(X)$ y $B \in H(\{A\} \times [0,1])$, entonces $A \subseteq B$ y por lo tanto existe en arco ordenado que va de A a B pues $H(\{A\} \times [0,1]$ es un arco ordenado de A a X y B pertenece a este arco. Mostraremos que $B \in C_n(X)$. Sea $\{B_j : j \in J\}$ el conjunto de las componentes de B. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, existe B_{j_i} tal que $A_i \subseteq B_{j_i}$. Así, el número de elementos del conjunto $J' = \{j_i \subseteq J : A_i \subseteq$

$B_{j_i}\}$ es menor o igual que n. Demostraremos que $\{B_j : j \in J\} = \{B_{j_i} : j_i \in J'\}$. Sea $B_j \in \{B_j : j \in J\}$, por Teorema 104, $B_j \cap A \neq \emptyset$. Así existe una componente A_i de A tal que $B_j \cap A \neq \emptyset$, por lo que $B_j = B_j \cup A_i \subseteq B_{j_i}$, de lo que se concluye que $B_j = B_{j_i}$. Por lo tanto $\{B_j : j \in J\} = \{B_{j_i} : j_i \in J'\}$. Así B tiene a lo más n componentes, es decir $B \in C_n(X)$. De donde $G = H|_{C_n(X)\times[0,1]} : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ es una función continua tal que para cada $A \in C_n(X)$, $G(A,0) = A$ y $G(A,1) = X$. Así $C_n(X)$ es contráctil.
d) implica f). La prueba es similar a d) implica e).
e) implica a). Como $C_n(X)$ es contráctil, entonces $F_1(X)$ es contráctil en $C_n(X)$, así $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Sabemos que b) impica c) y c) implica a), por lo tanto e) implica a).
f) implica a) se puede probar de la misma manera que e) implica a). □

Observación 135. *En el Teorema anterior no se incluye que $F_n(X)$ es contráctil pues no siempre se cumple. Como ejemplo se tiene $F_2(S)$ el cual no es contráctil, sin embargo, $F_1(S)$ si es contráctil en $C(S)$.*

Teorema 136. *Si X es contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como X es contráctil, existe una función continua $H : X \times I \to X$ tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$. Sea $H' : F_n(X)\times[0,1] \to F_n(X)$ definida por $H'(\{x_1,\ldots,x_n\},t) = \{H(x_i,t) : i \in \{1,\ldots,n\}\}$. Probaremos que H' es continua. Sean $A = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $t \in [0,1]$, $B = \{H(x_i,t) : x_i \in A\}$ y $V = \langle V_1,\ldots,V_n\rangle$ tal que $H(x_i,t) \in V_j$ para $j \leq m$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que los abiertos V_j son ajenos dos a dos. Por la continuidad de H existen abiertos $U_1,\ldots,U_n$ de X, que también se pueden suponer ajenos dos a dos y un abierto W de $[0,1]$ tal que $(x_i,t) \in U_i \times W$ y $H(U_i \times W) \subseteq V_j$. Sea $U = \langle U_i,\ldots,U_n\rangle \times W$. Demostraremos que $H'(U) \subset V$. Sea $(A',t') \in U$, así $A' = \{y_1,\ldots,y_n\}$ donde $y_i \in U_i$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dado que $t' \in W$ y $H(U_i \times W) \subseteq V_j$, se tiene que $H'(U) \subseteq V$, de donde H' es continua. Finalmente notemos que $H'(\{x_1,\ldots,x_n\},0) = \{H(x_i,0) : i \in \{1,\ldots,n\}\} = \{H(x_1,0),\ldots,H(x_n,0)\} = \{x_1,\ldots,x_n\}$ y $H'(\{x_1,\ldots,x_n\},1) = \{H(x_i,1) : i \in \{1,\ldots,n\}\} = \{H(x_1,1),\ldots,H(x_n,1)\} = \{x_0,\ldots,x_0\} = \{x_0\}$, por lo que $F_n(X)$ es contráctil. □

Corolario 137. *Si X es contráctil, entonces $C(X)$, $C_n(X)$, $C_\infty(X)$ y 2^X son contráctiles.*

Demostración. Como X es contráctil, entonces $F_1(X)$ es contráctil. Así $F_1(X)$ es contráctil en cualquier espacio que lo contenga. La conclusión se sigue del Teorema 134. □

El reciproco del Corolario anterior no se cumple.

Ejemplo 138. *Sea $X = S$ la circunferencia unitaria. Sabemos que $C(X) \approx D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x,y) \| \leq 1\}$, el cual es contráctil. Sin embargo X no es contráctil, por Teorema 127.*

4.3. Propiedad de Kelley

Definición 139. *Un continuo X **tiene la propiedad de Kelley** en un punto $p \in X$ si para toda sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ y todo subcontinuo A de X tal que $p \in A$, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ y $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Hoy en día se dice que X es un Continuo de Kelley si X tiene la propiedad de Kelley en cada punto.

Ejemplo 140. *Sean X un abanico como en la Figura 4.1, p_n el extremo de cada segmento que conforman el abanico, p en la barra límite, y A el continuo que consta de lo que se añadió en la barra límite uniéndole p. Notemos que para A no existe una sucesión de subcontinuos de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ y $p_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

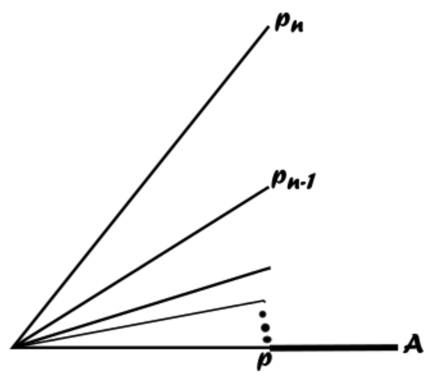


Figura 4.1: Abanico con pata alargada

Teorema 141. *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney, $p \in X$ y $M : F_1(X) \times [0,1] \to C(X)$ definida por $M(\{p\}, t) = \bigcup\{A \in C(X) : p \in A$ y $\mu(A) \leq t\}$. Si el continuo X tiene la propiedad de Kelley en todos sus puntos, entonces M es continua.*

Demostración. Sean $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ y una sucesión de números $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[0,1]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Por la Proposición 24 podemos suponer que $\lim M(\{p_n\}, t_n) = B$ para alguna $B \in C(X)$. Probaremos que $B = M(\{p\}, t)$.
Sea $q \in B$, por Proposición 69, existe una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X, tal que $\lim q_n = q$ y $q_n \in M(\{p_n\}, t_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por definición de $M(\{p_n\}, t_n)$, existe $A_n \in C(X)$ tal que $p_n, q_n \in A_n$ y $\mu(A_n) \leq t_n$, tomemos una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a alguna $A \in C(X)$. Por Proposición 68, $q, p \in A$ y por la continuidad de μ, $\lim \mu(A_n) = \mu(\lim A_n) = \mu(A) \leq \lim t_n = t$. Aplicando la definición de $M(\{p\}, t)$, obtenemos que q pertenece a este conjunto. Por lo que queda demostrado que $B \subseteq M(\{p\}, t)$.
Falta ver que $M(\{p\}, t) \subseteq B$. Sea $q \in M(\{p\}, t)$. Entonces existe $A \in C(X)$ tal que $p, q \in A$ y $\mu(A) \leq t$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos dos arcos ordenados, uno de $\{p_n\}$ a A_n y otro de A_n a X. Reparametrizando los arcos, podemos obtener un solo arco ordenado de $\{p_n\}$ a X cuya imagen contiene a A_n. Usando el Teorema 27, la imagen de este nuevo arco contiene a un elemento C_n tal que $\mu(C_n) = \min\{\mu(A), t_n\}$. Como todos los elementos de la imagen de un arco ordenado son comparables, se tiene que $A_n \subseteq C_n$ o $C_n \subseteq A_n$. Así podemos tomar una infinidad de números n para los que se cumple una de las

dos contenciones. Supongamos sin pérdida de generalidad que $C_n \subseteq A_n$ para esa infinidad, numeramos esa infinidad en una subsucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, y como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión $\{C_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim C_{n_k} = C$ para alguna $C \in C(X)$ y $C_{n_k} \subseteq A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por la Proposición 68, $C \subseteq A$.
Notemos que $\mu(C) = \lim \min\{\mu(A), t_{n_k}\} = \min\{\mu(A), \lim t_{n_k}\} = \min\{\mu(A), t\} = \mu(A)$, por tanto $\mu(C) = \mu(A)$ y $C \subseteq A$, esto implica que $C = A$, en particular $q \in C$ y por Proposición 69, existe una sucesión de puntos $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ de X tal que $q_k \in C_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = q$. Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $q_k \in C_{n_k} \subseteq M(\{p_{n_k}\}, t_{n_k})$, por Proposición 68, $q \in \lim M(\{p_{n_k}\}, t_{n_k}) = B$. Entonces $M(\{p\}, t) \subseteq B$.
Por tanto $M(\{p\}, t) = B$ y M es continua. □

Corolario 142. *Sea X un continuo. Si X tiene la propiedad de Kelley en todos sus puntos, entonces $C(X)$, $C_n(X)$, $C_\infty(X)$ y 2^X son contráctiles.*

Demostración. Se sigue del Teorema 141. □

El regreso del corolario anterior no se cumple.

Ejemplo 143. *Sea X el abanico como en la Figura 4.1, claramente X es contráctil y por Corolario 137, $C(X)$, $C_n(X)$, $C_\infty(X)$ y 2^X son contráctiles, sin embargo X no tiene la propiedad de Kelley.*

Teorema 144. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ y un subcontinuo A de X tal que $p \in A$. Encontraremos una sucesión de subcontinuos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ y $p_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{A}_n = \{B \in C(X) : p_n \in B\}$. De acuerdo con el Teorema 75 $\mathcal{A}_n$ es compacto. Dado que la función distancia es una función continua, existe $A_n \in \mathcal{A}_n$ tal que $\mathcal{H}(A, A_n) = \min\{\mathcal{H}(A, B) : B \in \mathcal{A}_n\}$. Por definición de A_n, $p_n \in A_n$. Demostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la conexidad local de X en p, existe un abierto conexo U de X tal que $p \in U \subseteq \mathcal{B}(\frac{\varepsilon}{2}, p)$. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in U$ para cada $n \geq N$. Dada $n \geq N$, el conjunto $A \cup \overline{U}$ es un subcontinuo de X conteniendo a p_n. Por lo que $A \cup \overline{U} \in \mathcal{A}_n$. Además $A \cup \overline{U} \subseteq A \cup \mathcal{B}(\varepsilon, p) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y $A \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup \overline{U})$, de modo que $\mathcal{H}(A, A \cup \overline{U}) < \varepsilon$. Por la definición de A_n, $\mathcal{H}(A, A_n) \leq \mathcal{H}(A, A \cup \overline{U}) < \varepsilon$. Como esto ocurre para $n \geq N$, concluimos que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. □

El recíproco del Teorema 144 no necesariamente es cierto, veamos un ejemplo de un continuo que tiene la propiedad de Kelley pero que no es localmente conexo.

Ejemplo 145. *Sea X el abanico armónico. El continuo X tiene la propiedad de Kelley, sin embargo no es localmente conexo.*

Corolario 146. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X, $C(X)$, $C_n(X)$ y $C_\infty(X)$ son contráctiles.*

Capítulo 5

Pseudo-contráctibilidad

La nocion de pseudo-homotopía y pseudo-contractibilidad fue introducida por R. H.Bing. Sin embargo W. Kuperberg fue el primero en dar un ejemplo para demostrar que los conceptos de pseudo-homotopía y pseudo-contractibilidad son diferentes a los conceptos de homotopía y contractibilidad respectivamente. En este capítulo se analizarán estos conceptos, además de estudiar la pseudo-contractibilidad en hiperespacios.

Definición 147. *Sean X, Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Una función $H : X \times C \to Y$, donde C es un continuo, se dice que es una* ***pseudo-homotopía*** *entre f y g, si existen puntos $a, b \in C$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para $x \in X$. En tal caso diremos que f y g son pseudo-homotópicas.*

Definición 148. *Un espacio es llamado* ***pseudo-contráctil*** *si existe una pseudo-homotopía entre la función identidad y una función constante.*

Observación 149. *Todo espacio contráctil es pseudo-contráctil.*

El ejemplo siguiente muestra que el recíproco de la Observación 149 no necesariamente se cumple.

Ejemplo 150. *Consideremos en el plano complejo $\mathbb{C}$ la espiral $X_0 = \{\frac{t+2}{t+1}e^{it} : t \in [0, \infty)\}$ alrededor del círculo unitario. El conjunto $X = X_0 \cup \{x : |x| \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$, constituye un continuo, que no es arco conexo, así por Teorema 124, no es contráctil.*

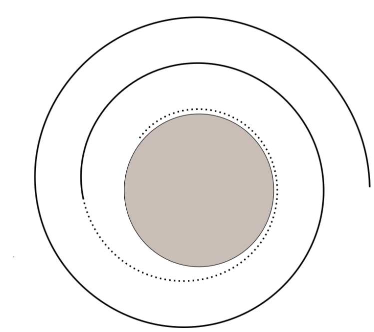


Figura 5.1: X

Para verificar que X es pseudo-contráctil, se define al continuo

$$C = X_0 \cup D \subseteq \mathbb{C}$$

con $D = \{x : |x| = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ y consideramos a la función $H : X \times C \to X$ definida por:

1. $H(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'}) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$ *para* $t, t' \in [0, \infty)$,
2. $H(x, \frac{t+2}{t+1}e^{it}) = xe^{it}$ *para* $|x| \leq 1$, $t \in [0, \infty)$,
3. $H(x, x') = xx'$ *para* $|x| \leq 1$, $x' \in D$,
4. $H(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, x) = xe^{it}$ *para* $t \in [0, \infty)$, $x \in D$.

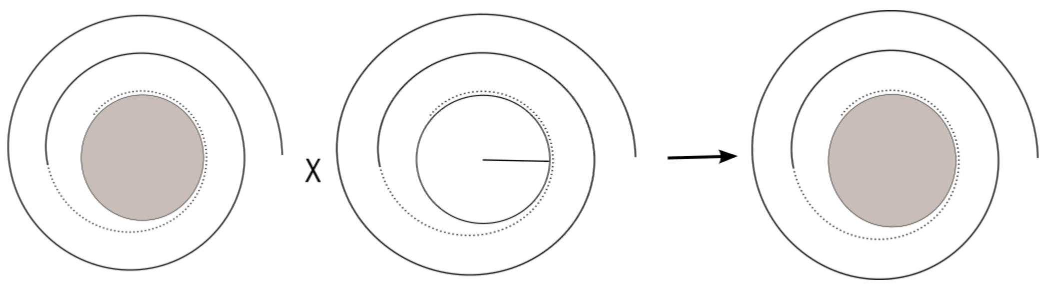


Figura 5.2: Función H

Tenemos que $H(x, 2) = x$ y $H(x, 0) = 0$ para $x \in X$, esto significa que X es pseudo-contráctil. Veamos como se comporta nuestro ejemplo.
Sean $x \in X$ y $y \in C$ con $x \in \{x : |x| < 1\}$:
Si $y \in \{x : |x| = 1\}$, entonces $H(x, y) \in \{x : |x| < 1\}$. Si $y \in [0, 1]$, se tiene que $H(x, y) \in [0, x]$. Tomando $y \in X_0$, $H(x, y) \in X_y = \{\frac{y+2}{y+1}e^{iy} : t \in [0, \infty)\}$.
Sean $x \in X$ y $y \in C$ con $x \in \{x : |x| = 1\}$:
Si $y \in \{x : |x| = 1\}$, entonces $H(x, y) \in \{x : |x| = 1\}$. Con $y \in [0, 1]$, tenemos que $H(x, y) \in \{x : |x| = 1\}$. Si $y \in X_0$, implica que $H(x, y) \in \{x : |x| = 1\}$.
Sean $x \in X$ y $y \in C$ con $x \in X_0$:
Si $y \in \{x : |x| = 1\}$, se tiene que $H(x, y) \in X_y$. Tomando $y \in [0, 1]$, $H(x, y) \in X_y$. Si $y \in X_0$, entonces $H(x, y) \in X_y$.

Definición 151. *Sean X, Y espacios topológicos, diremos que X es **pseudo-contráctil con respecto a** Y si cada función continua $f : X \to Y$ es pseudo-homotópica a una función constante.*

Observación 152. *Todo espacio X contráctil con respecto a Y es pseudo-contráctil con respecto a Y.*

A continuación se generalizaran algunos resultados que fueron demostrados en el capítulo anterior para espacios contráctiles.

Teorema 153. *Sea X un espacio topológico. Si X es pseudo-contráctil, entonces X es pseudo-contráctil con respecto a Y para todo espacio Y.*

Demostración. Dado que X es pseudo-contráctil, existen C un continuo, puntos $a, b \in C$ y $H : X \times C \to X$ una función continua, tales que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = x_0$. Sea $f : X \to Y$ una función continua, definimos $H' : X \times C \to Y$ como $H'(x, t) = f(H(x, t))$. Notemos que H' es continua y además $H'(x, a) = f(H(x, a)) = f(x)$ y $H'(x, b) = f(H(x, b)) = f(x_0)$, por lo que X es pseudo-contráctil respecto a Y para todo espacio Y. □

Definición 154. *Sean X, Y espacios topológicos tales que $X \subseteq Y$. Se dice que X es **pseudo-contráctil en** Y si existe una función continua constante $f : X \to Y$ que es pseudo-homotópica a la función inclusión $i : X \to Y$.*

Observación 155. *Todo espacio X contráctil en Y es pseudo-contráctil en Y.*

Corolario 156. *Sean X, Y espacios topológicos. Si $Y \subseteq X$ y X es pseudo-contráctil, entonces Y es pseudo-contráctil en X.*

Definición 157. *Sea X un espacio topológico y $A \in 2^X$. Una **retracción de** X **en** A es una función continua $r : X \to A$ tal que $r|_A = id_A$, es decir $r(a) = a$ para toda $a \in A$. Se dice que A es un retracto de X si existe una retracción de X en A.*

Ejemplo 158. *Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $A = \{(x, y) \in X : ||(x, y)|| = 1\}$, $r : X \to A$ definida por $r(x, y) = \frac{(x,y)}{||(x,y)||}$ es una retracción de X en A, pues $r|_A = id_A$.*

Lema 159. *Sean X, K continuos. La función $e : 2^X \times 2^K \to 2^{X \times K}$ definida por $e((A, B)) = A \times B$ es un encaje y es tal que $e(H(X) \times H(K)) \subseteq H(X \times K)$, donde $H(-) \in \{C(-), C_\infty(-), F_\infty(-)\}$.*

Demostración. La función e está bien definida, pues si A, B son cerrados de X y K respectivamente, $A \times B$ es cerrado en $X \times K$. Para probar que e es un encaje, es suficiente con probar que e es inyectiva y continua. Si $(A, B) \neq (A', B')$, entonces $A \neq A'$ o $B \neq B'$. En ambos casos $A \times B \neq A' \times B'$, lo que prueba que e es inyectiva. Para probar la continuidad, tomemos una sucesión $\{(A_n, B_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a (A, B). De esta manera $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a A y a B respectivamente. Probaremos que $\operatorname{lím\,sup}(A_n \times B_n) \subseteq A \times B \subseteq \operatorname{lím\,inf}(A_n \times B_n)$. Sea $(a, b) \in A \times B$, entonces existen sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que convergen a a y a b respectivamente. Así la sucesión $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a (a, b). Por lo tanto $(a, b) \in \operatorname{lím\,inf}(A_n \times B_n)$. Por otra parte si $(c, d) \in \operatorname{lím\,sup}(A_n \times B_n)$, existe una sucesión $\{(c_{n_k}, d_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a (c, d). Esto implica que cada sucesión $\{c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a c y a d respectivamente. Así, $c \in \operatorname{lím\,sup} A_n \subseteq A$ y $d \in \operatorname{lím\,sup} B_n \subseteq B$. Por lo que $(c, d) \in A \times B$. De lo anterior concluimos que e es un encaje. De la definición de los hiperespacios se tiene que $e(H(X) \times H(K)) \subseteq H(X \times K)$ para cada $H(-) \in \{C(-), C_\infty(-), F_\infty(-)\}$. □

Lema 160. *Sean X un espacio topológico y $W \subseteq Y \subseteq X$. Supongamos que Y es un retracto de X. Entonces W es (pseudo)-contráctil en X si y sólo si W es (pseudo)-contráctil en Y.*

Demostración. Supongamos que W es pseudo-contráctil en X. Entonces existen un continuo K, puntos a, b de K y una función continua $H : W \times K \to X$ tal que $H(w, a) = w$ y $H(w, b) = p$, para algún $p \in X$ y para cada $w \in W$. Sea $r : X \to Y$ una retracción. Definimos la función continua $G : W \times K \to Y$ como sigue: $G(w, t) = r(H(w, t))$. La función continua G cumple que $G(w, a) = r(H(w, a)) = r(w) = w$ y $G(w, b) = r(H(w, b)) = r(p)$ para todo $w \in W$. El regreso es inmediato. $\square$

Teorema 161. *Sean Y un continuo tal que $F_1(Y)$ es un retracto de $C(Y)$ y X un subcontinuo de Y. Si X es pseudo-contráctil en Y, entonces X es contráctil en Y.*

Demostración. Por hipótesis existe un continuo W, dos puntos distintos $c, d \in W$, $p \in Y$ y una función $H : X \times W \to Y$ tal que para cada $x \in X$, $H(x, c) = p$ y $H(x, d) = x$. Definimos $g : C(X \times W) \to C(Y)$ por $\{H(z) : z \in B\}$ para cada $B \in C(X \times W)$. Por Proposición 82, g es continua. Notemos que $C(X) \times C(W)$ es homeomorfo a $\mathcal{H} \subseteq C(X \times W)$, con homeomorfismo e como en el Lema 159.Como $C(W)$ es arco conexo, entonces, existe un arco A contenido en $C(W)$ con puntos finales $\{c\}$ y $\{d\}$. Definimos $h : F_1(X) \times A \to C(Y)$ por $h(\{x\}, B) = g(\{x\} \times B)$ para cada $x \in X$ y cada $B \in A$. Por lo que $F_1(X)$ es contráctil en $C(Y)$. Dado que $F_1(X) \subseteq F_1(Y)$ y $F_1(Y)$ es un retracto de $C(Y)$, entonces por el Lema 160 $F_1(X)$ es contráctil en $F_1(Y)$. Por Proposición 66, X es contráctil en Y. $\square$

Corolario 162. *Sea Y un continuo tal que $F_1(Y)$ es un retracto de $C(Y)$. Si Y es pseudo-contráctil entonces Y es contráctil.*

Demostración. Haciendo $X = Y$ como en el Teorema 161 se tiene lo requerido. $\square$

Teorema 163. *Sea X un continuo. Entonces $F_1(2^X)$ es retracto de 2^{2^X}. En particular $F_1(2^X)$ es un retracto de $C(2^X)$.*

Demostración. Sean $U : 2^{2^X} \to 2^X$ la función unión y $h : 2^X \to F_1(2^X)$ un homeomorfismo tal que $h(A) = \{A\}$. La función $g = h \circ U$ es una retracción de 2^{2^X} a $F_1(2^X)$ pues $g(\{A\}) = h \circ U(A) = h(U(A)) = h(A) = \{A\}$. Por otra parte como $F_1(2^X) \subseteq C(2^X) \subseteq 2^{2^X}$, $g|_{C(2^X)}$ es una retracción en $F_1(2^X)$. $\square$

Teorema 164. *Sea X un espacio topológico. Si $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X, entonces 2^X es pseudo-contráctil.*

Demostración. Dado que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X, entonces existe un continuo C, puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : F_1(X) \times C \to 2^X$ tal que $H(\{x\}, b) = \{x\}$ y $H(\{x\}, a) = A_0$ para algún $A_0 \in 2^X$. Definimos $H' : 2^X \times C \to 2^X$ por $H'(A, t) = \bigcup\{H(\{x\}, t) : x \in A\}$. Notemos que $H'(A, a) = \bigcup\{H(\{x\}, a) : x \in A\} = \cup A_0 = A_0$ y $H'(A, b) = \bigcup\{H(\{x\}, b) : x \in A\} = \bigcup\{x : x \in A\} = A$. Por lo que 2^X es pseudo-contráctil. $\square$

Teorema 165. *Sea X un continuo. Si 2^X es pseudo-contráctil, entonces 2^X es contráctil.*

Demostración. Por Teorema 163, $F_1(2^X)$ es un retracto de $C(2^X)$. Haciendo $Y = 2^X$, como en el Corolario 162, tenemos que 2^X pseudo-contráctil implica que Y es contráctil. □

Teorema 166. *Si $C(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $C(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C(X)$ es pseudo-contráctil entonces por el Corolario 156, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C(X)$, por tanto en 2^X. Así por el Teorema 164, 2^X es pseudo-contráctil y por el Teorema 165, 2^X es contráctil. Finalmente por el Teorema 134 $C(X)$ es contráctil. □

Teorema 167. *Si $C_n(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $C_n(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C_n(X)$ es pseudo-contráctil, entonces por el Corolario 156, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C_n(X)$, en particular $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. De esta manera, por el Teorema 164, 2^X es pseudo-contráctil y por el Teorema 165, 2^X es contráctil. Así por el Teorema 134, $C_n(X)$ es contráctil. □

Teorema 168. *Si $C_\infty(X)$ es pseudo-contráctil, entonces $C_\infty(X)$ es contráctil.*

Demostración. Como $C_\infty(X)$ es pseudo-contráctil, entonces por el Corolario 156, $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $C_\infty(X)$, por lo que $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en 2^X. Así por el Teorema 164, 2^X es pseudo-contráctil y por el Teorema 165, 2^X es contráctil. Por último por el Teorema 134, $C_\infty(X)$ es contráctil. □

Teorema 169. *Si X es pseudo-contráctil, entonces $F_n(X)$ es pseudo-contráctil.*

Demostración. Como X es pseudo-contráctil, existen un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $H : X \times K \to X$ tal que $H(x, a) = x$ y $H(x, b) = x_0$. Sea $H' : F_n(X) \times K \to F_n(X)$ definida por $H'(\{x_1, \ldots, x_n\}, t) = \{H(x_i, t) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Probaremos que H' es continua. Sean $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $t \in K$, $B = \{H(x_i, t) : x_i \in A\}$ y $V = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ tal que $H(x_i, t) \in V_j$ para $j \leq m$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que los abiertos V_j son ajenos dos a dos. Por la continuidad de H existen abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de X, que también se pueden suponer ajenos dos a dos y un abierto W de K tal que $(x_i, t) \in U_i \times W$ y $H(U_i \times W) \subseteq V_j$. Sea $U = \langle U_i, \ldots, U_n \rangle \times W$. Demostraremos que $H'(U) \subset V$. Sea $(A', t') \in U$, así $A' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ donde $y_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $t' \in W$ y $H(U_i \times W) \subseteq V_j$, se tiene que $H'(U) \subseteq V$. Por otra parte, se tiene que $H'(\{x_1, \ldots, x_n\}, a) = \{H(x_i, a) : i \in \{1, \ldots, n\}\} = \{H(x_1, a), \ldots, H(x_n, a)\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $H'(\{x_1, \ldots, x_n\}, b) = \{H(x_i, b) : i \in \{1, \ldots, n\}\} = \{H(x_1, b), \ldots, H(x_n, b)\} = \{x_0, \ldots, x_0\} = \{x_0\}$, por lo que $F_n(X)$ es pseudo-contráctil. □

El siguiente ejemplo muestra que la pseudo-contractibilidad y la contractibilidad en $F_n(X)$ no siempre son equivalentes.

Ejemplo 170. *Sea X el continuo de Kuperberg (ver Ejemplo 5.2). Recordemos que X no es arco-conexo y que es pseudo-contráctil. Por el Teorema 169, $F_n(X)$ es pseudo-contráctil, pero no es contráctil, pues si fuera contráctil, entonces por Teorema 124, X sería arco conexo, lo cual no puede pasar.*

Corolario 171. *Si X es un continuo, entonces:*

a) $F_1(X)$ *es contráctil en* $C(X)$,

b) $F_1(X)$ *es contráctil en* 2^X,

c) $C(X)$ *es contráctil,*

d) 2^X *es contráctil,*

e) $C_n(X)$ *es contráctil,*

f) $C_\infty(X)$ *es contráctil,*

g) $F_1(X)$ *es pseudo-contráctil en* $C(X)$,

h) $F_1(X)$ *es pseudo-contráctil en* 2^X,

i) $C(X)$ *es pseudo-contráctil,*

j) 2^X *es pseudo-contráctil,*

k) $C_n(X)$ *es pseudo-contráctil,*

l) $C_\infty(X)$ *es pseudo-contráctil.*

Demostración. $a) \Rightarrow g)$, $b) \Rightarrow h)$, $c) \Rightarrow i)$, $d) \Rightarrow j)$, $e) \Rightarrow k)$, $f) \Rightarrow l$ se cumplen por Observación 149.
$a)$ y $f)$ son equivalentes por Teorema 134.
$h) \Rightarrow j)$ Se satisface por Teorema 164.
$j) \Rightarrow d)$ Se satisface por Teorema 165.
$i) \Rightarrow c)$ Se satisface por Teorema 166.
$k) \Rightarrow e)$ Se satisface por Teorema 167.
$l) \Rightarrow f)$ Se satisface por Teorema 168.
$h) \Rightarrow b)$ se cumple pues $h) \Rightarrow j)$, $j) \Rightarrow d)$ y $d) \Rightarrow b)$.
$g) \Rightarrow h)$ se satisface por Observacion 149 y Teorema 134.

□

Bibliografía

[1] A. García-Máynez, A. Tamariz Mascarúa, Topología General, Editorial Porrúa, (1988).

[2] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances, Editorial Marcel Dekker, (1999).

[3] D. G. Paulowich, Weak contractibility and hyperspaces, Fund. Math. 94 (1977) 41-47.

[4] F. B. Mendoza (2007), Funciones Inducidas entre Hiperespacios de Continuos, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México .

[5] F. Barragan, J. F. Tenorio, Continuos y el producto simétrico suspensión, Revista Integración 30 (2012) 91-106.

[6] J. Dugundji, Topology, Editorial Allyn and Bacon, Inc., (1966).

[7] J. R. Munkres, Topología, Pentrice Hall, 2a Edición (2002).

[8] M. Sobolewski, Pseudo contractibility of chainable continua, Topology App. 154 (2007) 2983-2987.

[9] S. B. Nadler Jr., Continuum Theory. An introduction., Marcel Dekker, (1992).

[10] S. Macías, On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X, Topology App. 109 (2001) 237-256.

[11] Stephen Willard, General Topology, Dover Publications Inc., (1970).