CÁLCULO INTEGRAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

José Guadalupe Anaya Ortega

La Integral

Proposito General

Proposito General de la Unidad de Aprendizaje

Manejar los conceptos fundamentales del cálculo integral y aplicarlos en forma colaborativa en diversas áreas haciendo énfasis en aplicaciones físicas y geométricas.
Manejar los diferentes métodos de integración. Analizar la importancia del teorema fundamental del cálculo.

Presentación

El presente material didáctico de solo visión proyectable, tiene como finalidad, desarrollar en los estudiantes la habilidad de la observación, reflexión y análisis sobre:
Integrabilidad de funciones.
Dentro del enfoque por competencias se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis.

Especificaciones

La metodología que se sugiere para el mejor aprovechamiento del material respecto a cada tema, se describe a continuación, sin embargo a los jóvenes les resulta agradable el uso este tipo de recurso didáctico, específicamente las diapositivas considerándolas como notas de clase, para efectuar el repaso que fortalezca su aprendizaje.

Recursos que se utilizarán

1. Cañon,
2. Software: Cualquier visor de archivos pdf,
3. Computadora,
4. Pizarrón,
5. Material impreso.

Indicaciones de uso

El uso del presente material es de fácil acceso:

1. Abra el dispositivo de almacenamiento con doble clic.
2. Solo de clic para dejar pasar las diapositivas.
3. Con la tecla ESC se interrumpe la presentación.
4. Con las teclas de Redpág y Avpág puede avanzar y retroceder las diapositiva.

Competencias a desarrollar

1. De conocimientos
    1. Funciones Integrables.
    2. Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal.
2. De Habilidades
    1. Identificación de postulados, hipótesis y conclusiones. Intuición sobre la veracidad o falsedad de una afirmación.
3. De Actitudes y Valores
    1. Disciplina, orden, tenacidad, gusto por enfrentar nuevos retos, paciencia y rigor en el razonamiento.

Índice General

Introducción

Introducción

¿Cómo surge la integral?

Introducción

¿Cómo surge la integral?

El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región.

Introducción

¿Cómo surge la integral?

El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región.

Consideremos el círculo de radio 1, su área es π, así que caben "π cuadrados en el círculo de radio 1".

Introducción

Objetivo

Definir el área de regiones que están limitadas por el eje horizontal, las lineas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y la gráfica de la función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Introducción

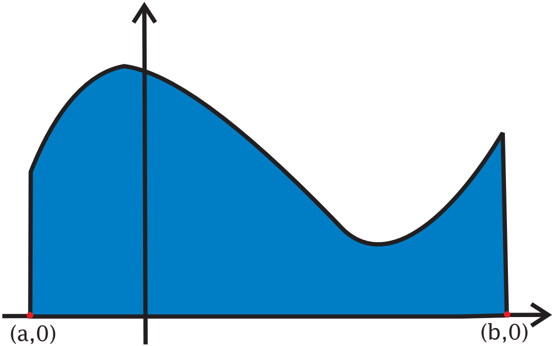
Objetivo

Definir el área de regiones que están limitadas por el eje horizontal, las lineas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y la gráfica de la función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Introducción

Objetivo

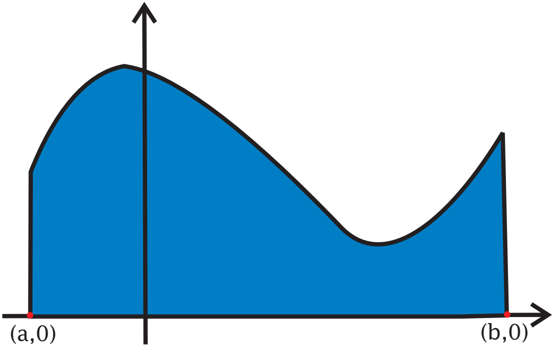
Definir el área de regiones que están limitadas por el eje horizontal, las lineas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y la gráfica de la función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.



Introducción

Objetivo

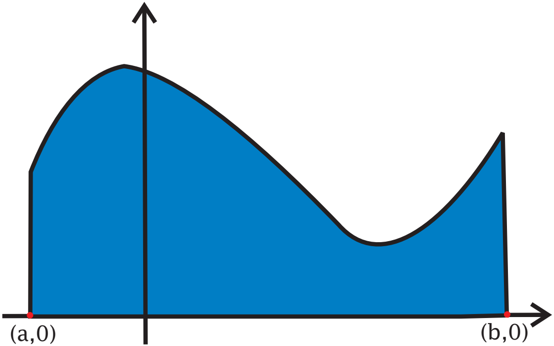
Definir el área de regiones que están limitadas por el eje horizontal, las lineas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y la gráfica de la función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.



Introducción

Objetivo

Definir el área de regiones que están limitadas por el eje horizontal, las lineas verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ y la gráfica de la función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.



Introducción

Iniciaremos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en cuatro subintervalos

$$[t_0, t_1]\ [t_1, t_2]\ [t_2, t_3]\ [t_3, t_4]$$

donde los números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 satisfacen:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$

Introducción

Iniciaremos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en cuatro subintervalos

$$[t_0, t_1]\ [t_1, t_2]\ [t_2, t_3]\ [t_3, t_4]$$

donde los números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 satisfacen:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$

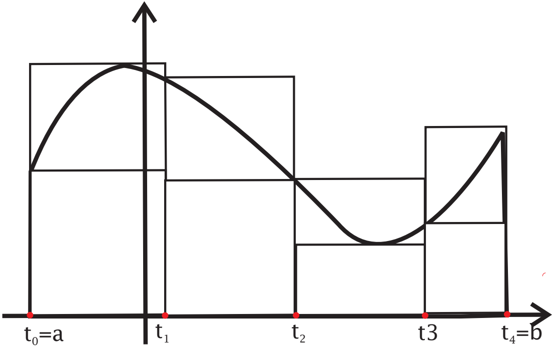
Introducción

Iniciaremos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en cuatro subintervalos

$$[t_0, t_1]\ [t_1, t_2]\ [t_2, t_3]\ [t_3, t_4]$$

donde los números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 satisfacen:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$



Introducción

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea m_i el valor mínimo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Introducción

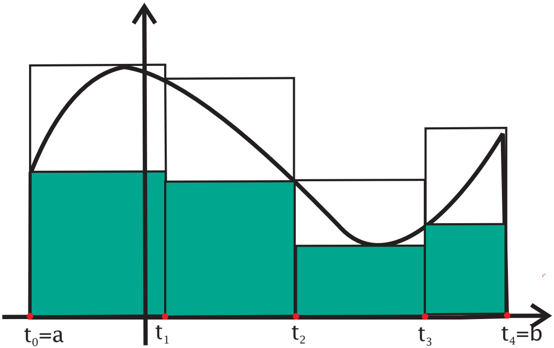
Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea m_i el valor mínimo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Sea
$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$

Introducción

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea m_i el valor mínimo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Sea
$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$

Introducción

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea m_i el valor mínimo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Sea
$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$



Introducción

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea M_i el valor máximo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Introducción

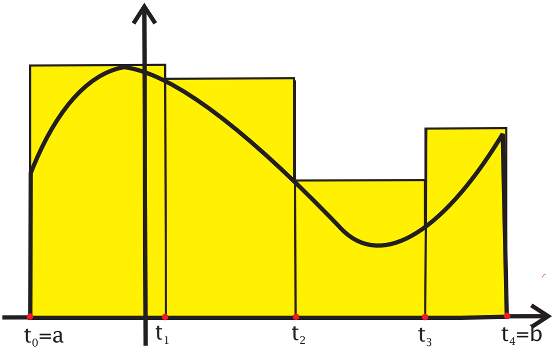
Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea M_i el valor máximo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Sea
$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$

Introducción

Para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sea M_i el valor máximo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Sea
$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$

Introducción

Para cada $i \in \{1,2,3,4\}$, sea M_i el valor máximo de f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Sea
$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$



Introduccción

Así que $s \leq A \leq S$, donde A es el área de $R(f, a, b)$.

Introducccción

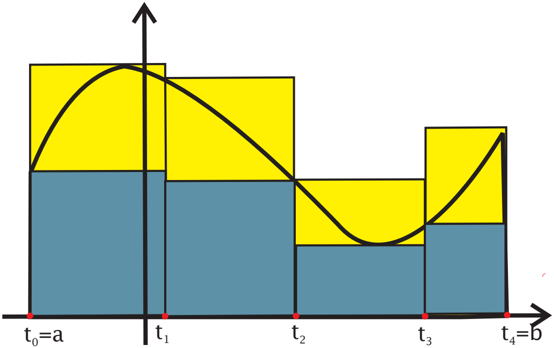
Así que $s \leq A \leq S$, donde A es el área de $R(f, a, b)$.

Introduccción

Así que $s \leq A \leq S$, donde A es el área de $R(f, a, b)$.

Introduccción

Así que $s \leq A \leq S$, donde A es el área de $R(f, a, b)$.



Partición y suma inferior

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Recibe el nombre de **partición del intervalo** $[a, b]$ toda colección finita $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ de puntos de $[a, b]$ tales que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Partición y suma inferior

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Recibe el nombre de **partición del intervalo** $[a, b]$ toda colección finita $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ de puntos de $[a, b]$ tales que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Partición y suma inferior

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Recibe el nombre de **partición del intervalo** $[a, b]$ toda colección finita $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ de puntos de $[a, b]$ tales que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

Definición

Supongamos que la función f está acotada sobre $[a, b]$ y sea $P = \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea

$$m_i = inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \; M_i = sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$

La **suma inferior** de f para P, denotada por $L(f, P)$, se define por

Suma superior

Definición

La **suma superior** de f para P, denotada por $U(f, P)$, se define por

$$U(f, P) = \sum_{i=0}^{i=n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$

Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

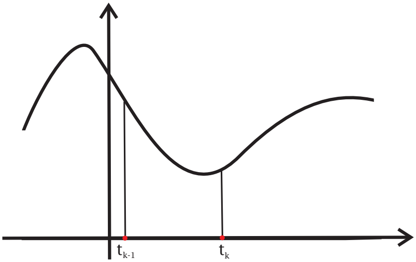
$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$

Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$

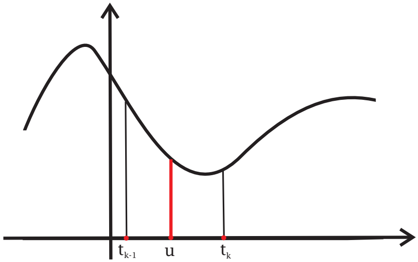


Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$

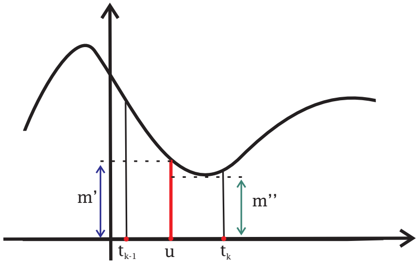


Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$



Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$

Sumas superior e inferior

Lema 1

Sean f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y P, Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$. Entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q)$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q)$$

Teorema 2

Sean P_1 y P_2 dos particiones de $[a, b]$ y f una función acotada sobre $[a, b]$. Entonces

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Camino a la definición de función integrable

Pregunta

Si f es una función acotada en $[a, b]$, ¿Qué podemos decir de los siguientes conjuntos?

$$\{L(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\},$$
$$\{U(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\}$$

función integrable

Definición

Una función f acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\}.$$

función integrable

Definición

Una función f acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, este número común recibe el nombre de **integral** de f sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

función integrable

Definición

Una función f acotada sobre $[a, b]$ es **integrable** sobre $[a, b]$ si

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\} = \inf\{U(f, P) : P \text{ es un partición de } [a, b]\}.$$

En este caso, este número común recibe el nombre de **integral** de f sobre $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

La integral $\int_a^b f$ recibe el nombre de **área** de $R(f, a, b)$ cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Ejemplos

Son integrables sobre $[a, b]$ las siguientes funciones:

Ejemplos

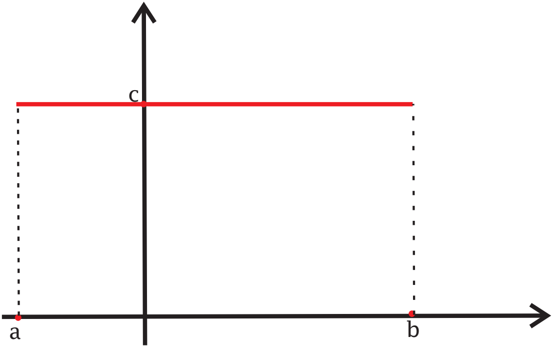
Son integrables sobre $[a, b]$ las siguientes funciones:

1. $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ fijo.

Ejemplos

Son integrables sobre $[a, b]$ las siguientes funciones:

1. $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ fijo.



Ejemplos

Son integrables sobre $[a, b]$ las siguientes funciones:

1. $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ fijo.

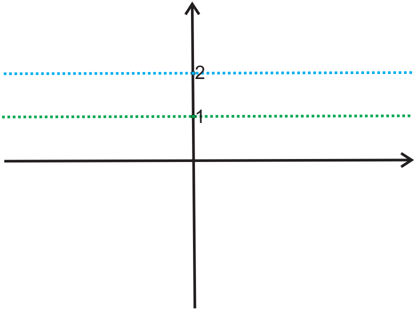
2. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Ejemplos

Son integrables sobre $[a, b]$ las siguientes funciones:

1. $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ fijo.

2. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$



Propiedades de la Integral

Teorema 3

Si f está acotada sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un partición P de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Propiedades de la Integral

Teorema 4

Sea $a < c < b$. Si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. Reciprocamente, si f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, b]$. Finalmente, si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

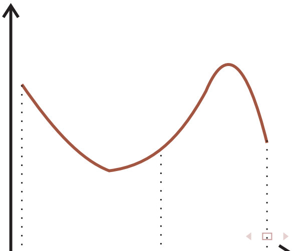
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Propiedades de la Integral

Teorema 4

Sea $a < c < b$. Si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. Reciprocamente, si f es integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$ entonces f es integrable sobre $[a, b]$. Finalmente, si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$



Propiedades de la Integral

Definiciones

$$\int_a^a f = 0$$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ si } a > b.$$

Propiedades de la Integral

Definiciones

$$\int_a^a f = 0$$
$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ si } a > b.$$

Propiedades de la Integral

Definiciones

$$\int_a^a f = 0$$
$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ si } a > b.$$

Teorema 5

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ también es integrable en $[a, b]$, además

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g).$$

Propiedades de la Integral

Definiciones

$$\int_a^a f = 0$$

$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ si } a > b.$$

Teorema 5

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ también es integrable en $[a, b]$, además

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g).$$

Propiedades de la Integral

Definiciones

$$\int_a^a f = 0$$
$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ si } a > b.$$

Teorema 5

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ también es integrable en $[a, b]$, además

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g).$$

Propiedades de la Integral

Teorema 6

Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable sobre $[a,b]$, además

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b (f)$$

Propiedades de la Integral

Teorema 6

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable sobre $[a, b]$, además

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b (f)$$

Propiedades de la Integral

Teorema 6

Si f es integrable sobre $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable sobre $[a,b]$, además

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b (f)$$

Teorema 7

Sean $m, M \in \mathbb{R}$ y f una función integrable sobre $[a,b]$ tal que $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a,b]$. Entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Propiedades de la Integral

Teorema 8

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$.

Propiedades de la Integral

Teorema 8

Si f es integrable sobre $[a, b]$ y F está definida sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

entonces F es continua sobre $[a, b]$.

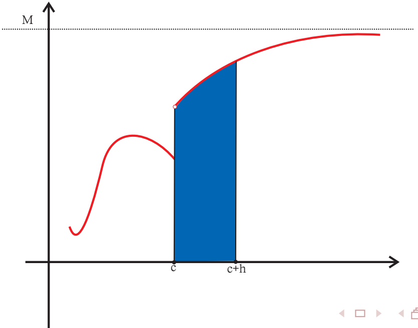
Propiedades de la Integral

Teorema 8

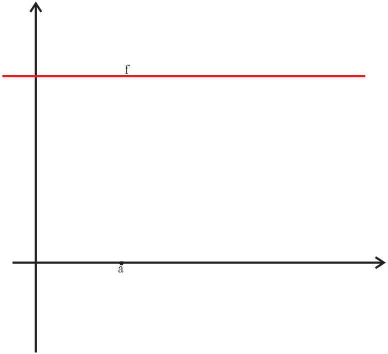
Si f es integrable sobre $[a,b]$ y F está definida sobre $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f,$$

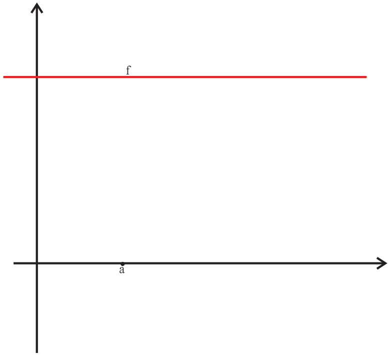
entonces F es continua sobre $[a,b]$.



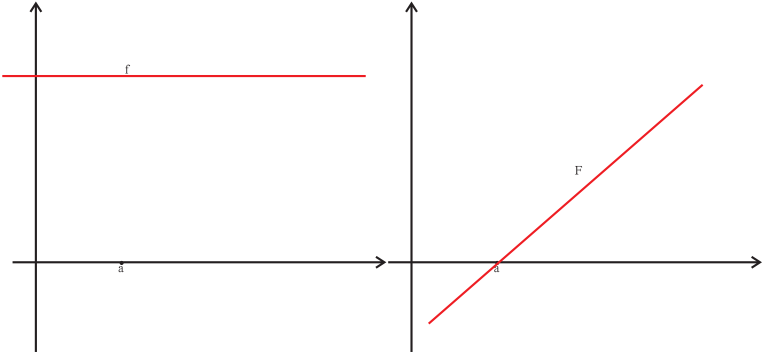
Propiedades de la Integral



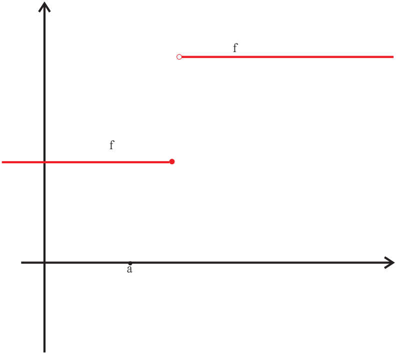
Propiedades de la Integral



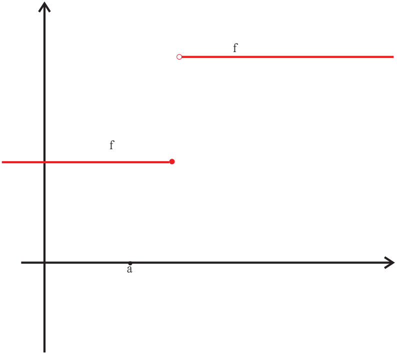
Propiedades de la Integral



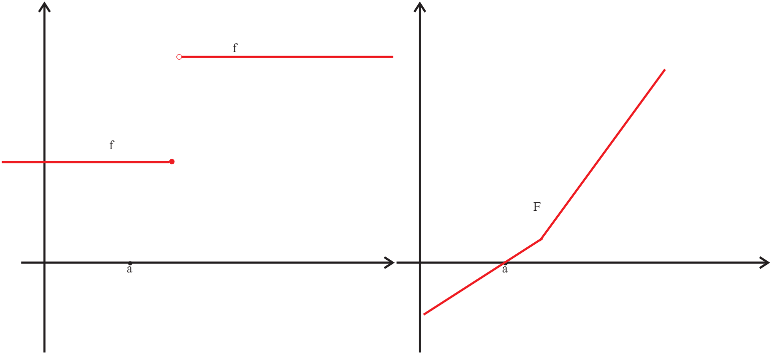
Propiedades de la Integral



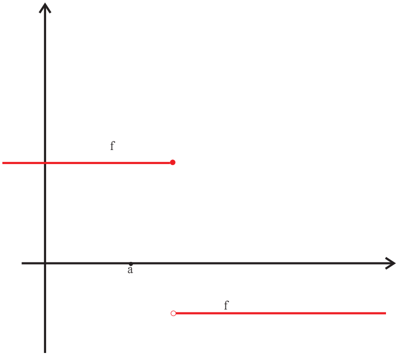
Propiedades de la Integral



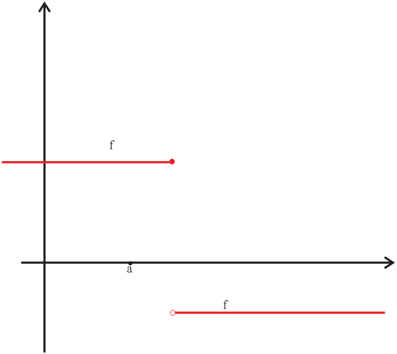
Propiedades de la Integral



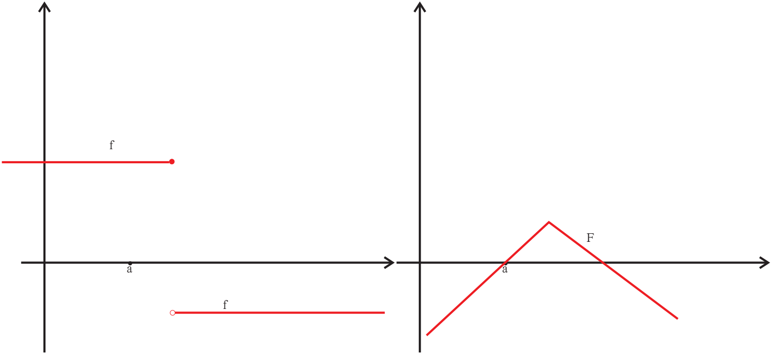
Propiedades de la Integral



Propiedades de la Integral



Propiedades de la Integral



Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 9 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 9 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

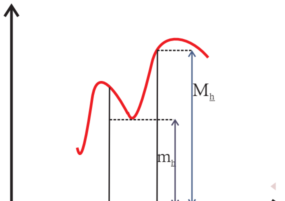
Teorema 9 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$



Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 9 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 9 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 9 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c, y

$$F'(c) = f(c).$$

Corolario 10

Sean f una función continua en $[a, b]$ y g una función tal que $f = g'$. Entonces

Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal

Teorema 11 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal)

Sean f una función integrable en $[a, b]$ y g una función tal que $f = g'$. Entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Las fuciones continuas son integrables

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Decimos que f **es continua en** x_0 si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x_0 - y| < \delta$. Decimos que f **es continua en** A si f es continua en cada punto de A.

Las fuciones continuas son integrables

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Decimos que f **es continua en** x_0 si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x_0 - y| < \delta$. Decimos que f **es continua en** A si f es continua en cada punto de A.

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f **es uniformemente continua en** A si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$.

Las fuciones continuas son integrables

Definición

Sean $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in A$. Decimos que f **es continua en** x_0 si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x_0 - y| < \delta$. Decimos que f **es continua en** A si f es continua en cada punto de A.

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f **es uniformemente continua en** A si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$.

Teorema 12

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.

Las fuciones continuas son integrables

Teorema 13

Toda función continua en $[a, b]$, es integrable sobre $[a, b]$.

Bibliografía

1 Courant, R. y John, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, Interscience Publishers, 1965.

2 Haaser, La Salle, Sullivan. *Análisis Matemático Curso de Introducción*, vol. I, Ed. Trillas.

3 Spivak, M. *Calculus*, Ed. Reverté, 1988.

4 Apostol, T. *Calculus*, vol. I, Ed. Reverté, 1995.

5 Sagan, H. *Advanced Calculus*, Ed. Houghton Mifflin Company, 1974.