Universidad Autónoma del Estado de México

Unidad Académica Profesional “Nezahualcóyotl”

Lic. en Ingeniería en Sistemas Inteligentes.

PROBLEMARIO

Unidad de aprendizaje: CÁLCULO III

Autor: Dr. Israel Gutiérrez González

Índice

Presentación

El presente material didáctico tiene como objetivo reforzar el aprendizaje obtenido en las aulas ayudando a los estudiantes a comprender y utilizar el cálculo.

Cada tema contiene un grupo de ejercicios complementarios con sus soluciones.

UNIVERSIDAD AUTONÓMA DEL ESTADO DE MÉXICO

UNIDAD ACADÉMICA PROFESIONAL NEZAHUALCÓYOTL
COORDINACIÓN DE INGENIERÍA EN SISTEMAS INTELIGENTES

I. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

I.	ALGEBRA VECTORIAL. Productos Escalar y Vectorial, Funciones Escalares y Vectoriales.
II.	COORDENADAS CURVILINEAS. Coordenadas Polares, Esféricas y Cilíndricas.
III.	CALCULO DIFERENCIAL. Operadores Vectoriales Diferenciales
IV.	CALCULO INTEGRAL. Integrales de Línea, de Superficie y de Volumen.

1. ALGEBRA VECTORIAL

Un vector en el espacio es una cantidad que tiene magnitud y dirección.
Los vectores se representan geométricamente por segmentos rectos dirigidos (flechas).

1.1 OPERACIONES CON VECTORES

1.1.1 Suma:

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores cuyos valores son:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

La suma de los vectores es:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i}(a_x + b_x) + \vec{j}(a_y + b_y) + \vec{k}(a_z + b_z)$$

1.1.2 Resta:

Tomando los vectores anteriores nos basta sumar el primero con el opuesto del 2º o sustraendo:

La resta de los vectores es:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i}(a_x - b_x) + \vec{j}(a_y - b_y) + \vec{k}(a_z - b_z)$$

1.1.3 Multiplicación:

Hemos de considerar los casos siguientes:

a) <u>Multiplicar un escalar por un vector:</u>

El resultado es un valor escalar.

Ejercicio demostrativo:

Sea el vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, multiplicamos por el número "g" a ambos miembros de la igualdad: $g.\vec{a} = g \bullet a_x\vec{i} + g \bullet a_y\vec{j} + g \bullet a_z\vec{k}$

Vemos que el producto de un vector por un número se obtiene multiplicando cada componente del vector por dicho número.

Comprobamos:

Si $\vec{v} = (2,3,4)$

Multiplicamos por 2 a ambos miembros de la igualdad:

$$2 \bullet \vec{v} = 2(2,3,4); 2\vec{v} = (4,6,8)$$

Hallamos el módulo:

$$2\vec{v} = \sqrt{4^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{116} = 10,76$$

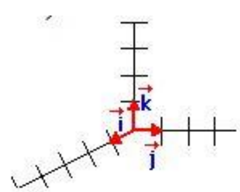
El módulo de:

$$|\vec{v}| = (2,3,4) \text{ vale } |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} = 5,38$$

Donde comprobamos que $2 \bullet |\vec{v}| = 2 \bullet 5,38 = 10,76$

b) <u>Producto de dos vectores:</u>

1) Suponemos que los vectores pertenecen a la base ortogonal (forman entre ellos 90º):



Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores cuyos valores son:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

Multiplicamos los vectores:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x i(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) + a_y\vec{j}(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) + a_z\vec{k}(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

Quitando paréntesis:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{ij} + a_x b_z \vec{ik} + a_y b_x \vec{ij} + a_y b_y \vec{j}^2 + b_y b_z \vec{jk} + \\ + a_z b_x \vec{ik} + a_z b_y \vec{jk} + a_z b_z \vec{k}^2$$

Nota*

Los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ al ser ortogonales tienen por coordenadas:

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0) \text{ y } \vec{k} = (0,0,1)$$

Hay que tener en cuenta:

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = 1 \bullet 0 = 0$$
$$i \bullet \vec{k} = 1 \bullet 0 = 0$$
$$\vec{j} \bullet \vec{k} = 1 \bullet 0 = 0$$
$$\vec{i}^2 = 1 \bullet 1 = 1$$
$$\vec{j}^2 = 1 \bullet 1 = 1$$
$$k^2 = 1 \bullet 1 = 1$$

Todos los términos que contienen productos unitarios de ejes perpendiculares son iguales a cero, por lo que podemos escribir:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x \vec{i}^2 + 0 + 0 + 0 + a_y b_y \vec{j}^2 + 0 + 0 + 0 + a_z b_z = \\ = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

El resultado es un escalar que puede ser positivo, negativo o cero.

1.2 PRODUCTO ESCALAR

Ejercicio demostrativo

¿Qué ángulo aproximado forman los vectores? $\vec{u} = (1,1,3)$ y $\vec{v} = (3,3,2)$

Solución

Haciendo uso del producto escalar de dos vectores:

$$\bar{u} \bullet \bar{v} = |\bar{u}| \bullet |\bar{v}| \bullet \cos(\bar{u}, \bar{v})$$

Sustituyendo por los valores numéricos que conocemos:

$$(1,1,3) \bullet (3,3,2) = 3,316 \bullet 4,795 \bullet \cos(\bar{u}, \vec{v})$$

$$12 = 15,9 \bullet \cos(\bar{u}, \vec{v})$$

$$\cos(\bar{u}, \vec{v}) = \frac{12}{15,9} = 0,75$$

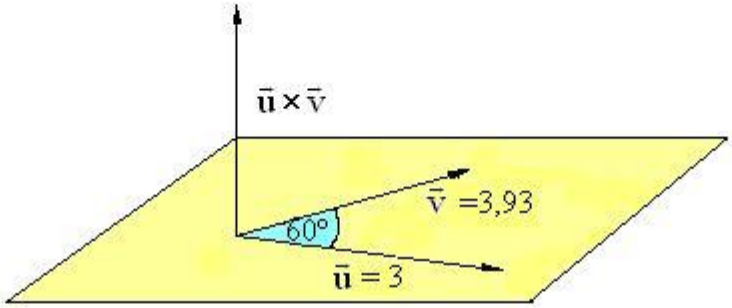
Respuesta: 41º

1.3 PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores produce un vector $\vec{u} \times \vec{v}$ perpendicular a los dos vectores.

Ejercicio demostrativo

Calcula el valor del módulo del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ sabiendo que el módulo del vector $|\vec{u}| = 3$, el módulo del vector $|\vec{v}| = 3,93$ y el ángulo que forman los dos vectores $(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$. Estos datos los tienes en la siguiente figura:



Solución:

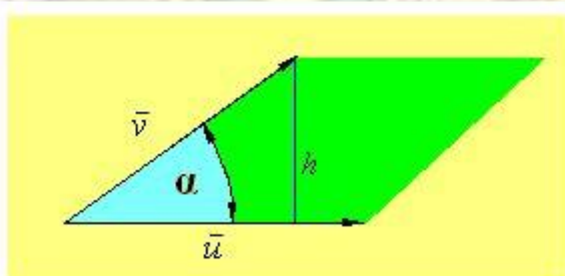
Sabemos que $\vec{u}\times\vec{v} = |\vec{u}| \bullet |\vec{v}| \bullet \mathrm{sen}(\vec{u}, \vec{v});$

$$\vec{u}\times\vec{v} = 3 \bullet 3,93 \bullet \mathrm{sen}\,60° = 3 \bullet 3,93 \bullet 0,86 = 10,1$$

Respuesta: **10,1 u²**

1.4 ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

El área de un paralelogramo puedes calcular a partir del valor de los módulos de los vectores de sus lados:



Vemos que

$$sen\,\alpha = \frac{h}{\vec{v}}; \quad h = \vec{v} \bullet sen\,\alpha = \vec{v} \bullet sen(\vec{u}\ \ \vec{v})$$

El área del paralelogramo lo calculamos, $=|\vec{u}| \bullet |\vec{v}| \bullet \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ o bien, hacemos uso del módulo del vector producto $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Ejercicio demostrativo

Calcula el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$ y $\vec{v} = (3,1,2)$

Solución:

- Área del paralelogramo $=|\vec{u}| \bullet |\vec{v}| \bullet \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

$$|\vec{u}| = \bullet |\vec{v}| \bullet \operatorname{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\,;\ |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}\ ;\ |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{29} = 5{,}3851\ ;\ |\vec{v}| = \sqrt{14} = 3{,}7416$$

Calculamos la altura del paralelogramo:

$$\operatorname{sen}32° = \frac{h}{|\vec{v}|}; h = \sqrt{14} \bullet \operatorname{sen}32° = 3{,}7416 \bullet 0{,}536 = 2$$

Conocemos la base del paralelogramo, $|\vec{u}| = \sqrt{29} = 5{,}4$ y la altura que es 2, el área será: $5{,}4 \bullet 2 = 10{,}8u^2$

Respuesta: $\mathbf{10{,}8\ u^2}$

- Haciendo uso del módulo del vector producto $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Solución

Se calcula el vector $|\vec{u} \times \vec{v}|$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i}(6 - 4) - \vec{j}(4 - 12) + \vec{k}(2 - 9)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$$

El módulo del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es: $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-7)^2} = \sqrt{117} = 10{,}8\mathrm{u}^2$.

Respuesta: **$10{,}8\ \mathrm{u}^2$**

1.5 PRODUCTOS TRIPLES

Hablamos de producto mixto porque intervienen el producto escalar y el producto vectorial y esto ya nos orienta a que deben intervenir 3 vectores.

$$\vec{u} = u_x + u_y + u_z$$
$$\vec{v} = v_x + v_y + v_z$$
$$\vec{w} = w_x + w_y + w_z$$

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = u_x \left| v_y w_z - v_z w_y \right| - u_y \left| v_x w_z - v_z w_x \right| + u_z \left| v_x w_y - v_y w_x \right|$$

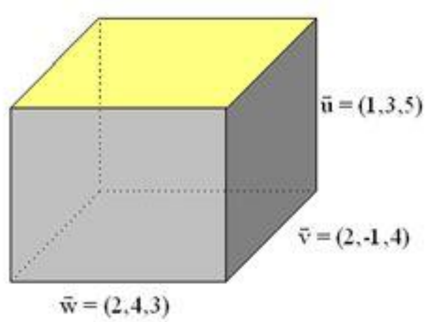
Ejercicio demostrativo

El volumen de un ortoedro, como la de cualquier otro paralelepípedo se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. Sabiendo que los vectores que forman la base corresponden a: $\vec{v} = (2, -1, 4)$ $\vec{w} = (2, 4, 3)$ y las componentes de la altura son: $\vec{u} = 1, 3, 5$

¿Cuál es el valor de este ortoedro?

Solución

Dibujamos la figura y colocamos los datos que conocemos:



Lo resolvemos:

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=1(-3-16)-3(6-8)+5(8+2)=-19+6+50=37$$

Respuesta: $37u^2$

1.6 FUNCIONES VECTORIALES

a) Demuestre que la curva descrita por $\vec{r}\,(t)=(t\cos t, t\sin t, t)$ se encuentra sobre la superficie de un cono. Dibuje la curva.

b) Si una partícula parte del origen siguiendo la trayectoria anteriormente descrita, determine en qué punto impacta la esfera:

$$x^2+y^2+z^2=2.$$

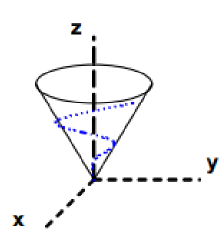
c) Calcule la longitud de la curva desde el origen al punto de impacto.

Solución

A partir de las ecuaciones paramétricas tenemos:

$$\begin{array}{rcl}x\,(t)= & t\cos t & \\ y\,(t)= & t\sin t & \Longrightarrow \\ z\,(t)= & t & \end{array}\quad\begin{array}{rc}x^2+y^2= & t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)\\ x^2+y^2= & t^2\\ z^2= & x^2+y^2\end{array}$$

a) Que corresponde a la ecuación de un cono, cuyo sector superior, se dibuja en el grafico adjunto



b) Calculemos para que valor del parámetro t la partícula impacta la esfera, sustituyendo las ecuaciones paramétricas en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2 = 2 \implies t = 1$ .Luego, la posición del punto de impacto es $\overrightarrow{r}(1) = (\cos 1, \sin 1, 1)$

c) La longitud de la curva es:

$$l = \int_0^1 \|\overrightarrow{r}'(t)\| \, du \text{ con } \|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{\overrightarrow{r}'(t) \cdot \overrightarrow{r}'(t)}$$

$$\begin{aligned} \text{con } \overrightarrow{r}'(t) &= (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 0) \\ \|\overrightarrow{r}'(t)\| &= \sqrt{\overrightarrow{r}'(t) \cdot \overrightarrow{r}'(t)} = \sqrt{t^2} \implies l = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla la suma de los vectores: $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{u} = -6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$

2. Halla la resta de los vectores: $\vec{u} = -6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ menos $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

3. Tenemos los vectores $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (6,2,4)$
¿Cuánto vale el ángulo que forman estos vectores?

4. Calcula el valor del módulo del vector producto $\vec{a} \times \vec{b}$, si las componentes de $\vec{a} = (2, 3, 4)$ y las de $\vec{b} = (3,1,2)$.

5. Calcula el área de un triángulo a partir del paralelogramo y conociendo los vectores $\vec{a} = (4, 1, -2)$ y $\vec{b} = (3, -4, 2)$:

6. Tenemos tres vectores cuyas componentes son:
$\vec{u} = (2,-1,1)$, $\vec{v} = (3,-2,5)$ y $\vec{w} = (3,5,1)$.
Responde, tras comprobar, si el valor escalar de $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual a $\vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u})$ y a $\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$:

7. Dada la ecuación paramétrica de la trayectoria
$\overrightarrow{r}(t) = (2t^3 - 3t^2, t - 2arctan(t))$
Encontrar todos los valores de t para los cuales la curva
(i) Tiene tangente horizontal.
(ii) Tiene tangente vertical.
(iii) No es regular.

2 COORDENADAS CURVILÍNEAS

2.5 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Ejercicio demostrativo

Dado el siguiente campo eléctrico $\vec{E} = X\widehat{a_x} + Y\widehat{a_y} + Z\widehat{a_z}$ realice la transformación al sistema de coordenadas cilíndricas.
Lo primero que debemos realizar es colocar todas las variables y vectores unitarios en función del sistema de coordenadas hacia el cual se quiere realizar la transformación.

$$X = r\ \cos\varphi\, \widehat{a_x} = \cos\varphi\ \widehat{a_r} - \sin\varphi\, \widehat{a_\varphi}$$
$$Y = r\sin\varphi\, \widehat{a_y} = \sin\varphi\ \widehat{a_r} + \cos\varphi\, \widehat{a_\varphi}$$
$$Z = Z\widehat{a_z} = \widehat{a_z}$$

$$\vec{E} = (r\ \cos\varphi)\left(\cos\varphi\ \widehat{a_r} - \sin\varphi\, \widehat{a_\varphi}\right) + (r\sin\varphi)\left(\sin\varphi\ \widehat{a_r} + \cos\varphi\, \widehat{a_\varphi}\ \right) + Z\widehat{a_z}$$

Multiplicando término a término

$$\vec{E} = (r\ \cos\varphi)(\cos\varphi\ )\widehat{a_r} - (r\ \cos\varphi)(\sin\phi)\widehat{a_\varphi} + (r\sin\varphi)\ (\sin\varphi)\widehat{a_r} +$$
$$+(r\sin\varphi)(\cos\varphi\ )\widehat{a_\varphi} + Z\widehat{a_z}$$

Ahora, solo queda agrupar los términos en función de los vectores unitarios: en $\widehat{a_r}$nos va quedando r como factor común de (cos2 φ+ sen2 φ=1), los términos en $\widehat{a_\varphi}$se eliminan al ser iguales y de signo contrario, el término en $\widehat{a_z}$no varía, quedando:

$$\vec{E} = r\widehat{a_r} + Z\widehat{a_z}$$

2.6 COORDENADAS ESFÉRICAS

Ejercicio demostrativo

Dado el siguiente campo vectorial $\vec{F} = X\widehat{a_x} + Y\widehat{a_y} + Z\widehat{a_z}$ realice la transformación al sistema de coordenadas esféricas.

Lo primero que debemos realizar es colocar todas las variables y vectores unitarios en función del sistema de coordenadas hacia el cual se quiere realizar la transformación.

$$X = r \sin\theta\cos\varphi\,\widehat{a_x} = \sin\theta\cos\varphi\,\widehat{a_r} + \cos\theta\cos\varphi\,\widehat{a_\theta} - \sin\varphi\,\widehat{a_\varphi}$$
$$Y = r\sin\theta\sin\varphi\,\widehat{a_y} = \sin\theta\sin\varphi\,\widehat{a_r} + \cos\theta\sin\varphi\,\widehat{a_\theta} + \cos\varphi\,\widehat{a_\varphi}$$
$$Z = r\cos\theta\,\widehat{a_z} = \cos\theta\,\widehat{a_r} - \sin\theta\,\widehat{a_\theta}$$
$$\vec{F} = (r\sin\theta\cos\varphi)\left(\sin\theta\cos\varphi\,\widehat{a_r} + \cos\theta\cos\varphi\widehat{a_\theta} - \sin\varphi\,\widehat{a_\varphi}\right) +$$
$$+(r\sin\theta\sin\varphi)(\sin\theta\sin\varphi\,\widehat{a_r} + \cos\theta\sin\varphi\,\widehat{a_\theta} + \cos\varphi\,\widehat{a_\varphi}) +$$
$$+r\cos\theta\,(\cos\theta\,\widehat{a_r} - \sin\theta\,\widehat{a_\theta})$$

Multiplicando término a término

$$\vec{F} = r(\sin\theta)^2(\cos\varphi)^2\widehat{a_r} + r\sin\theta\cos\theta\,(\cos\varphi)^2\widehat{a_\theta} - r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\,\widehat{a_\varphi}$$
$$+r(\sin\theta)^2(\sin\varphi)^2\widehat{a_r} + r\sin\theta\cos\theta\,(\sin\varphi)^2\widehat{a_\theta} + r\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi\,\widehat{a_\varphi}$$
$$+r\,(\cos\theta)^2\widehat{a_r} - r\cos\theta\sin\theta\,\widehat{a_\theta})$$

Agrupando términos en función de los vectores unitarios:

$$\vec{F} = r[\,(\sin\theta)^2(\cos\varphi)^2 + (\sin\theta)^2(\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2\,]\widehat{a_r}$$
$$+r[\sin\theta\cos\theta\,(\cos\varphi)^2 + \sin\theta\cos\theta\,(\sin\varphi)^2 - \sin\theta\cos\theta]\widehat{a_\theta}$$
$$+r[-\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi]\widehat{a_\varphi}$$
$$\vec{F} = r\{(\sin\theta)^2[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2] + (\cos\theta)^2\,\}\widehat{a_r}$$
$$+r\sin\theta\cos\theta\,[\,[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2] - 1\,]\widehat{a_\theta}$$
$$+r[-\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\,]\widehat{a_\varphi}$$

Los términos que multiplican a los vectores unitarios en dirección de $\widehat{a_\theta}$ y $\widehat{a_\varphi}$ se anulan y los términos dentro de la llave para la dirección $\widehat{a_r}$ se hacen igual a 1 por identidades trigonométricas, quedando finalmente:

$$\vec{F} = r\widehat{a_r}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Expresar en coordenadas rectangulares el punto (r, ɵ, z) = (4,5π/6,3).

2.- Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación:

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$
b) $y^2 = x$

3.-Hallar una ecuación en coordenadas esféricas parar las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares se indican.

a).- cono: $x^2 + y^2 = z^2$
b).- esfera: $-4z = 0$

4.- Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la grafica determinada por la ecuación en cilíndricas:

$r^2 \cos^2 \theta + z^2 + 1 = 0$

5.-Dado un punto en cartesianas (-3,-4,5) Hallar las coordenadas cilíndricas que corresponden al punto dado.

3 CALCULO DIFERENCIAL

3.1 DERIVADAS PARCIALES

Ejercicio demostrativo

Dada la función f definida por $f(x, y, z)=\exp(x^3 y^4 z^5)$. Halla sus derivadas parciales en el punto P (1, 1,1).

Solución:

Podemos elegir entre aplicar la definición de derivada en el punto P(1, 1, 1). o lo que es más fácil, calculamos las derivadas parciales y en ellas sustituimos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^3 y^4 z^5}(3x^2 y^4 z^5) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=[e^{x^3 y^4 z^5}(3x^2 y^4 z^5)]_{(1,1,1)}=3e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^3 y^4 z^5}(4x^3 y^3 z^5) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=[e^{x^3 y^4 z^5}(4x^3 y^3 z^5)]_{(1,1,1)}=4e$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=e^{x^3 y^4 z^5}(5x^3 y^4 z^4) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=[e^{x^3 y^4 z^5}(5x^3 y^4 z^4)]_{(1,1,1)}=5e$$

3.2 DIFERENCIAL DE VOLUMEN

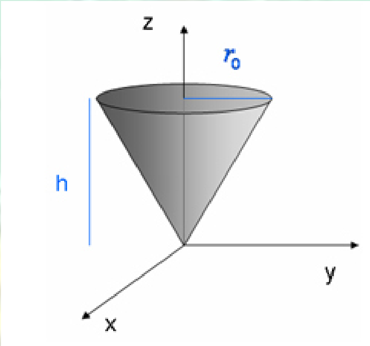
Ejercicio demostrativo

Dentro de un cono cuyo ápex coincide con el origen de coordenadas y cuyo eje coincide con el eje z, tal como se muestra en la figura, se encuentra una distribución de masa por unidad de volumen dada por

$$\delta = \frac{2r^2 z}{h^3}\ kg/m^3 \cdot$$

El radio basal del cono es r_0 y la altura del mismo es h.

Calcule la masa total contenida en el cono.



Solución

Como la distribución de masa por unidad de volumen es una función, entonces se puede plantear la ecuación integral:

$$m = \int_V \delta\, dv$$

Dado que la figura es un cono, se puede encontrar una relación simple entre el radio y la coordenada z en la superficie del manto que delimita el cono.

$$r = \frac{r_0}{h} z$$

Cuando se una el diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas la integral queda:

$$m(kg) = \int_V \delta\, r d\varphi drdz$$

Poniendo los límites de integración

$$m(kg) = \int_0^h \int_0^{\frac{r_0}{h}z} \int_0^{2\pi} \frac{2r^3 z}{h^3} d\varphi drdz$$

Resolviendo

$$m = \frac{22\pi r_0^4}{15h}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la función z definida por $z = x^3 - 3y^2 + 5xy + x - 2y + 5$ Halla $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Calcular el volumen del solido comprendido entre las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y y $x^2 + y^2 = z^2$.
3. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie x2y+2xy=4 en el plano (2, -2, 3)

4 CALCULO INTEGRAL

4.1 INTEGRACION VECTORIAL

Ejercicio demostrativo

Obtenga el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F} = (x^2 - y^2)\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$, para mover una partícula desde el punto $A(1,0)$ al $B(2,2)$ a lo largo de la curva $y = x^2 - x.$

Solución

$$W = \int \vec{F} \cdot dr = \int (x^2 - y^2)dx + 2xydy$$

$$Intervalos: y = x^2 - x\,, 1 \le x \le 2 \Rightarrow dy = (2x-1)dx$$

$$\int_{x=1}^{2} \left(x^2 - (x^2 - x)\right)dx + 2x(x^2 - x)(2x-1)dx = \int_{x=1}^{2} (3x^4 - 4x^3 + 2x^2)dx$$

$$= \left(\frac{3x^5}{5} - x^4 + \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{16}{15}$$

4.2 INTEGRAL DE LÍNEA

Ejercicio demostrativo

Demuestre que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria y evalúe la integral.

$$\oint_C (2x \sin y)dx + \left(x^2 \cos y - 3y^2\right)dy$$

Donde C es cualquier trayectoria que va desde (-1,0) hasta (5,1)

Solución

$$Sea\ \vec{F} = \underbrace{(2x\sin y)}_{P}\,\hat{\imath} + \underbrace{(x^2\cos y - 3y^2)}_{Q}\,\hat{\jmath}$$

Se tiene $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos y\ ;\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cos y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ ;\ \vec{F}$ es un campo conservativo

Es decir, existe f con $\vec{F} = \nabla f.$ Así la integral es independiente de la trayectoria se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin y\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos y - 3y^2$$

Integrando con respecto a x se tiene:

$$f(x,y) = 2\sin y\cdot\frac{x^2}{2} + G(y) = x^2\sin y + G(y)$$

Luego $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\cos y + G'(y)$ igualando los $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$x^2\cos y + G'(y) = x^2\cos y - 3y^2 \Rightarrow G(y) = -y^3 + C$$

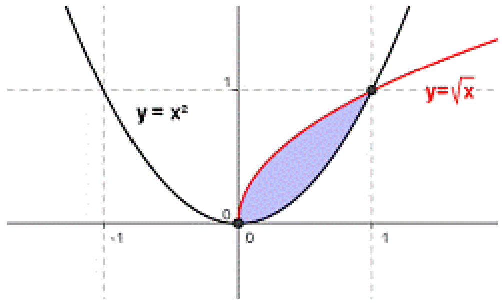
$$\therefore f(x,y) = x^2\sin y - y^3 + C$$

Se tiene: $\oint (2x\sin y)dx + (x^2\cos y - 3y^2)dy = [x^2\sin y - y^3 + C]_{(-1,0)}^{(5,1)} = 25\sin 1 - 1$

4.3 ÁREA DE UNA REGIÓN

Ejercicio demostrativo

Hallar el área de la región limitada por las graficas de las funciones $\mathbf{y = x^2}$, $\mathbf{y = \sqrt{x}}$.



Igualamos las funciones y resolvemos la ecuación para conocer los límites de integración.

$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \;\; \Rightarrow$ Limites de integración: 0 y 1. Un recinto.

Calculamos la función diferencia: $y = x^2 - \sqrt{x}$

Hallamos una primitiva de la función diferencia: $G(x) = \int \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x^{3/2}}{3}$

Hallamos G(1) y G(0): $\begin{cases} G(1) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x^{3/2}}{3} = \dfrac{1}{3} \\ G(0) = 0 \end{cases}$

Área del recinto: $G(1) - G(0) = \dfrac{1}{3}$

$$A = \int_0^1 \left(x^2 - \sqrt{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcule la integral de línea $\int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$. donde C es la curva formada por los siguientes segmentos de rectas:
   Punto Inicial
   $(2,1) \to (1,2) \to (-1,2) \to (-2,1) \to (-2,-1) \to (-1,-2) \to (1,-2) \to (2,-1)$

2. Calcule $\int_C xydx + (x+y)dy$ donde C es la frontera de la región situada entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 16$.

3. Utilice el Teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva orientada de manera positiva:

$$\oint_C \left(xy + e^{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \ln(1+y)\right)dy$$

Donde C consiste del segmento de recta que va desde $(0,0)$ a $(\pi, 0)$ y de la curva $y = \sin x$ con $0 \le x \le \pi$.

4. Hallar el área de la región limitada por las graficas de las funciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x$.

5. Hallar el área de la región limitada por las graficas de las funciones $y = x - 3$ y $y = -x^2 + 3x$.

Respuestas a los ejercicios propuestos

ALGEBRA VECTORIAL

1. Halla la suma de los vectores: $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ y $\vec{u} = -6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$

Respuesta: $\vec{u} + \vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

2. Halla la resta de los vectores: $\vec{u} = -6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ menos $\vec{v} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Solución:

$$-6\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k} + (-5)\vec{i} + (-2)\vec{j} + (+3)\vec{k} = -11\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$$

Respuesta: $\vec{u} - \vec{v} = -11\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$

3. Tenemos los vectores $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (6,2,4)$

¿Cuánto vale el ángulo que forman estos vectores?

Solución: En $$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{u_1 \bullet v_1 + u_2 \bullet v_2 + u_3 \bullet v_3}{\sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}} \bullet \sqrt{v_1^{\,2} + v_2^{\,2} + v_3^{\,2}}}$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1\bullet 6 + 2\bullet 2 + 3\bullet 4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\bullet\sqrt{6^2+2^2+4^2}} = \frac{22}{\sqrt{14}\bullet\sqrt{56}} = \frac{22}{28} = 0,78$$

Respuesta: 38º aproximadamente.

4. Calcula el valor del módulo del vector producto $\vec{a}\times\vec{b}$, si las componentes de $\vec{a} = (2,\ 3,\ 4)$ y las de $\vec{b} = (3,1,2)$.

Solución

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right| =$$

$$= 6\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k} - 4\vec{j} - 4\vec{i} - 9\vec{k} = 2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-7)^2} = \sqrt{4+64+49} = \sqrt{117}$$

Respuesta: $\sqrt{\mathbf{117}}\ u^2$

5. Calcula el área de un triángulo a partir del paralelogramo y conociendo los vectores $\vec{a} = (4, 1, -2)$ y $\vec{b} = (3, -4, 2)$:

Solución

Calculamos primeramente el vector producto:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i}(2 - 8) - \vec{j}(8 + 6) + \vec{k}(-16 - 3) = -6i - 14j - 19k$$

Ahora calculamos el módulo de este vector:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-14)^2 + (-19)^2} = \sqrt{593} = 24{,}35\ u^2$$

Como la mitad de un paralelogramo equivale al triángulo tendremos que el área será:

$$\frac{24{,}35}{2} = 12{,}17 u^2$$

Respuesta: $\mathbf{12{,}17\ u^2}$

6. Tenemos tres vectores cuyas componentes son:

$$\vec{u} = (2,-1,1),\ \vec{v} = (3,-2,5)\ \text{ y }\ \vec{w} = (3,5,1).$$

Responde, ***tras comprobar***, si el valor escalar de $\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})$ es igual a $\vec{v}\bullet(\vec{w}\times\vec{u})$ y a $\vec{w}\bullet(\vec{u}\times\vec{v})$:

Solución

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \vec{v}\bullet(\vec{w}\times\vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{w}\bullet(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -45$$

La permutación exige que el factor que tomamos lo coloquemos por detrás “empujando” hacia la izquierda a los otros dos.

Si no se respeta el sentido del giro produciremos un error.

Respuesta: Sí, son iguales a $|-45|$

7. Dada la ecuación paramétrica de la trayectoria

$$\vec{r}(t) = (2t^3 - 3t^2, t - 2arctan(t))$$

Encontrar todos los valores de t para los cuales la curva

(i) Tiene tangente horizontal.

(ii) Tiene tangente vertical.

(iii) No es regular.

Solución:

El vector tangente a la curva $\vec{r}(t) = (2t^3 - 3t^2, t - 2arctan(t))$ es $\vec{r}'(t) = (6t^2 - 6t, \frac{t^2-1}{t^2+1})$ cuya pendiente es:

$$m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} \implies m(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t+1}{6t(t^2+1)}$$

(i) Para que la tangente sea horizontal, Èsta tiene que existir, es decir $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, y además $m(t) = 0.$ Por tanto, $t = -1.$

(ii) Para que la tangente sea vertical, Ésta tiene que existir, es decir $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ y además

$m(t) = \infty.$ Por tanto, $t = 0.$

(iii) Para que la curva sea no regular $\vec{r}'(t) = \vec{0} \implies x'(t) = y'(t) = 0,$ es decir, $t = 1.$

COORDENADAS CURVILINEAS

1.-Expresar en coordenadas rectangulares el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$.

Solución:

Con las formulas de conversión de cilíndricas a rectangulares obtenemos.

$X = 4 \cos 5\pi / 6 = 4 (-\sqrt{3} / 2) = -2 (\sqrt{3})$.

$Y = 4 \text{ sen } 5\pi / 6 = 4 (1/2) = 2$

$Z = 3$

Así pues, en coordenadas rectangulares ese punto es $(x, y, z) = (-2)(\sqrt{3}, 2, 2)$.

2.- Hallar ecuaciones en coordenadas cilíndricas para las superficies cuyas ecuaciones rectangulares se especifican a continuación:

a) $x^2 + y^2 = 4z^2$
b) $y^2 = x$

Solución a)

Por la sección procedente sabemos que la grafica de $x^2 + y^2 = 4z^2$ es un cono <<de dos hojas>> con su eje en el eje z. si sustituimos $x^2 + y^2$ por r^2, obtenemos su ecuación en cilíndricas.

$x^2 + y^2 = 4z^2$ ecuación en coordenadas rectangulares.

$r^2 = 4z^2$ ecuación en coordenadas cilíndricas.

Solución b)

La superficie $y^2 = x$ es un cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z. Sustituyendo y^2 por r^2 sen^2 ɵ y x por r cos ɵ, obtenemos:

$y^2 = x$ ecuación rectangular.

r^2 sen^2 ɵ = r cos ɵ sustituir y por sen ɵ, x por rcos ɵ.

r(r sen^2 ɵ –cos ɵ) = 0 agrupar términos y factorizar

r sen^2 ɵ –cos ɵ = 0 dividir lós dos miembros por r

r =cos ɵ / sen^2 ɵ despejar r

r cosec ɵ ctg ɵ ecuación en cilíndricas.

Nótese que esta ecuación incluye un punto con r = 0, así que no se ha perdido nada al dividir ambos miembros por el factor r.

3.-Hallar una ecuación en coordenadas esféricas parar las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas rectangulares se indican.

a).- cono: $x^2 + y^2 = z^2$

b).- esfera: -4z = 0

Solución:

a).-haciendo las sustituciones adecuadas para x, y, z en la ecuación dada se obtiene:

$x^2 + y^2 = z^2$

$p^2 \text{ sen}^2 \Phi \cos^2 ɵ + p^2 \text{ sen}^2 \Phi \text{ sen}^2 ɵ = p^2 \cos^2 \Phi$

p^2 sen^2 Φ (cos^{2}ϴ + sen^{2}ϴ) =p^2 cos^{2}Φ

p^2 sen^2 Φ = p^2 cos^2 Φ

sen^2 Φ/ cos^2 Φ = 1 $p > 0$

tg^2 Φ = 1 Φ = π /4 o Φ = 3π/4

La ecuación Φ = π/4 representa la mitad superior del cono y la ecuación Φ = 3π/4 su mitad inferior.

b).-como $p^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y z = p cos Φ, la ecuación dada adopta la siguiente forma en coordenadas esféricas.

$P^2 - 4\,p \cos \Phi = 0 \;\rightarrow\; p\,(p - 4 \cos \Phi) = 0$

Descartando por el momento la posibilidad de que p = 0, obtenemos la ecuación en esféricas.

$P - 4 \cos \Phi = 0$ o $p = 4\cos \Phi$

4.- Hallar la ecuación en coordenadas rectangulares de la grafica determinada por la ecuación en cilíndricas:

$r^2 \cos^2 ϴ + z^2 + 1 = 0$

Solución:

$r^2 \cos^2 ϴ + z^2 + 1 = 0$ ecuación en cilíndricas

$r^2 (\cos^2\theta - \text{sen}^2\, \theta) + z^2 = 0$ identidad trigonométrica.

$r^2 \cos^2 \theta - r^2\, \text{sen}^2\, \theta + z^2 = -1$

$X^2 - y^2 + z^2 = -1$ sustituir $r \cos \theta$ por x y $r\, \text{sen}\, \theta$ por y

$Y^2 - x^2 - z^2 = 1$ ecuación rectangular.

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje es el eje y.

5.-Dado un punto en cartesianas (-3,-4,5) Hallar las coordenadas cilíndricas que corresponden al punto dado.

Solución

De la Ecuación

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\varphi & Sen\varphi & 0 \\ -Sen\varphi & Cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

$$x = r\,Cos\varphi \quad y = r\,Sen\varphi$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right) = 233^0 \quad z = 5$$

CALCULO DIFERENCIAL

1. Dada la función z definida por $z = x^3 - 3y^2 + 5xy + x - 2y + 5$ Halla $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

   Solución:

   Considerando y como una constante, tenemos: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y + 1$

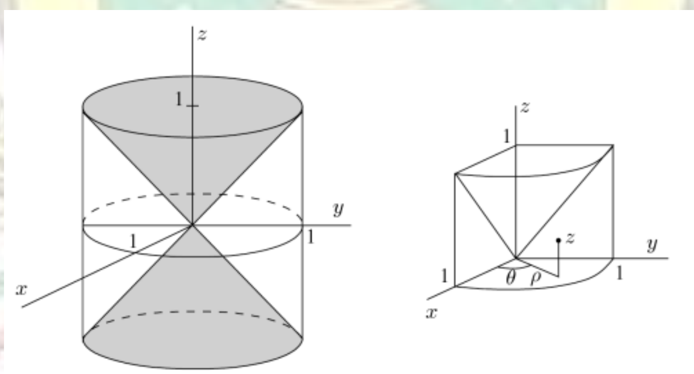
Considerando x como una constante, tenemos: $\frac{\partial z}{\partial y} = -6y + 5x - 2$

2. Calcular el volumen del solido comprendido entre las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y
   y $x^2 + y^2 = z^2$.

Solución

Se trata de calcular el volumen del recinto situado fuera de la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ y dentro de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1.$.

Utilizando las simetrías del solido el volumen es ocho veces el volumen de la parte situada en el primer octante



Utilizando método de integración triple

Considerando coordenadas cilíndricas se tiene

$$V = 8 \iiint_D dV = 8 \iiint_D dx dy dz = 8 \iiint_{D^*} \rho \, d\rho d\theta dz.$$

Como es $z^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow z = \rho$ para la superficie cónica y por lo tanto el volumen pedido es:

$$V = 8 \iiint_{D^*} \rho \, d\rho d\theta dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\rho} dz \, \rho \, d\rho d\theta =$$
$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [z]_0^{\rho} \rho \, d\rho d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \, d\rho d\theta =$$
$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \left[\rho^3\right]_0^1 d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-0) d\theta = \frac{8}{3} \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie x2y+2xy=4 en el plano (2, -2, 3)

SOLUCION
Aplicando el operador diferencial vectorial NABLA

∇x2y+2xy=∂x2y+2xy∂xi+∂x2y+2xy∂yj+∂x2y+2xy∂zk=2xy+2yi+x2+2xj+0k

La normal a la superficie en el punto 2, -2, 3 es 22(-2)i+22+2(2)j+0k=
-8i+8j+0k

La ecuación de un plano que pasa por un punto cuyo vector posición es r0 y es perpendicular a lanormal N es r-r0·N=0

Finalmente la ecuación pedida es

xi+yj+zk-2i-2j+3k·(-8i+8j+0k)=0

(x-2)i+y+2j+(z-3)k·(-8i+8j+0k)=

-8x-2+8(y+2)=0

1. Calcule la integral de línea $\int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$, donde C es la curva formada por los siguientes segmentos de rectas:

Punto Inicial $(2,1) \to (1,2) \to (-1,2) \to (-2,1) \to (-2,-1) \to (-1,-2) \to (1,-2) \to (2,-1)$

Solución

Como el campo asociado al diferencial es conservador, ya que $\frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})$, se tiene que la integral de línea es independiente de la trayectoria, y por lo tanto:

$$\int_C ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy = \int_{C+} ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy$$

$$= -\int_{-1}^{1} 2e^{2t}\,dt = -e^2 + \frac{1}{e^2}$$

Donde $C^* : \gamma(t) = (2,t), -1 \le t \le 1$

2. Calcule $\int_C \boldsymbol{xydx + (x+y)dy}$ donde C es la frontera de la región situada entre las gráficas de $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 9}$ **y** $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16.}$

Solucion

$$\int xydx + (x+y)dy$$

$$=> \iint (1-x)dA = \int_0^{2\pi}\int_3^4 (1 - r\cos\theta)\,rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\theta\right)_3^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{7}{2}d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{37}{3}\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{7}{2}\theta\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{37}{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 7\pi$$

3. Utilice el Teorema de Green para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva orientada de manera positiva:

$$\oint_C \left(xy + e^{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \ln(1+y)\right)dy$$

Donde C consiste del segmento de recta que va desde $(0,0)$ a $(\pi,0)$ y de la curva $y = \sin x$ con $0 \le x \le \pi.$

Solución

Se tiene, usando el teorema de Green en el plano:

$$\int_{C_1} Pdx + Qdy + \int_{C_2} Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Aquí

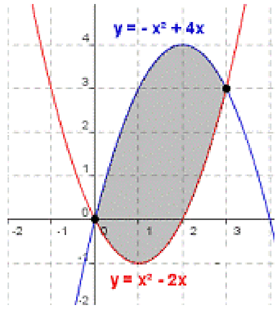
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - \ln(1+x)) = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + e^{x^2}\right) = x$$

Se tiene

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{x=0}^{x=\pi}\int_{y=0}^{y=\sin x} x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=\pi} x \sin x\, dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$$

4. Hallar el área de la región limitada por las graficas de las funciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x.$



Limites de integración: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x \;\Rightarrow\; 2x^2 - 6x = 0 \;\Rightarrow\; 2x(x-3) = 0.$
Los limites son : 0 y 3 Un recinto.

Función diferencia y primitiva

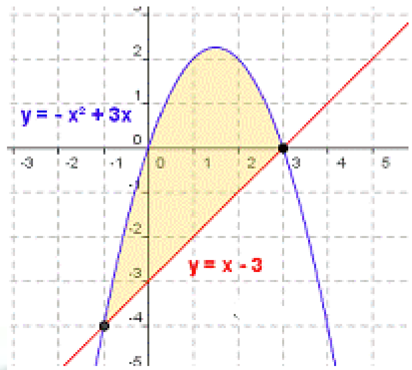
$$y = x^2 - 2x + x^2 - 4x \;\Rightarrow y = 2x^2 - 6x \;\Rightarrow\; G(x) = \int \left(2x^2 - 6x\right) dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

$$-\; G(3) \text{ y } G(0) \quad \Rightarrow G(3) = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 = -9 \quad G(0) = 0$$

Area = $G(3) - G(0) = |-9| = 9 \quad u.s.$

$$A = \int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 3x^2\right]_0^3 = |-9| = 9 \text{ u.s.}$$

5. Hallar el área de la región limitada por las graficas de las funciones $\mathbf{y = x - 3}$ y $\mathbf{y = -x^2 + 3x}$.



Limites de integración:

$x - 3 = -x^2 + 3x \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow$ Los limites son : -1 y 3. Un recinto

Función diferencia y primitiva

$$y = -x^2 + 2x + 3 \;\Rightarrow\; G(x) = \int\left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

$$-\ G(3) \text{ y } G(-1) \;\Rightarrow G(3) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x = +9 \quad G(-1) = -\frac{5}{3}$$

Área $= G(3) - G(-1) = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3}$ u. s.

$$A = \int_{-1}^{3}\left(-x^2 + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u.s.}$$

BIBLIOGRAFÍA

- ANALISIS VECTORIAL. Murray Spiegel. Editorial Mc. Graw Hill. 2da. Edición.
- CÁLCULO VECTORIAL Y APLICACIONES. Octavio Estrada. Editorial Iberoamerica. 1era Edición.
- CALCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA. Earl Swokowski. Editorial Iberoamérica. 2da Edición.