CÁLCULO DIFERENCIAL VECTORIAL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Diferenciabilidad

José Guadalupe Anaya Ortega

Proposito General

Proposito General de la Unidad de Aprendizaje

Manejar los conceptos de derivadas parciales, gradientes, multiplicadores de Lagrange y aplicarlos en diversas áreas haciendo énfasis en aplicaciones físicas. Conocer el Teorema de Taylor, el Teorema de la Función Implícita y el Teorema de la Función Inversa y sus diversas aplicaciones.

Presentación

El presente material didáctico de solo visión proyectable, tiene como finalidad, desarrollar en los estudiantes la habilidad de la observación, reflexión y análisis sobre:
Campos vectoriales y funciones con valores reales,
Limites de campos vectoriales,
Continuidad,
Diferenciabilidad.
Dentro del enfoque por competencias se pretende desarrollar en el estudiante la capacidad de análisis.

Especificaciones

La metodología que se sugiere para el mejor aprovechamiento del material respecto a cada tema, se describe a continuación, sin embargo a los jóvenes les resulta agradable el uso este tipo de recurso didáctico, específicamente las diapositivas considerándolas como notas de clase, para efectuar el repaso que fortalezca su aprendizaje.

Recursos que se utilizarán

1. Cañon,
2. Software: Cualquier visor de archivos pdf,
3. Computadora,
4. Pizarrón,
5. Material impreso.

Indicaciones de uso

El uso del presente material es de fácil acceso:

1. Abra el dispositivo de almacenamiento con doble clic.
2. Solo de clic para dejar pasar las diapositivas.
3. Con la tecla ESC se interrumpe la presentación.
4. Con las teclas de Redpág y Avpág puede avanzar y retroceder las diapositiva.

Competencias a desarrollar

1. De conocimientos
   1. Campos vectoriales y funciones con valores reales,
   2. Limites de campos vectoriales,
   3. Continuidad,
   4. Diferenciabilidad.
2. De Habilidades
   1. Identificación de postulados, hipótesis y conclusiones. Intuición sobre la veracidad o falsedad de una afirmación.
3. De Actitudes y Valores
   1. Disciplina, orden, tenacidad, gusto por enfrentar nuevos retos, paciencia y rigor en el razonamiento.

Índice General

Diferenciacíon

Objetivo

Ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Diferenciacíon

Objetivo

Ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Pare ello en la primera parte del curso realizaremos lo siguiente

Diferenciacíon

Objetivo

Ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Pare ello en la primera parte del curso realizaremos lo siguiente

1. Geometría de las funciones con valores reales y el estudio de las gráficas de estas funciones.

Diferenciacíon

Objetivo

Ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Pare ello en la primera parte del curso realizaremos lo siguiente

1. Geometría de las funciones con valores reales y el estudio de las gráficas de estas funciones.
2. Definiciones básicas de límite y continuidad.

Diferenciacíon

Objetivo

Ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Pare ello en la primera parte del curso realizaremos lo siguiente

1. Geometría de las funciones con valores reales y el estudio de las gráficas de estas funciones.
2. Definiciones básicas de límite y continuidad.
3. Definición de derivada y reglas básicas del cálculo.

Diferenciacíon

Objetivo

Ampliar los principios del cálculo diferencial para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Pare ello en la primera parte del curso realizaremos lo siguiente

1. Geometría de las funciones con valores reales y el estudio de las gráficas de estas funciones.
2. Definiciones básicas de límite y continuidad.
3. Definición de derivada y reglas básicas del cálculo.
4. Algunas aplicaciones.

Geometría de funciones

Definición 1

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ *y* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*. Cuando* $m > 1$*, a* f *lo llamaremos* ***función con valores vectoriales****,*

Geometría de funciones

Definición 1

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ *y* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Cuando* $m > 1$, *a* f *lo llamaremos* ***función con valores vectoriales***, *si* $m = 1$, *a* f *se le llama* ***función de valores escalares***.

Ejemplo

Geometría de funciones

Definición 1

Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Cuando $m > 1$, a f lo llamaremos ***función con valores vectoriales****, si $m = 1$, a f se le llama* ***función de valores escalares****.*

Ejemplo

1. $f : \mathbb{R}^4 - \{\hat{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/(x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2), x_2 - x_3)$.

Geometría de funciones

Definición 1

Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Cuando $m > 1$, a f lo llamaremos ***función con valores vectoriales****, si $m = 1$, a f se le llama* ***función de valores escalares****.*

Ejemplo

1. $f : \mathbb{R}^4 - \{\hat{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/(x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2), x_2 - x_3)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1, x_2, x_3) = (\operatorname{sen}(x_1 x_2 x_3), x_1^3 x_2 - x_3)$.

Geometría de funciones

Definición 1

Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Cuando $m > 1$, a f lo llamaremos ***función con valores vectoriales****, si $m = 1$, a f se le llama* ***función de valores escalares****.*

Ejemplo

1. $f : \mathbb{R}^4 - \{\hat{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/(x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2), x_2 - x_3)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1, x_2, x_3) = (\text{sen}(x_1 x_2 x_3), x_1^3 x_2 - x_3)$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + \exp(x_3)$.

Geometría de funciones

Definición 1

Sean n, $m \in \mathbb{N}$ y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Cuando $m > 1$, a f lo llamaremos ***función con valores vectoriales****, si $m = 1$, a f se le llama* ***función de valores escalares****.*

Ejemplo

1. $f : \mathbb{R}^4 - \{\hat{0}\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/(x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2), x_2 - x_3)$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x_1, x_2, x_3) = (\mathrm{sen}(x_1 x_2 x_3), x_1^3 x_2 - x_3)$.
3. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + \exp(x_3)$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\mathrm{sen}(t), \cos(t))$.

Definición 2

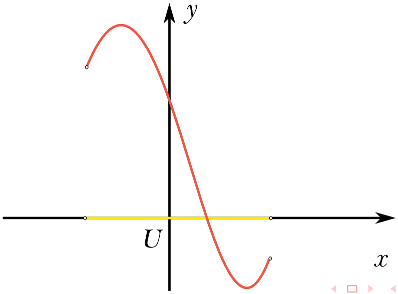
*Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos la **gráfica** de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que consta de todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Es decir*

$$\mathit{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U\}.$$

Definición 2

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos la ***gráfica*** *de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que consta de todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Es decir*

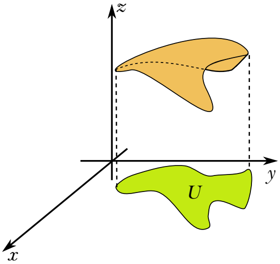
$$\text{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U\}.$$



Definición 2

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos la ***gráfica*** *de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ que consta de todos los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Es decir*

$$\mathit{graf}(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U\}.$$



Curvas de nivel

Definición 3

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Entonces el* ***conjunto de nivel del valor*** c *se define como aquellos puntos* $x \in U$ *para los cuales* $f(x) = c$. *Si* $n = 2$, *hablamos de una* ***curva de nivel*** *(del valor* c*); y si* $n = 3$, *hablamos de una* ***superficie de nivel****. Es decir, el conjunto de nivel de valor* c *se escribe*

$$\{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Curvas de nivel

Definición 3

Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces el ***conjunto de nivel del valor*** *c se define como aquellos puntos $x \in U$ para los cuales $f(x) = c$. Si $n = 2$, hablamos de una* ***curva de nivel*** *(del valor c); y si $n = 3$, hablamos de una* ***superficie de nivel****. Es decir, el conjunto de nivel de valor c se escribe*

$$\{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ejemplos:

Curvas de nivel

Definición 3

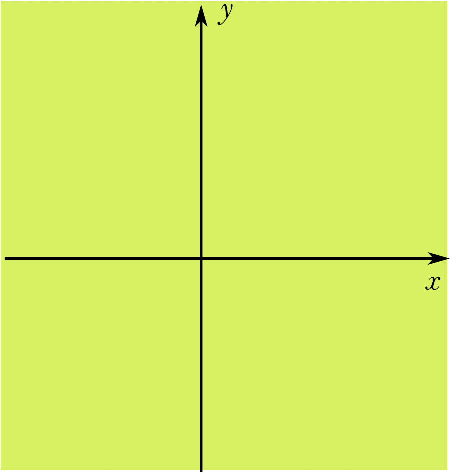
*Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces el **conjunto de nivel del valor** c se define como aquellos puntos $x \in U$ para los cuales $f(x) = c$. Si $n = 2$, hablamos de una **curva de nivel** (del valor c); y si $n = 3$, hablamos de una **superficie de nivel**. Es decir, el conjunto de nivel de valor c se escribe*

$$\{x \in U : f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

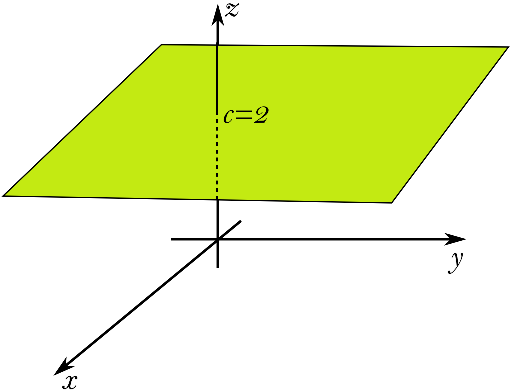
Ejemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 2$.

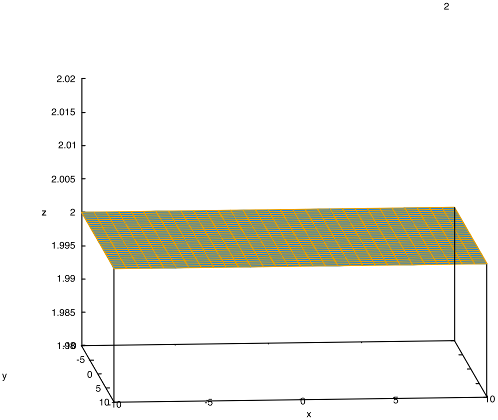
Curvas de nivel



Esbozo de la gráfica



Esbozo de la gráfica

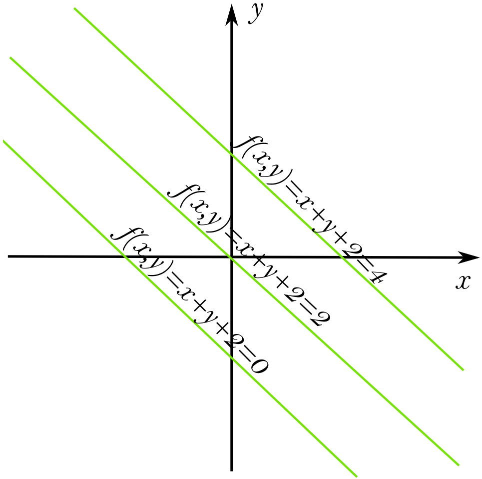


Curvas de nivel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y + 2$.

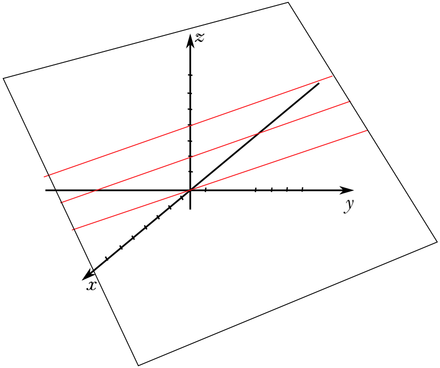
Curvas de nivel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y + 2$.

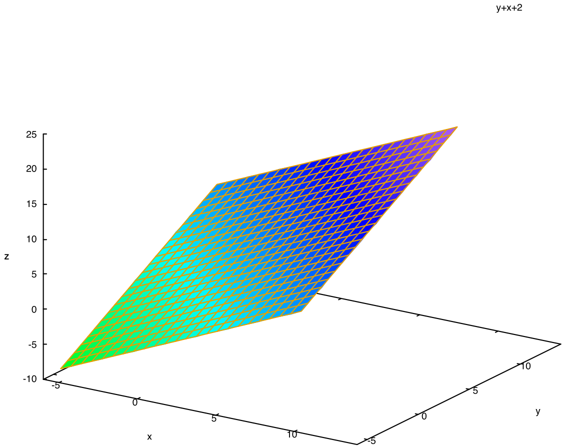


Curvas de nivel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x, y) = x + y + 2.$$



Curvas de nivel

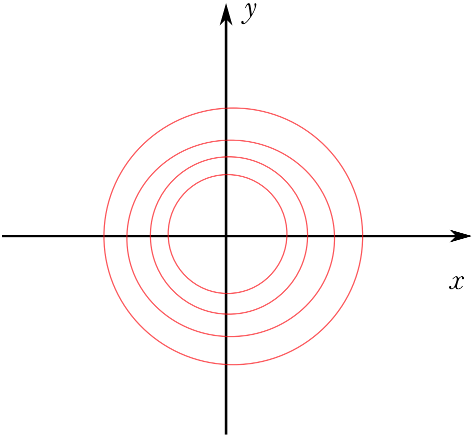


Curvas de nivel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

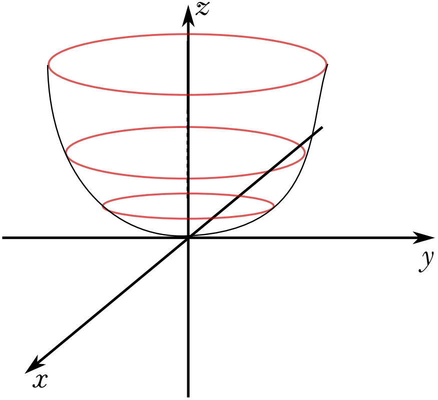
Curvas de nivel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

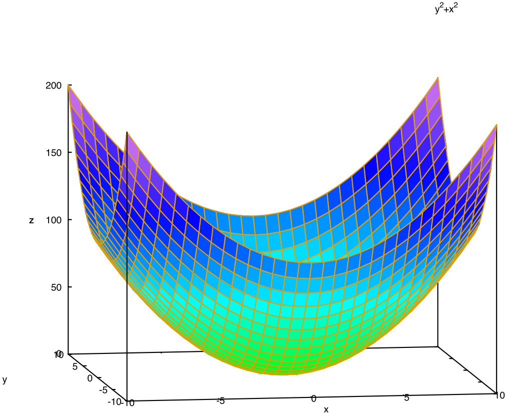


Curvas de nivel

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x, y) = x^2 + y^2.$$



Curvas de nivel



Curvas de nivel

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = x - y + 3$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $g(x, y) = -xy$.

Continuidad

Definición 4

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función con dominio A. Decimos que f ***es continua en*** *x_0 si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(x_0) \cap A$, entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.*
Si decimos simplemente que f ***es continua****, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A.*

Continuidad

Definición 4

*Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función con dominio A. Decimos que f **es continua en** x_0 si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(x_0) \cap A$, entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.*

*Si decimos simplemente que f **es continua**, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A.*

Teorema 5

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y c un número real.

Continuidad

Definición 4

*Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función con dominio A. Decimos que f **es continua en** x_0 si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(x_0) \cap A$, entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.*
*Si decimos simplemente que f **es continua**, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A.*

Teorema 5

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y c un número real.

1. *Si f es continua en x_0, también lo es cf, donde $(cf)(x) = c(f(x))$.*

Continuidad

Definición 4

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función con dominio A. Decimos que f ***es continua en*** *x_0 si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B_\delta(x_0) \cap A$, entonces $f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0))$.*
Si decimos simplemente que f ***es continua****, queremos decir que f es continua en cada punto x_0 de A.*

Teorema 5

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y c un número real.

1. *Si f es continua en x_0, también lo es cf, donde $(cf)(x) = c(f(x))$.*
2. *Si f y g son continuas en x_0, también lo es $f + g$, donde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*

Lema 6

1. *Si*
$$|x - x_0| < min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \;y\; |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$
entonces
$$|xy - x_0 y_0| < \varepsilon.$$
2. *Si* $y_0 \neq 0$ *y*
$$|y - y_0| < min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right)$$
entonces $y \neq 0$ *y*
$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Continuidad

Teorema 7

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. *Si* f *y* g *son continuas en* x_0, *entonces la función producto* fg *definida por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *es continua en* x_0.

Continuidad

Teorema 7

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. *Si* f *y* g *son continuas en* x_0, *entonces la función producto* fg *definida por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *es continua en* x_0.
2. *Si* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es continua en* x_0 *y no se anula en* A, *entonces el cociente* $1/f$ *es continua en* x_0, *donde* $(1/f)(x) = 1/f(x)$.

Continuidad

Teorema 8

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$. *Si* $f(A) \subset B$, f *es continua en* $x_0 \in A$ *y* g *es continua en* $f(x_0)$, *entonces* $g \circ f : A \to \mathbb{R}^s$ *es continua en* x_0.

Límites

Definición 9

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función con dominio* A*. Decimos que* f ***tiende a*** l_0*, cuando* x *tiene a* x_0 *si y solo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x \in B_\delta(x) \cap A - \{x_0\}$*, entonces* $f(x) \in B_\varepsilon(l_0)$*. Se denota por*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0.$$

Límites

Teorema 10

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función con dominio* A. *Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0$$

y

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1,$$

entonces $l_0 = l_1$.

Límites

Teorema 11

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* c *un número real.*

1. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0$, *entonces* $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cl_0$, *donde* $(cf)(x) = c(f(x))$.

Límites

Teorema 11

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* c *un número real.*

1. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0$, *entonces* $\lim_{x \to x_0} cf(x) = cl_0$, *donde* $(cf)(x) = c(f(x))$.
2. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$, *entonces* $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = l_0 + l_1$, *donde* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Teorema 12

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$, *entonces* $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = l_0 l_1$, *donde* fg *esta definida por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *es continua en* x_0.

Teorema 12

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0$ *y* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_1$, *entonces* $\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = l_0 l_1$, *donde* fg *esta definida por* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *es continua en* x_0.
2. *Si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_0 \neq 0$ *y* f *no se anula en* A, *entonces* $\lim_{x \to x_0} (1/f)(x) = 1/l_0$, *donde* $(1/f)(x) = 1/f(x)$.

Teorema 13

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $b \in \mathbb{R}^m$. *Si* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, *donde* $f_i : A \to \mathbb{R}$, *para* $i \in 1, 2, \ldots, m$, *son las funciones componentes de* f, *entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *si y solo si* $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = b_i$, *para cada* $i \in 1, 2, \ldots, m$.

Teorema 13

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $b \in \mathbb{R}^m$. *Si* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, *donde* $f_i : A \to \mathbb{R}$, *para* $i \in 1, 2, \ldots, m$, *son las funciones componentes de* f, *entonces* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *si y solo si* $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = b_i$, *para cada* $i \in 1, 2, \ldots, m$.

Teorema 14

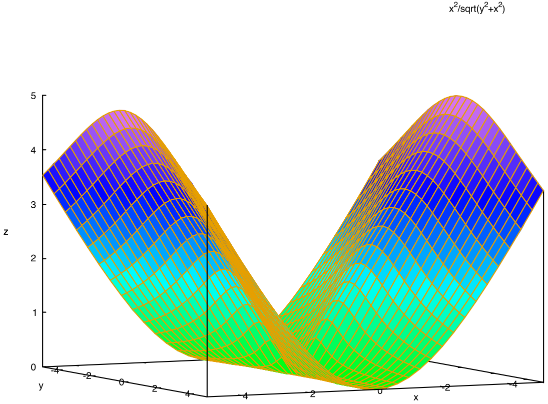
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Si* $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, *donde* $f_i : A \to \mathbb{R}$, *para* $i \in 1, 2, \ldots, m$, *son las funciones componentes de* f, *entonces* f *es continua en* x_0 *si y solo si cada una de las funciones* $f_1, f_2, \ldots f_m$ *es continua en* x_0.

Calcular los siguientes límites

1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Calcular los siguientes límites

1 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

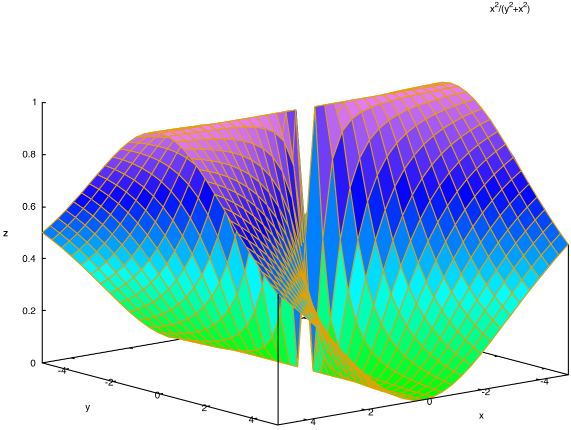


Calcular los siguientes límites

2 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Calcular los siguientes límites

2 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$



Definición 15

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots \partial f/\partial x_n$, las ***derivadas parciales*** *de f con respecto a la primera, segunda, . . . , n-ésima variable son las funciones con valores reales, de n variables, las cuales, en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$, están definidas por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

o

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

si existen los límites, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ y e_j es el j-ésimo vector de la base usual, definido por $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con 1 en el

Diferenciación

Ejemplos

1. Si $f(x,y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

Diferenciación

Ejemplos

1. Si $f(x, y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
2. Si $z = \cos(xy) + x\cos(y) = f(x, y)$, hallar las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$

Diferenciación

Ejemplos

1. Si $f(x,y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
2. Si $z = \cos(xy) + x\cos(y) = f(x,y)$, hallar las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$
3. Hallar $\partial f/\partial y$, si $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^3}}$.

Diferenciación

Ejemplos

1. Si $f(x,y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.
2. Si $z = \cos(xy) + x\cos(y) = f(x,y)$, hallar las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$
3. Hallar $\partial f/\partial y$, si $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^3}}$.
4. Si $f(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ em el punto $(0,0)$.

Definición 16

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que f es ***diferenciable en*** (x_0, y_o)*, si* $\partial f/\partial x$ *y* $\partial f/\partial y$ *existen en* (x_0, y_0) *y si tiende a cero la siguiente expresión, cuando* (x, y) *tiende a* (x_0, y_0).

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|}$$

Definición 17

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\hat{x}_0 = (x_0, y_0)$. EL plano de mathbbR^3 definido mediante la siguiente ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

*se llama **palno tangente** a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).*

Definición 18

Sean U *un conjunto abierto en* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una función dada. Decimos que* f *es* ***diferenciable*** *en* $x_0 \in U$*, si existen las derivadas parciales de* f *en* x_0 *y si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathbf{T}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(x_0)$ *es la matriz cuyos elementos matriciales son* $\partial f_i / \partial x_j$ *evaluadas en* x_0 *y* $\mathbf{T}(x - x_0)$ *es el producto de* T *con* $(x - x_0)$ *(considerado como un vector columna). Llamamos a* $\mathbf{T}$ ***derivada*** *de* f *en* x_0*.*

Definición 18

Sean U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es ***diferenciable*** *en $x_0 \in U$, si existen las derivadas parciales de f en x_0 y si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - \mathbf{T}(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(x_0)$ es la matriz cuyos elementos matriciales son $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en x_0 y $\mathbf{T}(x - x_0)$ es el producto de T con $(x - x_0)$ (considerado como un vector columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ ***derivada*** *de f en x_0.*

Denotaremos la derivada $\mathbf{T}$ de f en x_0 por $\mathbf{D}f(x_0)$.

Calcular la matriz de derivadas parciales para las siguientes funciones

1. $f(x, y) = (\mathrm{e}^{x^2+y} + y, yx^3)$

Calcular la matriz de derivadas parciales para las siguientes funciones

1. $f(x,y) = (\mathrm{e}^{x^2+y} + y, yx^3)$
2. $f(x,y,z) = (z\,\mathrm{sen}(xy), \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^3}, -y\mathrm{e}^z)$

Calcular la matriz de derivadas parciales para las siguientes funciones

1. $f(x, y) = (\mathrm{e}^{x^2+y} + y, yx^3)$
2. $f(x, y, z) = (z\mathrm{sen}(xy), \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^3}, -y\mathrm{e}^z)$
3. $f(x, y) = (x^3 - \tan xy, \cos(x)\mathrm{sen}(y), x^4y^3)$.

Definición 19

Considerar el caso especial $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Aquí* $\mathbf{D}f(x)$ *es una matriz de* $1 \times n$*:*

$$\mathbf{D}f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right].$$

Formamos el correspondiente vector $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, *llamado el* ***gradiente*** *de* f *y denotado por grad*f *o* $\bigtriangledown f$

Definición 19

Considerar el caso especial $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Aquí* $\mathbf{D}f(x)$ *es una matriz de* $1 \times n$*:*

$$\mathbf{D}f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

Formamos el correspondiente vector $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, *llamado el* ***gradiente*** *de* f *y denotado por* $grad f$ *o* $\bigtriangledown f$

Para el caso particular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\bigtriangledown f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}.$$

Definición 19

Considerar el caso especial $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Aquí $\mathbf{D}f(x)$ es una matriz de $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

*Formamos el correspondiente vector $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, llamado el **gradiente** de f y denotado por grad$f$ o $\bigtriangledown f$*

Para el caso particular de $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\bigtriangledown f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}.$$

y para $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\bigtriangledown f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}.$$

Calcular el gradiente de las siguientes funciones

1. $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{x^2+y^2}$

Calcular el gradiente de las siguientes funciones

1. $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{x^2+y^2}$
2. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^4 + \mathrm{e}^{xy^3}}$

Calcular el gradiente de las siguientes funciones

1. $f(x, y, z) = z\mathrm{e}^{x^2+y^2}$
2. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^4 + \mathrm{e}^{xy^3}}$
3. $f(x, y, z) = \tan(\frac{x^2y^3}{z^3-5})$

Lema 20

Sea $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal con matriz* $[a_{ij}]$ *de modo que* $\mathbf{A}x$ *tenga componentes* $y_i = \sum a_{ij}x_j$. *Sea* $M = \left(\sum a_{ij}^2\right)^{1/2}$. *Entonces*

$$\|\mathbf{A}x\| \leqslant M\|x\|.$$

Lema 20

Sea $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal con matriz* $[a_{ij}]$ *de modo que* $\mathbf{A}x$ *tenga componentes* $y_i = \sum a_{ij} x_j$. *Sea* $M = \left(\sum a_{ij}^2\right)^{1/2}$. *Entonces*

$$\|\mathbf{A}x\| \leqslant M\|x\|.$$

Lema 21

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $x_0 \in U$. *Entonces existen* $M_1 \in \mathbb{R} y \delta_1 > 0$ *tal que* $\|f(x) - f(x_0)\| < M_1\|x - x_0\|$, *si* $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ *y* $x \neq x_0$.

Lema 20

Sea $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una transformación lineal con matriz* $[a_{ij}]$ *de modo que* $\mathbf{A}x$ *tenga componentes* $y_i = \sum a_{ij}x_j$. *Sea* $M = \left(\sum a_{ij}^2\right)^{1/2}$. *Entonces*

$$\|\mathbf{A}x\| \leqslant M\|x\|.$$

Lema 21

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $x_0 \in U$. *Entonces existen* $M_1 \in \mathbb{R} y \delta_1 > 0$ *tal que* $\|f(x) - f(x_0)\| < M_1\|x - x_0\|$, *si* $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ *y* $x \neq x_0$.

Teorema 22

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $x_0 \in U$. *Entonces* f *es continua en* x_0.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Teorema 23

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Supongamos que existen todas las derivadas parciales* $\partial f_i / \partial x_j$ *de* f *y son continuas en una vecindad de un punto* $x \in U$. *Entonces* f *es diferenciable en* x.

Propiedades de la derivada

Teorema 24

1. ***Regla del múltiplo constante*** *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* x_0 *y sea* c *un número real* c *un número real. Entonces* $h(x) = cf(x)$ *es diferenciable en* x_0 *y*
$$\mathbf{D}h(x_0) = c\mathbf{D}f(x_0) \text{ (igualdad de matrices)}$$
2. ***Regla de la suma*** *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* x_0*. Entonces* $h(x) = f(x) + g(x)$ *es diferenciable en* x_0 *y*
$$\mathbf{D}h(x_0) = \mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0) \text{ (suma de matrices)}$$
3. ***Regla del producto*** *Sean* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *y* $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* x_0*. Entonces* $h(x) = f(x)g(x)$ *es diferenciable en* x_0 *y*
$$\mathbf{D}h(x_0) = g(x_0)\mathbf{D}f(x_0) + f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)$$

Propiedades de la derivada

4 **Regla del cociente** Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en x_0. Si g nunca es cero en U, entonces $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es diferenciable en x_0 y

$$\mathbf{D}h(x_0) = \frac{g(x_0)\mathbf{D}f(x_0) - f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Teorema 25 (Regla de la Cadena)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Sean $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones dadas tales que $g(U) \subset V$. Supongamos que g es diferenciable en x_0 y que f es diferenciable en $y_0 = g(x_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en x_0 y

$$\mathbf{D}(f \circ g)(x_0) = \mathbf{D}f(y_0)\mathbf{D}g(x_0).$$

Bibliografía

1 Courant, R. y John, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, Vol. I, Interscience Publishers, 1965.

2 Haaser, La Salle, Sullivan. *Análisis Matemático Curso de Introducción*, vol. I, Ed. Trillas, 1980.

3 Marsden, J. E. y Tromba, A. J. Cálculo Vectorial, Ed. Pearson Educación, España, 2004.

4 Apostol, T. *Calculus*, vol. II, Ed. Reverté, 1995.

5 Sagan, H. *Advanced Calculus*, Ed. Houghton Mifflin Company, 1974.