Universidad Autónoma del Estado de México
Centro Unviersitario UAEM Zumpango

Álgebra Superior Unidad de Competencia I Conceptos preliminares. Tema 1. Teoría de Conjuntos

M. en C. Rafael Rojas Hernández

Agosto 2017

Evaluación

Criterios de evaluación 1er Parcial

- Examen 60 %
- Tareas 40 %

Evaluación

Criterios de evaluación 2do Parcial

- Examen 60 %
- Tareas 40 %

Criterios de evaluación Ordinario

- Examen 100 %

Evaluación

Criterios de evaluación Extraordinario

- Examen 100 %

Evaluación

Criterios de evaluación Título de Suficiencia

- Examen 100 %

Índice de la presentación

- Información general de la Unidad
- Estructura de la Unidad de Aprendizaje
- Unidad de Competencia I

Información general de la Unidad de Aprendizaje

Unidad de Aprendizaje

Álgebra Superior

Propósito de la Unidad de Aprendizaje

Aplicar las teorías del Álgebra Superior en el planteamiento y la solución de problemas que requieran su uso.

1. **Conceptos preliminares**
2. Estructuras algebraicas
3. Teoría de números
4. Números complejos
5. Funciones polinomiales y fracciones parciales

Teoría de Conjuntos

- Breve historia
- Definición de conjunto
- Notación de conjunto
- Relaciones entre conjuntos
- Operaciones con conjunto

Objetivo de la Unidad de Competencia

Aplicar la teoría de conjuntos, relaciones y funciones en la solución de ejercicios y problemas.

Conocimientos

- Teoría de conjuntos
- Relaciones y funciones
- Tipos de funciones

Habilidades

Resolver ejercicios y problemas referentes a la Teoría de conjuntos y relaciones y funciones.

Actitudes y valores

Cumplir con las actividades asignadas. Interés en el desarrollo de las actividades. Demostrar compromiso en la solución de tareas. Tolerancia y participación activa. Disposición para el trabajo en equipo. Actitud propositiva, constructivista e innovadora.

En el último cuarto del siglo XIX se vivió un episodio apasionante de la historia de las matemáticas que las ligará desde entonces a la historia de la lógica. Primero, George Boole (1815-1864) en su *Mathematical Analysis of Logic and Probabilities* trató de presentar la lógica como parte de las matemáticas; a través, de un sistema de reglas que le permitían expresar, manipular y simplificar problemas lógicos y filosóficos cuyos argumentos admiten dos estados (verdadero y falso) por procedimientos matemáticos. Se podría decir que es el padre de los operadores lógicos simbólicos **álgebra de Boole**.

Poco después Gottlob Frege (1848-1925) intentó mostrar que la aritmética era parte de la lógica en su *Die Grundlagen der Arithmetik*. Mediante la introducción de una nueva sintaxis, con la inclusión de los llamados **cuantificadores** (para todo, para al menos uno), permitió formalizar una enorme cantidad de nuevos argumentos.

Pero, dando un gran paso tanto en la historia de las matemáticas como en la historia de la lógica, Georg Cantor(1845-1918) se había adelantado a Frege con una fundamentación lógica de la aritmética. Cantor había demostrado que la totalidad de los números naturales comprendidos en el intervalo de extremos 0 y 1 no es numerable, en el sentido de que su infinitud no es la de los números naturales. Como una consecuencia de esa situación, Cantor creó una nueva disciplina matemática entre 1874 y 1897: la **teoría de conjuntos**.
Según la definición de conjunto de Cantor, éste es "una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto".

En 1903 Bertrand Russell demostraría que la teoría de conjuntos de Cantor era inconsistente y cuestionaría la definición de conjunto en la teoría de Cantor. Pero pronto la teoría axiomática de Ernst Zermelo (1908) y refinamientos de ésta debidos a Adolf Fraenkel (1922),Thoralf Skolem (1923), John Von Newman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual.
La teoría de conjuntos es una parte de las matemáticas, es además, la teoría matemática dónde fundamentar la aritmética y el resto de teorías matemáticas. Es también indiscutiblemente una parte de la lógica y en particular una parte de la lógica de predicados.

Conjunto

Cualquier colección (o listado) de objetos (elementos) bien definidos y diferentes entre sí, que pertenecen a un grupo determinado.

Existe un conjunto si se basa en:

- La colección de elementos debe estar bien definida.
- Ningún elemento del conjunto se debe contar más de una vez.

Representación de Conjuntos

A los conjuntos se les representa con letras mayúsculas **A, B, C** y a los elementos con letras minúsculas **a, b, c**.

Ejemplos:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A = \{$a,b,c,d,z$\}$
- $B = \{$rojo,verde,azul$\}$
- $C = \{$caballo,perro,gato,león,cebra$\}$

En base al número de elementos que tenga un conjunto se pueden clasificar en:

Finitos

Tienen un número conocido de elementos, es decir, su longitud o cantidad se encuentran determinados.

Infinitos

Son aquellos en los cuales no podemos determinar su longitud.

Ejemplos:

- Finito: El conjunto de los días de la semana.
- Infinito: El conjunto de los números reales.

Existen varias formas de escribir un conjunto dependiendo de la conveniencia y de ciertas circunstancias:

Extensión

Se describe cada uno de los elementos.

Comprensión

Se enuncian las propiedades que deben tener sus elementos.

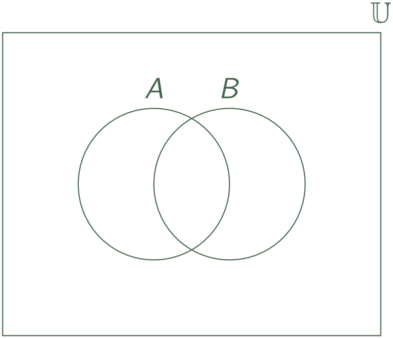
Ejemplos:

- Extensión: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
- Comprensión: $\{A = x | x \text{ es una vocal}\}$.

Sin embargo, la forma más común de representar a los conjuntos es mediante **Diagramas de Venn**

Diagrama de Venn

Son regiones cerradas que sirven para visualizar el contenido de un conjunto y las relaciones entre ellos.



Una última forma, la menos utilizada por su interpretación es:

Descripción verbal

En un enunciado se describen las características que tienen en común los elementos.

Ejemplo: Todos los números enteros cuyo residuo al ser divididos entre dos es igual a cero.

$$A = \{x | (x \% 2) = 0\}$$

Pertenencia (o es elemento de) $\in$

Para describir si un elemento pertence a un conjunto.

No pertenencia $\notin$

Para describir si un elemento **no** pertence a un conjunto.

Símbolos lógicos

- Negación $\neg$.
- Conjunción $\wedge$.
- Disyunción $\vee$.
- Implicación $\rightarrow$.
- Equivalencia $\leftrightarrow$.
- Cuantificador Universal $\forall$.
- Cuantificador Existencial $\exists$.
- Paréntesis $(,)$.

Conjunto vacío $\emptyset$

Es aquel que no tiene elementos

$$\emptyset = \{\}$$

$$\forall x \rightarrow x \notin \emptyset$$

Conjunto Universo $\mathbb{U}$

Es el conjunto de todos los elementos considerados en una población o universo, en un problema en especial.

$$\forall x \rightarrow x \in \mathbb{U}$$

Igualdad $=$

Sean A y B dos conjuntos, si ambos tienen los mismos elementos, es decir, si cada elemento de A también pertence a B y si cada elemento que pertenece a B pertenece también a A.

$$A = B \ si \ \{x | x \in Ayx \in B\}$$

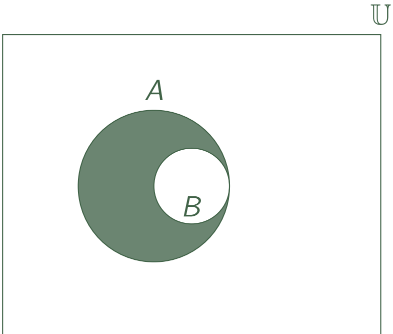
$$\forall x \rightarrow (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Subconjunto $\subset$

Si todo elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B.

$$A \subset B$$

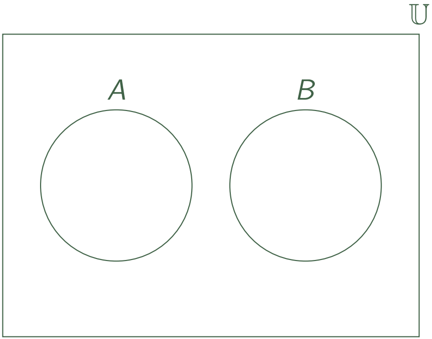
$$\forall x \rightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$$



Disjunción

Dos conjuntos A y B se dicen textbfdisjuntos si no tienen elementos en común.

$$\forall x \rightarrow (a \in A \rightarrow x \notin B, x \in B \rightarrow x \notin A)$$



Cardinalidad $|A|$

El número cardinal o **cardinalidad** de un conjunto finito A es el número natural único n tal que los elementos de A están en correspondencia uno-a-uno con lo elementos del conjunto.

$$n = |A| = card(A)$$

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{\}$. Hallar la cardinalidad de cada conjunto.

$$|A| = 8$$

$$|B| = 0$$

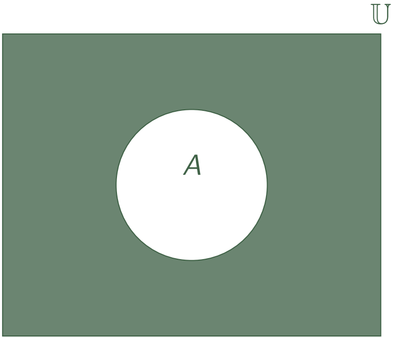
Propiedades de la cardinalidad

- Si $A = B \rightarrow |A| = |B|$
- $|\emptyset| = 0$
- $A \subset B \rightarrow |A| \leq |B|$
- $|A - B| = |A| - |B|$
- $|A^c| = |\mathbb{U}| - |A|$
- $|A^c \cup B^c| = |\mathbb{U}| - |A \cap B|$

Complemento A^c

Si A es un subconjunto de un conjunto Universo, entonces el **complemento** de A se define como el conjunto de elementos de $\mathbb{U}$ que no están en A.

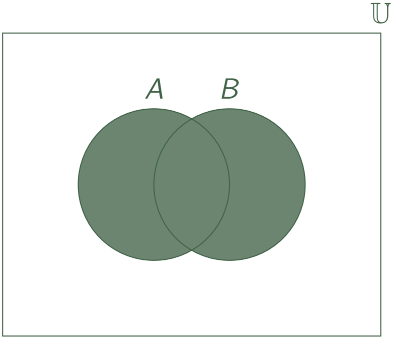
$$\forall x, x \in A^c \leftrightarrow x \notin A$$



Unión $\cup$

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenencen a A o a B.

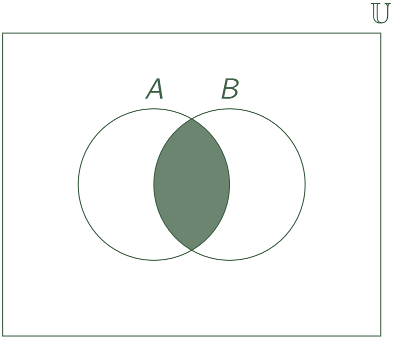
$$\forall x \to (x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$$



Intersección $\cap$

La **intersención** de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenencen tanto a A como a B.

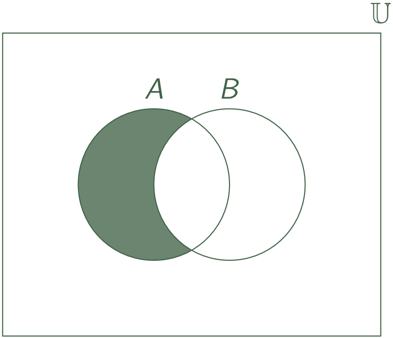
$$\forall x \to (x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$$



Diferencia $A - B$

Sean A y B dos conjuntos, la **diferencia** de A menos B es el conjunto de elementos que están en A pero no están en B.

$$A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$$



Algunas propiedades de la diferencia de conjuntos:

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = \emptyset - A = A$
- $A - B = A \cap B^c$
- $A \subset B \leftrightarrow A - B = \emptyset$
- $A - (A - B) = A \cap B$
- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Conjunto Producto $A \times B$

El **conjunto producto** o **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde a están en A y b está en B.

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo: Sea los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ y $C = \{1, 3\}$. Determine $A \times B$ y $A \times C$.

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

Leyes de Conjuntos

Asociativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (C \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (C \cap C)$

Conmutativa

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Distributiva

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identidad

$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U} \quad A \cap \mathbb{U} = A$

$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

Involución

$(A')' = A$

Complemento

$A \cup A' = \mathbb{U} \quad A \cap A' = \emptyset$

$\mathbb{U}' = \emptyset \quad \emptyset' = \mathbb{U}$

De Morgan

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Bibliografía

1. Becerril Vilchis Francisco (2009) Álgebra Superior 175 ejercicio típicos,, soluciones. Kali-xottl,, 2a Ed. Estado de México.
2. Becerriill Vilchis Francisco y Ojeda Toche Lilia (2003) Álgebra Superior,, Concepttos y Formulas. UAEM.
3. Lehmann (2003) Álgebra, Limusa Noriega Editores. México.
4. Lovaglia (1987) Álgebra, Harla. México.
5. Max Sobel y Norberto Lerner (1996) Álgebra. 4a. Ed. PHH. México.
6. Cardenas, Luis; Raggi, Tomas (1983) Álgebra Superior. Trillas. México.
7. Weiss,, Dubisch (1983) Álgebra Superior. Limusa, 6a. Ed. México..